

Обложка
щется

Обложка
щется

Вѣстникъ Опытной Физики

и Элементарной Математики.

№ 634.

Содержаніе: По поводу теоремы К. Неймана (Архимеда). *Н. Агронома.* — Какъ мы воспринимаемъ направленіе звука. *Лорда Рэлея.* — Объ одномъ возможномъ выводѣ. *С. Вавилова.* — Библиографія. *І. Рецензіи. Е. И. Игнатьевъ.* „Начатки ариеметики“. *И. Д.* — Задачи №№ 267 — 270 (6 сер.). — Рѣшенія задачъ. Отдѣлъ I. №№ 230 и 233 (6 сер.). — Книги и брошюры, поступившія въ редакцію. — Объявленія.

По поводу теоремы К. Неймана (Архимеда).

Н. Агронома.

Пересматривая „Вѣстникъ Опытной Физики“ за старые годы, я въ № 488 встрѣтился со слѣдующей теоремой: Если черезъ точку, находящуюся внутри круга, проведены двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя, то площадь круга выражается формулой

$$I = \frac{\pi}{4} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)$$

гдѣ α , β , γ , δ суть отрѣзки, отсекаемые кругомъ на проведенныхъ прямыхъ.

Сравнительно нетрудно показать, что указанная теорема является частнымъ случаемъ другой болѣе общей теоремы.

Допустимъ, что черезъ точку M , лежащую внутри круга съ центромъ O , проведена прямая AB , образующая уголъ α съ диаметромъ DE . Допустимъ, что осями прямоугольныхъ координатъ является диаметръ DE и диаметръ, перпендикулярный DE . Предположимъ, что координаты точки M суть m , n , а уравненіе круга съ центромъ O есть

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Принимая во внимание, что прямая AB образуетъ съ осью x -овъ уголъ α , что она проходитъ черезъ точку $M(m, n)$, мы можемъ записать ея уравненіе такъ:

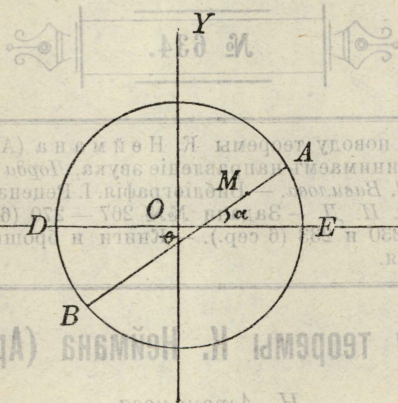
$$y = n + (x - m) \operatorname{tg} \alpha. \quad (2)$$

Рѣшая совмѣстно уравненія (1) и (2), мы найдемъ координаты точекъ A и B . Въ самомъ дѣлѣ, подставивъ y изъ (2) въ (1) получимъ:

$$x^2 + n^2 + 2n(x - m) \operatorname{tg} \alpha + (x - m)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - R^2 = 0 \quad (3)$$

или

$$x^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + 2x \operatorname{tg} \alpha (n - m \operatorname{tg} \alpha) + (n - m \operatorname{tg} \alpha)^2 - R^2 = 0. \quad (4)$$



Отсюда

$$x_{1,2} = \frac{-\operatorname{tg} \alpha (n - m \operatorname{tg} \alpha) \pm \sqrt{R^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - (n - m \operatorname{tg} \alpha)^2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (5)$$

и, слѣдовательно,

$$y_{1,2} = n + \operatorname{tg} \alpha \left[\frac{-\operatorname{tg} \alpha (n - m \operatorname{tg} \alpha) \pm \sqrt{R^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - (n - m \operatorname{tg} \alpha)^2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - m \right]. \quad (6)$$

Составимъ теперь

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2.$$

Очевидно, это выраженіе равно

$$(x_1 - m)^2 + (y_1 - n)^2 + (x_2 - m)^2 + (y_2 - n)^2, \quad (7)$$

или, послѣ незначительнаго преобразованія

$$(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \left[\frac{-\operatorname{tg} \alpha (n - m \operatorname{tg} \alpha) + \sqrt{N}}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - m \right]^2 + \\ + (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \left[\frac{-\operatorname{tg} \alpha (n - m \operatorname{tg} \alpha) - \sqrt{N}}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - m \right]^2, \quad (8)$$

гдѣ $N = R^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - (n - m \operatorname{tg} \alpha)^2$.

Упрощая выражение (8), мы въ концѣ концовъ получимъ, что

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2 [(m^2 - n^2) \cos 2\alpha + 2mn \sin 2\alpha + R^2]. \quad (9)$$

Допустимъ теперь, что черезъ точку M проведенъ пучекъ p прямыхъ, встрѣчающихся (кружнѣ въ точкахъ A_1 и B_1 , A_2 и B_2 , ..., A_p и B_p и образующихъ съ діаметромъ DE углы

$$\alpha = 0, \frac{180^\circ}{d}, 2 \cdot \frac{180^\circ}{p}, 3 \cdot \frac{180^\circ}{p}, \dots, (n-1) \frac{180^\circ}{p}.$$

Вычислимъ сумму

$$\overline{MA_1}^2 + \overline{MB_1}^2 + \overline{MA_2}^2 + \overline{MB_2}^2 + \dots + \overline{MA_p}^2 + \overline{MB_p}^2. \quad (10)$$

Для этой суммы мы имѣемъ на основаніи формулы (9) слѣдующее выраженіе

$$2 \left[(m^2 - n^2) \left(\cos 0 + \cos \frac{360^\circ}{p} + \cos 2 \cdot \frac{360^\circ}{p} + \dots + \cos (p-1) \frac{360^\circ}{p} \right) + \right. \\ \left. + 2mn \left(\sin 0 + \sin \frac{360^\circ}{p} + \sin 2 \cdot \frac{360^\circ}{p} + \dots + \sin (p-1) \frac{360^\circ}{p} \right) + pR^2 \right].$$

Извѣстно, что

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha &= \frac{\sin \frac{n+1}{2} \alpha \sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \\ \cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha &= \frac{\cos \frac{n+1}{2} \alpha \sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Слѣдовательно:

$$\cos \frac{360^\circ}{p} + \cos 2 \cdot \frac{360^\circ}{p} + \dots + \cos (p-1) \frac{360^\circ}{p} = \frac{\cos 180^\circ \sin \frac{(p-1)180^\circ}{p}}{\sin \frac{180^\circ}{p}} = -1,$$

такъ какъ

$$\sin \frac{(p-1)180^\circ}{p} = \sin \frac{180^\circ}{p},$$

$$\sin \frac{360^\circ}{p} + \sin 2 \cdot \frac{360^\circ}{p} + \dots + \sin (p-1) \frac{360^\circ}{p} = \frac{\sin 180^\circ \sin \frac{(p-1)180^\circ}{p}}{\sin \frac{180^\circ}{p}} = 0.$$

Такимъ образомъ,

$$\overline{MA_1}^2 + \overline{MB_1}^2 + \dots + \overline{MA_n}^2 + \overline{MB_n}^2 = 2 [(m^2 - n^2)(1 - 1) + 2mn \cdot 0 + pR^2] = 2pR^2.$$

Слѣдовательно, мы можемъ высказать такую теорему: Если черезъ какую нибудь точку M провести p прямыхъ, которыя образуютъ съ одной изъ этихъ прямыхъ углы $0, 180^\circ, 2 \cdot \frac{180^\circ}{p}, \dots, (p-1) \cdot \frac{180^\circ}{p}$ то сумма

$$\overline{MA_1}^2 + \overline{MB_1}^2 + \overline{MA_2}^2 + \overline{MB_2}^2 + \dots + \overline{MA_p}^2 + \overline{MB_p}^2$$

не зависитъ отъ положенія точки M и равна $2pR^2$, гдѣ A_1 и B_1, A_2 и B_2, \dots, A_p и B_p точки пересѣченія прямыхъ съ произвольной окружностью, а R радиусъ этой окружности.

Слѣдствіе. Площадь того же круга равна

$$\frac{\pi}{2p} (\overline{MA_1}^2 + \overline{MB_1}^2 + \overline{MA_2}^2 + \overline{MB_2}^2 + \dots + \overline{MA_p}^2 + \overline{MB_p}^2).$$

При $p=2$ мы получаемъ теорему, приписываемую Нейману.

Какъ мы воспринимаемъ направленіе звука.

Лорда Рэлея.

Настоящая статья знаменитаго англійскаго физика появилась еще въ 1909 г. Не въ обычаяхъ періодическаго изданія помѣщать работы, опубликованныя ранѣе на нѣсколько лѣтъ. Но статья: „О томъ, какъ мы воспринимаемъ направленіе звука“, касается очень существеннаго вопроса, лежащаго на границѣ физики и физиологіи, а результаты ея сравнительно мало извѣстны не специалистамъ. Къ тому же работа лорда Рэлея дополнена въ послѣдніе годы имъ самимъ и Моромъ (Mohr).

Редакція готова принять упрекъ въ томъ, что не сообщила объ этихъ работахъ ранѣе, но рзсчитываетъ, что появленіе статьи на страницахъ „Вѣстника“ въ настоящее время не будетъ ей поставлено въ вину. Помѣщая въ настоящемъ номерѣ основную статью лорда Рэлея, мы въ одномъ изъ ближайшихъ номеровъ сообщимъ свѣдѣнія объ упомянутыхъ выше дополнительныхъ работахъ.

