Обложка
ищется

Обложка
ищется

Второй серіи III-го семестра №2.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

№ 626.

О дѣленіи многочленовъ.

Прив.-доц. Е. Л. Буницкаго.

1. Въ статьѣ прив.-доц. В. Ф. Кагана „Ариѳметическое и алгебраическое дѣленіе“, помѣщенной въ № 596 „Вѣстника“, выяснена разница между ариѳметическимъ дѣленіемъ и дѣленіемъ многочленовъ въ алгебрѣ. Въ статьѣ того же автора: „О законѣ тождества цѣлыхъ функцій“, напечатанной въ № 622 „Вѣстника“, доказано основное предложеніе объ условіяхъ тожества многочленовъ, на которомъ основано доказательство однозначности операціи дѣленія многочленовъ.

Въ настоящей статьѣ также изложена теорія дѣленія многочленовъ, при чемъ установлены и законъ тожества многочленовъ и однозначность дѣленія. Въ основу доказательства закона тожества положено какъ разъ то извѣстное предложеніе объ остаткѣ отъ дѣленія многочлена на двучленъ вида $x-a$, которое послужило поводомъ для напечатанія первой изъ указанныхъ статей прив.-доц. В. Ф. Кагана. Такимъ образомъ порядокъ изложенія теоріи дѣленія многочленовъ въ настоящей статьѣ слѣдующій: 1) послѣ обычнаго опредѣленія дѣленія многочленовъ изложенъ обычный процессъ дѣленія, т. е. доказана возможность произвести дѣленіе; 2) затѣмъ изложено предложеніе объ остаткѣ отъ дѣленія многочлена на двучленъ вида $x-a$, откуда выведенъ законъ тожества многочленовъ; 3) затѣмъ установлена однозначность дѣленія.

2. При изложенiи настоящей статьи мы будемъ придерживаться слѣдующихъ опредѣленiй.

Опредѣленiя. 1^0. Цѣлымъ многочленомъ относительно x или цѣлой алгебрической функцiей отъ x называется выраженiе вида

$$(1) \quad a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_{m-1}\, x + a_m,$$

въ которомъ m — данное цѣлое неотрицательное число, a_0, $a_1, \ldots, a_m$ — любыя данныя числа, а буква x можетъ принимать произвольное значенiе.

Замѣчанiя. 1) Въ понятiи о цѣломъ многочленѣ относительно x заключается, какъ частный случай, понятiе о цѣломъ одночленѣ относительно x, т, е. понятiе о выраженiи $a_0 x^m$, гдѣ a_0 — любое данное число, а m — данное цѣлое неотрицательное число.

2) Цѣлымъ многочленомъ относительно x называютъ также выраженiе вида

$$a_1 x^{m_1} + a_2 x^{m_2} + \cdots + a_k x^{m_k},$$

гдѣ a_1, $a_2, \ldots,$ a_k — любыя данныя числа, а m_1, $m_2, \ldots,$ m_k — данныя цѣлыя неотрицательныя числа. Выраженiе такого вида послѣ приведенiя подобныхъ членовъ и послѣ расположенiя по убывающимъ степенямъ буквы x принимаетъ видъ выраженiя (1).

3) Выраженiе (1) часто называютъ многочленомъ m-ой степени относительно x, разумѣя подъ степенью многочлена степень высшаго его члена $a_0 x^m$. Однако, такъ какъ коэффицiенты a_0, $a_1, \ldots,$ a_m многочлена (1) могутъ принимать по условiю любыя значенiя, то коэффицiенты нѣсколькихъ начальныхъ членовъ могутъ равняться нулю; въ этомъ случаѣ многочленъ (1) оказывается тожественно равнымъ нѣкоторому многочлену, степень котораго ниже m и который получается изъ многочлена (1) отбрасыванiемъ начальныхъ членовъ, коэффицiенты которыхъ суть нули. Въ дальнѣйшемъ изложенiи важно придавать термину многочленъ m-ой степени болѣе опредѣленный смыслъ; это достигается при помощи слѣдующихъ двухъ опредѣленiй.

2^0. Если m — цѣлое положительное число, то многочленомъ m-ой степени или цѣлой функцiей m-ой степени отъ x называется выраженiе вида (1), въ которомъ коэффицiентъ высшаго члена a_0 отличенъ отъ нуля.

3^0. Многочленомъ (или одночленомъ) нулевой степени относительно x или цѣлой функцiей нулевой степени отъ x называется данное число a_0 независимо отъ того, равно a_0 нулю или нѣтъ.

Замѣчанiя. 1) Въ настоящей статьѣ терминъ „многочленъ m-ой степени" примѣняется въ случаѣ $m \geqq 1$ исключительно въ смыслѣ опредѣленiя 2^0. Если же мы будемъ разсматривать выраженiе (1), не указывая точно, равно a_0 нулю или нѣтъ, то мы будемъ называть его просто „выраженiе (1)" или „многочленъ (1)" или „цѣлая функцiя (1)", не прибавляя словъ „m-ой степени"; при отсутствiи указанiя, равно нулю a_0 или нѣтъ, выраженiе (1) можно также называть многочленомъ m-ой степени въ широкомъ смыслѣ слова.

2) Во многихъ случаяхъ мы будемъ обозначать цѣлые многочлены относительно x сокращенно черезъ $f(x)$, $g(x)$ и т. д., гдѣ f, g — суть по условiю символы цѣлыхъ алгебрическихъ функцiй.

4^0. Раздѣлить съ остаткомъ многочленъ $f(x)$ на многочленъ $g(x)$, степень котораго не ниже единицы, значитъ найти два многочлена $q(x)$ и $r(x)$, удовлетворяющихъ тожеству

$$(2)\quad f(x)=g(x)\,q(x)+r(x),$$

при чемъ степень многочлена $r(x)$ должна быть по условію меньше степени многочлена $g(x)$. При дѣленіи многочлена $f(x)$ на многочленъ $g(x)$ многочленъ $f(x)$ называется дѣлимымъ, $g(x)$ — дѣлителемъ, искомый многочленъ $q(x)$ — частнымъ, $r(x)$ — остаткомъ.

Замѣчаніе. Въ силу тожества (2) дѣлимое тожественно (т. е. при любомъ значеніи x) равно суммѣ произведенія дѣлителя на частное и остатка.

5^0. Если можно раздѣлить многочленъ $f(x)$ на многочленъ $g(x)$ такъ, чтобы остатокъ $r(x)$ равнялся нулю (т. е. — чтобы остаткомъ служилъ многочленъ нулевой степени, единственный коэффиціентъ котораго равенъ нулю), то говорятъ, что многочленъ $f(x)$ дѣлится нацѣло или безъ остатка на многочленъ $g(x)$.

Замѣчанія. 1) Опредѣленія дѣленія съ остаткомъ нельзя распространить на тотъ случай, когда дѣлитель есть многочленъ нулевой степени, такъ какъ при распространеніи опредѣленія на этотъ случай степень остатка оказалась бы ниже нулевой, что невозможно.

2) Опредѣленіемъ 5^0 устанавливается понятіе о дѣленіи нацѣло лишь въ томъ случаѣ, когда степень дѣлителя не ниже единицы. Изъ слѣдующаго ниже опредѣленія 6^0 мы увидимъ, что понятіе о дѣленіи нацѣло можно установить и независимо отъ понятія о дѣленіи съ остаткомъ такъ, чтобы оно могло имѣть смыслъ и для дѣлителя нулевой степени.

6^0. Раздѣлить нацѣло многочленъ $f(x)$ на многочленъ $g(x)$ значитъ найти многочленъ $q(x)$, удовлетворяющій тожеству

$$(3)\quad f(x)=g(x)\,q(x).$$

Замѣчаніе. При дѣленіи нацѣло многочлены $f(x)$ и $g(x)$ также называются соотвѣтственно дѣлимымъ и дѣлителемъ, $q(x)$ — частнымъ. Въ силу тожества (3) дѣлимое тожественно равно дѣлителю, умноженному на частное. Въ опредѣленіи 6^0 содержится опредѣленіе 5^0, какъ частный случай.

7^0. Два цѣлыхъ относительно x многочлена называются почленно равными, если послѣ приведенія они ничѣмъ не отличаются одинъ отъ другого, т. е. — если они одинаковой степени и если коэффиціенты ихъ при соотвѣтственно равныхъ степеняхъ x равны.

Замѣчаніе. Изъ опредѣленія почленнаго равенства слѣдуетъ, что почленно равные многочлены равны тожественно.

3. Теперь перейдемъ къ теоремѣ, устанавливающей возможность дѣленія многочленовъ съ остаткомъ.

Теорема 1. Всякій многочленъ можно раздѣлить съ остаткомъ на другой многочленъ, степень котораго не ниже единицы.

