Обложка
ищется

Обложка
пщется

Второй серіи IV-го семестра № 8—9.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

№ 644 — 645.

Электроны и теплота.

О. В. Ричардсона.

Читано въ Королевскомъ Институтѣ въ Лондонѣ 7 мая 1915 г.

(Переводъ съ англійскаго).

Если нагрѣть наэлектризованное тѣло, то оно теряетъ способность удерживать электрическій зарядъ. Зарядъ стекаетъ съ его поверхности. Это явленіе не ново. Еще двѣсти лѣтъ тому назадъ было извѣстно, что твердыя тѣла, раскаленныя на воздухѣ, могутъ разряжать электроскопъ. Такъ, напримѣръ, вы видите, что электроскопъ разряжается сейчасъ же, какъ только я приближаю къ нему накаленные до-красна щипцы изъ печки на лекціонномъ столѣ. Эти явленія вызываются испусканіемъ іоновъ накаленными твердыми тѣлами. Напримѣръ, если электроскопъ заряженъ отрицательно, онъ притягиваетъ положительные іоны отъ накаленныхъ щипцовъ и такимъ образомъ разряжается.

Тѣла, нагрѣваемыя на воздухѣ, при низкихъ температурахъ испускаютъ большей частью только положительные іоны. При достаточно высокихъ температурахъ испускаются одновременно іоны обоихъ знаковъ. Мы можемъ показать это съ помощью простого опыта, при которомъ накаленное тѣло представляетъ собой петлю изъ платиновой проволочки и само же служитъ электроскопомъ. Когда къ петлѣ приближаютъ заряженный стержень, на ней индуцируется разноименный зарядъ, и петля отклоняется вслѣдствіе электростатическаго притяженія стержня. Если петля не нагрѣта, то притяженіе наблюдается при любомъ знакѣ заряда стержня. При темно-красномъ каленіи петля можетъ отклоняться только положительно заряженнымъ стержнемъ. Когда къ ней приближаютъ отрицательно заряженный стержень, то, благодаря испусканію положительныхъ іоновъ петлей, индуктируемый въ ней положительный зарядъ сейчасъ же уходитъ. Поэтому проволока не въ состояніи удержать положительный зарядъ, и отрицательно заряженный стержень, такимъ образомъ, не можетъ вызвать отклоненія петли. При очень высокихъ температурахъ мы видимъ, что петля не отклоняется, каковъ бы ни былъ зарядъ на стержнѣ. Проволока теперь выдѣляетъ какъ положительные, такъ и отрицательные іоны и потому не можетъ удерживать ни положительнаго, ни отрицательнаго заряда.

Если изслѣдовать эти явленія не на воздухѣ при атмосферномъ давленіи, а въ безвоздушномъ пространствѣ, то окажется, что испусканіе положительныхъ іоновъ постепенно прекращается по мѣрѣ нагрѣванія, такъ что проволока хорошо прокаленная въ пустотѣ испускаетъ въ значительномъ количествѣ только отрицательные іоны. Такъ, если мы повторимъ послѣдній опытъ съ лампочкой накаливанія, въ которой нить не закрѣплена неподвижно, то увидимъ, что петля притягивается отрицательно заряженнымъ стержнемъ, но не притягивается положительно заряженнымъ. Явленіе здѣсь какъ разъ обратно тому, которое мы наблюдаемъ на проволокѣ при темно-красномъ каленіи въ воздухѣ.

Теперь разсмотримъ природу іоновъ, несущихъ эти термоіоническіе токи (я взялъ на себя смѣлость ввести этотъ терминъ для токовъ, идущихъ съ поверхности накаленныхъ тѣлъ, какъ описано выше). Какъ хорошо извѣстно, отрицательные электроны, играющіе столь важную роль въ физическихъ явленіяхъ, очень легко отклоняются несильнымъ магнитнымъ полемъ, тогда какъ іоны величиною въ атомъ или больше не отклоняются. Можно слѣдующимъ образомъ примѣнить это испытаніе къ іонамъ, испускаемымъ горячими тѣлами. Въ вертикальномъ электрическомъ полѣ помѣщена эвакуированная трубка съ горизонтальной накаленной проволокой. Электрическое поле расположено такъ, что оно притягиваетъ отрицательные іоны, испускаемые проволокой, къ надлежащему электроду, откуда они текутъ черезъ гальванометръ; отклоненіе стрѣлки записывается пятномъ на экранѣ. Около трубки помѣщенъ электромагнитъ, такимъ образомъ, что при возбужденіи его возникаетъ горизонтальное магнитное поле, которое стремится закрутить пути іоновъ. Если приведемъ въ дѣйствіе электромагнитъ, то увидимъ, что токъ сразу падаетъ до малой величины, показывая, что магнитное поле закручиваетъ пути іоновъ; эти послѣдніе теперь не могутъ достигнуть электрода. Носителями этого отрицательнаго разряда являются, дѣйствительно, электроны.

Здѣсь передъ нами вторая трубка, которая способна давать достаточно сильный положительный разрядъ. Если испытаемъ его описаннымъ способомъ съ помощью электромагнита, то окажется, что магнитное поле совершенно не вліяетъ на термоіоническій токъ. Въ самомъ дѣлѣ, положительные іоны обладаютъ гораздо большей массой, чѣмъ электроны; тщательно поставленные опыты доказали, что эти іоны представляютъ собой заряженные атомы.

Изъ этихъ опытовъ мы видимъ, что отрицательное излученіе характеризуется электронной природой носителей и его постоянствомъ въ пустотѣ. Для того, чтобы поддерживать эти токи, нѣтъ необходимости въ газообразной атмосферѣ. Такимъ образомъ, электроны возникаютъ изъ самого нагрѣтаго тѣла. Я полагаю, что это испусканіе представляетъ собой процессъ, весьма аналогичный испаренію. Сущность испаренія, напримѣръ, жидкости, заключается въ слѣдующемъ: съ повышеніемъ температуры молекулы пріобрѣтаютъ такое количество энергіи, что преодолѣваютъ силы, притягивающія ихъ къ жидкости, и превращаются въ свободныя молекулы пара. Какъ извѣстно, всѣ матеріальныя вещества содержатъ электроны, и потому вполнѣ возможно, что при достаточно высокой температурѣ электроны обнаруживаютъ такія же явленія, какъ и молекулы жидкости. Можно провести другую, нѣсколько болѣе точную аналогію: испусканіе электроновъ можно уподобить обратимой реакціи выдѣленія газа при разложеніи твердаго тѣла въ родѣ углекислой извести. Сходство этого процесса съ испареніемъ хорошо извѣстно химикамъ.

Сказанное подтверждается, если разсмотрѣть зависимость испусканія электроновъ отъ температуры нагрѣтаго тѣла. Это легко сдѣлать, окруживъ накаленную проволоку цилиндрическимъ электродомъ, задерживающимъ электроны, которые оттуда идутъ въ гальванометръ; отклоненіемъ этого послѣдняго измѣряется число электроновъ. Накаленную проволоку вводятъ въ одну изъ вѣтвей Уитстонова мостика, такъ что температура проволоки измѣряется по ея сопротивленію. Безчисленные опыты съ различными веществами показали, что это испусканіе возрастаетъ очень быстро съ повышеніемъ температуры, совершенно такъ же, какъ соотвѣтственная величина при испареніи. Это сходство, дѣйствительно, весьма велико. Можно считать, что скорость испусканія молекулъ съ поверхности испаряющейся жидкости пропорціональна упругости паровъ. Эта пропорціональность не вполнѣ точна, но для нашей цѣли достаточна. Если на вертикальной шкалѣ, нанесены значенія упругости водяныхъ паровъ, соотвѣтствующія температурамъ отъ 0° до 90°, отложеннымъ на горизонтальной шкалѣ, и термоіническіе токи платины соотвѣтствующіе температурамъ отъ 1000° С. до 1250° С., то всѣ точки лежатъ на одной и той же непрерывной кривой, въ предѣлахъ погрѣшности опыта. Чтобы обнаружить это совпаденіе, необходимо, конечно, въ этихъ двухъ случаяхъ наносить температуры на совершенно различныхъ шкалахъ, но указанное согласіе является простымъ доказательствомъ сходства законовъ, управляющихъ измѣненіемъ температуры въ обоихъ случаяхъ.

Были подвергнуты изслѣдованію многочисленные случаи испусканія электроновъ, и оказывалось всякій разъ, если только не было основанія подозрѣвать измѣненій въ химической природѣ испускающей поверхности, — что зависимость между токомъ i и абсолютной температурой T выражается очень простымъ уравненіемъ: $i = AT^{1/2}e^{-b/T}$, или $\log i - {}^1/_2 \log T = \log A - b/T$, гдѣ A и b суть постоянныя количества для каждаго вещества. Теорія, этого уравненія, показываетъ, что количество b очень мало отличается отъ удвоеннаго измѣненія энергіи, выраженнаго въ калоріяхъ, при испусканіи граммъ-молекулярнаго вѣса электроновъ. Продолжая аналогію съ испареніемъ, можно это количество назвать скрытой молекулярной теплотой испаренія электроновъ. Однако, я не намѣренъ сейчасъ останавливаться спеціально на теоріи этого уравненія; я желалъ бы лишь подчеркнуть то обстоятельство, что эта формула не есть только эмпирическій фактъ, охватывающій малую область температуры и тока. Новѣйшія изслѣдованія, произведенныя съ вольфрамомъ, показали, что формула выражаетъ полученные результаты въ предѣлахъ погрѣшности опыта, въ области температуры отъ 1050° до 2300°. При наиболѣе низкихъ температурахъ токъ былъ меньше одной милліонной микроампера на 1 *кв. см.*, и его приходилось измѣрять чувствительнымъ электрометромъ, тогда какъ при наивысшихъ температурахъ токи были порядка одного ампера на 1 *кв. см.*, и можно было измѣрять ихъ обыкновеннымъ амперметромъ. Такимъ образомъ, уравненіе сохраняетъ силу при излученіи одной изъ перемѣнныхъ отъ 1 до 10^{12}. Врядъ ли есть много физическихъ законовъ, которые могли бы выдержать столь строгое испытаніе.

Теперь обратимся къ нѣкоторымъ другимъ слѣдствіямъ гипотезы что испусканіе электроновъ аналогично испаренію. Какъ извѣстно, испареніе сопровождается охлажденіемъ жидкости, выдѣляющей пары, благодаря скрытой теплотѣ парообразованія. Точно такъ же проволока, выдѣляющая электроны, при этомъ охлаждается. Я надѣюсь, что мнѣ удастся показать вамъ это явленіе, хотя соотвѣтственное пониженіе температуры невелико и, чтобы обнаружить его, необходимо прибѣгнуть къ очень чувствительнымъ методамъ. Эта трубка содержитъ накаленную вольфрамовую проволоку, она включена въ одну изъ вѣтвей чувствительнаго Витстонова мостика и такимъ образомъ сама показываетъ свою температуру; малѣйшія измѣненія ея сопротивленія могутъ быть измѣрены. Проволока окружена отрицательно заряженнымъ электродомъ, такъ что термоіоническій токъ не можетъ итти. Если я обращу потенціалъ и вызову такимъ образомъ термоіоническій токъ, поддерживая постояннымъ токъ нагрѣванія, то мы увидимъ внезапное отклоненіе пятна гальванометра въ мостикѣ. Направленіе этого отклоненія соотвѣтствуетъ уменьшенію сопротивленія накаленной проволоки и, слѣдовательно, пониженію ея температуры. Подобнаго рода опытами мнѣ и проф. Куку (Cooke) удалось непосредственно измѣрить скрытую теплоту испаренія электроновъ.

Какъ при парообразованіи жидкость охлаждается, точно такъ же она нагрѣвается въ соотвѣтственной мѣрѣ, когда пары сгущаются. Дѣйствительно, одинъ изъ обычныхъ опытовъ, которые обычно продѣлываетъ всякій, занимающійся физикой, состоитъ въ измѣреніи скрытой теплоты параобразованія, для чего въ воду пускаютъ струю горячаго пара. Совершенно аналогичный опытъ можно произвести съ электронами. На тонкую металлическую полоску, для которой желаютъ найти скрытую теплоту сгущенія электроновъ, направляютъ сильный токъ электроновъ съ накаленой проволоки. Холодная полоска включена въ вѣтвь чувствительнаго Витстонова мостика и такимъ образомъ, сама можетъ показывать свою температуру. Когда накаленная проволока заряжена положительно, къ полоскѣ нѣтъ тока электроновъ, и мостикъ при этихъ условіяхъ находится въ равновѣсіи. Затѣмъ проволоку заряжаютъ отрицательно такъ, чтобы къ полоскѣ текли электроны. Вслѣдствіе сгущенія электроновъ освобождается теплота, благодаря чему возрастаетъ сопротивленіе; приращеніе сопротивленія опредѣляется измѣреніемъ. При этихъ опытахъ только часть наблюдаемаго измѣненія сопротивленія вызывается разсматриваемымъ сейчасъ явленіемъ; другая же часть вызвана кинетической энергіей, сообщаемой электронамъ вспомогательнымъ полемъ, при помощи котораго ихъ гонятъ съ горячей проволоки на полоску. Эту послѣднюю часть, впрочемъ, легко опредѣлить и вычесть.

