

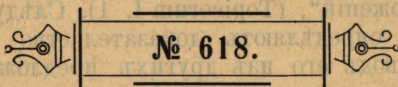
Обложка
щется

Обложка
щется

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

Элементарной Математики.



№ 618.

Содержаніе: О діалектическомъ методѣ древнихъ геометровъ. *Проф. И. Ю. Тимченко.* — Явленіе Штарка — разложеніе спектральныхъ линий въ электрическомъ полѣ. *А. Рабиновича.* — Законъ природы въ небесной эволюціи. *Т. Си.* — Научная Хроника: Явленіе Дебая. Образуются ли неонъ и гелій изъ болѣе тяжелыхъ газовъ? — Задачи №№ 211 — 214 (6 сер.). — Рѣшенія задачъ. Отдѣлъ I. № 164 (6 сер.). — Объявленія.

О діалектическомъ методѣ древнихъ геометровъ.

Проф. И. Ю. Тимченко.

Классическая геометрія — своеобразный продуктъ древне-греческаго гения. Она возникла въ связи съ тѣмъ культурнымъ движеніемъ эллинской расы, которое привело къ созданію греческой философіи и абстрактной науки вообще — въ особенности діалектики и логики. Изложеніе классической геометріи строго приурочено къ требованіямъ діалектическаго метода. Греческій геометръ, излагая свою науку и стараясь раскрыть природу трактуемаго предмета, заботится главнымъ образомъ о томъ, чтобы привести воображаемаго противника къ признанію предложеній, выражающихъ истины этой науки. Иногда кажется, что всѣ усилія геометра направлены исключительно къ тому, чтобы сдѣлать для спорщика невозможнымъ отрицаніе высказаннаго предложенія.

Прежде всего, чтобы ограничить область разсужденій и не возбуждать споровъ о словахъ, нужны были термины (*δρος*) — опредѣленія; они связываютъ слова, употребляемые въ специальномъ техническомъ смыслѣ, съ общепринятой научной или философской терминологіей. Далѣе высказывались истины, которыя противникъ долженъ

быть признать *á priori* — требованія (*ἀξιώματα, αἰτήματα*), принимаемые положенія (*λαμβάνόμενα*), общія безспорныя представленія (*κοιναὶ ἐννοιαί*). Предложенія высказывались затѣмъ въ принятыхъ терминахъ и доказательство состояло въ томъ, чтобы вывести ихъ, какъ необходимыя слѣдствія изъ допускаемыхъ положеній, или показать, что отрицаніе теоремы приводитъ къ противорѣчію съ этими положеніями (*ἀπαγωγή εἰς ἀδύνατον*). Нерѣдко математическое изслѣдованіе принимало форму задачи: геометръ давалъ рѣшеніе этой задачи, а затѣмъ доказывалъ вѣрность этого рѣшенія.

Аристотель опредѣляетъ доказательство (*apodeixis*), какъ особый родъ силлогистическаго процесса: „доказательство есть выводъ изъ истинныхъ и первоначальныхъ положеній, или же изъ такихъ положеній, которыя получили свое начало отъ первоначальныхъ и истинныхъ; диалектический же выводъ есть тотъ, который происходитъ изъ общепринятыхъ положеній“ (Торисогум I, 1). Слѣдую Аристотелю, и новѣйшіе логики опредѣляютъ доказательство предложенія, какъ силлогистическій выводъ его изъ другихъ предложеній, признанныхъ вѣрными и необходимыми — въ концѣ концовъ изъ опредѣленій и аксіомъ (Sigwart, „Logik“, II, S. 275). Разборъ доказательствъ у древнихъ греческихъ геометровъ убѣждаетъ насъ, однако, въ томъ, что доказательная сила ихъ была связана не только съ соблюденіемъ законовъ формальной логики, и что самое доказательство, по существу своему, не было формально логическимъ, т. е. не подчинялась формально логическому порядку.

Проклъ, знаменитый комментаторъ Евклида, въ своемъ комментаріи на первую книгу Евклидовыхъ „Началъ“ *) даетъ слѣдующее краткое описаніе доказательства всякаго геометрическаго предложенія:

„Предложеніе говорить о томъ, что ищется и при какихъ данныхъ. Въ совершенномъ предложеніи есть и то и другое. Изложеніе же, разбирая данныя сами по себѣ, приготовляетъ къ изысканію, Ограниченіе же отдѣльно объясняетъ сущность вопроса. Построеніе же, съ цѣлью уловить искомое, прибавляетъ то, чего нѣтъ среди данныхъ. Доказательство же — это научный выводъ предложеннаго положенія изъ принятыхъ положеній. Заключение же снова обращается къ предложенію, подтверждая то, что обнаружено“ **).