Ред.

Еще въ семидесятыхъ годахъ прошлаго вѣка я произвелъ цѣлый рядъ опытовъ, чтобы точнѣе изслѣдовать способность нашихъ ушей къ оцѣнкѣ направленія звуковъ*). Оказалось, что можно было

*) Nature, XIV, стр. 32 (1876); Phil. Mag. III, стр. 546 (1877); Phil. Mag. XIII, стр. 340 (1882). „Scientific Papers“, I, стр. 277, 314; II, стр. 98.

рѣшить съ увѣренностью, не двигая головой, идетъ ли звукъ справа или слѣва, даже когда звуки представляли собою чистые тоны. Никакихъ затрудненій не возникало также въ томъ случаѣ, если уши были заткнуты, когда начинались звуки.

Когда же требовалось узнать, находится ли источникъ звука спереди отъ наблюдателя или сзади, то въ случаѣ чистыхъ тоновъ нельзя было рѣшить этого вопроса. Въ связи съ этимъ возникали также затрудненія и въ тѣхъ случаяхъ, когда звукъ раздавался въ косомъ направленіи. Но, что касается звуковъ другого характера, въ особенности, разговорной рѣчи, то часто удавалось различить, спереди ли они раздаются или сзади. При этомъ голова, понятно, должна быть неподвижной. Чистый тонъ (который сперва раздавался какъ разъ спереди или какъ разъ позади отъ наблюдателя) съ помощью легкаго поворота головы переносился вправо или влѣво, и такимъ способомъ можно было рѣшить первоначальный вопросъ.

Обыкновенно принимаютъ, что возможность различать звукъ, идущій справа, отъ звука, идущаго слѣва, объясняется большей напряженностью ощущенія, испытываемаго ухомъ, находящимся ближе къ звуку. Несомнѣнно, это объясненіе вѣрно, если высота звука довольно велика. Свистъ высоты f^{IV} , особенно, если выдувать его газовымъ мѣхомъ, слышенъ гораздо лучше болѣе близкимъ ухомъ, чѣмъ отдаленнымъ.

Въ этомъ можно убѣдиться, если прислушиваться сперва обоими ушами къ непрерывному свисту, раздающемуся справа или слѣва, и затѣмъ закрыть одно ухо. Разница будетъ ничтожна, если закрыть отдаленное ухо, но весьма значительна, если закрыть ближайшее ухо. То же самое наблюденіе можно сдѣлать и на звукъ текущей воды. Опытъ можно видоизмѣнить такъ: ухо, болѣе близкое къ падающей водѣ, скажемъ правое, закрываютъ правой рукой. Сравнительно слабый звукъ, который мы тогда услышимъ, значительно усиливается, если держать лѣвую руку на небольшомъ разстояніи такъ, чтобы звукъ отражался въ лѣвое ухо. Это явленіе замѣтно, если даже держать ладонь на разстояніи цѣлой руки. Конечно, явленіе выражено еще лучше, если рефлекторъ больше чѣмъ рука.

Такимъ образомъ, по теоріи напряженности легко можно объяснить, какъ мы различаемъ высокіе звуки, раздающіеся справа, отъ звуковъ, идущихъ слѣва; но эта теорія становится все менѣе и менѣе удовлетворительной по мѣрѣ уменьшенія высоты звука. При частотѣ въ 256 (среднее $c = c'$) разница интенсивности въ обоихъ ушахъ замѣтна весьма мало. При 128 она лишь едва воспринимается. Но хотя разность напряженностей такъ мала, однако, и въ этомъ случаѣ правый звукъ различается отъ лѣваго столь же легко, какъ и раньше.

Нѣтъ ничего удивительнаго въ томъ, что звуки малой высоты слышны ближайшему уху столь же хорошо, какъ и отдаленному. Если длина волны составляетъ нѣсколько футовъ, то нельзя ожидать, чтобы звукъ (возникающій на разстояніи) былъ ограниченъ областью по одну сторону головы. Для выясненія вопроса здѣсь уместно привести результаты вычисленій, относящихся къ паденію плоскихъ волнъ на твердую сферическую преграду.

$\frac{2\pi}{h}$	μ	$F^2 + G^2$
$1\frac{1}{2}$	1	0,294
	0	0,260
	-1	0,232
1	1	0,503
	0	0,285
	-1	0,237
2	1	0,690
	0	0,318
	-1	0,356

Въ этой таблицѣ $2\pi c$ есть окружность сферы, а h — длина волны звука. Символь μ означаетъ косинусъ угла при центрѣ сферы между направлениемъ звука и той точкой на сферѣ, для которой нужно вычислить напряженность, а $F^2 + G^2$ есть напряженность. Въ разсматриваемомъ нами вопросѣ о звукѣ, идущемъ, скажемъ, справа отъ наблюдателя, напряженность звука у праваго уха соответствуетъ $\mu = +1$, а у лѣваго уха $\mu = -1$. Для головы можно принять, что длина окружности ($2\pi c$) составляетъ около 2 футовъ или немного меньше, такъ что $2\pi c/h = 1\frac{1}{2}$ соответствуетъ приблизительно среднему c , или частотѣ 256. Можно показать, что разность напряженностей для $\mu = \pm 1$ составляетъ только около 10% всей напряженности.

При еще меньшихъ значеніяхъ $2\pi c/h$, т. е. въ данномъ случаѣ для еще болѣе низкихъ тоновъ, разность напряженностей можно хорошо выразить очень простой формулой. Оказывается, что $(F^2 + G^2)_{\mu=1} - (F^2 + G^2)_{\mu=-1} = \frac{3}{4}(2\pi c/h)^2$, тогда какъ полное значеніе $F^2 + G^2$ приближается при этомъ къ 0,25. Такимъ образомъ, уменьшеніе высоты на октаву уменьшаетъ разность напряженностей въ 16 разъ. При частотѣ 128 разности были бы несомнѣнно меньше, чѣмъ 1% всей величины, и, начиная съ этого тона и ниже, трудно усмотрѣть, какимъ образомъ разность напряженностей могла бы играть сколько-нибудь существенную роль.

Насколько мнѣ извѣстно, это затрудненіе, на которое я указалъ въ 1876 г., не получило еще объясненія. Нѣсколько мѣсяцевъ тому назадъ я рѣшилъ повторить и, по возможности, расширить сдѣланныя наблюденія, начиная отъ частоты 128. Два камертона съ этой высотой были установлены на открытомъ воздухѣ на большомъ разстояніи одинъ отъ другого; колебанія вызывались электромагнитомъ, при чемъ оба камертона находились въ одной цѣпи. Каждый изъ нихъ былъ соединенъ съ резонаторомъ, дѣйствіе котораго можно устранить, помѣщая между нимъ и камертономъ (безъ контакта) лезвіе ножа или кусокъ картона. Наблюдатель съ закрытыми глазами, находившійся между двумя

камертонами въ такомъ положеніи, чтобы одинъ былъ справа отъ него, а другой слѣва, могъ, съ увѣренностью указать, какой именно резонаторъ приводили въ дѣйствіе. Уши могли оставаться открытыми все время опыта, или, что въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ лучше, наблюдатель держалъ уши закрытыми, пока производили перемѣну резонаторовъ, и затѣмъ одновременно ихъ открывалъ. Если наблюдатель открывалъ одно ухо, то звукъ казался идущимъ съ этой стороны; когда же наблюдатель открывалъ также второе ухо, то онъ безошибочно указывалъ направленіе звука, все равно, опровергало ли это его предыдущее сужденіе или нѣтъ. Если же звуки шли спереди и сзади отъ наблюдателя, а не справа и слѣва, то нельзя было различить, идетъ ли звукъ спереди или сзади; такой результатъ дали опыты съ нѣсколькими наблюдателями.

При другомъ методѣ достаточно пользоваться однимъ резонаторомъ и однимъ камертономъ (можно безъ электромагнита), но необходимо присутствіе, по крайней мѣрѣ, двухъ ассистентовъ. Наблюдатель либо стоя, либо, что удобнѣе, сидя на вращающейся скамейкѣ, поворачивается, пока не потеряетъ чувства направленія. Достигнуть этого нетрудно*), но необходимо принять нѣкоторыя предосторожности, чтобы помѣшать наблюдателю затѣмъ открыть снова направленіе. Иногда это происходитъ благодаря вѣтру. Часто бываетъ необходимо закрыть глаза руками и замкнуть вѣки для того, чтобы въ достаточной степени исключить вліяніе свѣта. Пока все не будетъ готово для сужденія, нужно держать уши закрытыми, нажимая большими пальцами; обыкновенно бываетъ полезно держать эти пальцы въ движеніи, вызывая такимъ образомъ, шумъ, достаточно громкій для того, чтобы совершенно заглушить испытываемый звукъ. При этомъ методѣ чистые тоны высотой въ 128^и и 256 давали результаты, согласные съ описанными выше.