Мы сейчасъ указали три независимыхъ метода для нахожденія значеній скрытой теплоты испусканія электроновъ. Разсмотримъ теперь, въ какой мѣрѣ согласуются между собой самыя послѣднія и наиболѣе точныя значенія, полученныя по этимъ методамъ. Въ слѣдующей таблицѣ мы приводимъ найденныя числа и рядомъ имена отвѣтственныхъ за нихъ авторовъ.

Значенія скрытыхъ теплотъ испусканія, приведенныя къ эквивалентнымъ температурамъ.

1) Изъ измѣненія температуры въ зависимости отъ степени испусканія:

Вольфрамъ (Лангмуиръ, Langmuir) $10 \cdot 5 \times 10^4 - 11 \cdot 1 \times 10^4$ калорій.

„ (К. К. Смитъ, К. К. Smith) . . . . . $10 \cdot 94 \times 10^4$ „

Платина (разные) . . . . $12 \times 10^4 - 16 \times 10^4$ „

2) Изъ охлажденія при испусканіи:

Вольфрамъ (Кукъ и Ричардсонъ) . . . . $11 \cdot 24 \times 10^4$ „

„ (Лестеръ, Lester) . . . . $11 \cdot 04 \times 10^4$ „

Платина (Венельтъ, Wehnelt и Либрейхъ, Liebreich) $13 \cdot 9 \times 10^4 - 14 \cdot 5 \times 10^4$ „

3) Изъ нагрѣванія при сгущеніи:

Платина (Ричардсонъ и Кукъ) . . . . $13 \cdot 5 \times 10^4$ „

Къ несчастью, значеніе, которое давала бы платина въ пустотѣ при первомъ методѣ, еще не установлено точно вслѣдствіе усложненій, обусловливаемыхъ газообразными примѣсями. Въ остальномъ согласіе между различными методами весьма удовлетворительно.

Мы теперь приходимъ къ весьма интересному вопросу о скорости и кинетической энергіи этихъ электроновъ при ихъ испусканіи. То обстоятельство, что они заряжены электрически, позволяетъ намъ получить значительно больше данныхъ относительно ихъ скоростей испусканія, чѣмъ въ соотвѣтственомъ случаѣ испусканія обыкновенныхъ молекулъ. Примѣняя внѣшнее электрическое поле, мы можемъ влiять на движенiе испускаемыхъ молекулъ, и точная природа дѣйствія, производимаго полемъ, зависитъ отъ скорости, съ которою электроны выбрасываются накаленнымъ тѣломъ. Очевидно, что мы не располагаемъ подобнымъ способомъ вліянія на движенiе обыкновенныхъ молекулъ.

Опишемъ теперь одинъ изъ опытовъ, въ которыхъ эти принципы примѣняются для анализа скоростей испусканія. Испускающей накаленной поверхностью служитъ узкая платиновая полоска, нагрѣваемая токомъ и лежащая въ центрѣ гораздо большей металлической пластинки. Верхнія поверхности полоски и пластинки соединены между собой и поддерживаются при одномъ потенціалѣ. Вертикально надъ этой нижней пластинкой и на небольшомъ разстояніи отъ нея находится параллельная металлическая пластинка, соединенная съ изолированными квадрантами электрометра. При помощи надлежащаго приспособленія можно поддерживать нужную разность потенціаловъ между обѣими пластинками такъ, чтобы препятствовать движенію электроновъ отъ полоски къ верхней пластинкѣ. Понятно, если электроны при испусканіи не имѣютъ никакой скорости, то сколь угодно слабое замедляющее поле въ состояніи воспрепятствовать электронамъ достигнуть верхней пластинки и зарядить электрометръ. Если, съ другой стороны, электроны выбрасываются съ опредѣленной составляющей скоростью перпендикулярно къ полоскѣ, то они достигнутъ верхней пластинки при условіи, что ихъ кинетическая энергія превышаетъ работу, необходимую для преодолѣнія противодѣйствующей разности потенціаловъ. Такимъ образомъ, если электроны при испусканіи не находятся въ покоѣ, то они вызываютъ токи, которые могутъ итти противъ приложенной электродвижущей силы, если она не слишкомъ велика. Здѣсь вы видите аппаратъ, который въ общихъ чертахъ сходенъ съ только-что описаннымъ; съ его помощью я могу показать вамъ присутствіе этихъ токовъ, идущихъ противъ приложенной электродвижущей силы. Платиновая полоска замѣнена очень короткой вольфрамовой нитью, верхняя пластинка — окружающимъ цилиндромъ, а электрометръ — гальванометромъ. Этотъ аппаратъ, такимъ образомъ, отличается отъ раньше описаннаго только въ деталяхъ, но принципъ остается тотъ же. Вы видите, что токъ имѣетъ наибольшую силу, когда противодѣйствующая разность потенціаловъ равна нулю, и падаетъ равномѣрно и быстро по мѣрѣ возрастанія разности потенціаловъ. Путемъ увеличенія температуры я могу вызвать значительный токъ, не смотря на противодѣйствующую разность потенціаловъ въ одинъ вольтъ.

То обстоятельство, что токъ убываетъ непрерывно съ возрастаніемъ противодѣйствующаго вольтажа, показываетъ, что электроны испускаются не съ одной только скоростью, но съ различными скоростями, варіирующими въ широкихъ предѣлахъ. Тщательные опыты въ этомъ направленіи дали намъ возможность открыть, какая часть электроновъ извергается со скоростями, находящимися въ нѣкоторыхъ извѣстныхъ границахъ, и опредѣлить законъ распредѣленія скорости между испускаемыми электронами.

Больше пятидесяти лѣтъ тому назадъ Максвеллъ (Maxwell) на основаніи абстрактныхъ теоретическихъ соображеній пришелъ къ заключенію, что скорости молекулъ газа или пара не должны быть всѣ равны между собой, но извѣстнымъ образомъ распредѣлены около нѣкотораго средняго значенія. Этотъ законъ, извѣстный подъ именемъ закона Максвелля о распредѣленіи скорости, до нѣкоторой степени сходенъ съ закономъ, по которому располагаются слѣды пуль на мишени въ различныхъ разстояніяхъ отъ точки прицѣла. Теоретическія соображенія, побудившія Максвелля установить этотъ законъ для газовъ, примѣнимы въ равной мѣрѣ къ электроннымъ атмосферамъ около раскаленныхъ тѣлъ. Разсмотримъ, согласуются ли результаты нашихъ опытовъ съ предсказаніями Максвелля или нѣтъ. Если законъ распредѣленія нормальной составляющей скорости для испускаемыхъ электроновъ совпадаетъ съ закономъ Максвелля, то необходимо и (достаточно), чтобы токи i_1 и i_2, идущіе соотвѣтственно противъ потенціаловъ v_1 и v_2, удовлетворяли уравненію:

$$\log i_1/i_2 = \frac{Q}{RT}(v_1 - v_2),$$

гдѣ R есть постоянная въ уравненіи совершенныхъ газовъ $pv = RT$, а Q — количество электричества, выдѣляющее въ водяномъ вольтаметрѣ половину кубическаго сантиметра водорода при 0° С. и 760 *мм.* Оказалось, что требованія этой формулы вполнѣ удовлетворяются результатами опытовъ. Такъ, логариѳмы отношеній токовъ оказались въ точности пропорціональными разностямъ соотвѣтственныхъ противодѣйствующихъ потенціаловъ при данной температурѣ. Съ другой стороны, такъ какъ Q есть хорошо извѣстная физическая постоянная, а значенія T были опредѣлены во время опытовъ, то результатами этихъ послѣднихъ можно воспользоваться, чтобы найти значеніе постоянной R газовъ. Въ этомъ направленіи были сдѣланы восемь опытовъ, по возможности въ самыхъ различныхъ условіяхъ; полученныя значенія R колеблются между предѣлами 3.08×10^3 и 4.46×10^3 эрговъ на 1 *кб. см.* на градусъ Ц. Довольно большія колебанія, обнаруживаемыя этими значеніями, можно признать случайными, такъ что среднее значеніе должно быть гораздо болѣе точнымъ. Среднее изъ восьми найденныхъ значеній даетъ $R = 3.72 \times 10^3$, тогда какъ уравненіе газовъ даетъ $R = 3.711 \times 10^3$ въ тѣхъ же единицахъ.

Тотъ фактъ, что значеніе постоянной газовъ можетъ быть такимъ способомъ получено изъ чисто электрическихъ измѣреній, долженъ считаться замѣчательнымъ подтвержденіемъ общаго предложенія. Результаты этихъ опытовъ и другихъ подобнаго же рода, которыхъ мнѣ некогда описывать, показываютъ не только, что скорости электроновъ распредѣляются около нѣкоторой средней согласно закону М а к с-в е л л я, но также еще и то, что испускаемые электроны кинетически тождественны съ молекулами гипотетическаго газа съ равнымъ молекулярнымъ вѣсомъ при температурѣ накаленнаго металла. Эти опыты явились первымъ прямымъ экспериментальнымъ доказательствомъ Максвеллева закона распредѣленія скоростей. Хотя многія слѣдствія изъ этого закона были сдѣланы очевидными, благодаря прекраснымъ опытамъ П е р р е н а (Perrin) съ Броуновскимъ движеніемъ, я думаю, однако, что указанные выше опыты все еще остаются наиболѣе прямымъ экспериментальнымъ подтвержденіемъ этого закона.

Въ самое послѣднее время нѣкоторые экспериментаторы выступили съ возраженіями противъ всей моей точки зрѣнія о природѣ испусканія электроновъ накаленными тѣлами; они утверждаютъ, что это явленіе вызывается химическимъ взаимодѣйствіемъ накаленнаго тѣла и слѣдовъ присоединившихся къ нему примѣсей, которыя обыкновенно считаются газообразными. Я полагаю, что доводы въ пользу этой послѣдней гипотезы, вообще говоря, слишкомъ переоцѣнивались, но было бы слишкомъ долго разбирать этотъ вопросъ съ той полнотой, которой онъ требуетъ. Я ограничусь поэтому лишь тѣмъ, что обращу ваше вниманіе на нѣкоторые опыты съ вольфрамовой нитью, доказывающіе, что лишь незначительная часть излученія у этого вещества можетъ быть приписана химическому дѣйствію, если только это послѣднее, вообще, играетъ здѣсь какую-нибудь роль.

Вольфрамъ особенно пригоденъ для этихъ опытовъ вслѣдствіе его тугоплавкости, Его можно долгое время накаливать въ пустотѣ при температурахъ столь высокихъ, что всѣ извѣстныя намъ примѣси должны изъ него улетучиться. Предварительная обработка лампочекъ для опыта представляетъ кое-что новое и не безъинтересное. Гибкія вольфрамовыя нити спаиваютъ токомъ съ поддерживающими проволоками, приводящими токъ, въ атмосферѣ водорода. Закрѣпивъ лампочки, изъ нихъ выкачиваютъ воздухъ въ вакуумъ-печи (съ наружнымъ давленіемъ воздуха около 1 *см.*) при температурѣ въ 550 — 600° Ц. примѣрно въ теченіе сутокъ, пока выдѣленіе газа не станетъ весьма малымъ. Для выкачиванія примѣняется сперва насосъ Г е д е (Gaede), къ которому позже добавляютъ жидкій воздухъ и древесный уголъ. Въ конечныхъ стадіяхъ вольфрамъ накаливаютъ приблизительно до 3000° по абсолютной шкалѣ и, чтобы достигнуть наилучшихъ результатовъ, анодъ нагрѣваютъ, подвергая его интенсивной бомбардировкѣ электронами отъ накаленной проволоки. Этимъ способомъ получается такая степень чистоты отъ газообразныхъ примѣсей, которая далеко оставляетъ за собой все, что можетъ быть достигнуто всякими другими способами.

Съ приготовленными такимъ образомъ лампочками я произвелъ одновременныя измѣренія, съ одной стороны, степени испусканія электроновъ, а, съ другой — либо измѣненіе давленія даннаго газа, либо же степень потери вещества нитью. Рядъ спеціальныхъ опытовъ далъ слѣдующія числа:

1) На каждую выдѣляемую молекулу газа число электроновъ, испускаемыхъ нитью, достигаетъ 260 000 000

2) При каждомъ ударѣ газовой молекулы о нить испускается 15 000 электроновъ; и

3) Исчезновеніе одного атома изъ нити вызываетъ каждый разъ испусканіе 984 000 электроновъ.