Проклъ долго останавливается на разъясненіи этихъ терминовъ ***). Вотъ тѣ заключенія, которыя можно сдѣлать изъ объясненій

*) Procli Diadochi in primm Euclidis elementorum librum commentarii ex recognitione Godofredi Friedlein Lipsiae M. DCCC. LXXIII. — Проклъ жилъ въ V в. по Р. Хр. Въ своихъ комментаріяхъ Проклъ помѣстилъ обширныя разсужденія о философіи математики, а также цѣнныя историческія свѣдѣнія, заимствованныя имъ у древнѣйшихъ писателей, главнымъ образомъ, у Евдема Родосскаго, жившаго въ концѣ IV и началѣ III-го вѣка до Р. Х. и Гемина, писателя I-го вѣка до Р. Х. Ср. Paul Tannery. „La Géométrie Grecque, comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons. Essai critique“. 1-re partie. Paris 1887. — J. L. Heiberg въ „Philologus, Zeitschrift für d. Klass. Alterthum“ XLIII, 2.

**) Procli D. Commentarii, Propositionum pars prior, Prop. I, probl. I. ed. Friedlein p. 203, ll. 5 — 15.

***) L. c. pp. 203 — 210.

Прокла и внимательнаго разсмотрѣнія по существу доказательствъ греческихъ геометровъ. Полное и правильное доказательство должно было состоять изъ слѣдующихъ частей.

1) Предложеніе (*πρότασις*) — изложеніе теоремы или задачи въ общихъ терминахъ, выражающихъ общія понятія.

Напримѣръ: „Ежели прямая линия разсѣчена какъ ни есть; то прямоугольникъ содержаемый въ цѣлой и въ одномъ изъ ея отрѣзковъ, равенъ прямоугольнику, содержащему въ обоихъ отрѣзкахъ, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ отрѣзка прежде взятаго“. (Предложеніе III книги второй Евклидовыхъ „Началъ“ въ переводѣ Петрушевскаго*).

2) Изложеніе (*ἐκθεσις*) — обращеніе къ интуиціи; здѣсь термины *protasis* воплощаются въ опредѣленные образы, закрѣпляемые въ представленіи участниковъ доказательства (диалектическаго спора) индивидуальными названіями и чертежами. По Проклу это *ekthesis* въ собственномъ смыслѣ слова. Вторая часть *ekthesis*, по Проклу носитъ названіе ограниченія (*διωρισμός*) — предложеніе, высказанное относительно тѣхъ опредѣленныхъ объектовъ, о которыхъ говорилось въ первой части:

„Пусть будетъ прямая *AB* разсѣчена какъ ни есть въ точкѣ *C* (*ekthesis*). Говорю, что прямоугольникъ въ *AB*, *BC* равенъ прямоугольнику въ *AC*, *CB*, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ *BC*“ (*diorismos* — по Проклу).

Въ арабскомъ переводѣ Евклида первая часть *ekthesis* называется примѣромъ — *almathal* (въ средне-вѣковомъ латинскомъ переводѣ арабскаго Евклида, сдѣланномъ Герардомъ Кремонскимъ — *exemplum****). Въ примѣненіи ко второй части *ekthesis* названія *diorismos*, у Прокла, кроется, повидимому, недоразумѣніе. Эта часть начинается обыкновенно со словъ „я говорю“ (я утверждаю).

*) Евклидовыхъ Началъ восемь книгъ, а именно первыя шесть, одиннадцатая и двѣнадцатая, содержащая въ себѣ Основанія геометріи. Переводъ съ греческаго Θ. Петрушевскаго, съ прибавленіями и примѣчаніями. СПб. 1819. Я пользовался этимъ переводомъ предпочтительно передъ другими, такъ какъ онъ точнѣе другихъ и нѣсколько устарѣлый слогъ его въ соединеніи съ вѣрностью подлиннику отлично передаетъ впечатлѣніе получаемое при чтеніи греческаго текста. Приводимая теорема находится въ книгѣ Петрушевскаго на стр. 63. Если обозначить черезъ *a* цѣлую линію, черезъ *b* — ея отрѣзокъ и согласиться изображать прямоугольникъ, построенный на двухъ линіяхъ, какъ произведеніе ихъ, то Евклидово предложеніе можно будетъ передать слѣдующей формулой: $ab = b(a - b) + b^2$.