Пусть требуется многочленъ m-ой степени (1) раздѣлить съ остаткомъ на многочленъ n-ой степени

$$(4)\quad b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n,$$

при чемъ дано, что $n \geqq 1$. Если $m < n$, то изъ тожества

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m = (b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n) \cdot 0 +$$
$$+ (a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m)$$

вытекаетъ, что многочленъ нулевой степени, равный нулю (т. е. съ единственнымъ коэффиціентомъ, равнымъ нулю), и многочленъ (1) удовлетворяютъ соотвѣтственно опредѣленію частнаго и остатка при дѣленіи многочлена (1) на многочленъ (4). Пусть теперь $m \geqq n$. Раздѣливъ высшій членъ $a_0 x^m$ многочлена (1) на высшій членъ $b_0 x^n$ многочлена (4), получимъ цѣлый одночленъ $\frac{a_0}{b_0} x^{m-n}$, который мы обозначимъ сокращенно черезъ $q_1(x)$. Называя короче дѣлимое (1) и дѣлитель (4) черезъ $f(x)$ и $g(x)$, вычтемъ изъ $f(x)$ произведеніе многочлена $g(x)$ на $q_1(x)$, сдѣлаемъ послѣ раскрытія скобокъ приведеніе въ найденномъ результатѣ и обозначимъ окончательно полученный многочленъ черезъ $f_1(x)$. Тогда получимъ тожество

$$(5)\quad f(x) - g(x)\, q_1(x) = f_1(x).$$

Высшій членъ многочлена $f(x)$ есть $a_0 x^m$, а высшій членъ произведенія $g(x)\, q_1(x)$ есть $b_0 x^n q_1(x)$, или же $b_0 x^n \cdot \frac{a_0}{b_0} x^{m-n}$, т. е. также $a_0 x^m$. Такимъ образомъ въ выраженіи $f(x) - g(x)\, q_1(x)$ членъ m-ой степени относительно x уничтожается послѣ приведенія, а потому $f_1(x)$ есть многочленъ нѣкоторой степени m_1, которая не выше $m - 1$. Если $m_1 < n$, то, перенося въ тожествѣ (5) членъ $g(x)\, q_1(x)$ во вторую часть, получимъ тожество

$$f(x) = g(x)\, q_1(x) + f_1(x),$$

изъ котораго ясно, что дѣленіе уже выполнено, такъ какъ въ этомъ случаѣ одночленъ $q_1(x)$ и многочленъ $f_1(x)$ удовлетворяютъ соотвѣтвѣтственно опредѣленію частнаго и остатка при дѣленіи многочлена $f(x)$ на многочленъ $g(x)$. Если же $m_1 \geqq n$, то мы подвергаемъ многочленъ $f_1(x)$ такому же процессу, которому мы только что подвергли многочленъ $f(x)$, а именно: мы дѣлимъ высшій членъ многочлена $f_1(x)$ на высшій членъ дѣлителя $g(x)$ и вычитаемъ произведеніе многочлена $g(x)$ на полученное цѣлое одночленное частное $q_2(x)$ изъ многочлена $f_1(x)$; тогда послѣ раскрытія скобокъ и приведенія получается многочленъ $f_2(x)$ нѣкоторой степени m_2, которая не выше $m_1 - 1$. Такимъ образомъ получается тожество

$$f_1(x) - g(x)\, q_2(x) = f_2(x).$$

Если степень m_2 многочлена $f_2(x)$ также не ниже n, то, подвергая его тому же ряду дѣйствій, какъ и многочлены $f(x)$ и $f_1(x)$, мы приходимъ къ новому тожеству вида

$$f_2(x) - g(x)\, q_3(x) = f_3(x),$$

гдѣ $q_3(x)$ есть цѣлое одночленное частное отъ дѣленія высшаго члена многочлена $f_2(x)$ на высшій членъ дѣлителя $g(x)$, $f_3(x)$ — нѣкоторый многочленъ степени m_3, которая не выше $m_2 - 1$. Продолжая разсуждать такимъ образомъ, получимъ рядъ многочленовъ $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots$, степени которыхъ $m_1, m_2, \ldots$ понижаются послѣдовательно по крайней мѣрѣ на единицу; поэтому послѣ конечнаго ряда операцій мы получимъ наконецъ тожество

$$f_{k-1}(x) - g(x)\, q_k(x) = f_k(x),$$

гдѣ $f_k(x)$ есть многочленъ, степень котораго ниже n, а $q_k(x)$ — цѣлое одночленное частное отъ дѣленія высшаго члена многочлена $f_{k-1}(x)$ на высшій членъ дѣлителя $g(x)$. Сложивъ полученныя тожества

$$f(x) - g(x)\, q_1(x) = f_1(x), \quad f_1(x) - g(x)\, q_2(x) = f_2(x),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_{k-2}(x) - g(x)\, q_{k-1}(x) = f_{k-1}(x), \quad f_{k-1}(x) - g(x)\, q_k(x) = f_k(x),$$

отнявъ отъ обѣихъ частей сумму $f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{k-1}(x)$ и вынося за скобки $g(x)$, приходимъ къ тожеству

$$f(x) - g(x)\,[q_1(x) + q_2(x) + \cdots + q_k(x)] = f_k(x),$$

въ которомъ степень многочлена $f_k(x)$ ниже степени n дѣлителя $g(x)$. Обозначая многочлены $q_1(x) + q_2(x) + \cdots + q_k(x)$ и $f_k(x)$ соотвѣтствено черезъ $q(x)$ и $r(x)$, получимъ

$$f(x) = g(x)\, q(x) + r(x).$$

Многочлены $q(x)$ и $r(x)$ удовлетворяютъ соотвѣтственно опредѣленію частнаго и остатка при дѣленіи многочлена $f(x)$ на $g(x)$ [см. **2**, опредѣленіе 4^0], такъ какъ степень многочлена $r(x)$ [или же $f_k(x)$] ниже степени дѣлителя $g(x)$. Такимъ образомъ возможность дѣленія многочлена $f(x)$ на многочленъ $g(x)$ доказана*).

З а м ѣ ч а н і е. Такъ какъ числа $m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}$ образуютъ нисходящій рядъ, то и степени $m-n$, $m_1 - n, \ldots, m_{k-1} - n$ одночленовъ $q_1(x)$, $q_2(x), \ldots, q_k(x)$ относительно x убываютъ, а потому среди членовъ $q_1(x)$, $q_2(x), \ldots, q_k(x)$ частнаго $q(x)$ нѣтъ подобныхъ. Такимъ образомъ изложенный выше обычный процессъ дѣленія много-

*) Предложеніе о возможности дѣленія можно также установить индуктивнымъ путемъ, какъ это сдѣлано въ первой изъ упомянутыхъ выше статей прив.-доц. В. Ф. К а г а н а.

членовъ даетъ намъ членъ за членомъ частное, расположенное по убывающимъ степенямъ буквы x.

Теорема II. Всякій многочленъ $f(x)$ можно раздѣлить нацѣло на многочленъ нулевой степени съ единственнымъ коэффиціентомъ, не равнымъ по условію нулю, т. е. на число, отличное отъ нуля.

Пусть требуется раздѣлить многочленъ (1) на отличное отъ нуля число b. Раздѣливъ многочленъ (1) почленно на b, получимъ новый многочленъ

$$(6)\qquad \frac{a_0}{b}x^m+\frac{a_1}{b}x^{m-1}+\cdots+\frac{a_{m-1}}{b}x+\frac{a_m}{b}.$$

Изъ тожества

$$a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m=$$
$$=\left(\frac{a_0}{b}x^m+\frac{a_1}{b}x^{m-1}+\cdots+\frac{a_{m-1}}{b}x+\frac{a_m}{b}\right)b,$$

провѣряемаго выполненіемъ умноженія въ правой части, слѣдуетъ, что многочленъ (6) есть [см. **2**, опредѣленіе 6^0] частное отъ дѣленія многочлена (1) на b.

4. Установивъ возможность дѣленія, докажемъ теперь, что при дѣленіи съ остаткомъ частное и остатокъ суть многочлены вполнѣ опредѣленнаго вида; другими словами, покажемъ, что дѣйствіе дѣленія съ остаткомъ есть дѣйствіе однозначное, т. е. — заданіемъ дѣлимаго и дѣлителя степень и коэффиціенты частнаго и остатка вполнѣ опредѣляются. Затѣмъ мы докажемъ, что и дѣленіе нацѣло (если оно возможно) также однозначно, т. е. — что заданіемъ дѣлимаго и дѣлителя вполнѣ опредѣляются степень и коэффиціенты частнаго, конечно, исключая случай дѣленія на одночленъ нулевой степени, равный нулю.

Съ этой цѣлью мы установимъ законъ тожества многочленовъ, а для этого прежде всего докажемъ, что остатокъ отъ дѣленія всякаго многочлена на двучленъ вида $x-a$ имѣетъ вполнѣ опредѣленное значеніе.

Теорема III. Остатокъ отъ дѣленія цѣлаго относительно x многочлена на двучленъ $x-a$ (a — данное число) равенъ числовому значенію дѣлимаго при $x=a$.

Пусть цѣлый многочленъ $f(x)$ раздѣленъ съ остаткомъ на двучленъ $x-a$. Остатокъ отъ дѣленія многочлена $f(x)$ на $x-a$ есть многочленъ степени ниже первой, т. е. нулевой степени. Слѣдовательно, раздѣливъ $f(x)$ на $x-a$, мы приходимъ къ тожеству

$$(7)\qquad f(x)=(x-a)\,q(x)+r,$$

гдѣ $q(x)$ — частное, а r — независящій отъ x остатокъ отъ дѣленія многочлена $f(x)$ на $x-a$. Полагая въ этомъ тожествѣ $x=a$, получимъ, что

$$f(a)=(a-a)\,q(a)+r=r,$$

откуда $r=f(a)$, т. е. остатокъ равенъ значенію дѣлимаго при $x=a$.