Размѣры этихъ чиселъ дѣлаютъ совершенно невѣроятнымъ предположеніе, что химическое дѣйствіе играетъ сколько-нибудь значительную роль при испусканіи. Съ другой стороны, масса электроновъ, теряемыхъ нитью, можетъ превысить массу вольфрама, теряемую за тотъ же промежутокъ; это доказываетъ, что испускаемые электроны доставляются не на счетъ вольфрама. Они должны, слѣдовательно притекать изъ внѣшнихъ точекъ цѣпи. Такимъ образомъ, эти опыты даютъ прямое доказательство, что носителями электрическаго тока въ металлахъ являются движущіеся электроны. Механизмъ проводимости металловъ съ каждымъ днемъ становится все болѣе таинственнымъ, но здѣсь передъ нами, во всякомъ случаѣ, фактъ, съ которымъ приходится считаться.

Можетъ быть, наиболѣе убѣдителенъ для васъ будетъ слѣдующій простой опытъ, показывающій, что эти электронные токи отъ вольфрама въ весьма разрѣженномъ пространствѣ представляютъ собой отнюдь не нѣчто миніатюрное, для обнаруженія чего требовались бы специальные аппараты, но, напротивъ, при высокихъ температурахъ достигаютъ столь большихъ размѣровъ, что заслуживаютъ вниманія практическаго электротехника. Здѣсь у меня вольфрамовая лампа съ нитью въ 14 *мм.* длиною и около 3 *кв. мм.* въ поперечникѣ; она соединена послѣдовательно съ амперметромъ, сопротивленіемъ, батареей и вторымъ амперметромъ. Приборы расположены въ этомъ именно порядкѣ, такъ что съ каждаго конца лампы находится по амперметру. Кромѣ того, здѣсь есть боковая вѣтвь отъ цилиндрическаго электрода лампы; эту вѣтвь можно приключить либо черезъ милліамперметръ, либо же черезъ электрическій звонокъ, къ положительному концу батареи. Въ этой боковой вѣтви нѣтъ никакого вспомогательнаго вольтажа. Когда я пускаю токъ, вы видите, что амперметры даютъ различныя показанія, а именно, съ одного конца въ нить входитъ болѣе сильный токъ, чѣмъ выходитъ изъ нея съ другого конца. Разность равна, дѣйствительно, электронному току, входящему въ проволоку сбоку, и отсчитывается на милліамперметрѣ. Тѣ изъ васъ, которымъ инструментъ не виденъ, слышатъ во всякомъ случаѣ электрическій звонокъ, когда я пропускаю черезъ него токъ электроновъ. Съ помощью лампы, которая была нѣсколько болѣе чѣмъ эта, приспособлена для данной цѣли, я обнаружилъ токъ въ 0,7 амперъ у одного конца, въ 0,45 — у другого, и въ 0,25 — въ боковой цѣпи. Насколько я могу судить по своему опыту, единственнымъ предѣломъ для размѣровъ этихъ электронныхъ токовъ является та сила тока, при которой плавится нить, конечно, если только требуемый для дѣйствія вольтажъ достижимъ.

Первая глава изъ элементарной теоріи чиселъ.

А. Обри.

(Переводъ съ французскаго).

(*Продолженіе* *).

9. Пользованіе ирраціональностями. Большое число формулъ легко обобщается путемъ подстановокъ съ ирраціональными коэффиціентами. Напримѣръ, замѣняя въ формулѣ (10) b черезъ $b\sqrt{k}$, получимъ (см. также упражненіе № 7):

$$(a^2+kb^2)^2=(a^2-kb^2)^2+k\,.\,(2ab)^2. \tag{19}$$

Но можно получить гораздо болѣе интересные результаты. Эйлеръ первый замѣтилъ, что два выраженія вида $a+b\sqrt{k}$ (гдѣ k обозначаетъ число положительное и отрицательное) могутъ только тогда быть равны между собою, когда ихъ раціональныя части равны, точно такъ же какъ и коэффиціенты ираціональныхъ частей. Изъ этого онъ выводитъ, пользуясь формулой разложенія бинома, слѣдующую важную теорему: равенство $F(a+\sqrt{b})=A+B\sqrt{b}$, гдѣ F обозначаетъ цѣлую функцію, влечетъ за собой другое равенство $F(a-\sqrt{b})=$ $=A-B\sqrt{b}$ **). Изъ этой теоремы выводится много слѣдствій.

Слѣдствія. I. Изъ $(a+b\sqrt{k})\,(x+y\sqrt{k})=A+B\sqrt{k}$ слѣдуетъ $ax+kby=A$, $ay+bx=B$. Отсюда можно найти x и y.

II. Найти число, которое было бы точнымъ кубомъ и принадлежало бы въ то же время къ формѣ u^2+kv^2. (См. упражненіе 48).

III. Пусть $(a+b\sqrt{k})^n=A+B\sqrt{k}$ и, слѣдовательно, $(a-b\sqrt{k})^n=$ $=A-B\sqrt{k}$. Перемноживъ почленно оба равенства, получаемъ:

$$(a^2-kb^2)^n=A^2-kB^2.$$

---

*) См. „Вѣстникъ“ № 641 — 642.

**) Болѣе простое доказательство этой теоремы даетъ методъ совершенной индукціи. Положимъ $(a+\sqrt{b})^2=A+B\sqrt{b}$. Тогда $A=a^2+b$, $B=2a$ и, слѣдовательно, $(a-\sqrt{b})^2=A-B\sqrt{b}$. Съ другой стороны, изъ предложенія

$$(a\pm\sqrt{b})^k=\alpha\pm\beta\sqrt{b}$$

слѣдуетъ

$$(a\pm\sqrt{b})^{k+1}=(\alpha\pm\beta\sqrt{b})\,(a\pm\sqrt{b})=(a\alpha+b\beta)\pm(\alpha+a\beta)\sqrt{b}.$$

Слѣдовательно, предположеніе доказано.

Слѣдовательно, равенства:

$$F(a+b\sqrt{k})=\alpha+\beta\sqrt{k} \quad \text{и} \quad F(a^2-kb^2)=\alpha^2-k\beta^2,$$

гдѣ F обозначаетъ цѣлую функцію эквивалентны. (См. также упражненіе № 38).

IV. Пусть

$$(a+b\sqrt{-k})(\alpha+\beta\sqrt{-k})=A+B\sqrt{-k} \qquad (\alpha)$$

и, слѣдовательно,

$$(a-b\sqrt{-k})(\alpha-\beta\sqrt{-k})=A-B\sqrt{-k}.$$

Перемноживъ почленно оба равенства, получаемъ:

$$(a^2+kb^2)(\alpha^2+k\beta^2)=A^2+kB^2, \qquad (20)$$

т. е., произведеніе выраженій, принадлежащихъ къ формѣ x^2+ky^2, изоморфно (Goldbach).

Сопоставленіе равенствъ (α) и (20) даетъ намъ весьма важное тождество, которымъ мы обязаны Эйлеру (см. также упражненіе № 43),

$$(a^2+kb^2)(\alpha^2+k\beta^2)=(a\alpha-kb\beta)^2+k(a\beta+b\alpha)^2. \qquad (21)$$

Равенство (21) является обобщеніемъ равенства (8). Съ другой стороны она содержится въ равенствѣ (8), какъ частный случай, и получается, если замѣнить въ равенствѣ (8) c черезъ $b\sqrt{k}$, b черезъ α, d черезъ $\beta\sqrt{k}$.

Такъ какъ лѣвая часть равенства (21) не мѣняется при замѣнѣ b черезъ $-b$, то не мѣняется при этой замѣнѣ и правая. Слѣдовательно,

$$(a\alpha-kb\beta)^2+k(a\beta+b\alpha)^2=(a\alpha+kb\beta)^2+k(a\beta-b\alpha)^2. \qquad (22)$$

10. Употребленіе мнимыхъ величинъ. Къ аналогичнымъ результатамъ приводитъ насъ употребленіе мнимыхъ виличинъ. Очень употребительнымъ преобразованіемъ является замѣна a^2+b^2 черезъ произведеніе $(a+bi)(a-bi)$. Такимъ образомъ, можно, напримѣръ, получить тождество (10):

$$(a^2+b^2)^2=(a+bi)^2(a-bi)^2=(a^2+2abi-b^2)(a^2-2abi-b^2)=$$

$$=(a^2-b^2)^2-(2abi)^2. \quad \text{(Эйлеръ)}$$

Точно такъ же можно получить тождество (8), Fibonacci если замѣтить, что лѣвую часть его можно представить въ видѣ:

$$(a+bi)(c\pm di)(a-bi)(c\mp di)=(ac\mp bd\pm adi+bci)(ac\mp bd\mp adi-bci)=$$

$$=(ac\mp bd)^2-(bc\pm ad)^2\,.\,i^2. \quad \text{(Эйлеръ)}$$

Наконецъ, если мы положимъ въ формулѣ (7), по примѣру Mathews Collins'а:

$$a = \alpha + \beta i, \quad a' = \gamma + \delta i, \quad c = -\gamma + \delta i, \quad c' = \alpha - \beta i,$$

$$b = \alpha' + \beta' i, \quad b' = \gamma' + \delta' i, \quad d = -\gamma' + \delta' i, \quad d' = \alpha' - \beta' i,$$

то получимъ слѣдующее тождество Эйлера:

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + \delta'^2) = (\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta')^2 +$$
$$+ (\beta\alpha' - \beta'\alpha + \delta\gamma' - \delta'\gamma)^2 + (\alpha\gamma' - \beta\delta' - \alpha'\gamma + \beta'\delta)^2 + \qquad (23)$$
$$+ (\alpha\delta' + \beta\gamma' - \alpha'\delta - \beta'\gamma)^2,$$

которое показываетъ намъ, что произведенiе суммы четырехъ квадратовъ на сумму четырехъ квадратовъ является также суммой четырехъ квадратовъ. (См. также упражненiе № 15).

11. **Приложенiе геометрiи.** Ариѳмо-геометрическiй методъ имѣетъ, какъ и методъ ариѳмо-алгебраическiй, то неудобство, что онъ является методомъ не прямымъ. Къ тому же онъ еще меньше послѣдняго подходитъ къ изображенiю ариѳметическихъ отношенiй. Другимъ недостаткомъ его является то, что онъ пользуется фигурами, свойства которыхъ не всегда извѣстны, и относительно которыхъ часто бываетъ трудно сказать, даетъ ли ихъ примѣненiе выводы общаго характера или нѣтъ, а также, каковы предѣлы ихъ примѣненiя въ послѣднемъ случаѣ. Но онъ имѣетъ то преимущество, что даетъ синтетическое изображенiе данной совокупности свойствъ. Поэтому удобно пользоваться имъ при формулированiи предложенiй и веденiи доказательства. Бываетъ онъ полезенъ и при изслѣдованiяхъ, внушая иногда новыя мысли. Нѣтъ сомнѣнiя, что именно такъ смотрѣли на него старые математики, пользовавшiеся имъ преимущественно въ алгебрѣ.

Мы ограничимся разсмотрѣнiемъ четырехугольника Брахмагупты. Такъ называется вписанный четырехугольникъ, дiагонали котораго взаимно перпендикулярны. (См. упражненiя №№ 1, 2 и 3).

Обозначимъ черезъ O точку пересѣченiя дiагоналей такого четырехугольника, AC и BD. Стороны четырехугольника будутъ представлять цѣлыя числа, если мы выберемъ:

$$AO = a\alpha, \quad BO = b\alpha, \quad CO = b\beta, \quad DO = a\beta,$$

гдѣ a, b и α, β обозначаютъ катеты двухъ прямоугольныхъ треугольниковъ, которыхъ гипотенузы соотвѣтственно c и γ*). Дѣйствительно,

*) Брахмагупта разсматриваетъ четырехугольникъ, соотвѣтствующiй даннымъ $a = 3$, $b = 4$, $\alpha = 5$, $\beta = 12$. Слѣдовательно, у него

$$OA = 15, \quad OB = 20, \quad OC = 48, \quad OD = 36, \quad AB = 25, \quad BC = 52, \quad CD = 60, \quad AD = 39.$$

мы получаемъ тогда для сторонъ слѣдующія значенія:

$$AB = ac, \quad BC = b\gamma, \quad CD = \beta c, \quad AD = a\gamma.$$

Опуская далѣе, перпендикуляры OI, BE на сторону CD, получаемъ:

$$OI = \frac{DO \, . \, CO}{CD} = \frac{ab\beta}{c}$$

и, слѣдовательно,

$$BE = \frac{b}{c}(a\beta + b\alpha), \quad CE = \frac{b}{c}(b\beta - a\alpha).$$

2) Изъ очевиднаго равенства $BO^2 + CO^2 = BE^2 + CE^2$ слѣдуетъ непосредственно тождество Fibonacci, который, весьма вѣроятно, именно такимъ путемъ пришелъ къ нему, если только оно не было найдено уже самимъ Брахмагуптой.