Вращающаяся площадка облегчаетъ наблюденіе сравнительной силы, съ которой слышенъ звукъ въ зависимости отъ того, расположенъ ли источникъ съ той же стороны, какъ и воспринимающее ухо, или съ противоположной стороны. При моихъ собственныхъ наблюденіяхъ я улавливалъ, какъ мнѣ казалось, нѣкоторое усиленіе звука, когда источникъ находился съ той же стороны, что и открытое ухо; другіе же не могли уловить никакой разницы. Это относится къ высотѣ 128. При высотѣ же 256 усиленіе было выражено вполне явственно.

Когда я обдумывалъ, можно ли различеніе праваго и лѣваго направленія при высотѣ 128 приписать, дѣйствительно, малой разности напряженія, мнѣ пришло на мысль, что въ случаѣ, если это такъ, то наше сужденіе будетъ, можетъ быть, ошибочнымъ, если близъ головы наблюдателя помѣститъ съ той же стороны, гдѣ звукъ, какое-нибудь препятствіе въ родѣ доски. Оказалось, однако, что этимъ путемъ нельзя было вызвать ошибки, хотя при каждомъ опытѣ наблюдатель не зналъ, находилась ли доска на мѣстѣ или нѣтъ. Упомянемъ еще о другомъ обстоятельстве, неблагоприятномъ для теоріи напряженности. Оказалось,

*) Этому способствуетъ иллюзія обратнаго вращенія, когда дѣйствительное вращеніе прекращающъ.

что наблюдатель на вращающейся площадке иногда могъ рѣшить, справа ли идетъ звукъ или слѣва еще прежде чѣмъ онъ открывалъ свои уши.

Дальше нужно было, повидимому, изслѣдовать болѣе низкіе чистые тона. Съ этой цѣлью баллонъ, какой употребляется для демонстраціи горѣнія фосфора въ кислородѣ, приводился въ звучаніе съ помощью водороднаго пламени*). Какъ показывало тщательное наблюденіе, обертоновъ было мало или не было вовсе. Частота составляла около 96 колебаній въ секунду, т. е. на интервалъ въ кварту ниже, чѣмъ у камертоновъ въ 128. При температурѣ наблюденія это соотвѣтствуетъ длинѣ волны примѣрно въ 12 футовъ. Если подставить это значеніе въ приведенную выше формулу, то найдемъ, что относительная разность напряженностей съ двухъ сторонъ сферы окружностью въ 2 фута составляетъ всего лишь около двухъ частей на тысячу.

Наблюденіе на открытомъ воздухѣ показало, что не представляетъ никакого труда рѣшить, исходить ли этотъ низкій звукъ справа или слѣва. Нѣсколько наблюдателей нашли согласно, что различіе здѣсь столь же легко, какъ у камертоновъ съ высотой 128. Съ другой стороны, направленіе сзади и направленіе спереди, невозможно было различать, какъ и слѣдовало ожидать.

Изслѣдованіе дошло, такимъ образомъ, до той стадіи, когда требовался, повидимому, пересмотръ теоретическихъ предположеній. Не могло быть сомнѣнія, что относительныя напряженности у обоихъ ушей играютъ важную роль въ локализациі звука. Такъ, если держать камертонъ какой-либо высоты близъ уха, то звукъ его слышенъ гораздо громче этимъ ухомъ, и вмѣстѣ съ тѣмъ слушающій инстинктивно относитъ его къ этой сторонѣ головы. Невозможно сомнѣваться, что это вопросъ относительныхъ напряженностей. Но, съ другой стороны, въ нѣкоторыхъ случаяхъ это объясненіе, какъ мы видѣли, оказывается несостоятельнымъ. Если слушатель призналъ чистый тонъ малой высоты исходящимъ справа или слѣва, то по теоріи напряженностей единственно возможное допущеніе, — что сужденіе основано на разности фазъ у обоихъ ушей. Но если мы даже допустимъ, какъ я это сдѣлалъ раньше, — довольно неохотно, — что эта разность фазъ можетъ быть принята въ расчетъ, то мы можемъ, я думаю, примѣнить подобнаго рода объясненіе только къ такимъ случаямъ, когда высота не очень велика. Въ самомъ дѣлѣ, что такое разность фазъ у обоихъ ушей, когда звукъ достигаетъ наблюдателя, скажемъ, справа? Легко видѣть, что величина замедленія**) у лѣваго уха такого порядка, какъ половина окружности головы, скажемъ, въ одинъ футъ. При этомъ замедленіе для середины c ($c' = 256$) равно приблизительно четверти періода, для c'' (512) — около половины періода, для c''' (1024) равно приблизительно цѣлому періоду, и т. д. Но, какъ извѣстно, замедленіе фазы на половину періода не даетъ ничего для рѣшенія вопроса о томъ, что источникъ находится справа, а не слѣва, такъ какъ между замедленіемъ на половину періода и ускореніемъ на половину періода

) Phil. Mag. VII, стр. 149 (1879); „Scientific Papers“, I стр. 407. (

**) Такъ называемая разность хода.

нѣтъ никакой разницы. Еще болѣе очевидно, что замедленіе на цѣлый періодъ или на нѣсколько полныхъ періодовъ ничего не можетъ намъ дать. Въ области болѣе высокихъ тоновъ, повидимому, врядъ ли возможно сужденіе въ зависимости отъ фазы, особенно, если вспомнимъ, что разность фазъ вступаютъ постепенно, начиная отъ нуля, когда звукъ раздается прямо спереди или сзади и достигая максимума или минимума въ крайнихъ правомъ и лѣвомъ положеніяхъ.

Что касается вопроса о томъ, трудно ли локализовать справа или слѣва тонъ высоты 512, то одно старое наблюденіе, выполненное съ помощью двухъ камертоновъ и резонаторовъ такой же высоты, дало отрицательный отвѣтъ. При высотѣ 512 локализациа производится столь же легко и явственно, какъ и при высотѣ 256. Но вполне возможно, что высота 512 недостаточно близка къ той специальной высотѣ, для которой замедленіе имѣло бы въ точности величину одной половины періода.

Упомянутыя выше вычисленія для сферической преграды проливаютъ нѣкоторый свѣтъ на этотъ вопросъ. Можно показать, что въ точности противоположныя фазы имѣютъ мѣсто при значеніи $2\pi c/h = 1,1$. Сдѣлавъ вычисленіе и подставивъ вмѣсто $2\pi c$ два фута, я нашелъ при температурѣ наблюденій высоту, приблизительно на малую терцію выше 512, соответственно разности фазъ на половину періода.

Конечно, въ примѣненіи къ головѣ это вычисленіе не очень надежно, и я считалъ важнымъ удостовѣриться съ помощью опыта что въ этой области нѣтъ высоты, для которой совершенно нельзя было бы различить правое положеніе отъ лѣваго. Такъ какъ камертоны не годятся для этой цѣли, то я вернулся къ „поющему пламени“, т. е. къ трубочкамъ, обыкновенно металлическимъ и одного дюйма въ поперечникъ, приводимымъ въ колебательное движеніе съ помощью водороднаго пламени. Чтобы исключить обертоны, трубочки были снабжены близъ ихъ срединъ свободно пригнанными прямоугольными колодками длиною около двухъ диаметровъ, удерживаемыхъ въ своемъ положеніи благодаря тренію прикрѣпленныхъ къ нимъ пружинъ. Кромѣ того, были приняты предосторожности, чтобы издаваемые звуки не были громче, чѣмъ было нужно. При такихъ условіяхъ тоны можно было считать достаточно чистыми. Опыты производились на открытомъ воздухѣ, много разъ, при чемъ высота тона доходила отъ d' до g'' , и ни разу не возникало ни малѣйшаго затрудненія въ различеніи праваго звука и лѣваго. Въ области отъ e'' до g'' , представляющей особенный интересъ, высоту варіировали на половину соответствующаго полутона съ помощью скользящихъ продолженій трубочки. Въ большей части наблюденій слушатель помѣщался на вращающемся стулѣ и находился въ невѣдѣніи относительно дѣйствительнаго положенія источника звука. Такого рода предосторожность, конечно, желательна; но послѣ многочисленныхъ повтореній я убѣдился, что я могъ положиться на непосредственное впечатлѣніе. Когда звукъ исходитъ справа или слѣва, это впечатлѣніе всегда явственно и всегда вѣрно; но когда пытаешься различить звукъ, исходящій спереди или сзади, то обыкновенно не получается явственнаго впечатлѣнія, а если получается, то оно часто оказывается ложнымъ.

Мы можем смѣло заключить, что въ этой области высотъ (выше $c'' = 512$) способность различать правый звукъ и лѣвый основана не на разности фазъ или, во всякомъ случаѣ, не только на одномъ этомъ показаніи. И такое заключеніе не приводитъ ни къ какимъ затрудненіямъ; въ самомъ дѣлѣ, какъ я уже объяснилъ выше, разность напряженностей у обоихъ ушей даетъ вполне достаточную опору для сужденія. Повидимому, при большой высотѣ тона, а именно выше c'' , сужденіе основано на напряженностяхъ, но при малой высотѣ, по крайней мѣрѣ, ниже $c(128)$, приходится ссылаться на разности фазъ.