Замѣчаніе. Итакъ, какимъ бы путемъ мы ни произвели дѣленіе даннаго многочлена $f(x)$ на $x-a$, остатокъ отъ этого дѣленія долженъ имѣть вполнѣ опредѣленное значеніе; именно этотъ остатокъ, равный $f(a)$, мы получимъ также и въ томъ случаѣ, если выполнимъ дѣленіе по обычному способу, указанному въ теоремѣ I.

Теорема IV. Для того, чтобы многочленъ $f(x)$ могъ дѣлиться на двучленъ $x-a$ безъ остатка, необходимо и достаточно, чтобы число $f(a)$ равнялось нулю, т. е.— чтобы число a было корнемъ уравненія $f(x)=0$.

Дѣйствительно, если многочленъ $f(x)$ дѣлится нацѣло на $x-a$, то справедливо тожество

$$(8)\quad f(x)=(x-a)\,q(x), \quad \text{или} \quad (9)\quad f(x)=(x-a)\,q(x)+0,$$

гдѣ $q(x)$ — частное отъ дѣленія $f(x)$ на $x-a$, откуда слѣдуетъ, что остатокъ отъ этого дѣленія равенъ нулю; но этотъ же остатокъ равенъ, по предыдущей теоремѣ, $f(a)$, а потому $f(a)=0$. Наоборотъ, пусть $f(a)=0$. Выполнивъ дѣленіе $f(x)$ на $x-a$ обычнымъ путемъ, приходимъ къ тожеству (7), гдѣ $q(x)$ — частное, а r — остатокъ. По предыдущей теоремѣ $r=f(a)$, т. е. $r=0$, такъ какъ $f(a)=0$. Поэтому тожество (7) переходитъ въ тожество (9) или же въ тожество (8), откуда слѣдуетъ, что многочленъ $f(x)$ дѣлится на $x-a$.

Замѣчанія. 1) Изъ доказанной только что теоремы вытекаетъ дизъюнкція дѣлимости или не дѣлимости нацѣло многочлена $f(x)$ на $x-a$, такъ какъ всякій данный многочленъ $f(x)$ или дѣлится или не дѣлится безъ остатка на $f(x)$, смотря по тому, равно $f(a)$ нулю или нѣтъ.

2) Если $f(a)=0$, то частное отъ дѣленія многочлена $f(x)$ нацѣло на $x-a$ можетъ быть найдено обычнымъ путемъ, указаннымъ въ теоремѣ I; но однозначность этого частнаго пока еще, конечно, не установлена.

Теорема V. Если многочленъ m-ой степени $f(x)$ обращается въ нуль при каждомъ изъ m неравныхъ значеній $a_1, a_2, \ldots, a_m$ буквы x, то справедливо тожество

$$(10)\quad f(x)=a_0\,(x-a_1)\,(x-a_2)\ldots(x-a_m),$$

гдѣ a_0 — коэффиціентъ высшаго члена многочлена $f(x)$.

Примѣчаніе. Въ этой теоремѣ степень m многочлена $f(x)$ по условію не меньше единицы. При $m=1$ тожество (10) принимаетъ видъ

$$f(x)=a_0\,(x-a_1).$$

Теорема справедлива для многочлена первой степени вида $f(x)=a_0x+a_1$. Въ этомъ случаѣ по условію $f(a_1)=0$, а потому (теорема IV) многочленъ $f(x)$ дѣлится на $x-a_1$. Выполняя дѣленіе, находимъ, что частное равно a_0. Поэтому справедливо тожество

$$f(x)=a_0\,(x-a_1).$$

Теперь покажемъ, что если, при m цѣломъ и большемъ единицы, теорема вѣрна для всякаго многочлена $(m-1)$-ой степени, то она вѣрна и для всякаго многочлена m-ой степени. Въ самомъ дѣлѣ, пусть многочленъ m-ой степени обращается въ нуль для каждаго изъ m неравныхъ значенiй $a_1, a_2, \ldots, a_m$ буквы x. Такъ какъ по условiю $f(a_1)=0$, то (теорема IV) многочленъ $f(x)$ дѣлится на $x-a_1$. Выполняя дѣленiе по способу, указанному въ теоремѣ I, получимъ въ частномъ нѣкоторый многочленъ $(m-1)$-ой степени $f_1(x)$, высшiй членъ котораго есть a_0x^{m-1}. Итакъ имѣемъ тожественно

$$(11) \quad f(x)=(x-a_1)f_1(x).$$

Полагая въ тожествѣ (11) x послѣдовательно равнымъ $a_2, \ldots, a_m$, приходимъ къ равенствамъ

$$f(a_i)=(a_i-a_1)f_1(a_i) \text{ при } i=2,\ 3, \ldots,\ m,$$

откуда

$$(a_i-a_1)f_1(a_i)=0, \quad i=2,\ 3, \ldots,\ m,$$

такъ какъ по условiю $f(a_i)=0$ $(i=2,\ 3, \ldots,\ m)$. Но каждая изъ разностей a_i-a_1 при $i=2,\ 3, \ldots,\ m$ отлична отъ нуля, такъ какъ числа $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_m$ не равны по условiю другъ другу; поэтому

$$f_1(a_i)=0 \quad \text{при} \quad i=2,\ 3, \ldots,\ m,$$

т. е. многочленъ $(m-1)$-ой степени обращается въ нуль для каждаго изъ $m-1$ неравныхъ значенiй $a_2,\ a_3, \ldots,$ буквы x, откуда слѣдуетъ, по принятому нами допущенiю, справедливость тожества

$$(12) \quad f_1(x)=a_0(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_m),$$

такъ какъ коэффицiентъ высшаго члена многочлена $f_1(x)$ есть a_0. Подставляя изъ тожества (12) значенiе многочлена $f_1(x)$ въ тожество (11), получимъ тожество (10); такимъ образомъ теорема доказана.

Слѣдствiе. *Многочленъ m-ой степени не можетъ обращаться въ нуль болѣе, чѣмъ при m неравныхъ значенiяхъ буквы x.*

Дѣйствительно, пусть многочленъ m-ой степени $f(x)$ обращается въ нуль для каждаго изъ m неравныхъ значенiй $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_m$ буквы x. Тогда, по доказанному, справедливо тожество (10), гдѣ a_0 не равный нулю коэффицiентъ высшаго члена многочлена $f(x)$. Полагая въ обѣихъ частяхъ тожества (10) $x=c$, гдѣ c — любое число, отличное отъ каждаго изъ чиселъ $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_m$, получимъ

$$f(c)=a_0(c-a_1)(c-a_2)\ldots(c-a_m).$$

Такъ какъ $a_0 \neq 0$ и каждая изъ разностей $c-a_1,\ c-a_2, \ldots,$ $c-a_m$ отлична отъ нуля, то и $f(c) \neq 0$. Итакъ, многочленъ m-ой степени $f(x)$, обращаясь въ нуль для каждаго изъ m неравныхъ значенiй

$a_1, a_2, \ldots, a_m$, не можетъ уже обратиться въ нуль ни для какого новаго $(m+1)$-го значенія x.

Замѣчаніе. Уравненіе $f(x)=0$, лѣвая часть котораго есть многочленъ m-ой степени, называется алгебрическимъ уравненіемъ m-ой степени. Изъ только что доказаннаго предложенія вытекаетъ, что алгебрическое уравненіе m-ой степени не можетъ имѣть болѣе m неравныхъ корней.

Теоремы VI. 1^0. Если цѣлая функція отъ x

$$(13) \quad a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m$$

обращается въ нуль для каждаго изъ $m+1$ неравныхъ между собою чиселъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m-1}$, то каждый изъ ея коэффиціентовъ $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m$ равенъ нулю.

2^0. Если цѣлая функція отъ x

$$a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m$$

тожественно (т. е. для всякаго значенія x) равна нулю, то каждый изъ ея коэффиціентовъ $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m$ равенъ нулю.

3^0. Если двѣ цѣлыхъ функціи отъ x

$$(14) \quad a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m$$

и

$$(15) \quad b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m$$

равны тожественно (т. е. при всякомъ значеніи x), то онѣ равны почленно, т. е. [см. **2**, опредѣленіе 7^0] коэффиціенты $a_0, a_1, \ldots, a_m$ выраженія (14) равны соотвѣтственно коэффиціентамъ $b_0, b_1, \ldots, b_m$ при соотвѣтственно подобныхъ членахъ выраженія (15)

Примѣчаніе. Въ текстѣ каждой изъ теоремъ 1^0, 2^0, 3^0 можно терминъ „цѣлая функція“ замѣнить терминомъ „многочленъ“ или же „многочленъ m-ой степени въ широкомъ смыслѣ слова“ [см. **2**, опредѣленія 1^0, 2^0, 3^0, замѣчаніе 1].

Если бы коэффиціентъ a_0 выраженія (13) былъ отличенъ отъ нуля, то оно было бы многочленомъ m-ой степени въ собственномъ, узкомъ смыслѣ слова, а потому, по слѣдствію изъ теоремы V, оно не могло бы обращаться въ нуль при $m+1$ неравныхъ значеніяхъ x. Значитъ $a_0=0$.