3) Пусть теперь γ обозначаетъ число не цѣлое, а ирраціональное, $\sqrt{C}$. Мы можемъ найти новое рѣшеніе уравненія $x^2 + y^2 = C$, одно рѣшеніе котораго, $\alpha^2 + \beta^2 = C$, намъ извѣстно, слѣдующимъ образомъ. Построимъ треугольникъ, стороны котораго $BO = \alpha$, $CO = \beta$, $BC = \gamma$. Продолжимъ сторону BO на отрѣзокъ $DO = \frac{a\beta}{b}$, гдѣ a и b обозначаютъ катеты прямоугольнаго треугольника, гипотенуза котораго равна c, проведемъ затѣмъ линію CD и опустимъ на нее перпендикуляръ BE. Искомое рѣшеніе будетъ*):

$$x = CE = \frac{b\beta - a\alpha}{c}, \quad y = BE = \frac{a\beta + b\alpha}{c},$$

4) Пусть $a^2 - kb^2 = 1$, $\alpha^2 - k\beta^2 = C$. Тогда, какъ замѣтилъ уже Брахмагупта,

$$(kb\beta + a\alpha)^2 - k(a\beta + b\alpha)^2 = C.$$

Дѣйствительно, замѣняя въ 3) величины a, b, β и y черезъ ac, $bc\sqrt{-k}$, $\beta\sqrt{-k}$ и $y\sqrt{-k}$, получаемъ:

$$x = kb\beta + a\alpha, \quad y = a\beta + b\alpha,$$

какъ новое рѣшеніе уравненія $x^2 - ky^2 = C$.

5) Тождество Fibonacci можетъ быть получено способомъ еще болѣе простымъ, чѣмъ приведенный въ 2). Пусть намъ данъ прямоугольный треугольникъ ABC. Проведемъ черезъ вершину прямого угла какую-нибудь не пересѣкающую сторонъ треугольника прямую DE

*) См. Chasles, Ap. Hist., стр. 441, а также Journal de Liouville, 1837 г., стр. 37.

и опустимъ на нее перпендикуляры AD, CE. Обозначимъ отношеніе отрѣзка AD къ отрѣзку DB черезъ f/g. Изъ очевиднаго равенства:

$$(AD^2+DB^2)+(BE^2+EC^2)=(BD+BE)^2+(EC-AD)^2,$$

слѣдуетъ тогда

$$a^2+\left(\frac{fa}{g}\right)^2+\left(b^2+\frac{fb}{g}\right)^2=\left(b+\frac{fa}{g}\right)^2+\left(\frac{fb}{g}-a\right)^2$$

или

$$(a^2+b^2)\left(1+\frac{f^2}{g^2}\right)=\left(b+\frac{fa}{g}\right)^2+\left(\frac{fb}{g}-a\right)^2.$$

12. Сведеніе. Такъ со времени Ферма называется слѣдующій способъ доказательства невозможности извѣстныхъ предложеній. Предполагая извѣстное предложеніе вѣрнымъ для какихъ-нибудь цѣлыхъ и положительныхъ чиселъ, мы доказываемъ существованіе, при этомъ предположеніи, извѣстныхъ меньшихъ цѣлыхъ и положительныхъ чиселъ, для которыхъ данное предложеніе тоже вѣрно. Существованіе этихъ меньшихъ чиселъ влечетъ за собой существованіе другихъ еще меньшихъ цѣлыхъ и положительныхъ чиселъ, для которыхъ предложеніе все еще остается вѣрнымъ. Такъ какъ это разсужденіе можно повторить неограниченное число разъ, то получается противорѣчіе съ тѣмъ фактомъ, что существуетъ лишь конечное число цѣлыхъ и положительныхъ чиселъ, которыя меньше заданныхъ чиселъ.

Примѣръ. Площадь прямоугольнаго треугольника, стороны котораго представляютъ цѣлыя числа, не можетъ быть точнымъ квадратомъ. (Ферматъ). Приводимъ доказательство въ реконструкціи Эйлера.

Обозначимъ стороны треугольника черезъ f^2+g^2, $2fg$ и f^2-g^2, площадь черезъ A. Можно принять f и g взаимно простыми, такъ какъ въ противномъ случаѣ мы дѣлимъ f и g на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя и получаемъ новый треугольникъ, площадь котораго будетъ точнымъ квадратомъ тогда и только тогда, когда площадь первоначальнаго треугольника будетъ точнымъ квадратомъ. Изъ того, что f и g взаимно простыя числа, слѣдуетъ, что ни одно изъ нихъ не имѣетъ общихъ дѣлителей съ f^2-g^2. Слѣдовательно, $A=fg\,(f^2-g^2)$ можетъ равняться точному квадрату только тогда, когда каждое изъ чиселъ f, g и f^2-g^2 представляетъ собою точный квадратъ. Полагаемъ $f=\lambda^2$, $g=\mu^2$ и переходимъ къ разсмотрѣнію числа $f^2-g^2=$ $=\lambda^4-\mu^4$, которое также должно быть точнымъ квадратомъ.

Изъ того, что λ и μ взаимно простыя числа, слѣдуетъ, что числа $\lambda^2-\mu^2$ и $\lambda^2+\mu^2$ также взаимно простыя. Слѣдовательно $\lambda^4-\mu^4$ можетъ только тогда быть точнымъ квадратомъ, когда $\lambda^2-\mu^2$ и $\lambda^2+\mu^2$ являются, каждое въ отдѣльности, точными квадратами. Полагаемъ

$$\lambda^2+\mu^2=r^2,\quad \lambda^2-\mu^2=s^2$$

или

$$\mu^2+s^2=\lambda^2,\quad s^2+2\mu^2=r^2.$$

На основаніи послѣдняго равенства и принимая во вниманіе формулу (19), полагаемъ:

$$s = t^2 - 2u^2, \quad \mu = 2tu, \quad r = t^2 + 2u^2,$$

и слѣдовательно,

$$\lambda^2 = \mu^2 + s^2 = t^4 + 4u^4.$$

Мы получили такимъ образомъ, прямоугольный треугольникъ, стороны котораго, t^2, $2u^2$, λ, цѣлыя числа, а площадь, $A' = t^2u^2$ равна точному квадрату и въ то же время гораздо меньше площади перваго треугольника, такъ какъ

$$A = \lambda^2\mu^2(\lambda^4 - \mu^4) = 4t^2u^2(t^4 + 4u^4)(t^2 + 2u^2)^2(t^2 - 2u^2)^2 > A'.$$

Повторяя снова и снова это разсужденіе, получаемъ безконечный рядъ треугольниковъ, которыхъ площади, будучи цѣлыми числами, въ то же время образуютъ убывающій рядъ, что невозможно. (Другой примѣръ смотри „Enseignement Mathématique“, 1909 г., стр. 331).

УПРАЖНЕНІЯ[1]).

1. Вывести графическимъ путемъ формулы для $(a+b)(c+d)$, для $(a \pm b)^2$, для $(a+b)(a-b)$, для $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ (Евклидъ), а также для суммы ариѳметической прогрессіи.

2. Сумма первыхъ n нечетныхъ послѣдовательныхъ чиселъ является точнымъ квадратомъ, равно какъ и сумма двухъ послѣдовательныхъ треугольныхъ чиселъ*). Точный нечетный квадратъ равняется разности двухъ треугольныхъ чиселъ, а также восьмикратному треугольному числу, увеличенному единицей (пиѳагорейцы**). Доказать графическимъ путемъ.

3. Доказать геометрическимъ путемъ, что, если (a, b) есть рѣшеніе уравненія $x^2 - 2y^2 = n$, то $(2b + a, a + b)$ представляетъ рѣшеніе уравненія $x^2 - 2y^2 = -n$.

---

[1]) Въ настоящей статьѣ упражненія играютъ врядъ ли не первенствующую роль. Между тѣмъ въ оригиналѣ они не сопровождаются рѣшеніями. Поэтому переводчикъ, по соглашенію съ редакторомъ, нашелъ нужнымъ дать рѣшеніе каждаго уравненія.

Ред.

*) Треугольнымъ называется число, принадлежащее къ формѣ $\frac{x(x+1)}{2}$.

**) $(2n+1)^2 = \frac{(3n+1)(3n+2)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = 8 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 1.$

Построимъ равнобедренный прямоугольный треугольникъ ABC. Опустимъ на гипотенузу AC высоту BD и еще одинъ перпендикуляръ EF изъ какой-нибудь точки E на катетѣ BC. Положимъ $DF=b$, $FC=a$. Тогда

$$AF^2+FE^2=AB^2+BE^2$$

или

$$(2b+a)^2+a^2=2(a+b)^2+2b^2.$$

Этимъ предложеніемъ мы кажется обязаны платоникамъ, которые при помощи его, исходя изъ рѣшенія $a=3$, $b=2$ уравненія $x^2-2y^2=1$, находили все болѣе и болѣе близкія приближенія для ирраціональнаго числа $\sqrt{2}$.

4. Рѣшить уравненія:

$$1)\ Ax=By;\quad 2)\ xy=Az;\quad 3)\ xy=uv;\quad 4)\ x^2=yz;\quad 5)\ x^2=ay;$$

$$6)\ xyz=tuv;\quad 7)\ x^3=tuv;\quad 8)\ x^2y=u^2v.$$

1) Пусть A и B числа взаимно простыя. Полагаемъ $x=Ba$, $y=Aa$, гдѣ a какое угодно цѣлое число.

Пусть общій наибольшій дѣлитель A и B равенъ h. Полагаемъ $hx=Ba$, $hy=Aa$.

2) Пусть $A=ab$. Полагаемъ $z=\gamma\delta$, $x=a\gamma$, $y=b\delta$, γ и δ обозначаютъ какія-угодно цѣлыя числа.

Уравненіе имѣетъ столько рѣшеній, сколько оказывается способовъ разложенія A на двухъ сомножителей.

3) Полагаемъ $x=\alpha\beta$, $y=\gamma\delta$, $u=\alpha\gamma$, $v=\beta\delta$. α, β, γ, δ обозначаютъ какія-угодно цѣлыя числа.

4) Полагаемъ $x=\alpha\beta\gamma$, $y=\alpha^2\beta$, $z=\beta\gamma^2$.

5) Пусть $a=b^2c$. Полагаемъ $x=bca$, $y=ca^2$.

6) Полагаемъ $x=\alpha\beta$, $y=\gamma\delta$, $z=\varepsilon\varphi$, $t=\alpha\gamma$, $u=\beta\varepsilon$, $v=\delta\varphi$.

7) Полагаемъ $x=\alpha\beta\gamma$, $t=\alpha^2\beta$, $u=\beta^2\gamma$, $v=\gamma^2\varphi$.

8) Полагаемъ $x=\alpha\beta$, $y=\gamma^2\delta^2$, $u=\alpha\gamma$, $v=\beta^2\delta^2$ *).

5. Рѣшить уравненіе $xy+Ax+By=C$. Изъ уравненія слѣдуетъ

$$y=\frac{AB+C}{x+B}-A.$$

Пусть $AB+C=ab$. Полагаемъ $x=a-B$ либо $b-B$ и получаемъ два рѣшенія для каждаго возможнаго разложенія $AB+C$ на двухъ сомножителей (Эйлеръ).

---

*) Можно указать еще много такихъ упражненій. Напримѣръ, доказать слѣдующее предложеніе Коши (Cauchy): общее рѣшеніе уравненія $ax+by=cz$, гдѣ a, b и c попарно взаимно простыя числа, выражается формулами:

$$x=b\alpha-c\beta,\quad y=c\gamma-a\alpha,\quad z=b\gamma-a\beta.$$

6. Рѣшить уравненіе $x^2+y^2=z^2$. Полагаемъ $z=y+z'$, что даетъ намъ возможность элиминировать изъ уравненія одинъ квадратъ*). Получаемое при этомъ уравненіе $x^2=z'(2y+z')$ рѣшаемъ, положивъ:

$$x=tuv, \quad z'=t^2u, \quad 2y+z'=uv^2$$

или

$$2y=u(v^2-t^2), \quad 2z=u(v^2+t^2).$$

Мы снова получаемъ такимъ образомъ формулу (10) въ той нѣсколько обобщенной формѣ, въ которой она встрѣчается у Евклида. Въ формулѣ (10) $u=2$.