**) „Expositio est, quae oculis subicit, quae in propositione data sunt“ — Euclidis elementa ex interpretatione Al-Narischadschii cum commentariis Al-Narizii. (Codex Leidensis 399, 1). Arabice et latine ediderunt notisque instruxerunt R. O. Besthorn et J. L. Heiberg. Partis I Fasciculus I, Hauniae 1893, p. 37. — „Exemplum vero est illud, quod subicit visui intentionem propositionis“. — Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis commentarii ex interpretatione Gherardi Cremonensis in codice Cracoviensi 569 servata edidit M. Curtze. Lipsiae 1899. (Euclidis Opera omnia, supplementum), p. 40. — „Примѣръ дѣлаетъ видимымъ заключеніе предложенія (протасиса). Абѣль-Аббасъ Аль-Фадль ибнъ Хатимъ Аль-Наризи, извѣстный въ средніе вѣка подъ именемъ Анариція, жилъ около 900 г. по Р. Х. Въ комментаріяхъ его содержатся интересные отрывки древнихъ комментаторовъ Герона и Симплиція.

Участникам доказательства теперь ясно, что исходъ доказательства (спора) зависитъ отъ принятія предложенія, высказаннаго во второй части *ekthesis*.

3) Построение (*κατασκευή*) — вспомогательная часть, носящая такъ сказать, артистическій характеръ: въ этой части проявляется специально искусство геометра, источники котораго скрыты отъ другихъ участниковъ доказательства.

Развивая картинно выраженную мысль Прокла — „*πρὸς τὴν τοῦ ζητουμένου θήραν*“ — „съ цѣлью уловить искомое“ — можно сказать, что геометръ улавливаетъ искомое въ искусно разставленные сѣти построения:

„Изъ *CB* напизи квадратъ *CDEB*; и продолжи *ED* къ *F*; и черезъ точку *A* проводи параллельную которой ни есть изъ прямыхъ *CD*, *BE*, прямую *AF*“.

Построение иногда считается съ различными возможными случаями расположенія предметовъ, о которыхъ говорилось въ *ekthesis*: иногда оно дополняетъ, дѣлаетъ болѣе ясными и опредѣленными тѣ представленія, которыя должны были быть вызваны у участниковъ доказательства „изложеніемъ“, или, „примѣромъ“. Распредѣленіе логическаго и интуитивнаго матеріала между „изложеніемъ“ и „построеніемъ“ связано съ различными видами предложенія о которыхъ мы будемъ говорить впослѣдствіи: теоремы, *casus*, порисмы, леммы, *objectiones*, *reductiones*, задачи.

4) Доказательство (*ἀπόδειξις*) — цѣль предложеній, связывающихъ объекты разсужденія, о которыхъ говорится въ изложеніи и построеніи и ведущая участниковъ доказательства отъ одного объекта къ другому, заставляя усматривать интуитивную связь между ними и ту формально-логическую связь, которая установлена предыдущими предложеніями — аксіомами и теоремами:

„Итакъ, прямоугольникъ *AE* равенъ прямоугольникамъ *AD*, *CE*. Но *AE* есть прямоугольникъ въ *AB*, *BC*, ибо содержится въ *AB*, *BE*, а *BE* равна *BC*; *AD* же есть прямоугольникъ въ *AC*, *CB*, ибо *DC* равна *CB*; а *DB* есть квадратъ изъ *CB*. Чего ради прямоугольникъ въ *AB*, *BC* равенъ прямоугольнику въ *AC*, *CB*, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ *CB*“.

Доказательство тѣсно связано съ построеніемъ. Характеръ доказательства опредѣляетъ ходъ построенія, что особенно замѣтно при доказательствѣ *per reductionem ad absurdum*. Ссылки на предыдущія предложенія, дающіе доказательству характеръ формально-логическій, дѣлаются въ виду трудности пересматривать каждый разъ одинъ и тѣ же цѣпи объектовъ и ихъ сочетаній — ради соблюденія своего рода діалектической экономіи. Субъектъ предложенія данъ *in concreto*, и развитіе его содержанія происходитъ путемъ интуиціи, руководимой построеніемъ и предшествующимъ опытомъ участниковъ доказательства.