Если бы каждый изъ коэффиціентовъ $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ выраженія (13) равнялся нулю и коэффиціентъ a_k $(k=1, 2, \ldots, m-1)$ былъ первымъ сначала отличнымъ отъ нуля коэффиціентомъ, то выраженіе (13), начинаясь членомъ a_kx^{m-k}, было бы многочленомъ $(m-k)$-ой степени въ собственномъ смыслѣ слова, а потому, въ силу того же слѣдствія, оно могло бы обращаться въ нуль не болѣе, чѣмъ при $m-k$ различныхъ значеніяхъ x, и не обращалось бы поэтому въ нуль при $m+1$ значеніяхъ x, какъ это дано въ условіи. Поэтому $a_k=0$ $(k=1, 2, \ldots, m-1)$. Итакъ, $a_0=a_1=a_2=\cdots=a_{m-1}=0$, и выраженіе (13) приводится къ одночлену нулевой степени a_m, который обращается по условію въ нуль при $x = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m, m+1)$, а потому и $a_m = 0$. Итакъ теорема 1^0 доказана.

Для доказательства теоремы 2^0 достаточно замѣтить, что если выраженіе вида (13) обращается въ нуль тожественно, то оно должно обращаться въ нуль и для каждаго изъ $m+1$ любыхъ не равныхъ между собою чиселъ.

Согласно съ условіемъ теоремы 3^0 разность многочленовъ (14) и (15), которая можетъ быть записана въ видѣ

$$(16)\quad (a_0 - b_0)x^m + (a_1 - b_1)x^{m-1} + \cdots + (a_{m-1} - b_{m-1})x + (a_m - b_m),$$

тожественно равна нулю. Итакъ многочленъ (16) тожественно равенъ нулю; слѣдовательно, по предыдущей теоремѣ,

$$a_0 - b_0 = 0, \quad a_1 - b_1 = 0, \ldots, \quad a_{m-1} - b_{m-1} = 0, \quad a_m - b_m = 0,$$

т. е. $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \ldots, a_m = b_m$.

Замѣчанія. 1) Доказанныя только что предложенія примѣнимы также и къ многочленамъ (т. е., собственно, одночленамъ) нулевой степени, обращаясь въ простую тавтологію.

2) Предложеніе 3^0 примѣнимо также въ извѣстномъ смыслѣ и къ двумъ многочленамъ разныхъ степеней, если подъ многочленами подразумѣвать многочлены въ широкомъ смыслѣ слова. Пусть дано, что многочлены

$$(17)\quad a_0 x^m + \cdots + a_{m-1}x + a_m \quad \text{и} \quad b^0 x^n + \cdots + b_{n-1}x + b_n$$

m-ой и n-ой степени въ широкомъ смыслѣ слова равны тожественно, при чемъ дано, что $m > n$. Дополняя второй изъ многочленовъ членами съ коэффиціентами, равными нулю, мы приходимъ къ тожеству двухъ многочленовъ

$$a_0 x^m + \cdots + a_{m-n-1}x^{n+1} + a_{m-n}x^n + \cdots + a_m =$$
$$= 0 \,.\, x^m + 0 \,.\, x^{m-1} + \cdots + 0 \,.\, x^{n+1} + b_0 x^n + \cdots + b_n,$$

изъ котораго по теоремѣ VI, 3^0 вытекаютъ равенства

$$a_0 = 0, \; a_1 = 0, \ldots, \; a_{m-n-1} = 0; \quad a_{m-n} = b_0, \; a_{m-n+1} = b_1, \ldots, \; a_m = b_n.$$

Изъ этихъ равенствъ слѣдуетъ, что тожественно равные многочлены всегда оказываются почленно равными многочленами опредѣленной и одинаковой степени въ собственномъ смыслѣ или же равными одночленами нулевой степени, т. е. просто равными числами.

Теорема VII. Многочленъ m-ой степени въ собственномъ смыслѣ слова не можетъ быть тожественно равенъ другому многочлену, степень n котораго ниже m.

Примѣчаніе. Второй многочленъ можно разсматривать, какъ многочленъ n-ой степени въ широкомъ смыслѣ слова.

Пусть даны два многочлена

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m \quad \text{и} \quad b_0x^n + \cdots + b_n.$$

Пусть по условію $m > n$, и $a_0 \neq 0$; вопросъ же о томъ, равенъ нулю коэффиціентъ b_0 высшаго члена второго многочлена или нѣтъ, остается открытымъ. Такимъ образомъ многочленъ высшей степени есть многочленъ m-ой степени въ узкомъ смыслѣ слова, а второй — многочленъ n-ой степени въ широкомъ смыслѣ. Требуется доказать, что эти многочлены не могутъ быть тожественно равны.

Допустивъ, что разсматриваемые многочлены тожественно равны, и дополнивъ второй многочленъ членами съ коэффиціентами, равными нулю, мы приходимъ къ тожественному равенству многочленовъ

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m \quad \text{и} \quad 0\,.\,x^m + \cdots + 0\,.\,x^{n+1} + b_0x^n + \cdots + b_n,$$

откуда, при помощи теоремы VI, 3^0, выводимъ, что $a_0 = 0$. Но этотъ выводъ невозможенъ, такъ какъ, въ силу неравенства $m > n$, $m \geqq 1$, а потому [см. **2**, опредѣленія 2^0, 3^0] $a_0 \neq 0$.

5. Установивъ законъ тожества многочленовъ [см. VI, 3^0], перейдемъ къ доказательству однозначности дѣйствія дѣленія многочленовъ съ остаткомъ, а также къ доказательству однозначности дѣленія многочленовъ нацѣло, при чемъ, конечно, исключается случай дѣленія нацѣло на одночленъ, равный нулю.

Теорема VIII. Дѣленіе даннаго многочлена $f(x)$ на данный многочленъ $g(x)$, степень котораго не ниже единицы, есть дѣйствіе однозначное.

Пусть при дѣленіи многочлена $f(x)$ на многочленъ $g(x)$, степень котораго n не ниже единицы, мы получили одинъ разъ частное $q(x)$ и остатокъ $r(x)$, а въ другой разъ — частное $q_1(x)$ и остатокъ $r_1(x)$. Тогда, согласно съ опредѣленіемъ дѣленія многочленовъ, справедливы тожества

$$f(x) = g(x)\,q(x) + r(x) \quad \text{и} \quad f(x) = g(x)\,q_1(x) + r_1(x),$$

изъ которыхъ вытекаетъ тожество

$$g(x)\,q(x) + r(x) = g(x)\,q_1(x) + r_1(x).$$

Перенося въ этомъ тожествѣ членъ $r(x)$ въ правую, а членъ $g(x)\,q_1(x)$ — въ лѣвую часть и вынося $g(x)$ за скобки, получимъ тожество

$$(18) \quad g(x)\,[q(x) - q_1(x)] = r_1(x) - r(x).$$

Допустимъ, что многочлены $q(x)$ и $q_1(x)$ не равны почленно. Тогда разность $q(x) - q_1(x)$ даетъ послѣ приведенія многочленъ $h(x)$ нѣкоторой степени ν съ высшимъ (и, быть можетъ, единственнымъ) членомъ c_0x^ν, коэффиціентъ котораго c_0 отличенъ отъ нуля. Запишемъ тожество (18) въ видѣ

$$(19) \quad g(x)\,h(x) = r_1(x) - r(x).$$

Раскрывая скобки въ первой части, дѣлая приведеніе въ обѣихъ частяхъ и называя [см. **2**, 2^0] отличный по условію отъ нуля коэффиціентъ высшаго члена многочлена $g(x)$ черезъ b_0, получимъ въ первой части многочленъ степени $n+\nu$ съ коэффиціентомъ b_0c_0 неравнымъ нулю, такъ какъ $b_0 \neq 0$ и $c_0 \neq 0$. Итакъ лѣвая часть тожества (19) есть многочленъ $(n+\nu)$-ой степени въ собственномъ смыслѣ, а правая — многочленъ степени не выше $n-1$, такъ какъ степень каждаго изъ многочленовъ $r_1(x)$ и $r(x)$, по опредѣленію дѣленія съ остаткомъ на многочленъ n-ой степени $g(x)$, ниже n. Слѣдовательно первая часть тожества (19) есть многочленъ степени не ниже n-ой въ собственномъ смыслѣ, а вторая — многочленъ степени ниже n-ой, а такое тожество (см. VII) невозможно. Значитъ многочлены $q(x)$ и $q_1(x)$ равны почленно. Поэтому разность $q(x)$ и $q_1(x)$ тожественно равна нулю, а потому тожество (18) можно записать въ видѣ $r_1(x)-r(x)$, или $r_1(x)=r(x)$, откуда, по теоремѣ VI, 3^0 [см. замѣчаніе 2) къ теоремѣ VI, 3^0], слѣдуетъ, что и остатки $r_1(x)$ и $r(x)$ равны почленно.

Итакъ частное и остатокъ отъ дѣленія данныхъ многочленовъ суть многочлены вполнѣ опредѣленнаго вида, что и доказываетъ справедливость теоремы.

Замѣчаніе. Многочлены, получаемые въ частномъ и остаткѣ, всегда могутъ быть опредѣлены обычнымъ способомъ, указаннымъ въ теоремѣ I, и какимъ бы другимъ способомъ мы ни выполнили дѣленіе, мы всегда получимъ то же частное и тотъ же остатокъ.

Слѣдствіе. Всякій многочленъ $f(x)$ либо дѣлится нацѣло либо не дѣлится на данный многочленъ $g(x)$, степень котораго не ниже единицы.