Оставалось лишь подтвердить, если возможно, догадку, что мы не только способны оцѣнивать разности фазъ, съ которыми достигаютъ нашихъ ушей звуки равной напряженности, но что такая оцѣнка является основой сужденій о направленіи звуковъ, — въ частности о правомъ и лѣвомъ. Для этой цѣли проще всего направить отдѣльно къ обоимъ ушамъ два чистыхъ тона, звучащихъ почти въ унисонъ, но не вполне. Во время происходящихъ вслѣдствіе этого біеній разности фазъ принимаютъ всевозможныя значенія; уже одно распознаваніе біеній свидѣтельствуетъ о нѣкоторой оцѣнкѣ разностей фазъ. Опыты въ этомъ направленіи производились уже и раньше. Въ 1877 г. проф. С. П. Томпсонъ (Thompson*) демонстрировалъ существованіе интерференціи при воспріятіи звуковъ, проводя отдѣльно къ обоимъ ушамъ черезъ резиновыя трубки звуки двухъ камертоновъ, ударяемыхъ въ двухъ отдѣльныхъ помѣщеніяхъ; камертоны настроены такимъ образомъ, что даютъ вмѣстѣ „біенія“, и эти біенія очень явственно выражены въ получающемся ощущеніи, хотя взятые два источника не могли смѣшиваться нигдѣ снаружи или дѣйствовать сообща въ какой-либо части столбовъ воздуха, вдоль которыхъ шелъ звукъ. Опытъ удавался даже съ колебаніями столь малой напряженности, что въ одиночку они не были слышны“. Въ моемъ собственномъ наблюденіи**), въ которомъ тоны, предполагавшіеся умѣренно чистыми, посылались въ уши черезъ телефоны, я пришелъ приблизительно къ такому же заключенію. Но хотя біенія распознавались, ни въ одномъ случаѣ, повидимому, нельзя было догадываться, идетъ ли звукъ справа или слѣва.

Повторяя недавно опытъ, я желалъ обойтись безъ телефоновъ или трубокъ, соприкасающихся съ ушами, такъ какъ можно было опасаться, что такія искусственныя условія нарушаютъ правильность инстинктивнаго сужденія. Казалось, что достаточно посылать звуки черезъ трубки, открытые концы которыхъ находятся просто въ близкомъ сосѣдствѣ по одному у каждого уха; такое приспособленіе имѣетъ ту выгоду, что позволяетъ контролировать относительныя напряженности съ помощью незначительнаго боковаго перемѣщенія головы къ одному или другому источнику. Два камертона съ высотой тона въ 128 были помѣщены въ двухъ различныхъ комнатахъ и приводились въ колебаніе независимо одинъ отъ другого. Каждый камертонъ былъ соединенъ съ резонаторомъ, настроеннымъ надлежащимъ образомъ;

*) Phil. Mag. Nov. 1878.

**) Phil. Mag. II, стр. 280 (1901); „Scientific Papers“, IV, стр. 553.

изъ полости резонатора газовая трубка проводила звукъ черезъ отверстіе въ толстой стѣнѣ къ наблюдателю, находившемуся въ третьей комнатѣ. Звуки были очень хорошо изолированы путемъ закрыванія дверей и различныхъ другихъ простыхъ предосторожностей. Но каждый резонаторъ испускаетъ вблизи себя довольно громкій звукъ, который въ слабой степени можетъ иногда достигнуть втораго резонатора. Чтобы возможно лучше исключить это вредное вліяніе, каждый камертонъ соединяли еще съ однимъ резонаторомъ такой же высоты, расположеннымъ такимъ образомъ, чтобы фазы колебаній въ двухъ резонаторахъ были противоположны. Съ помощью маленькаго приспособленія удалось устроить, чтобы оба соединенные резонаторы вмѣстѣ излучали наружу лишь слабый звукъ, хотя внутреннія колебанія могли быть столь же или болѣе сильны, чѣмъ при пользованіи однимъ лишь резонаторомъ. Это устройство оказалось настолько удачнымъ, что при дѣйствіи одного только камертона не воспринимался звукъ изъ трубки, принадлежащей ко второму камертону, даже когда открытый конецъ ея крѣпко прижимали къ уху, благодаря чему чрезвычайно усиливается дѣйствіе. Такимъ образомъ, открытые концы обѣихъ трубокъ могутъ быть разсматриваемы, какъ источники звука постоянной напряженности.

Въ большинствѣ опытовъ наблюдатель для устойчивости опирался на столъ, и голова его находилась между трубками, расположенными такъ, что открытые концы ихъ были на разстояніи одного или двухъ дюймовъ отъ ушей. Въ самомъ первомъ опытѣ (31 іюля) періодъ біенія составлялъ 5 секундъ; лады Ралей и я съ перваго момента наблюдали явственно кажущееся перемѣщеніе источника звука, при чемъ казалось, что онъ попеременно переходитъ съ одной стороны на другую. Когда явленіе было лучше всего выражено, звукъ казался полностью исходящимъ то съ одной стороны, то съ другой.

Біенія могли быть замедлены такъ, чтобы каждое продолжалось 40 или даже 70 секундъ при чемъ можно было производить наблюденія менѣе успѣшно. Положеніе головы должно быть выбрано такимъ образомъ, чтобы звукъ былъ одинаково хорошо слышенъ справа и слѣва. При такихъ условіяхъ обнаружилось, что источникъ звука кажется находящимся справа или слѣва почти все время біенія, а переходы происходятъ очень скоро. Можно производить наблюденія, держа все время уши открытыми или, какъ въ нѣкоторыхъ опытахъ на открытомъ воздухѣ, уши можно одновременно открывать и закрывать черезъ короткіе промежутки. Еще лучше, пожалуй, держа уши открытыми, периодически закрывать большими пальцами открытые концы трубокъ, изъ которыхъ выходятъ звуки. Когда трубки закрыты, то не слышно никакого звука. Замѣтимъ, что, хотя положеніе головы и должно быть тщательно выбрано для полученія наилучшихъ результатовъ, но оно можетъ быть измѣнено въ довольно широкихъ предѣлахъ безъ того, чтобы все явленіе перестало быть наблюдаемымъ. Необходимо только, чтобы напряженности оставались приблизительно равными.

Эти результаты имѣютъ вполне рѣшающее значеніе, если мы вправѣ считать, что звуки въ достаточной степени изолированы, что никакой замѣтный звукъ не можетъ пройти отъ открытаго конца

трубки къ другому уху. Легко было удостовѣриться, что въ томъ случаѣ, когда закрываютъ одну трубку въ противоположное ухо не слышно было почти ничего; но можно, пожалуй, возразить, что такая повѣрка недостаточно чувствительна. Чтобы уменьшить рискъ погрѣшности съ этой стороны, приближаютъ открытый конецъ трубки къ соотвѣтственному уху. Было произведено много опытовъ этого рода, но результаты остались прежніе. Наконецъ, въ дѣло были пущены короткія резиновые трубки, съ помощью которыхъ уши можно было соединить наглухо съ проводящими трубками. При этомъ необходимо чтобы не быть оглушеннымъ, ослабить звуки, отодвигая резонаторы отъ соотвѣтственныхъ камертоновъ. Явленіе оставалось вполнѣ явственно выраженнымъ. Что дѣйствіе не можетъ быть приписано звукамъ, обходящимъ кругомъ головы, видно еще изъ другого обстоятельства, о которомъ мы сейчасъ скажемъ.

Мы должны рассмотреть еще одинъ весьма важный вопросъ. Раньше чѣмъ принять, что лабораторные опыты объясняютъ, какимъ образомъ различаютъ, когда на открытомъ воздухѣ раздается только одинъ звукъ, идетъ ли онъ справа или слѣва, необходимо показать, что мы локализуемъ звукъ справа, когда разность фазъ такова, что колебаніе, достигающее праваго уха, опережаетъ другое. Выяснить это весьма легко. Одинъ наблюдатель прислушивается по описанному, идетъ ли звукъ справа или слѣва, а другой въ то же время наблюдаетъ максимумы и минимумы бѣнія для уха, расположеннаго симметрично къ обоимъ источникамъ. Когда наблюденію подвергаются звуки большой высоты, о нихъ мы скажемъ ниже, — необходимо при этомъ принять нѣкоторыя предосторожности; но въ описываемомъ сейчасъ наблюденіи, т. е. при длинѣ волны около 9 футовъ, не представляется никакихъ затрудненій. При благоприятныхъ условіяхъ минимумъ, которому соотвѣтствуетъ полная тишина, выраженъ чрезвычайно хорошо, и часто можетъ быть сигнализированъ съ точностью до половины секунды. Этотъ сигналъ, соотвѣтствующій моменту, когда фазы противоположны, даетъ требуемое свѣдѣніе первому наблюдателю. Если же латентно сигнализировать максимумъ, соотвѣтствующій совпаденію фазъ, то для этой цѣли лучше всего раздѣлить пополамъ интервалы между моментами умолканія.