5. Заключение (*συμπέρασμα*) состоитъ въ слѣдующемъ: приди къ доказательству предложенія высказаннаго въ *ekthesis*, доказывающій теорему снова переходитъ къ выраженію ея въ общихъ терми-

нахъ и повторяетъ буквально протасисъ, сопровождая его словами: „что и требовалось доказать“ (*ὁπερ ἔδει δεῖξαι* — *quod erat demonstrandum*):

„Итакъ, если прямая линия разсѣчена какъ ни есть; то прямоугольникъ, содержимый въ цѣлой и въ одной изъ ея отрѣзковъ, равенъ прямоугольнику, содержимому въ обоихъ отрѣзкахъ, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ отрѣзка прежде взятаго. Ч. И. Д. Н.“ (что и доказать надлежало).

Въ томъ случаѣ, когда предложеніе есть задача, *symperasma* состоитъ изъ заявленія о томъ, что достигнутое рѣшеніе соотвѣтствуетъ условію задачи и заканчивается словами: „что и требовалось сдѣлать“ (*ὁπερ ἔδει ποιῆσαι* — *quod oportebat fieri*). Напримѣръ:

„Итакъ, въ данномъ кругѣ вписанъ равносторонній и равноугольный шестиугольникъ. Ч. И. С. Н.“ (что и совершить надлежало — предложеніе 15, книги IV „Началь“ Евклида — въ переводѣ Петрушевскаго *).

Иногда повтореніе *protasis* опускается, но всегда сохраняется заключительная формула *O. E. Δ.*, или *O. E. Π.*, замѣняющая собой въ этомъ случаѣ формально повтореніе предложенія.

Такимъ образомъ, чтобы доказать теорему (или рѣшить общую задачу), нужно предварительно перенести разсужденіе въ область интуитивныхъ представленій и, убѣдившись въ справедливости частнаго предложенія, высказаннаго въ *ekthesis* (*συμπέρασμα μερικόν* — по выраженію Прокла), вернуться путемъ отвлеченія къ общему предложенію, высказанному въ *protasis* (*συμπέρασμα καθόλον*) **).

Такъ называемые аксіомы и постулаты наравнѣ съ другими предложеніями, принятыми какъ вѣрныя, регулируютъ діалектическую экономію доказательства. Различныя предложенія въ системѣ геометрической науки должны были появляться постепенно, по мѣрѣ роста и развитія математической діалектики; при этомъ аксіомы не должны были появиться первыми: онѣ скрыты глубже другихъ предложеній. Полное развитіе системы аксіомъ должно было произойти лишь съ полнымъ развитіемъ формальной математической логики. Исторія математики показываетъ, что формальная логика въ современной математикѣ развилась въ связи съ математическимъ символизмомъ въ силу того же экономическаго принципа. Геній новаго времени сдѣлалъ предметомъ отвлеченія самый методъ древней математики; но для того, чтобы стала возможной самая мысль о немъ, нужно было методу воплотиться въ опредѣленную чувственную форму, доступную построенію и своего рода интуиціи — долженъ былъ возникнуть и развитись современный алгебраическій символизмъ. Этотъ символизмъ появился и развивался въ связи съ практическими потребностями математики, съ математическимъ анализомъ и именно, прежде всего, съ анализомъ въ области арифметики.

*) Эвклидовыхъ Начальъ восемь книгъ, стр. 161. — Предложеніе это гласитъ: „Въ данномъ кругѣ вписать равносторонній и равноугольный шестиугольникъ“ (стр. 159).

**) Procli D. „Commentarii“, l. c. p. 207.

Чтобы лучше изобразить строение классического доказательства, я представляю его въ нижеслѣдующей таблицѣ; названія въ этой таблицѣ заимствованы у Прокла и Паппа Александрійскаго*).

Theorema:		Problemata:	
Protasis	hypothesis,	Protasis	hypothesis,
	symperasma.		epitagma, diorismos.

Ekthesis, symperasma merikon. Ekthesis, epitagma, diorismos.

Kataskeneu.

Kataskeneu.