Дѣйствительно, изъ опредѣленія дѣленія нацѣло [см. **2**, 5^0, 6^0] слѣдуетъ, что для дѣлимости многочлена $f(x)$ на $g(x)$ необходимо и достаточно, чтобы при дѣленіи тѣхъ же многочленовъ съ остаткомъ могъ получиться остатокъ нулевой степени, равный нулю; для того же, чтобы многочленъ $f(x)$ не дѣлился нацѣло на $g(x)$, необходимо и достаточно, чтобы при дѣленіи $f(x)$ на $g(x)$ съ остаткомъ могъ получиться лишь такой остатокъ, не всѣ коэффиціенты котораго равны нулю. Но изъ однозначности дѣленія съ остаткомъ слѣдуетъ, что первый изъ этихъ двухъ случаевъ исключаетъ второй.

Теорема IX. Дѣленіе многочлена $f(x)$ на неравный нулю одночленъ b есть дѣйствіе однозначное.

Въ разсматриваемомъ случаѣ [см. **2**, 4^0, 5^0, замѣчаніе 1), 6^0] можетъ быть рѣчь лишь о дѣленіи нацѣло.

Пусть при дѣленіи многочлена $f(x)$ на b могутъ быть получены два частныхъ $q(x)$ и $q_1(x)$. Тогда мы имѣемъ тожества $f(x)=bq(x)$ и $f(x)=bq_1(x)$, изъ которыхъ вытекаетъ тожество $bq(x)=bq_1(x)$, откуда имѣемъ тожественно $q(x)=q_1(x)$, такъ какъ $b \neq 0$; изъ послѣдняго же тожества [см. VI, 3^0] вытекаетъ почленное равенство частныхъ $q(x)$ и $q_1(x)$.

Теоремы X. 1^0. Дѣленіе многочлена $f(x)$, не всѣ коэффиціенты котораго послѣ приведенія равны нулю, на одночленъ, равный нулю, невозможно.

2^0. Дѣленіе нуля на нуль, — если разсматривать дѣлимое и дѣлитель, какъ одночлены нулевой степени относительно x, а дѣленіе — какъ частный случай дѣленія многочленовъ, — есть дѣйствіе неопредѣленное.

Примѣчаніе. Въ обѣихъ теоремахъ, конечно, идетъ рѣчь о дѣленіи нацѣло.

Если бы при дѣленіи многочлена $f(x)$ на нуль получился въ частномъ многочленъ $q(x)$, то мы имѣли бы тожество $f(x) = q(x) \,.\, 0$, или $f(x) = 0$, откуда вытекало бы [см. VI, 3^0], что каждый изъ коэффиціентовъ многочлена $f(x)$ равенъ нулю, что противно условію.

Для доказательства теоремы 2^0 достаточно замѣтить, что любой многочленъ $q(x)$ удовлетворяетъ тожеству $0 = q(x) \,.\, 0$.

Замѣчаніе. Изъ слѣдствія изъ теоремы VIII и изъ теоремъ IX, X вытекаетъ, что дѣленіе многочленовъ нацѣло, въ случаѣ его возможности, есть дѣйствіе однозначное, если исключить дѣленіе на нуль.

6. Приведенное выше изложеніе теоріи дѣленія многочленовъ отличается отъ обычнаго изложенія лишь перегруппировкой матеріала: послѣ доказательства возможности дѣленія сейчасъ же доказано предложеніе объ остаткѣ отъ дѣленія на $x - a$, а изъ этого предложенія выведены дальнѣйшія теоремы. Всѣ предыдущія разсужденія остаются вѣрными независимо отъ того, будутъ ли коэффиціенты данныхъ многочленовъ и произвольныя значенія x дѣйствительными или комплексными числами.

Въ заключеніе укажемъ на слѣдующихъ два обстоятельства.

1) Законъ тожества многочленовъ даетъ возможность развить обычнымъ путемъ теорію дѣленія многочленовъ, расположенныхъ по восходящимъ степенямъ буквы x.

2) Опредѣленія дѣленія многочленовъ съ остаткомъ и нацѣло [см. **2**, 4^0, 5^0, 6^0] можно соединить вмѣстѣ въ слѣдующее опредѣленіе: раздѣлить многочленъ $f(x)$ на многочленъ $g(x)$ значитъ найти такихъ два многочлена $q(x)$ (частное) и $r(x)$ (остатокъ), которыя удовлетворяютъ тожеству $f(x) = g(x)\,q(x) + r(x)$, при чемъ многочленъ $r(x)$ долженъ обладать однимъ изъ двухъ свойствъ: 1) либо его степень должна быть ниже степени дѣлителя $g(x)$, 2) либо онъ долженъ быть одночленомъ, равнымъ нулю. Такое опредѣленіе приводитъ къ нѣкоторому сокращенію изложенія, давая возможность соединить теоремы I, II, а также VIII, IX.

Радіоэлементы и періодическая система.

Профессора К. Фаянса.

(*Продолженіе* *).

5. Химическія свойства радіоэлементовъ.

Выяснить этотъ трудный вопросъ удалось недавно, когда узнали, что радіоактивные методы даютъ намъ для различенія элементовъ гораздо болѣе тонкій способъ, чѣмъ химическіе методы. Если бы мы для изслѣдованія радіоэлементовъ располагали, какъ для прочихъ элементовъ, исключительно химическими методами, то, какъ мы покажемъ, исчезло бы большое разнообразіе, и послѣдніе два ряда періодической системы ничѣмъ не отличались бы отъ прочихъ рядовъ.

Дѣйствительно, обычный путь для установленія новыхъ элементовъ основанъ на отдѣленіи ихъ изъ смѣсей съ другими элементами, причемъ пользуются различіемъ ихъ химическихъ отношеній. Во многихъ случаяхъ, какъ у рѣдкихъ земель, для этой цѣли приходится уже прибѣгать къ очень тонкимъ различіямъ, напримѣръ, къ неодинаковой растворимости солей. Какъ извѣстно, чрезвычайно цѣнный способъ для нахожденія новыхъ элементовъ, дала спектроскопія. Всякій разъ какъ наблюденіе открывало новый спектръ, съ помощью химическихъ методовъ удавалось также изолировать его носителя, т. е. новый элементъ. А въ самое послѣднее время на помощь пришелъ еще новый методъ — радіоактивность.

Сильная активность баріевыхъ солей, выдѣленныхъ изъ смоляной обманки, указывала на существованіе новаго элемента; съ помощью фракціонированной кристаллизаціи супругамъ Кюри удалось, дѣйствительно отдѣлить отъ нея радіевыя соли въ чистомъ видѣ. Точно такъ же и активность висмута въ смоляной обманкѣ приписали присутствію новаго элемента полонія, и этотъ послѣдній тоже удалось отдѣлить отъ висмута, если и не въ совершенно чистомъ видѣ, то все же въ весьма концентрированной формѣ. Въ этихъ случаяхъ, слѣдовательно, радіоактивныя свойства принадлежатъ вмѣстѣ съ тѣмъ и химически новымъ индивидамъ, и въ періодической системѣ нашлись свободныя мѣста для этихъ двухъ элементовъ: для радія — во второй группѣ послѣдняго горизонтальнаго ряда, а для полонія, какъ нашелъ Марквальдъ (Marckwald), — мѣсто высшаго гомолога теллура. Равнымъ образомъ для актинія подходитъ мѣсто въ третьей группѣ послѣдняго горизонтальнаго ряда.

*) См. „Вѣстникъ“, № 625.

Но оказывается—это можно сказать отнюдь не о всѣхъ радіоэлементахъ. Такъ, напримѣръ, свинецъ, выдѣляемый изъ урановыхъ минераловъ, всегда бываетъ активенъ, а ближайшее радіоактивное изслѣдованіе показало, что причина этой радіоактивности лежитъ въ радіи *D*, собственно, въ продуктахъ его превращенія: радіи *E* и радіи *F*. Тогда попробовали отдѣлить радій *D* отъ свинца смоляной обманки, но всѣ усилія были совершенно безуспѣшны: нѣтъ ни одной такой реакціи, въ которой радій *D* отличался бы отъ свинца, и самыя обстоятельныя попытки достигнуть съ помощью фракціонированнаго осажденія, окисленія, кристаллизаціи или выпариванія*) увеличенія количества радія *D* въ смѣси его со свинцомъ привели къ совершенно отрицательнымъ результатамъ. После всѣхъ процедуръ отношеніе радія *D* къ свинцу остается неизмѣннымъ. Эти два элемента не могутъ, слѣдовательно, быть отдѣлены другъ отъ друга химическими методами, и все же, однако, радій *D* представляетъ собой, конечно, элементъ, отличный отъ свинца; его можно освободить отъ свинца путемъ разложенія съ помощью радіевой эманаціи, и мы всегда можемъ легко узнать его по его радіоактивнымъ свойствамъ.

Точно такъ же обстоитъ дѣло съ торіемъ, выдѣляемымъ изъ смоляной обманки. Онъ обнаруживаетъ активность, которая превышаетъ активность обыкновеннаго торія почти въ милліонъ разъ; носителемъ этой активности является іоній, материнское вещество радія; но, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, не удалось увеличить количества іонія въ смѣси его съ торіемъ. Мезоторій и радій тоже представляютъ собой два элемента, которые, повидимому, совершенно не отдѣлимы другъ отъ друга химическими методами, хотя и легко могутъ быть отличены одинъ отъ другого по своимъ радіоактивнымъ свойствамъ. Такіе элементы обнаруживаютъ, слѣдовательно, степень химической аналогіи, какая до открытія радіоактивности не была вовсе извѣстна. Если бы удалось отдѣлить достаточно большія количества радія *D*, іонія или мезоторія въ чистомъ видѣ, то химикъ принялъ бы ихъ соотвѣтственно за свинецъ, торій и радій, отъ которыхъ ихъ невозможно отличить химическими методами. Только благодаря радіоактивнымъ методамъ мы и познали, вообще, эти элементы въ качествѣ новыхъ индивидовъ.