Результаты не возбуждаютъ никакихъ сомнѣній. Переходы звука справа налево и обратно соотвѣтствуютъ совпаденію и противоположности фазъ; ихъ можно даже лучше наблюдать, чѣмъ максимумы и минимумы звука. Когда колебанія справа быстрее, чѣмъ слѣва, то послѣ совпаденія фазъ звукъ слышенъ справа, а послѣ минимума звукъ слышенъ слѣва. Равнымъ образомъ, если болѣе быстрымъ является колебаніе слѣва, то послѣ совпаденія фазъ звукъ слышенъ слѣва, а послѣ минимума справа. Вопросъ о томъ, какой камертонъ колеблется быстрее, рѣшаютъ обычнымъ способомъ, наблюдая, какъ измѣняется періодъ бѣнія, когда къ камертону прикрѣпляютъ или съ него удаляютъ кусочекъ воска. Напримѣръ, если бѣнія замедляются отъ такой нагрузки праваго камертона, то мы можемъ быть увѣрены, что именно этотъ камертонъ раньше совершалъ болѣе быстрыя колебанія. Большое количество сравненій подобнаго рода было

произведено въ различное время, и ни разу это правило не нарушалось. Весьма замѣчательно, что достаточно наблюдать кажущійся переходъ источника звука справа нѣлѣво и сигнализировать моменты, когда фазы противоположны, чтобы быть въ состояніи указать, обратно, какой камертонъ колеблется быстрее, хотя бы разность высотъ не превышала 0,02 колебаній въ секунду.

Нужно замѣтить также, что лабораторные опыты охватываютъ болѣе обширную область сравнительно съ наблюденіями на открытомъ воздухѣ. Въ этихъ послѣднихъ одиночный звукъ высотой въ 128 слышенъ спереди или сзади, когда фазы у обоихъ ушей совпадаютъ. По мѣрѣ того какъ направленіе становится все болѣе и болѣе косымъ, разность фазъ возрастаетъ; но она никогда не можетъ превысить умѣреннаго значенія, — около одной восьмой періода, — которое достигается, когда звукъ идетъ какъ разъ слѣва или справа. Разности фазъ около половины періода не встрѣчаются. Изъ лабораторныхъ опытовъ оказывается, что боковая локализція положенія источника звука не подлежитъ этому ограниченію, но что звукъ, напримѣръ, слышенъ справа, когда колебаніе достигающее праваго уха, приходитъ раньше, безразлично, опережаетъ ли оно другое на малую величину или почти на половину періода.

Наблюдаемая такимъ способомъ локализція звука справа или слѣва или, какъ я иногда буду говорить, боковая локализція столь явственна, что мнѣ любопытно было изслѣдовать, какъ я умудрился пропустить ее въ моихъ старыхъ опытахъ съ телефономъ, о которыхъ я упомянулъ уже вскользь. Я взялъ тѣ же аппараты, что и раньше; вблизи каждаго электромагнита, приводившаго въ колебаніе камертонъ (128), помѣщалась маленькая катушка изолированной проволоки, которая замыкалась черезъ телефонъ. Двойныя проволоки, соединенныя съ телефонами, проходили черезъ отверстія въ стѣнѣ. Съ цѣлью ослабить болѣе высокіе обертоны, я помѣщалъ между электромагнитами и катушками толстые мѣдные листы. Однако, когда я подносилъ телефоны къ ушамъ, то воспринимаемые звуки имѣли болѣе смѣшанный характеръ, чѣмъ я ожидалъ; я вынужденъ поэтому заключить, что я прежде переоцѣнивалъ степень ихъ приближенія къ характеру чистыхъ тоновъ. Хотя бѣнія можно было распознать, однако, явственной локализácii не замѣчалось, и отрицательный результатъ, очевидно, зависѣлъ отъ сложнаго характера звуковъ. Нагружая диски телефоновъ монетами пенни (прилѣпленными въ своемъ центрѣ посредствомъ воска), удавалось лучше исключить болѣе высокіе компоненты. Тогда оказалось возможнымъ фиксировать вниманіе на основномъ тонѣ и распознавать кажущійся переходъ того слѣва направо во время бѣнія. Но явленіе было далеко не столь очевидно, какъ при наблюденіи съ трубками, и легко могло ускользнуть отъ неподготовленнаго наблюдателя*).

*) После я съ помощью гораздо болѣе тяжелыхъ грузовъ (53 гр.) настроилъ телефонныя пластинки приблизительно на высоту 128, въ чемъ можно было убѣдиться, постукивая по нимъ пальцемъ. Чтобы найти мѣсто для этихъ сверх-комплектныхъ грузовъ, пришлось видоизмѣнить слуховыя трубки те-

Такимъ образомъ, мы неизбежно приходимъ къ заключенію, которое должно имѣть весьма существенныя и многообразныя послѣдствія для теории слуха, а именно: когда звукъ малой высоты достигаетъ обоихъ ушей съ приблизительно равными напряженностями, но съ разностью фазъ въ четверть періода, то мы легко можемъ различить, при какомъ ухѣ фаза больше. Приходится, повидимому, отказаться отъ взгляда, что колебательный характеръ звука оканчивается у наружныхъ концовъ нервовъ, по которымъ совершается передача въ мозгъ. Напротивъ, процессы въ нервѣ сами должны быть колебательнаго рода, конечно, не въ грубо-механическомъ смыслѣ, но съ сохраненіемъ періода и чего-то аналогичнаго фазѣ, — взглядъ, защищавшійся Рётгерфордомъ (Rutherford) противъ Гельмгольца еще въ 1886 г. И если мы допускаемъ, что легко распознать разности фазъ созвучныхъ тоновъ у обоихъ ушей, то естественно пойти дальше и принять, что отношенія фазъ между тономъ и его обертонами, воспринимаемыми однимъ и тѣмъ же ухомъ, тоже могутъ быть распознаваемы.

Боковая локализация источника звука при высотѣ въ 128 и меньше, которое столь трудно понять по теории напряженности, легко объясняется, такимъ образомъ, разностями фазъ у обоихъ ушей. Нижеслѣдующія наблюденія относятся къ чистымъ тонамъ высотой въ 256. Два большихъ камертона такой высоты, какіе встрѣчаются обыкновенно въ коллекціяхъ акустическихъ инструментовъ, настраиваются посредствомъ кусочковъ воска такъ, чтобы они давали біенія съ періодомъ въ 3 или 4 секунды, ихъ держать (послѣ того какъ они приведены въ колебанія) за ножку, по одному у каждого уха; удобнѣе, если ихъ держать ассистентъ. Кажущійся переходъ источника звука былъ вполнѣ явственнымъ, а при благоприятныхъ условіяхъ, въ особенности въ отношеніи равенства напряженностей у обоихъ ушей, весь звукъ казался идущимъ сперва съ одной стороны, а потомъ съ другой. Методъ держанія въ пальцахъ удовлетворителенъ въ смыслѣ изоляціи звуковъ. Фактически звукъ отъ каждого камертона слышенъ только ближайшему къ нему уху и совершенно не слышенъ въ другомъ. Немного трудно, однако, сохранить неизмѣнными относительныя положенія камертоновъ и ушей.

Этимъ путемъ можно произвести очень хорошія наблюденія, если равномерно и въ достаточной степени поддерживать колебанія камертоновъ. Ассистентъ, прислушивающійся черезъ развѣтвленную трубку, можетъ дать быстрый сигналъ въ моментъ, когда фазы противоположны. Въ этотъ моментъ совершается переходъ звука справа налѣво или наоборотъ, и при этомъ, какъ оказывается, соблюдается изложенное выше правило послѣдовательности, опредѣляющее, произойдетъ ли переходъ звука справа налѣво или слѣва направо.

лефоновъ. Звуки, слышныя при такомъ устройствѣ, были приблизительно чистые тона, и локализация была столь же явственна, какъ при наблюденіи звуковъ, проводимыхъ черезъ трубы. Легко понять, что аккомпаниментъ октавы и болѣе высокихъ тоновъ, которые переносились бы справа налѣво, быстрѣе, чѣмъ основные тоны, должны значительно усложнять дѣло.

Если открытые концы трубок не приставлены вплотную къ ушамъ, то звукъ легче можетъ обойти вокругъ головы и проникнуть въ противоположное ухо, чѣмъ это наблюдалось при высотѣ 128. Отсюда можетъ возникнуть послѣ всего вопросъ, не зависитъ ли все явленіе отъ періодически мѣняющихся малыхъ разностей напряженностей у обоихъ ушей. Въ отвѣтъ на это возраженіе лучше всего разсмотрѣть, къ чему могли бы привести такія вторженія. Предположимъ, что въ одинъ моментъ колебаніе справа ушло впередъ на четверть періода, такъ что мы слышимъ звукъ справа. При данной высотѣ замедленіе въ обходѣ вокругъ головы составить около четверти періода, и, слѣдовательно, звукъ справа, который сначала былъ впереди, по прибытіи влѣво, будетъ имѣть приблизительно одинаковую фазу съ пришедшимъ сюда главнымъ звукомъ. Съ другой стороны, звукъ, идущій слѣва уже съ опозданіемъ на четверть фазы, придя вправо, будетъ имѣть фазу, приблизительно противоположную фазѣ главнаго звука справа. Такимъ образомъ, обходъ вокругъ головы приводитъ къ усиленію звука слѣва и къ ослабленію его справа. Въ результатѣ звукъ долженъ былъ бы быть слышенъ слѣва, и такимъ образомъ осталось бы неяснымъ, почему онъ слышенъ справа. Тѣ же самыя соображенія примѣнимы, хотя и въ меньшей степени, къ звукамъ съ высотой 128 и къ звукамъ съ высотой нѣсколько большей, чѣмъ 256.