7. Рѣшить уравненіе $x^2-y^2=az^2$. Пусть $a=fg$. Полагаемъ

$$x+y=f\lambda^2, \quad x-y=g\mu^2$$

или

$$2x=f\lambda^2+g\mu^2, \quad 2y=f\lambda^2-g\mu^2, \quad z=\lambda\mu.$$

Получаемъ столько рѣшеній, сколько имѣется возможностей разложенія a на двухъ сомножителей (Лагранжъ).

8. Всякій точный кубъ равенъ разности двухъ послѣдовательныхъ треугольныхъ чиселъ (Ибнъ Алмаджди). Дѣйствительно,

$$x^3=\frac{x^3(x^3+1)}{2}-\frac{(x^3-1)x^3}{2}.$$

9. Всякое число, принадлежащее къ формѣ $x^2\pm x+1$, является суммой двухъ треугольныхъ чиселъ (de Roquigny). Всякое число вида $x^2\pm xy+y^2$ принадлежитъ въ то же время и къ формѣ z^2+3w^2 (Эйлеръ). (См. „L'Enseignement Mathématique", 1907 г., стр. 441).

Первое предложеніе слѣдуетъ изъ тождества:

$$x^2\pm x+1=\frac{(x\pm 1)(x\pm 2)}{2}+\frac{x(x\mp 1)}{2}.$$

Во второмъ предложеніи нужно различать два случая, смотря по тому, будутъ ли x и y равной или разной четности. Въ первомъ случаѣ

$$x^2\pm xy+y^2=\left(\frac{x\mp y}{2}\right)^2+3\left(\frac{x\pm y}{2}\right)^2.$$

---

*) Этимъ способомъ элиминированія квадрата мы обязаны Діофанту который, при рѣшеніи уравненія $x^2+ax+b=y^2$, полагаетъ лѣвую часть его равной $(x+z)^2$ и получаетъ тогда уравненіе $x=\frac{z^2-b}{a-2z}$. Подставляя затѣмъ послѣдовательно $z=1, 2, 3, \ldots$, онъ получаетъ безконечное число дробныхъ рѣшеній для x.

Во второмъ случаѣ пусть x будетъ четнымъ числомъ. Тогда

$$x^2 \pm xy + y^2 = \left(\frac{x}{2} \pm y\right)^2 + 3\left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

10. Никакое число вида $2(x^2+y^2+xy)$ не можетъ быть точнымъ квадратомъ (Ферма), равно какъ никакое изъ чиселъ $2x^2+3y^2$, $3x^2+7y^2$, $5x^2+7y^2$, $6x^2+7y^2$ (Эйлеръ).

Число a^2+b^2 дѣлится на 3, либо на 7, либо на 11, либо на 19, либо на 23,... только тогда, когда и a и b дѣлятся на соотвѣтственное число.

1) Пусть $x=2^m t$, $y=2^n u$, t и u нечетныя числа, $m \geqslant n \geqslant 0$. Тогда $2(x^2+xy+y^2)=2^{2n+1}v$, гдѣ v обозначаетъ нечетное число. Слѣдовательно, $2(x^2+xy+y^2)$ не можетъ быть точнымъ квадратомъ.

2) Пусть x и y будутъ числа взаимно простыя. Пусть, далѣе, $x=\dot{3}$. Тогда $2x^2+3y^2=3t$ (гдѣ t обозначаетъ число, не дѣлящееся на 3), что недопустимо для точнаго квадрата. Предположимъ поэтому, что x не дѣлится на 3. Въ такомъ случаѣ $2x^2+3y^2=\dot{3}+2$, что также недопустимо для точнаго квадрата. Аналогично идетъ доказательство для $3x^2+7y^2$, $5x^2+7y^2$, $6x^2+7y^2$.

3) Пусть a не дѣлится на 3, а b дѣлится. Тогда a^2+b^2 тоже не дѣлится на 3. Предположимъ поэтому, что ни a ни b не дѣлятся на 3. Тогда $a^2+b^2=\dot{3}+2$. Аналогично идетъ доказательство предложенія относительно дѣлимости на 7, на 11, на 19, на 23,...

11. Всякое число вида $2a^2-b^2$ принадлежитъ въ то же время къ формѣ x^2-2y^2. Всякое число вида $5a^2-b^2$ принадлежитъ въ то же время къ формѣ x^2-5y^2 (Лагранжъ). Вообще, вѣрно слѣдующее тождество Mathews Collins'а:

$$(f^2+g^2)g^2b^2-(g^2a)^2=[(f^2+g^2)b \pm fga]^2-(f^2+g^2)(ga \pm fb)^2.$$

Для доказательства послѣдняго тождества построимъ прямоугольный треугольникъ ABC. Пусть B вершина прямого угла, и пусть $\frac{AB}{BC}=\frac{f}{g}$. Опустимъ на гипотенузу AC высоту BD и еще одинъ перпендикуляръ EF изъ какой-нибудь точки E, расположенной на катетѣ BC. Положимъ $EF=a$, $DF=b$. Подставляя указанныя значенія въ очевидное равенство:

$$AF^2+FE^2=AB^2+BE^2,$$

получаемъ:

$$\frac{[(f^2+g^2)b+fga]^2}{g^4}+a^2=\frac{(f^2+g^2)(fb+ga)^2}{g^4}+\frac{(f^2+g^2)b^2}{g^2}.$$

Если принять затѣмъ во вниманіе, что изъ того, что лѣвая часть тождества Mathews Collins'а не мѣняется при замѣнѣ f черезъ $-f$, слѣдуетъ, что и правая часть не мѣняется при этой замѣнѣ, то получимъ полное доказательство указаннаго тождества.

Первое предложеніе соотвѣтствуетъ частному случаю $f=1$, $g=1$, второе предложеніе случаю $f=2$, $g=1$.

12. Произведеніе числа, принадлежащаго къ формѣ x^2+xy+y^2, на 2 даетъ сумму трехъ точныхъ квадратовъ; произведеніе квадрата такого числа на 2 даетъ сумму трехъ точныхъ четвертыхъ степеней (Catalan). То же самое вѣрно для числа вида $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ (Ed. Lucas).

Предложенія эти получаются изъ слѣдующихъ четырехъ тождествъ:

$$2(x^2+xy+y^2)=(x+y)^2+x^2+y^2,$$

$$2(x^2+xy+y^2)^2=(x+y)^4+x^4+y^4,$$

$$2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2,$$

$$2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)^2=(x-y)^4+(y-z)^4+(z-x)^4.$$

13. $a^{2n+1}\pm 1$ не дѣлится никогда на a^2-1. Дѣйствительно, частное отъ дѣленія $a^{2n+1}\pm 1$ на $a\pm 1$ можетъ быть представлено въ видѣ:

$$a(a\pm 1)(a^{2n-2}+a^{2n-4}+\cdots+1)+1.$$

14. Пусть $F=ax^2+2bxy+cy^2$. Полагая $x=\alpha x'+\beta y'$, $y=\gamma x'+\delta y'$ и подставляя эти значенія для x и y, получаемъ новую форму $F'=a'x'^2+2b'x'y'+c'y'^2$, гдѣ $b'^2-a'c'=$ $=(b^2-ac)(\alpha\delta-\beta\gamma)^2$. Всякое число, представляемое формой F', можетъ быть представлено также и формой F. Обратное имѣетъ мѣсто, когда $\alpha\delta-\beta\gamma=\pm 1$ (Лагранжъ).

Произведемъуказанную подстановку. Получаемъ:

$$F'=a(\alpha x'+\beta y')^2+2b(\alpha x'+\beta y')(\gamma x'+\delta y')+c(\gamma x'+\delta y')^2=$$

$$=a'x'^2+2b'x'y'+cy'^2,$$

и слѣдовательно,

$$a'=a\alpha^2+2b\alpha\gamma+c\gamma^2,$$

$$b'=a\alpha\beta+b(\alpha\delta+\beta\gamma)+c\gamma\delta,$$

$$c'=a\beta^2+2b\beta\delta+c\delta^2,$$

$$b'^2-a'c'=(b^2-ac)(\alpha\delta-\beta\gamma)^2.$$

Пусть форма F' представляетъ число n. Это значитъ, что при $x=\xi'$, $y=\eta'$, гдѣ ξ' и η' цѣлыя числа, $F'=n$. Тогда, при $x=\alpha\xi'+\beta\eta'$, $y=\gamma\xi'+\delta\eta'$, гдѣ $\alpha\xi'+\beta\eta'$ и $\gamma\xi'+\delta\eta'$ также цѣлыя числа, $F=n$. Слѣдовательно, F также представляетъ число n.

Обратно, пусть F представляетъ число n, и пусть при $x=\xi$, $y=\eta$, гдѣ ξ и η цѣлыя числа, $F=n$. Рѣшимъ уравненія $\xi=\alpha x'+\beta y'$ $\eta=\gamma x'+\delta y'$ относительно x' и y'. Получаемъ $x'=\dfrac{\delta\xi-\beta\eta}{\alpha\delta-\beta\gamma}$, $y'=\dfrac{\alpha\eta-\gamma\xi}{\alpha\delta-\beta\gamma}$. Эти значенія будутъ цѣлыя числа, когда $\alpha\delta-\beta\gamma=\pm 1$. При этихъ значеніяхъ $F'=n$. Слѣдовательно, F' также представляетъ число n.

15. 1) Полагая въ формулѣ (23) $\delta=\delta'=0$, находимъ, что произведеніе суммы трехъ квадратовъ на сумму трехъ квадратовъ является суммой четырехъ квадратовъ (Эйлеръ).

2) Примѣнить формулу (23) къ произведенію суммы четырехъ квадратовъ на $3=1^2+1^2+1^2+0$, на $4=1^2+1^2+1^2+1^2$, на $4=(-1)^2+1^2+1^2+1^2$, на $5=4+1+0+0$, на $6=4+1+1+0$, на $7=4+1+1+1$, на $10=4+4+1+1$, и т. д. Первыя три изъ получающихся при этомъ формулъ найдены Эйлеромъ, Коши и Якоби.

3) Лагранжъ нашелъ обобщеніе формулы (23), замѣнивъ въ ней β, γ, δ, β', γ', δ' черезъ $\beta\sqrt{k}$, $\gamma\sqrt{l}$, $\delta\sqrt{kl}$, $\beta'\sqrt{k}$, $\gamma'\sqrt{l}$, $\delta'\sqrt{kl}$, а именно:

$$(\alpha^2+k\beta^2+l\gamma^2+kl\delta^2)(\alpha'^2+k\beta'^2+l\gamma'^2+kl\delta'^2)=$$
$$=(\alpha\alpha'+k\beta\beta'+l\gamma\gamma'+kl\delta\delta')^2+k[\beta\alpha'-\beta'\alpha-l(\delta\gamma'-\delta'\gamma)]^2+$$
$$+l[\alpha\gamma'-\alpha'\gamma-k(\delta\beta'-\delta'\beta)]^2+kl(\alpha\delta'-\beta\gamma'-\alpha'\delta+\beta'\gamma)^2.$$

16. Пусть A равно произведенію нечетныхъ чиселъ a, a', a'',... Числа

$$\frac{A-1}{2} \quad\text{и}\quad \frac{a-1}{2}+\frac{a'-1}{2}+\frac{a''-1}{2}+\cdots$$

будутъ одинаковой четности. Числа

$$\frac{A^2-1}{8} \quad\text{и}\quad \frac{a^2-1}{8}+\frac{a'^2-1}{8}+\frac{a''^2-1}{8}+\cdots$$

также одинаковой четности (Гауссъ).

Первое предложеніе слѣдуетъ изъ того, что $A=\mathbf{4}+1$ или $\mathbf{4}-1$, смотря по тому, будетъ ли число его сомножителей вида $\mathbf{4}-1$ четное или нечетное.

Точно такъ же $A^2=\mathbf{16}+1$ или $\mathbf{16}+9$, смотря по тому, будетъ ли число сомножителей A, квадратъ которыхъ равенъ $\mathbf{16}+9$, четное или нечтное. Отсюда слѣдуетъ второе предложеніе.

17. Точная шестая степень принадлежитъ къ одной изъ формъ $\mathbf{7}+0,\ 1$; точная десятая степень къ одной изъ формъ $\mathbf{11}+0,\ 1$; точная двѣнадцатая степень

къ одной изъ формъ $13+0, 1$; точная шестнадцатая степень къ одной изъ формъ $17+0, 1$; и т. д.

Напримѣръ, точный квадратъ принадлежитъ къ одной изъ формъ $7+0, 1, 4, 2$; точная четвертая степень принадлежитъ соотвѣтственно къ формамъ $7+0, 1, 2, 4$; точная шестая степень къ формамъ $7+0, 1, 1, 1$.

18. Учетверенное треугольнаго числа не можетъ представлять собой треугольное число (de Roquigny).