Apodeixis, symperasma merikon,

Apodeixis,

Symperasma katholon.

Symperasma.

Т. е.

Теорема:

Задача:

Предложение	Условіе,	Предложение	Условіе,
	Заключеніе,		Заданіе, Ограниченіе.

Изложеніе (примѣръ), частное заключеніе. Изложеніе, заданіе, ограниченіе.

Построеніе.

Построеніе.

Доказательство, частное заключеніе.

Доказательство,

Общее заключеніе.

Заключеніе.

Термины epitagma и diorismos заимствованы мною у Паппа. Мы видѣли въ какомъ смыслѣ Проклъ употребляетъ терминъ diorismos; какъ видно изъ объясненій Паппа это слово обозначало въ дѣйствительности ограничительное условіе, при которомъ возможно рѣшеніе предложенной задачи. На такое же значеніе слова diorismos указываютъ, впрочемъ и самъ Проклъ во второй части пролога своихъ комментаріевъ, говоря о Львѣ, ученика Неоклида, какъ объ изобрѣтателѣ діорисмовъ**).

*) Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt e libris manuscriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch. Volumen II, Berolini MDCCCLXXVII; Pappi Alexandrini Collectionis liber VII, pp. 635 sqq.

**) Procli D. Commentarii l. c. pp. 66-67. „*διωρισμός ἐστι τὸ ἐπιτιθέμενον πρόβλημα καὶ τότε ἀδύνατον*“. Въ VII книгѣ „Сборника“ Паппа есть и формальное опредѣленіе діорисма: „*Διωρισμός δὲ ἐστὶν προδιατολή τοῦ πότε καὶ πῶς καὶ ποσῶς δυνατὸν ἔσται καὶ τὸ πρόβλημα*“ — „діорисмъ есть предварительное опредѣленіе того, когда, какимъ образомъ и сколькими способами возможно рѣшеніе задачи“. (Pappi Alexandrini Collectionis liber VII, 2, l. c. p. 636 ll. 15, 16). Какъ положеніе этого предложенія въ контекстѣ, такъ и содержаніе его указываютъ на то, что оно не при-

Приведенная выше форма доказательства считалась въ классической геометріи древнихъ настолько обязательной, что ее соблюдали даже при изложеніи арифметическихъ теоремъ, гдѣ она, по существу, не только не необходима, но иногда лишь излишне обременяетъ изложеніе. Для примѣра я приведу доказательство знаменитаго 20-го предложения IX-ой книги Евклидовыхъ „Началъ“, сначала въ сокращенной формѣ (A) — сообразно порядку формальной логики, а затѣмъ въ томъ видѣ, въ какомъ оно дано у Евклида (въ переводѣ Петрушевскаго), при чемъ, воспроизводя Евклидово доказательство (B), я приведу его параллельно и въ той смѣшанной формѣ (C) изложенія, которая у новыхъ авторовъ связываетъ древній порядокъ доказательства съ современнымъ алгебраическимъ символизмомъ.

Теорема. Первыхъ чиселъ существуетъ больше всякаго предложеннаго количества таковыхъ же чиселъ.

A) Ибо, если бы кто-нибудь предложилъ какое-нибудь количество первыхъ чиселъ и утверждалъ, что первыхъ чиселъ больше нѣтъ, то ему можно было бы возразить, что перемноживъ эти числа и прибавивъ къ полученному произведенію единицу, онъ получитъ число, отличное отъ предложенныхъ и не содержащее ни одного изъ нихъ. Поэтому о томъ числѣ онъ долженъ будетъ утверждать, что оно не простое и не содержитъ ни одного изъ простыхъ чиселъ, чего быть не можетъ.

B) Пусть будутъ предложены первыя числа A, B, C; говорю, что первыхъ чиселъ есть больше, чѣмъ A, B, C.