Дальше, по порядку высоты, нужно было подвергнуть испытанію, звуки отъ камертоновъ, дающихъ тонъ e' въ 320 колебаній въ секунду. Кажущійся переходъ источника звука, съ одной стороны на другую былъ весьма явствененъ, но въ началѣ было немного трудно установить моментъ, когда фазы противоположны. Послѣ нѣсколькихъ опытовъ слѣдалось достаточно яснымъ, что здѣсь имѣетъ силу то же правило, какъ и при меньшей высотѣ, т. е. что болѣе быстрый камертонъ беретъ верхъ послѣ максимума біеній, соответствующаго совпаденію фазъ.

Съ дальнѣйшимъ же увеличеніемъ высоты наблюденія становились болѣе трудными, отчасти, безъ сомнѣнія, вслѣдствіе чисто экспериментальныхъ усложненій, но также, я полагаю, и вслѣдствіе того, что самый эффектъ былъ выраженъ менѣе явственно. Когда брали два камертона, настроенные на g' , и открытые концы трубокъ находились не очень близко къ ушамъ, примѣрно на разстояніи 2 дюймовъ, локализация казалась двумъ наблюдателямъ (включая въ томъ числѣ меня) не только затрудненною, но вообще была возможна лишь близъ момента противоположныхъ фазъ. Однако, третій наблюдатель могъ локализовать звукъ лучше и не только въ области противоположныхъ фазъ.

Согласно съ теоріей, по которой обходъ звука вокругъ головы имѣетъ связь съ этими усложненіями, открытые концы трубокъ были помѣщены гораздо ближе къ ушамъ, но не совершенно вплотную, а резонаторы были приспособлены такимъ образомъ, чтобы слѣлать звукъ менѣе громкимъ. При такихъ условіяхъ оба наблюдателя констатировали нормальный эффектъ, не ограниченный областью противоположныхъ фазъ. Однако, наблюденіе несомнѣнно труднѣе, чѣмъ

при малых высотах, и я полагаю, что явление, действительно, менее хорошо выражено.

Подобного же рода опыты с камертонами тона c'' (512) дали результаты такого же характера. Когда открытые концы трубок находились совсем близко к ушам, то кажущееся перемещение источника звука было довольно заметно и правильно. В этом сходились три наблюдателя. Но если немного отстранить трубки, то возникает затруднение, степень которых, повидимому, мняется в зависимости от наблюдателя. Во всех случаях, когда явление было достаточно ясно для наблюдения, они подчинялись правилу последовательности.

При высоте e'' (640) получались результаты, не очень отличные от прежних. Когда открытые концы трубок находились близко к ушам, но не без доступа для воздуха, можно было наблюдать лишь посредственный эффект, и то только в области противоположных фаз. Правило последовательности сохраняло силу также и здесь.

Наконец, этим же методом были произведены опыты с камертонами, настроенными на g ($6 \times 128 = 768$). Выполнить необходимые условия опыта не представляло особенного труда, но результаты получились неопределенные. Даже когда открытые концы трубок находились близко к ушам, я не мог уверенно сказать, что наблюдал звук справа или слева. Другой наблюдатель считал, что ему кое-что было слышно. Ясно, что мы были, по меньшей мере, близки к предѣлу.

Понятно, что некоторые из этих наблюдений довольно трудны. Непривычный наблюдатель испытывал бы сомнѣнія даже в тех случаях, когда рѣшение является сравнительно легким. Но все наиболее существенные полученные результаты опираются на согласие, по меньшей мере, трех наблюдателей*). Я считаю установленным, что до высоты g' разности фаз сопровождаются явственно боковой локализацией. Они представляют, вероятно, главное основание, на котором опирается наша способность различать звук, идущий справа, от звука, идущего слева, по крайней мере для тонов ниже c' (256).

Как я уже упомянул, можно было предвидѣть, что разность фаз уже не может служить в качестве индикатора при большой высоте. Приблизительно до тона e' условия благоприятны. При этой высоте разность фаз ушей, произведенная дальним звуком, возрастает от нуля, когда источник спереди или сзади, до максимума в четверть периода (в одном или в другом направлении), когда источник находится справа или слева по линии ушей. Это есть разность фаз, при которой слѣдует ожидать наиболее ясной локализации, так что до этой высоты мы будем правильно определять положение источника звука. При несколько более высоких тонах должны повидимому, наступить усложнения. Самое явное ощущение соответствующее разности фаз в четверть периода наступило бы, когда источник еще находился бы в косом положении, а при дальнейшем смещении источника звука в бок локализация затруднилась бы. При высоте вблизи e'' (640) максимальная разность фаз повысилась

*) Лэди Релей, Энокъ (Enock) и я.

бы до половины періода, т. е. до разности, которая не даетъ вовсе возможности опредѣлить положеніе источника звука. Такимъ образомъ, хотя и можно было бы опредѣлить положеніе источника, расположеннаго въ косомъ направленіи, однако, эти ощущенія измѣнили бы, когда они болѣе всего нужны, а именно, когда источникъ находится дѣйствительно на линіи ушей. Въ этомъ случаѣ воспріятіе разностей фазъ окажется болѣе вредной, чѣмъ полезной. При высотѣ немного большей неизбежно наступили бы сомнѣнія и колебанія, которыя приводили бы къ ошибочнымъ заключеніямъ. Такъ, напримѣръ, звукъ, идущій немного слѣва, и другой, идущій вполнѣ справа, давали бы одинаковыя ощущенія.

Въ общемъ, повидимому, локализация, вызываемая разностью фазъ, исчезаетъ въ области тѣхъ высотъ, гдѣ можно было бы опасаться, что разность фазъ вводитъ въ заблужденіе. Нѣтъ указаній, что здѣсь имѣется какое-нибудь точное численное отношеніе. Если бы вопросъ былъ въ томъ, чтобы точно вычислить предѣльную высоту, то могло бы оказаться необходимымъ вмѣсто размѣровъ головы современнаго взрослого человѣка обратиться къ нашимъ предкамъ, быть можетъ изъ очень отдаленнаго прошлаго. Къ счастью, въ тѣхъ случаяхъ, когда разность фазъ не можетъ намъ служить, на помощь приходитъ разность напряженностей. Нельзя было бы, вѣроятно, ожидать, чтобы мы интуитивно распознали тѣ совершенно различныя основы, на которыя опираются наши сужденія въ этихъ двухъ случаяхъ.

Довольно трудный вопросъ возникаетъ относительно того, возможно ли въ лабораторныхъ опытахъ различать моменты, когда фазы совпадаютъ и когда онѣ противоположны. Естественно, можетъ быть, что кажущіяся движенія звука справа налѣво и обратно поддаются объясненію, какъ части общаго вращательнаго движенія, такъ что, напримѣръ, совпаденіе фазъ соответствовало бы положенію спереди, а противоположность фазъ — положенію сзади. Въ частномъ случаѣ вопросъ касается направленія вращенія: совершается ли вращеніе по направленію часовой стрѣлки или въ противоположную сторону. Относительно этого мои наблюдатели часто были несогласны межъ собой, вслѣдствіе чего я склоненъ заключить, что въ этихъ опытахъ совпаденіе и противоположность фазъ не находятся въ опредѣленной зависимости отъ „передняго“ и „задняго“ ощущеній.

Въ этой статьѣ я предполагалъ рассмотреть также вопросъ о нашей способности различать, когда звукъ наблюдается на открытомъ воздухѣ, идетъ ли онъ спереди или сзади; но различныя препятствія побудили меня отложить эту задачу. Однимъ изъ этихъ препятствій явилось ухудшеніе моего собственнаго слуха (на 64-омъ году жизни). Тридцать лѣтъ тому назадъ для меня представляли затрудненіе только чистые тона или, въ худшемъ случаѣ, музыкальныя ноты, свободныя отъ сопутствующихъ шумовъ. Нынѣ же, къ моему великому удивленію, я дѣлаю ошибки даже при опытахъ съ человѣческой рѣчью.

Нужно предположить, что этот недостаток связанъ съ тугоухостью къ высокимъ тонамъ, какими являются въ особенности свистящіе звуки. Дѣйствительно, нѣсколько лѣтъ тому назадъ я замѣтилъ, что я уже не слышу, какъ раньше, нѣкоторыхъ высокихъ нотъ дудокъ съ чувствительнымъ пламенемъ, которыя я примѣнялъ для имитированія оптическихъ явленій. Если способность различать переднее и заднее положенія зависитъ — таково, повидимому, единственно возможное объясненіе, — отъ измѣненія качества, производимое наружнымъ ухомъ, то слѣдовало ожидать, что въ этомъ изслѣдованіи будутъ затронуты болѣе высокіе элементы звука. При этомъ не было бы ничего удивительнаго, если бы помимо глухоты обнаружился также индивидуальныя различія наблюдателей.

Мой ассистентъ Энока (Епоск) способенъ различать звукъ, идущій спереди отъ звука, идущаго сзади, хотя, думаю, не столь хорошо, какъ я могъ когда-то. Опыты этого рода легко производить на полянѣ подъ открытымъ небомъ: наблюдатель закрываетъ свои глаза и уши и, если нужно, движеніемъ большихъ пальцевъ надъ ушами устраняетъ остаточные внѣшніе звуки. Въ моментъ наблюденія уши, конечно, открыты. Когда объектомъ наблюденія служатъ звуки отъ источниковъ, которые неудобно передвигать, напримѣръ тиканье часовъ, то полезно пользоваться вращающимся стуломъ.