Въ противномъ случаѣ можно было бы рѣшить уравненіе $x^2+x=4y^2+4y$ въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ. Между тѣмъ это уравненіе эквивалентно каждому изъ слѣдующихъ четырехъ:

$$x^2+x+1=(2y+1)^2, \quad 2x+1=\pm\sqrt{4(2y+1)^2-3},$$

$$(4y+2x+3)(4y-2x+1)=3, \quad (x+2y+2)(x-2y)=x,$$

невозможность которыхъ легко видѣть. Первое уравненіе не имѣетъ цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній, такъ какъ x^2+x+1 не можетъ быть точнымъ квадратомъ; второе не имѣетъ такихъ рѣшеній, такъ какъ единственная пара точныхъ квадратовъ, разность между которыми равна 3, это 4 и 1, что соотвѣтствуетъ рѣшенію $x=0$, $y=0$; наконецъ, что касается третьяго и четвертаго уравненія, то лѣвыя части ихъ, при цѣлыхъ и положительныхъ x и y, либо больше соотвѣтственныхъ правыхъ частей либо отрицательны. („Enseignement Mathématique“, 1894 г., стр. 303 и 394).

19. Пусть a и b числа взаимно простыя. Пусть $n\equiv h \pmod a$ и $n\equiv h \pmod b$. Тогда $n\equiv h \pmod{ab}$.

Дѣйствительно, такъ какъ число $n-h$ дѣлится на a и на b, то оно дѣлится и на ab.

Это предложеніе можно распространить на любое число взаимно простыхъ между собою чиселъ. Мы называемъ нѣсколько чиселъ взаимно простыми, когда общій дѣлитель любой пары этихъ чиселъ равенъ 1.

Болѣе общій характеръ имѣетъ слѣдующая, извѣстная уже въ древности задача: Пусть $a, b, c\ldots$ взаимно простыя между собою числа. Найти число, которое при дѣленіи на $a, b, c\ldots$ даетъ соотвѣтственные остатки $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Положимъ $a'=bc\ldots$, $b'=ac\ldots$, $c'=ab\ldots$ Тогда a' и a числа взаимно простыя, равно какъ b' и b, c' и $c,\ldots$ Слѣдовательно, можно рѣшить уравненія $a'x-ay=\alpha$, $b'x'-by'=\beta$, $c'x''-cy''=\gamma,\ldots$ въ цѣлыхъ числахъ. Число

$$a'x+b'x'+c'x''+\cdots$$

удовлетворяетъ условіямъ задачи.

20. Нечетное число принадлежитъ къ формѣ $8+1$, если среди его сомножителей, принадлежащихъ къ формамъ $8+3, 5, 7$, каждая изъ указанныхъ формъ представлена четнымъ числомъ сомножителей, или

если каждая изъ указанныхъ формъ представлена нечетнымъ числомъ сомножителей. Нуль принимается при этомъ за четное число.

Это предложеніе слѣдуетъ изъ того, что

$$(8+3)(8+3)=8+1,\ (8+5)(8+5)=8+1,\ (8+7)(8+7)=8+1,$$

$$(8+3)(8+5)(8+7)=8+1.$$

21. Пусть a и b взаимно простыя числа. Пусть $a\alpha - b\beta = 1$. Числа

$$x = \alpha c + \lambda b, \quad y = \beta c + \lambda a$$

удовлетворяютъ тогда уравненію $ax - by = c$.

λ обозначаетъ какое угодно цѣлое число (положительное, отрицательное или нуль).

22. Зная рѣшенія уравненій

$$ax - by = c, \quad ax' - b'y' = c, \quad ax'' - b''y'' = c, \ldots$$

найти рѣшеніе уравненія $ax - bb'b'' \ldots y = c$ (Гауссъ).

Пусть

$$a\alpha - b\beta = 1, \quad a\alpha' - b'\beta' = 1, \quad a\alpha'' - b''\beta'' = 1 \ldots$$

Полагая $b'b'' \ldots y = Y$ и рѣшая уравненіе $ax - bY + c$, получаемъ:

$$x = \alpha c + \lambda b, \quad Y = \beta c + \lambda a = b'b'' \ldots y.$$

Полагая затѣмъ $b''b''' \ldots y = Y'$ и рѣшая уравненіе $a\lambda - b'Y' = -\beta c$, получаемъ:

$$\lambda = -\alpha'\beta c + \lambda' b', \quad Y' = -\beta\beta' c + \lambda' a$$

и, слѣдовательно,

$$x = (\alpha - \alpha'\beta b)\, c + \lambda' bb', \quad Y' = -\beta\beta' c + \lambda' a = b''b''' \ldots y.$$

Полагая $b'''b''' \ldots y = Y''$ и рѣшая уравненіе $a\lambda' - b''y'' = \beta\beta' c$, получаемъ:

$$\lambda' = \alpha''\beta\beta' c + \lambda'' b'', \quad Y'' = \beta\beta'\beta'' c + \lambda'' a$$

и, слѣдовательно,

$$x + (\alpha - \alpha'\beta b + \alpha''\beta\beta' bb')\, c + \lambda'' bb'b'', \quad Y'' = \beta\beta'\beta'' c + \lambda'' a.$$

Продолжая такимъ образомъ, получаемъ искомое рѣшеніе:

$$x = (\alpha - \alpha'\beta b + \alpha''\beta\beta' bb' - \ldots)\, c + \mu bb'b'' \ldots, \quad y = \beta\beta'\beta'' \ldots c + \mu a.$$

(Продолженіе слѣдуетъ)

Опыты и приборы.

Проектированіе броуновскаго движенія на экранѣ. Не такъ давно было время, когда молекулы и атомы считались плодомъ нашей фантазіи, а молекулярная теорія разсматривалась не какъ выраженіе истиннаго смысла явленій, но лишь какъ полезная рабочая гипотеза*). Нынѣ мы имѣемъ возможность видѣть, какъ жестоко ошибались ученые, бравшіе подъ сомнѣніе молекулы. Цѣлый рядъ самыхъ разнообразныхъ явленій даетъ безусловныя доказательства реальности молекулъ и атомовъ.

Такими явленіями представляются: „Броуновское движеніе“, „явленіе радіоактивности“ „эффектъ Лауе“ (Laue, 1912), „явленіе супрапроводимости“, открытое проф. Камерлингъ-Оннесомъ (Kamerling-Onnes, 1914), и мн. др. Изъ перечисленныхъ явленій я остановлюсь лишь на одномъ Броуновскомъ движеніи, такъ какъ моей задачей является дать указаніе, какъ можно просто показать Броуновское движеніе на экранѣ. Какъ извѣстно, Броуновское движеніе было открыто англійскимъ ботаникомъ Броуномъ (Brown, 1827) на спорахъ растеній. Оно заключается въ томъ, что мельчайшія частицы, суспендированныя въ жидкости или газѣ, находятся въ непрерывномъ самомъ неправильномъ движеніи. Изслѣдованія Экснера (Exner), Жигмонди (Zsigmondy), Эренафта (Ehrenhaft) и, въ особенности Перрэна (Perrin), съ несомнѣнностью установили, что причиной движенія этихъ частичекъ является движеніе молекулъ (жидкости или газа). Движущіяся молекулы наносятъ удары подвѣшеннымъ частицамъ, которыя подъ вліяніемъ этихъ ударовъ и бросаются изъ стороны въ сторону, описывая зигзаги. Перрэнъ первый далъ способъ проектировать Броуновское движеніе. Воспроизвести въ точности его способъ для преподавателя физики въ средней школѣ представляется безусловно невозможнымъ. Но въ этомъ, къ счастью, и не представляется рѣшительно никакой надобности. Въ средней школѣ важно только лишь показать Броуновское движеніе. А это, по моему мнѣнію, доступно всякому преподавателю физики, такъ какъ почти въ каждомъ физическомъ кабинетѣ найдутся и проекціонный фонарь и микроскопъ. Въ началѣ я скажу, какъ надо поступать, когда въ распоряженіи преподавателя имѣется и фонарь и микроскопъ (1-й случай), а затѣмъ укажу, какъ можно обойтись безъ фонаря (2-ой случай).

1-й случай.

1) Объективъ фонаря удаляется.

2) Лампочка вдигается въ корпусъ фонаря такъ, чтобы на экранѣ получилось отчетливое изображеніе вольтовой дуги.

3) На фонарь надѣвается діафрагма (лучше ирисъ, но если нѣтъ никакой, то можно самому приготовить изъ картона). Діаметръ отверстія около 2 *см.*

4) Передъ діафрагмой помѣщается чистый стеклянный плоско-параллельный сосудъ**) съ прокипяченной чистой водой для задержанія темныхъ тепловыхъ лучей.

---

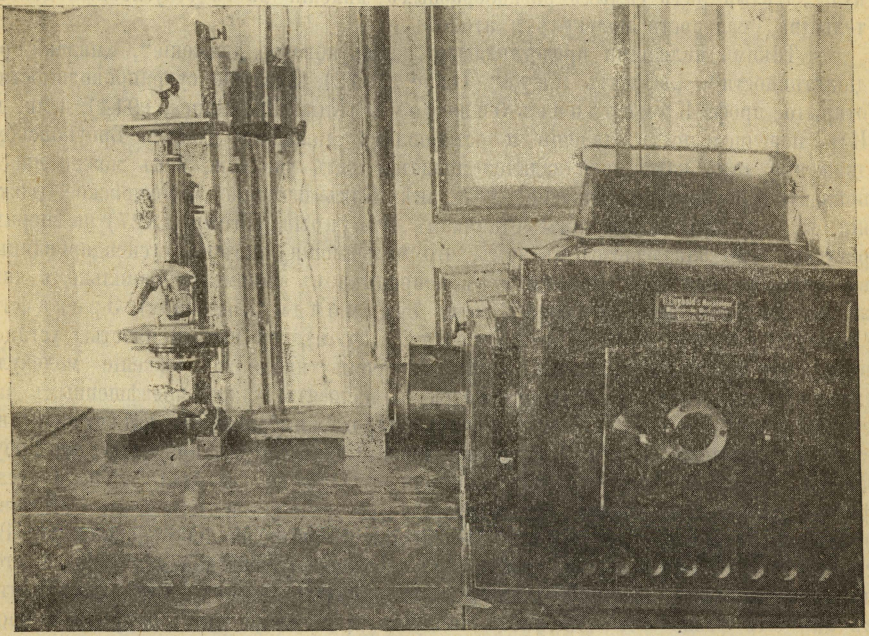
*) Гримзель. «Дидактика и методика физики въ средней школѣ». § 42.

**) Сосудъ легко приготовить самому. Лучше брать не особенно широкій (около 1/2 *см.*

5) Микроскопъ ставится вертикально на столикъ фонаря недалеко отъ ванночки.

6) Помѣщеніе надо тщательно затемнить (гдѣ нѣтъ хорошаго затемненія, тамъ надо показывать броуновское движеніе вечеромъ).

7) Предварительно тщательно установить микроскопъ и его зеркало (ванночку съ водой пока убрать, чтобы вода напрасно не нагрѣвалась). Установка считается законченной, когда на потолкѣ получится равномѣрно освѣщенный свѣтовой кругъ. Яркость круга увеличивается по мѣрѣ приближенія объектива



8) Потомъ берутъ обращающую призму и ставятъ ее на особой подставкѣ передъ окуляромъ микроскопа (одинъ катетъ призмы располагается вертикально).
микроскопа къ столику, на который кладутъ препаратъ *). При установкѣ микроскопа нѣтъ нужды смотрѣть прямо въ микроскопъ, достаточно сбоку смотрѣть на окуляръ. Въ срединѣ окуляра, при надлежащемъ положеніи зеркала **) микроскопа, должно появиться яркое круглое пятнышко, а на потолкѣ яркій кругъ. Само собой разумѣется, что въ началѣ установки микроскопъ ставится на самое малое увеличеніе, а затѣмъ переводится уже на то, которымъ хотятъ пользоваться ***). Снова провѣряютъ свѣтовой кругъ.

---

*) Не забыть діафрагму микроскопа совсѣмъ раскрыть.

**) Зеркало должно быть плоское.

***) Я пользуюсь увеличеніемъ немного болѣе 540. У меня микроскопъ C. Reichert'а. Я беру объективъ 7*a* и окуляръ IV при вытянутомъ тубусѣ. Если тубусъ не вытягивать, то увеличеніе равняется 540. Чѣмъ меньше увеличеніе, тѣмъ ярче получается изображеніе на экранѣ.

Изображенiе свѣтового круга переходитъ съ потолка на экранъ. На экранѣ надлежащiй кругъ получается тогда, когда въ призмѣ виденъ весь кругъ. Поэтому надо призму поставить надъ окуляромъ надлежащимъ образомъ.