Это явленіе повторяется у большинства радіоэлементовъ. Химическое изслѣдованіе всѣхъ радіоэлементовъ, долговѣчность которыхъ достаточно велика для такой цѣли, показало, что они либо вполнѣ подобны въ химическомъ отношеніи свинцу, таллію, висмуту, радію или урану, либо же какъ, напримѣръ, актиній, бревій (уранъ X_2), полоній, обнаруживаютъ химическія свойства, доказывающія съ несомнѣнностью, что имъ принадлежатъ мѣста въ періодической системѣ, которыя раньше были свободны. Это открытіе устранило большія затрудненія, съ которыми было сопряжено включеніе радіоэлементовъ въ ряды періодической системы.

---

*) Ср. между прочимъ F. Paneth и G. v. Hevesy, Wien. Ber. 122, (IIa) 993 (1913).

6. Положенie радiевыхъ элементовъ въ перiодической системѣ.

Перiодическая система представляетъ собой классификацiю элементовъ на основанiи ихъ *химическихъ* свойствъ, и число мѣстъ въ системѣ соотвѣтствуетъ числу *различныхъ химическихъ* индивидовъ. Поэтому мы должны *элементамъ, неотличающимся другъ отъ друга въ химическомъ отношенiи*, отвести *одно и то же мѣсто* въ системѣ. Такимъ образомъ оказывается, что несмотря на большое число новыхъ элементовъ, открытыхъ благодаря радiоактивности, число химическихъ типовъ, однако, не больше того, которое допускается перiодической системой. Если отведемъ химически неотличающимся другъ другъ отъ друга элементамъ одно общее мѣсто, то получимъ таблицу 2. Принадлежность огромнаго большинства элементовъ къ соотвѣтственнымъ группамъ установлена экспериментально *); для очень кратковѣчныхъ элементовъ она выведена на основанiи закономѣрностей, о которыхъ будетъ еще рѣчь ниже. Цифры, стоящiя подъ каждымъ элементомъ на таблицѣ 1, относятся къ тѣмъ группамъ перiодической системы, къ которымъ принадлежатъ эти элементы, а цифры въ скобкахъ являются выведенными. Какъ видимъ, почти *каждое мѣсто* системы отъ урана до таллiя соотвѣтствуетъ *группѣ въ нѣсколько элементовъ*. Мною было внесено предложенiе **) назвать такую группу именемъ *плеяды*; члены плеяды называются по *Содди* ***) изотопическими элементами или *изотопами*.

До сихъ поръ мы принимали во вниманiе только химическiя свойства элементовъ. Но, согласно обычному воззрѣнiю, каждое мѣсто въ перiодической системѣ соотвѣтствуетъ не только опредѣленному химическому типу, но также и *опредѣленному атомному вѣсу*; считалось основой перiодической системы, что атомный вѣсъ однозначно опредѣляетъ химическiя свойства элемента. Въ этомъ отношенiи мы узнаемъ нѣчто совершенно новое изъ нашей таблицы 2, на которой элементы расположены снизу вверхъ по убывающимъ атомнымъ вѣсамъ ****). Эта таблица показываетъ не только, что у элементовъ одной плеяды, имѣющихъ совершенно *одинаковыя химическiя отношенiя, атомные вѣса неодинаковы*, и разность ихъ доходитъ до 8 единицъ, но, больше того, элементы съ одинаковымъ *атомнымъ вѣсомъ*, какъ, напримѣръ, Уранъ 2, Уранъ X_2 и Уранъ X_1, обладаютъ *совершенно различнымъ химическимъ характеромъ*. Фактъ, много разъ обсуждавшiйся въ наукѣ и разсматривавшiйся какъ исключенiе изъ перiодическаго закона, — а именно, что iодъ, принадлежащiй къ высшей (седьмой) группѣ, имѣетъ меньшiй атомный вѣсъ, чѣмъ теллуръ, принадлежащiй къ низшей (шестой) группѣ, -- оказывается весьма часто повторяющимся

---

*) Ср. въ особенности A. *Fleck*, Journ. Chem. Soc. 103, 381, 1052 (1913)

**) Ber. d. D. Phys. Ges. 15, 240 (1913).

***) The Chemistry of the Radio-Elements, II part., London, 1914.

****) Для простоты атомные вѣса округлены въ цѣлыхъ числахъ.

Таблица 2.

Атомный вѣсъ	0	I	II	III	IV	V	VI	Атомный вѣсъ
196		**Au**						196
200			**Hg**					200
204				**Tl** —				204
				AcD 4.7 мин.	**Pb** —			
208				ThD 3.1 мин.	ThD^2 —	**Bi** —		208
210				RaC_2 1.4 мин.	RaD 16 лѣтъ	RaE 5 дн.	**RaF** 136 дн.	210
					AcB 36 мин.	AcC 2,1 мин.		
212					ThB 10.6 час.	ThC_1 60 мин.	ThC_2 (10^{-11} сек.)	212
214					RaB 27 мин.	RaC_1 19.5 мин.	RaC' (10^{-6} сек.)	214
							AcA 0,002 сек.	
							ThA 0,14 сек.	
218	$AcEm$ 3.9 сек.						RaA 3 мин.	218
	$ThEm$ 53 сек.							
222	**RaEm** 3.85 дн.		AcX 11.5 дн.					222
			ThX 3.7 дн.					
226			**Ra** 1800 лѣтъ	**Ac** (30 лѣтъ)	$RdAc$ 19.5 дн.			226
			$MsTh_1$ 5.5 лѣтъ	$MsTh_2$ 6.2 час.	$RdTh$ 2 года			
230					J_0 10^5 лѣтъ			230
					Th $1.8 \cdot 10^{10}$ лѣтъ			
234					UX_1 24.6 дн.	$\mathbf{UX_2}$ 1 1 мин.	$\mathbf{U_2}$ (2×10^6 лѣтъ)	234
238							$\mathbf{U_1}$ 5×10^9 лѣтъ	238

явленіемъ въ двухъ самыхъ нижнихъ рядахъ періодической системы отъ урана до таллія. Такъ, напримѣръ, атомный вѣсъ радія *B*, принадлежащаго къ плеядѣ свинца, на шесть единицъ больше, чѣмъ висмутъ въ пятой группѣ.

Несмотря на этотъ совершенно своеобразный и чрезвычайно важный фактъ, можно возстановить связь двухъ послѣднихъ рядовъ системы съ прочими, если мы вспомнимъ, что нашими знаніями остальныхъ частей системы мы обязаны единственно химическимъ методамъ. Мы должны, слѣдовательно, спросить, какіе атомные вѣса мы приписали бы плеядамъ, которыя представляются намъ химически однообразными элементами, если бы мы и въ этомъ случаѣ располагали исключительно химическими методами. Намъ пришлось бы и здѣсь выдѣлить такой элементъ изъ минераловъ и опытнымъ путемъ опредѣлить его атомный вѣсъ. Мы получили бы нѣкоторое среднее значеніе. Различные элементы смѣси оказывали бы, конечно, различное вліяніе на это среднее значеніе, смотря по относительнымъ количествамъ отдѣльныхъ составныхъ частей въ смѣси. Легко понять, что элементъ встрѣчается въ количествахъ тѣмъ меньшихъ, чѣмъ меньше его вѣкъ. Степень вліянія отдѣльныхъ компонентовъ на средній атомный вѣсъ зависитъ, слѣдовательно, отъ продолжительности ихъ жизни. Если одинъ элементъ плеяды значительно долговѣчнѣе другихъ — это мы встрѣчаемъ, дѣйствительно, у всѣхъ извѣстныхъ намъ плеядъ (половины долговѣчностей элементовъ указаны на таблицѣ 2), — то можно безъ большой погрѣшности разсматривать его атомный вѣсъ, какъ подходящій въ общую періодическую систему. Если мы будемъ поступать такимъ образомъ, то получимъ для среднихъ атомныхъ вѣсовъ плеядъ значенія, принадлежащія элементамъ, напечатаннымъ въ таблицѣ 2 жирнымъ шрифтомъ; мы видимъ, что атомный вѣсъ правильно убываетъ справа налѣво, какъ въ прочихъ рядахъ періодической системы; такимъ образомъ совершенно исчезаетъ дѣйствительная неправильность атомныхъ вѣсовъ, причиняемая этими многочисленными элементами. Мы и въ этомъ отношеніи, слѣдовательно, получаемъ полную согласованность съ таблицей періодической системы.

Положеніе радіоэлементовъ въ періодической системѣ было вполнѣ выяснено лишь въ началѣ 1913 года, а именно, благодаря независимымъ работамъ А. Рёсселя*) (A. Russel) и автора**) настоящей статьи и нѣсколько позже появившейся работѣ Ф. Содди***). Но съ исторической точки зрѣнія заслуживаетъ упоминанія, что уже въ 1909 году Д. Стрёмгольмъ (D. Strömholm) и Т. Сведбергъ****) (T. Svedberg) намѣтили правильный путь для рѣшенія этой проблемы тѣмъ, что открыли полное сходство торія *X* и актинія *X* съ радіемъ также въ количественномъ отношеніи и отвели имъ одинаковое

*) Chem. News 107, 49 (1913).