A

B

C

E

G

D

F

надлежитъ Паппу и представляетъ собою позднѣйшую вставку. Въ классической геометріи діорисмъ есть ограниченіе области значеній нѣкоторой переменнѣй величины, рассматриваемой, какъ данная, въ условіи задачи — значеній при которыхъ возможно рѣшеніе; діорисмъ всегда опредѣляетъ верхнюю или нижнюю границу этихъ значеній. „ἔχει γὰρ τὸ μὲν ὁρίον βιβλίου τῶν λόγων ἀποτομήων“, говоритъ Паппъ объ Аполлоніевыхъ книгахъ „de proportionis sectione“, „τόποις ζ', πλάσις καὶ διορισμοὺς δὲ ε', οἷα τοῖς μὲν εἶναι μέγιστοι, ὅδο δὲ ἐλάχιστοι“. „Ибо въ первой изъ книгъ de proportionis sectione есть 7 мѣстъ, 24 случая и 5 ограниченій, изъ коихъ три наибольшія, два наименьшія“ (Pappi Alexandrini Collectionis l. VII, 6, l. c. p. 640, II, 14 — 16. Условіе задачи могло быть и измѣнено такимъ образомъ, что ограниченіе діорисма переходило въ это условіе, и діорисмъ, какъ таковой, исчезалъ; ср. Archimedis de Sphaera et Cyliandro liber II, propositio IV, Archimedis opera omnia, ed. J. L. Heiberg, Vol. I, pp. 190, 192.

Возьми по A, B, C наименьшее, въ коемъ оныя содержатся*), число DE ; и приложи къ CE единицу DF . Итакъ, EF или первое или нѣтъ. Пусть будетъ первое. Посему найдены первыя числа A, B, C, EF , множайшія, чѣмъ A, B, C . Но пусть EF не будетъ первое; посему въ немъ содержится нѣкое первое число. Пусть содержится первое число G . Говорю, что G ни съ которымъ изъ A, B, C не есть то же. Ибо, если возможно, пусть G будетъ съ однимъ изъ A, B, C то же. И поелику A, B, C содержится въ DE , то и G содержится въ DE . Оно же содержится и въ EF ; посему и въ остальномъ, т. е. въ единицѣ DF , будетъ содержаться число G ; что нелѣпо. Слѣдственно, G ни съ которымъ изъ A, B, C не есть то же. Оно же полагается и первымъ. Итакъ, найдены числа первыя A, B, C, G , множайшія предложеннаго количества первыхъ A, B, C . — Ч. И. Д. Н.**).

С) Ekthesis: пусть будутъ предложены первыя числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Говорю, что первыхъ чиселъ есть больше чѣмъ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.

Kataskene: возьми по $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ наименьшее въ коемъ оныя содержатся число N ; и приложи къ N единицу $1 \dots N+1$.

Apodeixis: Итакъ, $N+1$ или первое или нѣтъ. Пусть будетъ первое. Посему найдены первыя числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, N+1$, множайшія, чѣмъ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.

Но пусть $N+1$ не будетъ первое; посему въ немъ содержится нѣкое первое число. Пусть содержится первое число M . Говорю, что M ни съ которымъ изъ чиселъ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ не есть то же. Ибо, если возможно, пусть M будетъ съ однимъ изъ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ то же (пусть $M = a_i$). И поелику $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ содержатся въ N , то и M содержится въ N . Оно же содержится и въ $N+1$; посему и въ остальномъ, т. е. въ единицѣ 1 , будетъ содержаться число M ; что нелѣпо. [$N = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_i \dots a_n$; $N+1 = K \cdot M$, гдѣ K — цѣлое число; $M = a_i$; $N+1 = K \cdot a_i$; $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_i \dots a_n + 1 = K \cdot a_i$; $1 = l \cdot a_i$, гдѣ l — цѣлое число]. Слѣдственно, M ни съ которымъ изъ чиселъ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ не есть то же. Оно же полагается и первымъ. Итакъ, найдены числа первыя $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, M$, множайшія предложеннаго количества первыхъ ***).

Sympregasma: что и доказать надлежало.

Въ греческомъ доказательствѣ буквенному символизму соответствуетъ символизмъ линейный и буквеннымъ символическимъ постановкамъ — подстановки риторическія. Въ современной символической

*) Т. е. наименьшее кратное чиселъ A, B, C .

**) Эвклидовыхъ Началь три книги, седьмая, восьмая и девятая содержащая общую теорію чиселъ древнихъ геометровъ. Перев. О. Петрушевскаго, СПб., 1835.

***). Эвклидовъ apodeixis въ приведенномъ предложеніи принадлежитъ къ особому классу доказательствъ отъ противнаго, на который впервые обратилъ вниманіе G. Vailati: „отрицающій справедливость предложенія приводится къ выводу именно того, что въ этомъ предложеніи принимается“. Ср. G. Vailati. „Sur une classe remarquable de raisonnemens par réduction à l'absurde“, Revue de métaphysique et de morale, 1904, pp. 799 — 809.