9) Необходимая жидкость приготовляется слѣдующимъ образомъ. Берется маленькiй кусочекъ гуммигута и тщательно растирается въ мелкiй порошокъ. Порошокъ растворяется въ водѣ съ такимъ расчетомъ, чтобы получилась не особенно мутная вода. Небольшая капелька такой жидкости берется стеклянной палочкой и наносится на чистое предметное стекло, какое употребляется для микроскопическихъ препаратовъ. На капельку прямо накладывается чистое покровное стеклышко. Нужно слѣдить, чтобы не попалъ пузырекъ воздуха. Покровное стеклышко удобнѣе накладывать щипцами для разновѣсокъ *).

10) Приготовленный препаратъ кладется на столикъ микроскопа подъ объективомъ, ванночку съ водой ставятъ передъ дiафрагмой фонаря, закрываютъ все это темной матерiей такъ, чтобы свѣтъ выходилъ только изъ окуляра микроскопа **), и устанавливаютъ микроскопъ сначала грубымъ винтомъ, а потомъ уже микрометрическимъ. Надо помнить, что Броуновское движенiе становится замѣтнымъ на экранѣ, когда объективъ микроскопа стоитъ очень близко къ препарату. Нужно слѣдить, чтобы объективъ не прижался къ препарату.

Примѣчанiе I. Если въ распоряженiи преподавателя нѣтъ обращающей призмы, то можно получить изображенiе или на потолкѣ или, если это неудобно, на бѣломъ бумажномъ (изъ пергамента) экранѣ, расположенномъ горизонтально надъ окуляромъ микроскопа.

Примѣчанiе II. Послѣ нѣсколькихъ минутъ проектированiя движенiе частицъ становится правильнымъ подъ влiянiемъ конвекцiонныхъ токовъ вслѣдствiе нагрѣванiя. На это слѣдуетъ обратить вниманiе учениковъ, сравнивъ это движенiе съ прежнимъ неправильнымъ (Броуновскимъ). Затѣмъ препаратъ слѣдуетъ смѣнить новымъ.

Примѣчанiе III. Экранъ долженъ находиться недалеко отъ микроскопа (шага на 2-3), чтобы преподаватель, находясь у микроскопа, могъ отчетливо видѣть изображенiе Броуновскаго движенiя. Ученики по группамъ въ нѣсколько человѣкъ располагаются по обѣ стороны, гдѣ находится микроскопъ ***).

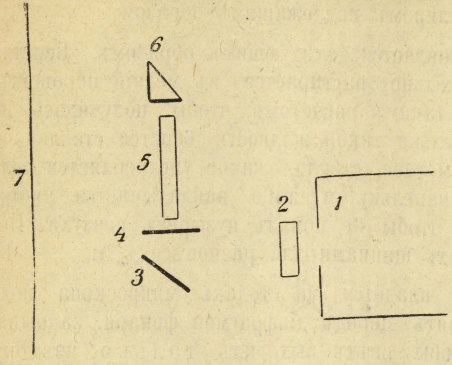
Ниже помѣщается схема, а выше помѣщенъ фотографическiй снимокъ съ моей установки.

*) Нужно слѣдить, чтобы во взятой капелькѣ не оказались слишкомъ большiя частицы гуммигута.

**) Вообще надо слѣдить, чтобы въ комнатѣ была по возможности полная тьма.

***) Предполагается, что у преподавателя экранъ обыкновенный не стеклянный.

СХЕМА УСТАНОВКИ.



1 — фонарь,
2 — ванночка съ водой,
3 — плоское зеркало микроскопа,
4 — столикъ куда кладется препаратъ,
5 — микроскопъ,
6 — призма съ полнымъ внутреннимъ отраженіемъ.
7 — экранъ.

2-й случай.

Если у преподавателя нѣтъ проекціоннаго фонаря, то можно обойтись и безъ него, пользуясь сильной (свѣчъ на 50-100) электрической лампой. Установка микроскопа прежняя. Конечно, и лампа и нижняя часть микроскопа должны быть закрыты чехломъ, сшитымъ изъ плотной темной матеріи, чтобы свѣтъ выходилъ только изъ окуляра микроскопа.

П. Смирновъ.

БИБЛІОГРАФІЯ.

II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ.

Авторы, переводчики и редакторы новыхъ сочиненій приглашаются присылать для этого отдѣла, извѣстнаго въ германской литературѣ подъ названіемъ „Selbstanzeigen", краткія сообщенія о выпущенныхъ ими сочиненіяхъ, объ ихъ характерѣ и объ ихъ назначеніи. Къ этимъ сообщеніямъ долженъ быть приложенъ экземпляръ сочиненія. Помѣщая эти сообщенія, редакція сохраняетъ, однако, за собою право помѣстить и независимую рецензію.

П. **Курилко.** *Сборникъ задачъ къ элементарному курсу гоніометріи и тригонометріи* (въ 4-хъ частяхъ). (Тригонометрическія задачи и элементарная тригонометрія и гоніометрія на задачахъ). Руководство и пособіе для среднихъ учебныхъ заведеній. Книга 1-ая, часть I-ая и II-ая. Тригонометрія и начальная гоніометрія угловъ острыхъ (часть I-ая) и тупыхъ (часть II) (для VI класса реальныхъ училищъ) съ приложеніемъ новой программы по тригонометріи автора. Одесса, 1912. Ц. 60 к. *).

Въ то время какъ другіе предметы математики въ средней школѣ обладаютъ достаточно систематизированными сборниками задачъ, по тригоно-

*) См. Предисловіе къ первой книгѣ сборника и введеніе брошюры „Къ вопросу объ обосновании тригонометріи и преподаваніи ея въ школѣ". 1914.

метріи такихъ сборниковъ не имѣется. Настоящій сборникъ имѣетъ цѣлью восполнить этотъ пробѣлъ въ литературѣ. Распредѣленіе матеріала въ сборникѣ при всякой программѣ облегчаетъ оріентировку и выборъ задачъ.

Курсъ тригонометріи на задачахъ и задачи на рѣшеніе фигуръ распредѣлены въ двухъ книгахъ и четырехъ частяхъ. Сборникъ предназначенъ служить и какъ пособіе и какъ руководство.

Вообще затрудненіями при преподаваніи предметовъ въ средней школѣ являются: необоснованность входящихъ въ нихъ положеній и недостаточная элементарность въ ихъ изложеніи *).

Недочетовъ въ обоснованіи курса тригонометріи до сихъ поръ не признавалось. Предлагались лишь различныя изложенія и то только правила Декарта.

Въ докладѣ 24-го іюня 1913 года на XIII съѣздѣ русскихъ естествоиспытателей и врачей въ Тифлисѣ *) мною впервые во всей широтѣ поднятъ въ литературѣ вопросъ и устанавливаются принципы обоснованія тригонометріи.

Наибольшими трудностями при обоснованіи тригонометріи въ средней школѣ являются: 1) разъясненіе Декартова правила знаковъ, 2) отсутствіе теоріи тригонометрическихъ уравненій, 3) необходимость сообщенія ученикамъ навыка въ преобразованіи выраженій и рѣшеніи фигуръ, 4) недостаточная обоснованность и отсутствіе единства выводовъ различныхъ положеній и др.

Курсъ тригонометріи въ сборникѣ вполнѣ обоснованъ *). Правилу знаковъ дано не существовавшее до сихъ поръ обоснованіе мое, наиболѣе соотвѣтствующее существующимъ программамъ математики въ средней школѣ и состоянію литературы **).

Приведенная въ сборникѣ не существовавшая до сихъ поръ моя теорія тригонометрическихъ уравненій даетъ пріемы и способы рѣшенія тригонометрическихъ уравненій и устраняетъ крупныя погрѣшности въ указаніяхъ относительно рѣшенія тригонометрическихъ уравненій, содержащіяся въ существующихъ сборникахъ и руководствахъ ***).

Трудностью при преподаваніи тригонометріи является также недостаточная элементарность изложенія предмета въ существующихъ руководствахъ и пособіяхъ, выражающихся въ обиліи исключительно теоретическаго матеріала въ началѣ курса. Что касается изложенія ея, то здѣсь за послѣднія 15 лѣтъ можно отмѣтить два существовавшія направленія во взглядахъ, часто смѣнявшіяся одно другимъ ***).

Между прочимъ за элементарное изложеніе тригонометріи высказались:

1. Коммиссія Министра Нар. Пр. Н. П. Боголѣпова (1900 г.).
2. Собраніе преподавателей математики города Кіева (1901 г.).
3. III съѣздъ дѣятелей по техническому и профессіональному образованію въ Россіи (1903 — 4 г.).
4. Военное Министерство въ программѣ для 1-го Псковскаго и Донского Кадетскихъ Корпусовъ (1903 г.).
5. Министерство Народнаго Просвѣщенія программами реальныхъ училищъ (26 — 30 іюня 1906 г.).

---

*) См. докладъ автора: „Къ вопросу объ обоснованіи тригонометріи и преподаваніи ея въ средней школѣ“, 24-го іюня 1913 года въ соединенномъ засѣданіи математической секціи и секціи педагогическихъ вопросовъ XIII-го съѣзда русскихъ естествоиспытателей и врачей (въ Тифлисѣ). (Особенности изложенія и обоснованія курса въ сборникѣ приведены безъ упоминанія о немъ нѣкоторыми докладчиками и оппонентами на II-омъ всероссійскомъ съѣздѣ преподавателей математики секціи III въ вечернемъ засѣданіи 30-го декабря 1913 года).

**) Зад. 351 — 8 и 783 — 7 какъ условіе обобщенія тригонометрическихъ формулъ. См. тамъ же § 6: „Правило Декарта“.

***) См. тамъ же § 7, а также докладъ: „Тригонометрическія уравненія“, тогда же и особую брошюру: „Гоніометрическія (тригонометрическія) уравненія“. (Къ докладу на I-мъ всероссійскомъ съѣздѣ преподавателей математики) Петроградъ, 1912.

6. Министерство Торговли и Промышленности проектомъ новыхъ программъ Коммерческихъ училищъ (1912 г.) и, наконецъ,

7. Авторъ въ настоящей книжкѣ (въ докладѣ на XIII съѣздѣ русскихъ естествоиспытателей и врачей въ Тифлисѣ), съ чѣмъ согласились и нѣкоторые докладчики и оппоненты II-го всероссійскаго съѣзда преподавателей математики.

Противъ элементарнаго изложенія высказались:

1. Коммиссія Московскаго Учебнаго Округа (1899 г.).

2. Одинъ изъ членовъ коммиссіи Н. П. Боголѣпова, (приводится въ виду интереса, мотивировки мнѣнія),

3. Попечительскій Совѣтъ Кіевскаго учебнаго округа (1899 г.).

4. Съѣзды директоровъ и представителей попечительскихъ совѣтовъ Коммерческихъ училищъ въ іюлѣ 1901 и январѣ 1902 года.

5. Военное Министерство новыми программами кадетскихъ корпусовъ.

Мнѣніе такимъ образомъ (по вопросу о изложеніи) оказалось не установившимся, и взгляды различныхъ лицъ и министерствъ противоположными одни другимъ.

За самое послѣднее время министерство торговли и промышленности отказалось отъ элементарной гоніометріи въ коммерческихъ училищахъ (1912 г.), имѣя до того совершеннно противоположное мнѣніе (1901 — 2 г.г.), и военное министерство, только что сдѣлавшее шагъ хъ введенія элементарныхъ программъ (1903 г.), въ новыхъ программахъ (1911 г.) перешло къ неэлементарному изложенію.

Въ настоящее время вопросъ о порядкѣ изложенія тригонометріи поставленъ на обсужденіе предполагающагося III-го съѣзда преподавателей математики Организаціоннымъ Комитетомъ этого Съѣзда.

Доводами противъ элементарнаго изложенія обыкновенно служили: 1) преимущественная оцѣнка теоріи гоніометрическихъ функцій передъ собственно тригонометріей съ точки зрѣнія ихъ значенія въ школѣ и 2) невозможность строгаго изложенія собственно тригонометріи помимо гоніометріи, и потому ненаучность элементарнаго ея изложенія.

Однако, вопроса о томъ, что важнѣе для школы въ тригонометріи, рѣшеніе ли треугольниковъ или собственно гоніометрія, невозможно ставить по его узости и вслѣдствіе того, что эти два отдѣла предмета тригонометріи совершенно разнородны.

Каковъ бы ни былъ также объемъ предмета и значеніе его въ школѣ, строгое изложеніе его (особенно въ курсѣ), по мнѣнію моему, является первымъ требованіемъ педагогики. Что касается элементарнаго изложенія тригонометріи, то такое преподаваніе ея, по моему мнѣнію, можетъ вестись вполнѣ строго — научно и логично и вовсе не есть игнорированіе, но есть элементарное же преподаваніе гоніометріи. Сообразно съ этимъ отпадаетъ зависимость вопроса о распредѣленіи матеріала тригонометріи въ средней школѣ отъ невозможности строгаго ея элементарнаго изложенія.