Какъ слѣдовало ожидать, Энока можно было сбить, пользуясь небольшими отражающими пластинками, расположенными какъ-разъ снаружи ушей. Для этой цѣли служило такое же приспособленіе, какъ въ псевдофонѣ проф. Томпсона*), при чемъ рефлекторы съ плоскостями подъ угломъ въ 45° къ линіи ушей могли быть вращаемы неизвѣстнымъ для наблюдателя образомъ вокругъ этой линіи, какъ оси. Въ моей практикѣ оба рефлектора всегда были прилажены симметрично. Такимъ образомъ, если рефлекторы вращались такъ, чтобы посылать въ уши звуки спереди, то наблюдатель ни разу не ошибался, какъ будто дѣйствіе рефлекторовъ помогало естественному дѣйствію наружныхъ ушей. Съ другой стороны, когда подставки съ рефлекторами поворачивали на 180° такъ, чтобы онѣ отражали въ уши звуки сзади, то наблюдатель часто дѣлалъ ошибки. Я надѣюсь въ недалекомъ будущемъ подтвердить и расширить эти наблюденія.

Въ заключеніе замѣчу, что установленные теперь факты могутъ получить практическое примѣненіе. Когда на морѣ во время тумана получаютъ сигналы объ опасности, то очень важно, конечно, умѣть опредѣлять направленіе. Если звукъ продолжается достаточно долго (5 — 6 секундъ), то лучше всего поворачивать тѣло или голову, устанавливая ее вправо и влево отъ звука, и затѣмъ стать лицомъ къ звуку такъ, чтобы онъ не казался идущимъ ни справа, ни слѣва. Если же продолжительность сигнала значительно меньше, какъ чаще всего бываетъ, то выгоднѣе стоять неподвижно; но при этомъ мы рискуемъ сильно ошибиться въ тѣхъ случаяхъ, когда дѣйствительное направленіе сигнала приблизительно спереди или приблизительно сзади. Если на-

*) Phil. Mag., November, 1879.

блюдатель рѣшаетъ, что сигналъ справа или слѣва, то такое сужденіе обыкновенно заслуживаетъ довѣрія; но когда онъ полагаетъ, что сигналъ идетъ спереди или сзади, то легко можетъ ошибиться. Напримеръ, если кажется, что звукъ направленъ подъ угломъ въ 45° съ переди отъ точнаго праваго направленія, то можетъ случиться, что на самомъ дѣлѣ звукъ направленъ подъ угломъ въ 45° сзади отъ точнаго праваго направленія. Очень выгодно прибѣгнуть къ соединеннымъ показаніямъ нѣсколькихъ наблюдателей, обращенныхъ лицомъ въ различныя стороны. Сравнивая ихъ сужденія, нужно принимать во вниманіе только ихъ мнѣнія о правомъ и лѣвомъ направленіи и не обращать вниманія на ихъ впечатлѣнія, когда звукъ кажется имъ идущимъ спереди или сзади; такой методъ даетъ надежную и довольно точную оцѣнку направленія.

Объ одномъ возможномъ выводѣ

изъ опытовъ Майкельсона и другихъ.

и *С. Вавилова.*

§ 1. Классическій опытъ Майкельсона (Michelson) и многочисленный рядъ другихъ подобныхъ опытовъ*) были поставлены съ цѣлью опредѣлить вліяніе абсолютнаго движенія земли относительно неподвижнаго ээира на распространеніе электро-магнитныхъ возмущеній въ ээирѣ. Результаты всѣхъ этихъ изслѣдованій, какъ извѣстно, отрицательны, т. е. никакого вліянія движенія земли не было найдено. Оно должно было сказаться въ численномъ измѣненіи нѣкоторой $\varphi(v/c)$, гдѣ v — абсолютная скорость движенія земли и c скорость свѣта.

§ 2. Для теоретическаго объясненія такихъ результатовъ были предложены двѣ гипотезы ad hoc. Согласно первой гипотезѣ Лоренца-Фитцджеральда (Lorentz-Fitzgerald) линейныя размѣры тѣлъ въ направленіи движенія претерпѣваютъ сокращеніе, выражающееся функцией отъ v/c . Болѣе смѣлое предположеніе Эйнштейна (Einstein), приведшее къ такъ называемому „принципу относительности“ заключается въ томъ, что самое время находится въ функциональной зависимости отъ v/c . Та и другая гипотеза въ концѣ концовъ удовлетворительно объясняютъ результаты опытовъ, но влекутъ за собою слишкомъ тяжкія послѣдствія для всей области классической физики.

§ 3. Но предпосылкою опыта Майкельсона и всѣхъ выводовъ сдѣланныхъ изъ него, является одинъ, далеко не очевидный фактъ: за абсолютное движеніе земли относительно ээира принимается ея дви-

*) См. хотя бы О. Д. Хвольсонъ. „Курсъ физики“. Т. 4, II-я половина стр. 349.

женіе относительно солнца, скорость котораго приблизительно равна 30 км. въ секунду. Напримѣръ, О. Д. Хвольсонъ пишетъ въ своемъ учебникѣ (ч. 4-я, 2-я половина, стр. 358): „Абсолютное прямолинейное равномерное движеніе земли, должно отпечатлѣться на тѣхъ явленіяхъ распространія электро-магнитныхъ возмущеній въ эфирѣ, которыя наблюдаются въ этомъ тѣлѣ. Движеніе земли за небольшой промежутокъ времени мы можемъ считать прямолинейнымъ и равномернымъ. Ея скорость мы примемъ равную 30 км. въ секунду“. Такое предположеніе о скорости движенія земли относительно эѳира крайне странно и не согласуется съ самыми обычными астрономическими фактами. Земля, кромѣ обращенія вокругъ солнца, принимаетъ участіе въ нѣкоторомъ поступательномъ движеніи всей солнечной системы. Кромѣ того, мы не можемъ поручиться за то, что весь видимый нами міръ не находится въ движеніи относительно какого-либо неизвѣстнаго намъ центра.

Абсолютную скорость земли мы не знаемъ, она быть можетъ очень велика, но быть можетъ и очень мала и приближается къ нулю. Если принять очень вѣроятную гипотезу о неподвижности эѳира, то изъ опыта Майкельсона непосредственно слѣдуетъ, что абсолютная скорость движенія земли чрезвычайно мала. Если такъ, то результаты опыта вполне понятны и очевидны.

Изъ этого опыта такимъ образомъ, можно сдѣлать интересный астрономическій выводъ, для доказательства же неподвижности эѳира нужно воспользоваться какими либо иными скоростями, а не скоростью абсолютнаго движенія земли*).

БИБЛИОГРАФІЯ.

1. Рецензіи.

«Е. И. Игнатьевъ. Начатки ариѳметики. Изданіе 2-е». А. С. Суворина. «Новое Время».

Указывая цѣли, которая ставитъ себя данный трудъ, авторъ говоритъ. Наглядное, основательное и сознательное усвоеніе начинающимъ счета и дѣйствій надъ числами въ предѣлахъ перваго десятка и первой сотни есть залогъ его несомнѣнныхъ и вѣрныхъ успѣховъ въ дальнѣйшемъ. Но не менѣе справедливо и то, что въ этихъ же предѣлахъ, шагъ за шагомъ, на маленькихъ, какъ говорятъ, числахъ, легкихъ примѣрахъ народной мудрости и небольшихъ историческихъ справкахъ можно заложить основаніе для болѣе общаго и отвлеченнаго пониманія ариѳметики, усвоить терминологию, приемы многихъ дѣйствій и разсужденій, словомъ, незамѣтно подойти къ пониманію сущности числа и къ изученію науки о числѣ.

Не вдаваясь въ полемику по поводу выдвинутыхъ положеній, мы считаемъ умѣстнымъ сказать слѣдующее: по отношенію къ учебнику часто важны не столько общія руководящія идеи, сколько способъ ихъ осуществленія. Въ

*) Вопросъ, поставленный здѣсь г. Вавиловымъ очень интересенъ. Редакція дастъ на него отвѣтъ въ одномъ изъ ближайшихъ номеровъ.

данномъ случаѣ цѣль подойти незамѣтно къ пониманію сущности числа и къ изученію науки о числѣ, наложила яркую печать на характеръ изложенія. Авторъ стремился быть научнымъ, формальнымъ въ своихъ объясненіяхъ, пользоваться дедукціей. Много мѣстъ книги свидѣтельствуютъ о желаніи углубиться въ сущность предмета, отбѣнить тонкости. Авторъ старается на первыхъ же порахъ захватить предметъ глубоко; это даетъ обиліе деталей; мы полагаемъ, что онѣ не будутъ замѣчены и, во всякомъ случаѣ, не будутъ поняты.

Слогъ книги, какъ естественный результатъ указанныхъ особенностей, недоступенъ дѣтямъ.