**) K. Fajans, Physikal. Ztschr. 14, 131 и 136 (1913).

***) Chem. News. 107, 97 (1913).

****) Z. f. anorg. Ch. 61, 338; 63, 197 (1909).

съ послѣднимъ положеніе въ періодической системѣ. Содди*) примкнулъ къ этому взгляду и разработалъ съ этой тоики зрѣнія вопросъ объ установленной во многихъ случаяхъ неотдѣлимости радіоэлементовъ другъ отъ друга и отъ обыкновенныхъ элементовъ**). Помѣщенная выше таблица 2 установлена авторомъ и затѣмъ Содди одинаково по содержанію, и немного различно по формѣ.

(Окончаніе слѣдуетъ).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Международныя обозначенія единицъ и физическихъ величинъ. Для достиженія единства въ обозначеніяхъ единицъ и физическихъ величинъ, столь необходимаго при современномъ развитіи научной литературы, была образована особая международная коммиссія. Эта коммиссія опубликовала списокъ 32 знаковъ, принятыхъ ею для обозначенія важнѣйшихъ физическихъ величинъ. Обозначенія эти устанавливались послѣ опроса и обмѣна мнѣній между всѣми наиболѣе значительными научными обществами и учрежденіями. Эти знаки и величины суть слѣдующіе:

* l — длина, * m — масса, * t — время, * r — радіусъ, d — діаметръ, h — длина волны, V — объемъ (емкость), * $\alpha, \beta, \ldots$ — уголъ (дуга), * φ — фаза, v — скорость, * g — ускореніе силы тяжести, * n — число оборотовъ въ единицу времени, * η — коэффиціентъ полезнаго дѣйствія, p — давленіе, E — модуль упругости, * T — абсолютная температура, * t — температура по шкалѣ Цельсія, Q — количество тепла, α — коэффиціентъ теплового расширенія, C — удѣльная теплота, C_v — удѣльная теплота при постоянномъ объемѣ, C_p — удѣльная теплота при постоянномъ давленіи, * $\mathfrak{J}$ — сила намагниченія, * $\mathfrak{H}$ — сила магнитнаго поля, * $\mathfrak{B}$ — магнитная индукція, * μ — магнитная проницаемость, * $\varkappa$ — магнитная воспріимчивость, * E — электродвижущая сила, * Q — количество электричества, * L — коэффиціентъ самоиндукціи, * C — электроемкость.

Вопросомъ объ объединеніи обозначеній единицъ и физическихъ величинъ занялся также и Международный Электротехническій Комитетъ (сокращенное обозначеніе IEC). Тѣ изъ вышеуказанныхъ обозначеній, которыя помѣчены *, приняты также и IEC.

Если въ формулу входятъ одновременно время и температура (въ градусахъ Цельсія), то послѣдняя должна обозначаться черезъ θ.

Кромѣ вышеуказанныхъ, коммиссіей опубликованы еще слѣдующія обозначенія менѣе употребительныхъ физическихъ величинъ:

F — поверхность, P — сила, J — моментъ инерціи, μ — коэффиціентъ тренія, n — число колебаній въ единицу времени, J — механическій эквивалентъ теплоты, S — энтропія, J — сила свѣта.

IEC были установлены слѣдующія обозначенія физическихъ величинъ, которыя приняты постановленіемъ международной коммиссіей по объединенію обозначеній, хотя это еще не распубликовано:

W — энергія, A — работа, T — періодъ, G — проводимость, ε — діэлектрическая постоянная, Φ — магнитный потокъ, f — частота, ϱ — удѣльное сопротивленіе.

Относительно обозначенія единицъ коммиссіей принято, что эти обозначенія должны всегда набираться прямымъ шрифтомъ, тогда какъ вышеприведенныя обозначенія величинъ должны всегда набираться курсивомъ. Самыя обозначенія единицъ приняты слѣдующія:

A — амперъ, V — вольтъ, Ω — омъ, J — джуль, F — фарада, C — кулонъ, W — ваттъ, H — генри, VC — вольтъ-кулонъ, Wh — ваттъ-часъ, VA — вольтъ-амперъ, Ah — амперъ-часъ.

Для метрическихъ единицъ:

m — милли, k — кило, h — гекто, μ — микро, M — мега. m, km, dm, cm, mm, μ; mμ, a, ha; m^2, km^2, dm^2, cm^2, mm^2; l, hl, dl, cl, ml, m^3, km^3, dm^3, cm^3, mm^3, g, t, kg, dg, cg, mg.

Послѣднія обозначенія понятны (a — аръ, t — тонна).

Почти всѣ указанныя обозначенія совпадаютъ съ наиболѣе употребительными въ русской научной литературѣ. Нѣсколько непривычнымъ оказывается обозначеніе миллимикрона mμ, для котораго почти всегда до сихъ поръ употреблялся знакъ μμ. Тѣмъ легче будетъ русскимъ авторамъ пользоваться этими обозначеніями, которыя уже начинаютъ становиться общеобязательными заграницей. Польза отъ такого единства въ обозначеніяхъ, конечно, всѣмъ очевидна.

БИБЛІОГРАФІЯ.

II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ.

Авторы, переводчики и редакторы новыхъ сочиненій приглашаются присылать для этого отдѣла, извѣстнаго въ германской литературѣ подъ названіемъ „Selbstanzeigen“, краткія сообщенія о выпущенныхъ ими сочиненіяхъ, объ ихъ характерѣ и объ ихъ назначеніи. Къ этимъ сообщеніямъ долженъ быть приложенъ экземпляръ сочиненія. Помѣщая эти сообщенія, редакція сохраняетъ, однако, за собою право помѣстить и независимую рецензію.

Н. Каменьщиковъ. *Таблица логариѳмовъ съ четырьмя десятичными знаками.* Съ приложеніемъ вспомогательныхъ таблицъ по физикѣ, химіи и космографіи; таблицъ, упрощающихъ вычисленія; графической таблицы логариѳмовъ и самодѣльной логариѳмической линейки. Пособіе для среднихъ учебныхъ заведеній. Изданіе т-ва „Просвѣщеніе“. Петроградъ, 1914. Стр. 106 + VI. Ц. 90 к.

Изъ предисловія.

Настоящія четырехзначныя таблицы логариѳмовъ, какъ чиселъ, такъ и тригонометрическихъ величинъ имѣютъ расположеніе и устройство точно такое же, какое принято вообще въ распространенныхъ пяти-, шести- и семизначныхъ таблицахъ логариѳмовъ; слѣдовательно, всякій, умѣющій ими пользоваться, всегда будетъ въ состояніи вычислять по любымъ таблицамъ логариѳмовъ и съ любымъ числомъ знаковъ. Наши таблицы являются первыми четырехзначными таблицами въ Россіи, которыя по своему расположенію и устройству не требуютъ особыхъ правилъ для пользованія ими и поэтому вполнѣ пригодны для любого курса алгебры и тригонометріи въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ.

Далѣе, въ этихъ таблицахъ выпущено все лишнее, что никогда не проходится въ средней школѣ; но зато сдѣлано обновленіе и введены очень полезныя свѣдѣнія, которымъ должно быть дано мѣсто въ таблицахъ логариѳмовъ, а именно:

общія замѣчанія о приближенныхъ вычисленіяхъ; общія замѣчанія и правила вычисленій вообще по логариѳмамъ; вспомогательныя таблицы по физикѣ, химіи и космографіи; математическія формулы; графическая таблица, представляющая полученіе логариѳмовъ изъ сравненій ариѳметической и геометрической прогрессій; самодѣльная логариѳмическая линейка, устройство ея и пользованіе ею; таблицы: длины дуги, четверти окружности, площади круга, квадраты и кубы чиселъ, квадратные и кубичные корни, натуральные логариѳмы чиселъ, третьи, четвертыя, пятыя и шестыя степени и т. п. вспомогательныя для вычисленія величины. Наконецъ, наши таблицы устроены такъ, чтобы при употребленіи ихъ совершенно не пользоваться пропорціональными частями (*P. P.*) или только въ самыхъ рѣдкихъ случаяхъ.

Такъ какъ во всѣхъ техническихъ и практическихъ вопросахъ нашей обыденной жизни углы мы можемъ измѣрять, самое большее, съ точностью до 1 минуты, а также и всѣ числа, получающіяся отъ измѣреній и наблюденій, точны только до 1 четвертой значащей цифры, — пятизначныя таблицы логариѳмовъ вообще для вычисленій во всѣхъ техническихъ и практическихъ вопросахъ нашей жизни совершенно безполезны; также совершенно безполезно находить пятизначный логариѳмъ числа, у котораго вѣрны только 4 цифры. Такимъ образомъ въ нашей обыденной жизни всѣ вычисленія могутъ быть производимы только на четыре знака, и точность четырехзначныхъ таблицъ логариѳмовъ для этого вполнѣ достаточна.