формѣ, въ наиболѣе ея совершенномъ видѣ, *ekthesis* перестаетъ быть примѣромъ: это есть символическая реализація предложенія; при совершенной системѣ аксіомъ интуиція не развивается уже содержанія понятій въ доказательствѣ, а руководить только построениемъ. Для перехода отъ заключенія доказательства къ общему заключенію не требуется больше абстракціи; это простой переводъ символическаго выраженія вывода доказательства на языкъ протасиса *).

Оканчивая описаніе строенія задачъ и теоремъ, Проклъ прибавляетъ: „таковы всѣ части задачъ и теоремъ; наиболѣе же необходимыми, существующими вездѣ, являются предложеніе, доказательство и заключеніе“, и дальше: „остальные же части во многихъ мѣстахъ принимаются, во многихъ же другихъ, какъ не приносящія никакой пользы, опускаются“. Какъ на примѣръ предложенія, въ которомъ отсутствуетъ *ekthesis*, Проклъ указываетъ на задачу: „построить равнобедренный треугольникъ, углы при основаніи котораго вдвое больше угла при вершинѣ“ („Начала“, кн. IV, предл. 10). Проклъ такъ опредѣляетъ вообще тѣ предложенія у Евклида, которыя подобно 10-му въ IV въ книгѣ „Началь“ не имѣютъ эктесиса: это предложенія, въ которыхъ „нѣтъ ничего даннаго“ (*ὅταν ἐν τῇ προτάσει μὴδὲν ᾗ δεδομένον*); къ нимъ принадлежитъ также, какъ указываетъ Проклъ, задача о дѣленіи линіи пополамъ и другія задачи, — главнымъ образомъ ариеметическія, а также нѣкоторыя задачи X-ой книги Евклидовыхъ „Началь“ **). Съ другой стороны, арабскій комментаторъ Евклида, Альнаризиди, приводитъ, какъ примѣръ предложенія такого же рода, теорему 7-ую въ I-ой книгѣ „Началь“: „На той же прямой, отъ двухъ различныхъ по ту же сторону лежащихъ точекъ, не могутъ быть составлены двумъ прямымъ другія двѣ прямыя равныя, каждая каждой, и оканчивающіяся вмѣстѣ съ первыми прямыми“ (переводъ Петрушевскаго ***)).

*) Современный математическій символизмъ, обладаетъ, конечно, только относительнымъ совершенствомъ. Въ общемъ, въ языкѣ современной математики, со стороны логической, есть еще очень много недостатковъ. Я не имѣю въ виду логической идеографіи, которая еще очень мало распространена, главнымъ образомъ только среди итальянскихъ математиковъ. Ср. Alessandro Padoa. „La logique déductive dans sa dernière phase de développement. Avec une préface de Giuseppe Peano“. Paris, 1912.

**) Procli D. Commentarii, I. c. pp. 203 — 205.

***). Евклидовыхъ Началь восемь книгъ, стр. 13. Codex Leidensis 399, I. c. p. 39. Здѣсь мы встрѣчаемся съ интереснымъ фактомъ, замѣчательнымъ съ точки зрѣнія критики текста Евклидовыхъ Началь: Дѣло въ томъ, что въ дошедшемъ до насъ греческомъ текстѣ въ указанномъ предложеніи дѣйствительно отсутствуетъ эктесисъ, между тѣмъ какъ въ арабскомъ переводѣ Аль-Хаджджаджа, снабженномъ комментариемъ Альнаризиди, 7-ое предложеніе I-ой книги не имѣетъ этого недостатка. Нельзя допустить, чтобы въ текстѣ Прокла было случайно пропущено указаніе на эту теорему. Проклъ совершенно ясно опредѣляетъ характеръ предложеній не имѣющихъ эктесиса: къ нимъ не относится 7-ое предложеніе I-ой книги. Отсюда слѣдуетъ заключить, что въ текстѣ, которымъ пользовался Проклъ, какъ и въ текстѣ, бывшемъ въ распоряженіи арабскаго переводчика, 7-ое предложеніе книги I-ой имѣло эктесисъ. Трудно сказать, откуда заимствовалъ Альнаризиди описаніе состава геометрическихъ теоремъ и задачъ. Описаніе это близко