Вмѣстѣ съ тѣмъ такое преподаваніе ея въ цѣляхъ методическихъ умѣстно (если оно необходимо въ другихъ предметахъ), увеличиваетъ связность отдѣльныхъ частей курса и ихъ законченность, способствуетъ усвоенію предмета, позволяетъ иллюстрировать курсъ рѣшеніемъ фигуръ, рѣшать фигуры съ начала и на всемъ протяженіи прохожденія курса тригонометріи, между прочимъ, рѣшать фигуры до знакомства съ теоремой сложенія и ея слѣдствіями — формулами гоніометріи, а также позволяетъ пораньше начать рѣшеніе тригонометрическихъ уравненій.

Нужно замѣтить, что противниками элементарнаго изложенія выставлялась невозможность какъ разъ того, что нами выше утверждается. Кромѣ того, элементарное преподаваніе тригонометріи возможно при какой-угодно программѣ *) Элементарное изложеніе предмета въ сборникѣ тоже не противорѣчитъ при пользованіи сборникомъ никакой неэлементарной программѣ.

---

*) Указанная въ сборникѣ элементарная программа, я думаю, наиболѣе умѣстна теперь въ женскихъ гимназіяхъ, учительскихъ институтахъ (гдѣ къ тому же программа вообще не указана), духовныхъ семинаріяхъ и епархіальныхъ училищахъ.

При всякой программѣ тригонометріи прежде рѣшенія задачъ на преобразованіе выраженій у преподавателя можетъ явиться необходимость и желаніе въ цѣляхъ методическихъ давать сначала задачи на рѣшеніе фигуръ, не требующія примѣненія формулъ гоніометріи при преобразованіи результатовъ рѣшенія.

Кромѣ того и при элементарномъ и при неэлементарномъ преподаваніи гоніометріи нельзя не признать удобства въ методическомъ отношеніи иллюстрировать курсъ рѣшеніемъ фигуръ и, напримѣръ, рѣшенія фигуръ до знакомства съ теоремой сложенія и ея слѣдствіями — формулами гоніометріи.

Въ обоихъ указанныхъ случаяхъ подходящія задачи приходится выбирать изъ существующихъ сборниковъ задачъ по тригонометріи, что очень затруднительно. Подысканіе такихъ задачъ особенно осложняется тѣмъ, что вслѣдствіе желанія авторовъ дать побольше задачъ на преобразованіе выраженій, такихъ задачъ въ существующихъ сборникахъ почти не бываетъ.

Первая книга сборника содержитъ задачи на рѣшеніе $\triangle$-овъ и другихъ фигуръ, не требующія, что важно, формулъ гоніометріи при преобразованіи результатовъ рѣшенія.

Такимъ образомъ, особенностями сборника, какъ и курса, къ которому онъ приноровленъ, являются (несуществовавшіе до сихъ поръ): 1) элементарное и методическое распредѣленіе матеріала, 2) помѣщенное въ немъ несуществовавшее до сихъ поръ обоснованіе правила знаковъ автора, 3) не существовавшая до сихъ поръ теорія тригонометрическихъ уравненій автора, 4) обоснованность всѣхъ положеній курса и другія.

Первая книга сборника составлена согласно новой программѣ, тригонометріи въ VI классѣ реальныхъ училищъ и Перваго, Псковскаго и Донского Кадетскихъ корпусовъ, новой программѣ тригонометріи въ Коммерческихъ училищахъ, чѣмъ устраняетъ пробѣлъ въ литературѣ, затруднявшій преподаваніе, и является необходимымъ дополненіемъ къ существующимъ сборникамъ при какой угодно программѣ, которые, въ свою очередь, могутъ служить второю книгою сборника до выхода, напримѣръ, послѣдней.

Особенности сборника при пользованіи сборникомъ могутъ быть обойдены.

П. К.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей профессора Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 295 (6 сер.). Даны двѣ параллельныя прямыя, на каждой изъ нихъ по точкѣ A и B, и еще двѣ внѣшнихъ точки C и D. Найти на этихъ параллельныхъ прямыхъ по точкѣ X и Y такъ, чтобы выполнялись равенства

$$\angle AXB = \angle AYB \quad \text{и} \quad \angle CXD = \angle CYD.$$

И. Александровъ (Москва).

№ 296 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$ax^2+bx+c+dx\sqrt{ex^2+gx+h}=0$$

при условіи, что $b:c=g:h$.

X.

№ 297 (6 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ систему уравненій

$$x+a=y^2,\quad x-a=z^2,$$

гдѣ a — данное цѣлое число.

И. Плужниковъ (Тула).

№ 298 (6 сер.). Найти необходимыя и достаточныя условія, которымъ должны удовлетворять коэффиціенты многочлена

$$a_0x^4+4a_1x^3y+6a_2x^2y^2+4a_3xy^3+y^4$$

для того, чтобы онъ тожественно равнялся суммѣ квадратовъ двухъ выраженій, линейныхъ относительно x и y.

(Заимств.),

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

Отдѣлъ I.

№ 247 (6 сер.). *Пусть* a *четное число, оканчивающееся значащей цифрой, а* n — *любое цѣлое положительное число. Доказать, что цифра десятковъ числа* a^{20n} *равна* 7, *а цифра единицъ равна* 6, *и найти три послѣднія цифры числа* a^{100n}.

По условію $a=2b$, гдѣ b — цѣлое число. Изъ равенсгва

$$a^{20n}-76=(2b)^{20n}-76=2^{20n}b^{20n}-76$$

слѣдуетъ, что разность $a^{20n}-76$ дѣлится на 4, такъ какъ 2^{20n} дѣлится на 2^2, т. е. на 4, и 76 дѣлится на 4. Съ другой стороны,

$$(1)\quad a^{20n}-76=(a^{20n}-1)-75.$$

Разность $a^{20n}-1$ кратна разности $a^{20}-1$. Число a, какъ четное и оканчивающееся значащей цифрой, есть число, взаимно простое съ 5. Обозначая вообще черезъ $\varphi(N)$ число чиселъ, не превосходящихъ цѣлаго числа N и взаимно простыхъ съ N, находимъ, что $\varphi(25)=5.4=20$, а потому, по теоремѣ Эйлера, разность $a^{20}-1$, т. е. $a^{\varphi(25)}-1$, кратна 25, такъ какъ a, будучи взаимно простымъ съ 5, есть число, взаимно простое съ 25. Поэтому число $a^{20n}-1$ тоже дѣлится на 25, а потому [см. (1)] и $a^{20n}-76$ дѣлится на 25. Дѣлясь на 4 и на 25, разность $a^{20n}-76$ дѣлится на 100, откуда слѣдуетъ, что число a^{20n} имѣетъ цифру десятковъ 7 и цифру единицъ 6. Изъ равенства

$$a^{100n}-376=(2b)^{100n}-376=2^{100n}b^{100n}-376$$

слѣдуетъ, что число $a^{100n}-376$ кратно 8, такъ какъ 2^{100n} кратно 2^3, т. е. 8 и 376 кратно 8. Съ другой стороны,

$$(2)\quad a^{100n}-376=a^{100n}-1-375.$$

Разность $a^{100n}-1$ кратна разности $a^{100}-1$. Но $a^{100}-1=a^{\varphi(125)}-1$, и число a, взаимно простое съ 5, есть число взаимно простое и съ 125. Поэтому, по теоремѣ Эйлера, число $a^{100}-1$ дѣлится на 125, а потому и $a^{100n}-1$ дѣлится на 125, откуда слѣдуетъ [см. (2)], что и $a^{100n}-376$ дѣлится на 125. Дѣлясь на 8 и на 125, разность $a^{100n}-376$ дѣлится на 1000, а потому число a^{100n} имѣетъ цифры сотенъ, десятковъ и единицъ, равныя соотвѣтственно 3, 7 и 6.

М. Виленскій (Одесса); *А. Сердобинскій* (Петроградъ); *Н. К-новъ* (Петроградъ); *А.*

№ 248 (6 сер.). *Найти сумму* n *членовъ ряда*

$$n(n-1^2)+2n(3n-2^2)+3n(5n-3^2)+\cdots+kn[(2k-1)n-k^2]+\cdots$$

Сумму k членовъ даннаго ряда можно представить въ видѣ

$$n^2-n\,.\,1^2+2\,.\,3n^2-2^2\,.\,2n+3\,.\,5n^2-3^2\,.\,3n+\cdots+(2k-1)\,kn^2-k^2\,.\,kn,$$

т. е. $n^2[1+2\,.\,3+3\,.\,5+\cdots+k(2k-1)]-n(1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3)$. Замѣчая, что

$$1=2\,.\,1^2-1,\quad 2\,.\,3=2(2\,.\,2-1)=2\,.\,2^2-2,\quad 3\,.\,5=3(2\,.\,3-1)=2\,.\,3^2-3,$$

$$4\,.\,7=4(2\,.\,4-1)=2\,.\,4^2-4,\ldots,\quad k(2k-1)=2k^2-k,$$

и складывая равенства

$$1=2\,.\,1^2-1,\quad 2\,.\,3=2\,.\,2^2-2,\quad 3\,.\,5=2\,.\,3^2-3,\ldots,\quad k(2k-1)=2k^2-k,$$

получимъ, пользуясь формулами суммы чиселъ натуральнаго ряда и ихъ квадратовъ,

$$1+2\,.\,3+3\,.\,5+\cdots+k(2k-1)=2(1^2+2^2+\cdots+k^2)-(1+2+\cdots+k)=$$

$$=\frac{2k(k+1)(2k+1)}{6}-\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k(k+1)(4k-1)}{6}.$$

По формулѣ же суммы кубовъ чиселъ натуральнаго ряда

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}.$$

Такимъ образомъ, называя черезъ s_k сумму k членовъ разсматриваемаго ряда, находимъ, что

$$s_k=\frac{n^2k(k+1)(4k-1)}{6}-\frac{nk^2(k+1)^2}{4}.$$

Полагая $k=n$ (въ томъ предположеніи, конечно, что n — цѣлое положительное число) получимъ послѣ ряда обычныхъ преобразованій, что

$$s_n = \frac{5n^3(n^2-1)}{12}.$$

М. Виленскій (Одесса); *П. Волохинъ* (Ялта); *Л. Гейлеръ* (Харьковъ); *В. Кованько* (Вышній Волочокъ).

№ 252 (6 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$x^5 = 27x^3 - 54x^2 + 100x + 600.$$

Представивъ уравненіе въ видѣ

$$(1) \quad x^5 - 27x^3 + 54x^2 - 100x - 600 = 0$$

и разлагая лѣвую часть на множителей, выдѣляемъ послѣдовательно линейныхъ множителей $x-5$, $x+6$, $x+2$, при чемъ, конечно, можно съ успѣхомъ пользоваться теоремой Безу или же обычными элементарными пріемами разложенія. Такъ, представивъ уравненіе (1) послѣдовательно въ видѣ

$$x^5 - 5x^4 + 5x^4 - 25x^3 - 2x^3 + 10x^2 + 44x^2 - 220x + 120x - 600 = 0,$$

$$x^4(x-5) + 5x^3(x-5) - 2x^2(x-5) + 44x(x-5) + 120(x-5) = 0,$$

приводимъ его рѣшеніе къ рѣшенію двухъ уравненій $x - 5 = 0$ и

$$(2) \quad x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 44x + 120 = 0, \quad \text{откуда} \quad x_1 = 5,$$

а остальные корни опредѣляются изъ уравненія (2). Представивъ уравненіе (2) послѣдовательно въ видѣ

$$x^4 + 6x^3 - x^3 - 6x^2 + 4x^2 + 24x + 20x + 120 = 0,$$

$$x^3(x+6) - x^2(x+6) + 4x(x+6) + 20(x+6) = 0, \quad (x+6)(x^3 - x^2 + 4x + 20) = 0,$$

находимъ второй корень $x_2 = -6$, а остальные корни опредѣлятся изъ уравненія

$$(3) \quad x^3 - x + 4x + 20 = 0.$$

Представивъ уравненіе (3) въ видѣ $(x+2)(x^2 - 3x + 10) = 0$ и рѣшая каждое изъ уравненій $x + 2 = 0$, $x^2 - 3x + 10 = 0$, находимъ корень $x_3 = -2$ и два мнимыхъ корня $x_{4,5} = \frac{3 \pm \sqrt{-31}}{2}$. Такимъ образомъ найдены всѣ пять корней даннаго уравненія.

М. Гершковичъ (Минскъ); *В Кованько* (Вышній-Волочокъ).

Редакторъ прив.-доц. **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено военной цензурой.

Типографія „Техникъ"—Одесса, Екатерининская, 58.

Обложка
пщется

Обложка
пщется