При введеніи въ среднюю школу четырехзначныхъ таблицъ логариѳмовъ сокращается та чисто механическая работа, которая мѣшаетъ на первыхъ порахъ успѣшному изученію логариѳмовъ и составляетъ препятствіе къ дѣйствительному умѣнію пользоваться такимъ могучимъ средствомъ вычисленій, какимъ являются логариѳмы. Наконецъ, здѣсь любознательный ученикъ найдетъ устройство и пользованіе логариѳмической линейкой, основы приближенныхъ вычисленій, физическія, химическія и астрономическія постоянныя и т. п.; однимъ словомъ, эти таблицы являются пособіемъ, заключающимъ въ себѣ всѣ тѣ практическія свѣдѣнія и данныя, которыми средняя школа снабжаетъ ученика, выходящаго въ жизнь. Эти таблицы заключаютъ въ себѣ только жизненное и все необходимое для вычисленій въ средней школѣ и въ практической жизни, — пусть онѣ напоминаютъ всегда, что дѣтей и юношество мы учимъ для жизни, но не для школы: non scholae sed vitae docemus.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей прив.-доц. Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 239 (6 сер.). Найти сумму n членовъ ряда

$$1\,.\,3x + 3\,.\,5x^2 + \cdots + (2k-1)(2k+1)\,x^k + \cdots$$

Л. Закутинскій (Черкассы).

№ 240 (6 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$xy - 10\,(x+y) = 1.$$

М. Бабинъ (Петроградъ).

№ 241 (6 сер.). Пусть $\varphi(n)$ обозначаетъ число цѣлыхъ чиселъ, не большихъ n и взаимно простыхъ съ n. Доказать равенство

$$\varphi(ab) = \varphi(M)\,\varphi(d),$$

гдѣ M и d суть наименьшее кратное и общій наибольшій дѣлитель чиселъ a и b

Н. С. (Одесса).

№ 242 (6 сер) Пусть первое изъ чиселъ A, B, C изображается по десятичной системѣ счисленія $2m$ цифрами, каждая изъ которыхъ равна 4, второе — $m+1$ цифрами, каждая изъ которыхъ равна 2, третье — m цифрами, каждая изъ которыхъ равна 8. Доказать, что число $A+B+C+7$ есть точный квадратъ.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

Отдѣлъ I.

№ 199 (6 сер.) *На двухъ противоположныхъ сторонахъ выпуклаго четырехугольника построены квадраты, обращенные во внѣшнее поле по отношенію къ четырехугольнику, а на двухъ другихъ сторонахъ — квадраты, обращенные во внутреннее поле. Доказать, что центры этихъ квадратовъ суть вершины нѣкотораго параллелограмма.*

Пусть на сторонахъ AB и CD выпуклаго четырехугольника $ABCD$ построены квадраты, обращенные во внѣшнее поле, а на сторонахъ BC и DA — во внутреннее. Назовемъ соотвѣтственно черезъ M, Q, N, P центры квадратовъ, построенныхъ на сторонахъ AB, BC, CD и DA. Изъ подобія равнобедренныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ имѣемъ, что

$$(1)\qquad \frac{BM}{AB} = \frac{BQ}{BC}\,.$$

Отнимая равные углы ABM и CBQ этихъ треугольниковъ отъ угла MBC, получимъ, что $\angle ABC = \angle MBQ$. Изъ этого равенства и изъ пропорціи (1) вытекаетъ, что треугольники MBQ и ABC подобны, откуда

$$(2) \quad \angle BMQ = \angle BAC.$$

Опустимъ перпендикуляры BK и BL соотвѣтственно на прямыя AC и MQ, Изъ равенства (2) вытекаетъ подобіе прямоугольныхъ треугольниковъ BAK и BML, а потому $\angle ABK = \angle MBL$. Отнимая эти равные углы изъ угла MBK. получимъ, что $\angle LBK = \angle MBA = \frac{\pi}{4}$. Итакъ, лучъ BL повернутъ относительно луча BK на уголъ въ 45° въ направленіи такого вращенія отъ BC къ BA, при которомъ лучъ BC описываетъ уголъ CBA выпуклаго четырехугольника. Подобнымъ же образомъ можно убѣдиться въ подобіи треугольниковъ NDP и CDA, и затѣмъ, опустивъ перпендикуляры DK' и DL' соотвѣтственно на AC и NP, можно доказать, что лучъ DL' повернутъ на 45° относительно луча DK' въ направленіи такого вращенія отъ DA къ DC, при которомъ лучъ DA описываетъ уголъ ADC четырехугольника. Такъ какъ четырехугольникъ $ABCD$ выпуклый, то лучи BK и DK' прямо противоположно направлены, и два разсматриваемыя вращенія, — отъ BC къ BA и отъ DA къ DC, — совпадаютъ по направленію. Итакъ, лучи BL и DL повернуты соотвѣтственно въ одномъ и томъ же направленіи на уголъ въ 45° относительно противоположныхъ лучей BK и DK'. Значитъ и лучи BL и DL' противоположно направлены, а потому прямыя BL и DL' параллельны. Поэтому прямыя MQ и NP, перпендикулярныя соотвѣтственно къ параллельнымъ прямымъ BL и DL', также параллельны или же совпадаютъ. Подобнымъ же образомъ можно доказать, что и прямыя PM и NQ также параллельны или совпадаютъ. Слѣдовательно, фигура $PMQN$ есть параллелограммъ, который можетъ въ частныхъ случаяхъ вырождаться въ прямую линію.

Замѣчаніе. Изъ подобія треугольниковъ ABC и MBQ слѣдуетъ, что $\frac{MQ}{AC} = \frac{BM}{AB} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда $MQ = \frac{AC}{\sqrt{2}}$. Подобнымъ же образомъ изъ подобія треугольниковъ ADC и PDN можно получить, что $PN = \frac{AC}{\sqrt{2}}$, откуда $MQ = PN$, и такимъ же путемъ находимъ, что $PM = NQ$. Итакъ, въ четырехугольникѣ $PMQN$ противоположныя стороны равны, откуда вытекаетъ, что онъ представляетъ собою параллелограммъ, если допустить, что этотъ четырехугольникъ выпуклый; что приходится доказывать отдѣльно. Если же не доказывать выпуклости четырехугольника $PMQN$, то указанное рѣшеніе, при всей своей кажущейся простотѣ, неполно: вѣдь вообще можно допустить, что при равенствахъ $MQ = PN$ и $PM = NQ$ четырехугольникъ $PMQN$ есть или параллелограммъ или же трапеція съ равными боковыми сторонами MQ и PN или PM и NQ.

А. Сердобинскій (Петроградъ); *В. Кованько* (Вышній Волочекъ); *Г. Михневичъ* (Одесса); *Н. С.* (Одесса).

№ 202 (6 сер.). *Доказать тожества*

$$\log_{ab} x = \frac{\lg_a x \cdot \lg_b x}{\lg_a x + \lg_b x}, \quad \lg_{a_1 a_2 \ldots a_n} x = \frac{1}{\frac{1}{\lg_{a_1} x} + \frac{1}{\lg_{a_2} x} + \ldots + \frac{1}{\lg_{a_n} x}},$$

$$\lg_{(a:b)} x = \frac{\lg_a x \cdot \lg_b x}{\lg_b x - \lg_a x}.$$

Полагая $\lg_{a_1} x = \alpha_1$, $\lg_{a_2} x = \alpha_2, \ldots, \lg_{a_n} x = \alpha_n$, имѣемъ

$$x = a_1^{\alpha_1},\quad x = a_2^{\alpha_2},\ \ldots,\ x = a_n^{\alpha_n},$$

откуда

$$(1)\quad x^{\frac{1}{\alpha_1}} = a_1,\quad x^{\frac{1}{\alpha_2}} = a_2, \ldots,\quad x^{\frac{1}{\alpha_n}} = a_n.$$

Перемножая равенства (1), получимъ $x^{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n}} = a_1 a_2 \ldots a_n$, откуда

$$x = (a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n}}},$$

$$\lg_{a_1 a_2 \ldots a_n} x = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n}} = \frac{1}{\frac{1}{\lg_{a_1} x} + \frac{1}{\lg_{a_2} x} + \cdots + \frac{1}{\lg_{a_n} x}}.$$

При $n = 2$, полагая $a_1 = a$, $a_2 = b$, находимъ, что

$$(2)\quad \lg_{ab} x = \frac{1}{\frac{1}{\lg_a x} + \frac{1}{\lg_b x}} = \frac{\lg_a x \cdot \lg_b x}{\lg_a x + \lg_b x}.$$

Полагая $\lg_a x = \alpha$, $\lg_b x = \beta$, находимъ послѣдовательно, что

$$x = a^{\alpha},\quad x = b^{\beta},\quad x^{\frac{1}{\alpha}} = a,\quad x^{\frac{1}{\beta}} = b,\quad x^{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}} = \frac{b}{a},$$

$$\lg_{(b\,:\,a)} x = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}} = \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha} = \frac{\lg_a x \cdot \lg_b x}{\lg_b x - \lg_a x}.$$

Послѣднее изъ доказанныхъ тожествъ можно получить также изъ тожества (2), замѣняя b черезъ $\frac{1}{b}$ и замѣчая, что $\lg_{(1\,:\,b)} x = -\lg_b x$.

В. Ревзинъ (Сумы); *Н. Михальскій* (Екатеринославъ); *Н. Гольдбуртъ* (Вильна); *П. Волохинъ* (Ялта); *А. Иткинъ* (Петроградъ); *П. Тверской* (Петроградъ); *А. Сердобинскій* (Петроградъ); *М. Бабинъ* (Петроградъ); *Г. Юньевъ* (Вологда); *Н. К-новъ* (Петроградъ).

Редакторъ прив.-доц. **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено военной цензурой.

Типографія „Техникъ“ — Одесса, Екатерининская, 58.

Обложка
ищется

Обложка
пщется