Для иллюстраціи приводимъ нѣкоторые выписки: „все то, къ чему можно приложить понятіе о сложении и равенствѣ можно назвать однимъ словомъ количество“; „мы напередъ условимся, какъ въ этой книгѣ мы будемъ понимать слово сложить“; „мы будемъ говорить, что предметы равны одинъ другому, когда каждый изъ нихъ равенъ какому-нибудь отдѣльному третьему предмету“; „площадь и овца количества неоднородныя съ точки зрѣнія продажной стоимости“; „правило такого вычитанія выводится изъ слѣдующаго положенія, которое можно принимать очевиднымъ“.

Упомянутыя особенности учебника дѣлаютъ его, на нашъ взглядъ, непригоднымъ какъ пособие для учащихся приготовительнаго, перваго класса среднихъ учебныхъ заведеній, ни тѣмъ болѣе для начальной школы.

Авторъ считаетъ свой трудъ руководствомъ и для самообученія. И съ этой точки зрѣнія, намъ кажется, остаются въ силѣ сдѣланныя выше замѣчанія. Мы полагаемъ, что характеръ изложенія дѣлаетъ книгу недоступной для читателя, которому даютъ совѣтъ: „особенное вниманіе обратить на упражненія въ дополненіи числа до десяти“.

Указанная сторона учебника настолько для него характерна и по существу вопроса, думается, настолько важна, что касаться другихъ особенностей разбираемаго труда намъ представляется лишнимъ.

И. Д.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей прив.-доц. Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ канторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникъ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 267 (6 сер.). Пусть a — цѣлое нечетное число, не кратное 5, а n — любое цѣлое положительное число. Доказать, что двѣ послѣднія цифры чиселъ a^{20n+1} и a одинаковы.

М. Огородовъ (Самара).

№ 268 (6 сер.). Доказать тождество

$$\left(\frac{p_{n+2}}{p_n} - 1\right) \left(1 - \frac{p_{n-1}}{p_{n+1}}\right) = \left(\frac{q_{n+2}}{q_n} - 1\right) \left(1 - \frac{q_{n-1}}{q_{n+1}}\right),$$

гдѣ $p_{n-1}, p_n, p_{n+1}, p_{n+2}$ суть соответственно числители, а $q_{n-1}, q_n, q_{n+1}, q_{n+2}$ — знаменатели $(n-1)$ -ой, n -ой, $(n+1)$ -ой и $(n+2)$ -ой подходящихъ дробей нѣкоторой непрерывной дроби.

Д. Ханжисевъ (Армавиръ).

№ 269 (6 сер.). Дано, что сумма

$$g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_n(x)$$

даннаго числа n функций $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$ имѣеть при неограниченномъ приближеніи x къ a предѣломъ данное число c , что каждая функция $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ при неограниченномъ приближеніи x къ a имѣеть предѣломъ данное число l и что каждая изъ функций $g_i(x)$ ограничена для значеній x , достаточно близкихъ къ a , т. е. что каждая изъ функций $g_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) удовлетворяетъ для значеній x , достаточно близкихъ къ a , неравенству $|g_i(x)| < b$, гдѣ b — данное число. Вычислить предѣлъ

$$\lim_{x \rightarrow a} [g_1(x)f_1(x) + g_2(x)f_2(x) + \dots + g_n(x)f_n(x)].$$

Н. С. (Одесса).

№ 270 (6 сер.). Доказать равенство

$$\frac{ab + bc + ca}{6(l + m + n)} = R,$$

гдѣ a, b, c — стороны, R — радиусъ круга описаннаго, а l, m, n — разстоянія центра тяжести отъ сторонъ нѣкотораго треугольника ABC .

(Займств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

Отдѣлъ I.

№ 230 (6 сер.). Пусть $\varphi(p)$ обозначаетъ число связей чиселъ, не превосходящихъ цѣлаго положительнаго числа p и взаимно простыхъ съ p . Доказать, что

$$\varphi(md) = d\varphi(m),$$

если d — делитель числа m . Доказать тождество

$$\varphi(mm') = d\varphi(M),$$

гдѣ d — общій наибольшій делитель чиселъ m и m' , а M — ихъ наименьшее кратное.

Извѣстно, что для числа n , въ составъ котораго входятъ простые числа p_1, p_2, \dots, p_k и только эти простые числа, справедлива формула

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Если же n есть степень простого числа p съ цѣлымъ положительнымъ показателемъ, то

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

и, наконецъ, $\varphi(1) = 1$. Вообще

$$(1) \quad \varphi(n) = n P_n,$$

гдѣ P_n , соответственно тремъ рассмотрѣннымъ случаямъ, равно

$$\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right), \quad \left(1 - \frac{1}{p}\right) \quad \text{или} \quad 1.$$

Если δ есть дѣлитель числа m , то въ составъ чиселъ $m\delta$ и m входятъ одни и тѣ же простые числа, или же $m\delta = m = 1$, — если $m = 1$. Поэтому, если δ — дѣлитель m , то (2) $P_{m\delta} = P_m$. Но [см. (1)]

$$\varphi(m\delta) = m\delta P_{m\delta}, \quad \varphi(m) = m P_m,$$

откуда [см. (2)]

$$\frac{\varphi(m\delta)}{\varphi(m)} = \frac{m\delta P_{m\delta}}{m P_m} = \delta.$$

Итакъ, если δ — дѣлитель m , то $\frac{\varphi(m\delta)}{\varphi(m)} = \delta$, откуда

$$(3) \quad \varphi(m\delta) = \delta \varphi(m).$$

Пусть d — общій наибольшій дѣлитель, а M — наименьшее кратное чиселъ m и m' . Тогда

$$M = \frac{mm'}{d}, \quad mm' = Md, \quad M = d \left(\frac{m}{d} \cdot \frac{m'}{d}\right),$$

и d — дѣлитель числа M , такъ какъ каждое изъ чиселъ m и m' дѣлится на d вслѣдствіе чего произведеніе $\frac{m}{d} \cdot \frac{m'}{d}$ есть число цѣлое. Поэтому [см. (3)] $\varphi(mm') = \varphi(Md) = d\varphi(M)$. Итакъ $\varphi(mm') = d\varphi(M)$.

М. Быкъ (Кіевъ); В. Ревзинъ; (Сумы) Н. К-новъ (Петроградъ).

№ 233 (6 сер.). Пусть $\varphi(n)$ обозначаетъ число чиселъ, не превосходящихъ n и взаимно простыхъ съ n . Доказать, что

$$\varphi(m^k) = m^{k-1} \varphi(m),$$

гдѣ m и k суть любыя цѣлыя положительныя числа. Полагая $u_n = m^n$ ($n=1, \dots, k$) доказать, что

$$\frac{\sum_{n=1}^k \varphi(u_n)}{\sum_{n=1}^k u_n} = \frac{\varphi(m)}{m}.$$

Такъ какъ m^{k-1} есть дѣлитель числа m^k , то, примѣняя формулу (3), выведенную при рѣшеніи задачи 230-ой (6 сер.), находимъ, что

$$\varphi(m^k) = \varphi(m \cdot m^{k-1}) = m^{k-1} \varphi(m).$$

Итакъ $\varphi(m^k) = m^{k-1} \varphi(m)$, или, замѣняя k черезъ n , $\varphi(m^n) = m^{n-1} \varphi(m)$, откуда, дѣля на m^n , получимъ, что $\frac{\varphi(m^n)}{m^n} = \frac{\varphi(m)}{m}$, или $\frac{\varphi(u_n)}{u_n} = \frac{\varphi(m)}{m}$. Давая въ этомъ равенствѣ n рядъ значеній $n=1, 2, \dots, k$, получимъ

$$\frac{\varphi(u_1)}{u_1} = \frac{\varphi(u_2)}{u_2} = \dots = \frac{\varphi(u_k)}{u_k} = \frac{\varphi(m)}{m},$$

откуда, примѣняя теорему о рядъ равныхъ отношеній, находимъ, что

$$\frac{\sum_{n=1}^{n=k} \varphi(u_n)}{\sum_{n=1}^{n=k} u_n} = \frac{\varphi(m)}{m}.$$

В. Ревзинъ (Сумы); Н. Гольдбуртъ (Вильна); Н. К-новъ (Петроградъ).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника“, подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

Проф. Содди. *Радий и его разгадка.* Изд. «Матезисъ». Одесса, 1915. Стр. 204. Ц. 1 р. 50 к.

Доклады, читанные на 2-мъ Всероссийскомъ Съездѣ преподавателей математики въ Москвѣ.

Сборникъ задачъ по Высшей Математики. Изд. Института Инженеровъ Путей Сообщенія Императора Александра I. Изданіе 2-ое. Петроградъ, 1915. Стр. XI+290. Ц. 2 р. 50 к.

М. Ф. Зиминъ. *Кривая безъ кривизны.* Новочеркасскъ, 1914. Стр. 28.

Проф. С. V. L. Charlier *Какъ можетъ быть устроена безконечная вселенная.* Перев. Я. Юрикъ. Симбирскъ, 1914. Стр. 16. Ц. 20 к.

Редакторъ прив.-доц. В. Ф. Каганъ.

Издатель В. А. Гернетъ.

Дозволено военной цензурой.

Типографія „Техникъ“ — Одесса, Екатерининская, 58.

Обложка
щется

Обложка
щется