Логическая природа греческого доказательства, и роль интуиции въ этомъ доказательствѣ лучше всего иллюстрируются особымъ явленіемъ въ древней геометріи — существованіемъ особаго роста приростовъ къ доказываемымъ предложеніямъ, такъ называемыхъ порисмъ. Порисмы или королларіи, которые у насъ неправильно называются слѣдствіями, суть предложенія, связанныя съ главнымъ, но не представляющія формально-логическихъ слѣдствій изъ нихъ, а возникающія, какъ побочный продуктъ, приобрѣтеніе, или приростъ при доказательствѣ главнаго предложенія; такія предложенія состоятъ всегда только изъ одного протасиса и не должны имѣть никакого доказательства. Порисма появляется путемъ абстракціи побочныхъ обстоятельствъ, наблюдаемыхъ въ теченіи доказательства. Они служатъ признакомъ несовершенства въ логическомъ строеніи доказательства. У Евклида ихъ очень не много, и подлинность нѣкоторыхъ изъ нихъ крайне сомнительна. Какъ примѣръ предложенія съ порисмой, можно привести 15-ое предложеніе IV-ой книги „Началь“:

Задача. Въ данномъ кругѣ вписать равносторонній и равноугольный шестиугольникъ.

Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что сторона шестиугольника равна прямой изъ центра круга (радіусу)*).

Также и предложеніе 8-ое въ VI-ой книгѣ. „Есть ли въ прямоугольномъ треугольникѣ отъ прямого угла къ основанію проведена перпендикулярная; то треугольники кои при перпендикулярной, подобны суть и цѣлому треугольнику и взаимно.“

Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что есть ли въ прямоугольномъ треугольникѣ отъ прямого угла къ основанію проведена будетъ перпендикулярная: то проведенная есть средняя пропорціональная отръзкамъ основанія“. (Переводъ Петрушевскаго)**).

Чтобы понять значеніе этой послѣдней порисмы, нужно знать, что по Евклиду „подобныя прямолинейныя фигуры суть тѣ, кото-

подходятъ къ Проклову, но все-таки замѣтно отличается отъ него. Альнаризи называетъ изъ греческихъ комментаторовъ только Герона, Паппа и Симплиціи; поэтому вѣроятно, что свѣдѣнія свои онъ заимствовалъ не непосредственно у Прокла, а у Симплиція, жившаго послѣ Прокла. Первоисточникомъ для того и другого служили, конечно, болѣе древніе греческіе авторы. Въ концѣ описанія говорится къ тому же: „тутъ прекращается то, что Симплицій предпослалъ объясненію постулатовъ первой книги Евклидовыхъ Началь (Codex Leidensis 399, l. c. p. 41). Такимъ образомъ, Проклъ пользовался старой редакціей текста, которая легла въ основаніе и арабскаго перевода, а Симплицій — позднѣйшей редакціей (Оеоповой), дошедшей до насъ.“

*) Евклидовыхъ Началь восемь книгъ, стр. 159, 161. Евклидъ говоритъ: „писать кругъ всякимъ разстояніемъ“ — „*πᾶσι διαστήματι κύκλον γράφεται*“ (Postulatum III), но радіусъ называетъ „прямой изъ центра круга“ — „*ἡ ἐκ τοῦ κέντρον τοῦ κύκλου*“.

**) Евклидовыхъ Началь восемь книгъ, стр. 215, 217. Остальная часть слѣдствія: „и также сторона при которомъ ни есть отръзкъ, есть средняя пропорціональная основанію и оному отръзку“ представляетъ собою, безъ сомнѣнія, позднѣйшую вставку; ср. Euclidis Elementa. Edidit et latine interpretatus est J. L. Heiberg, Vol. I, Lipsiae MDCCCLXXXIII, p. 105, n.

рыя всѣ углы имѣютъ равные одинъ по одному и около равныхъ угловъ стороны пропорціональныя *), и что поэтому упомянутая въ слѣдствіи пропорція встрѣчается при доказательствѣ теоремы **).

Слово порисма употреблялось у древнихъ и въ другомъ смыслѣ ***). Такъ назывались особаго рода предложенія, принадлежавшія къ „ученію объ аналитическомъ методѣ“ — высшей геометріи древнихъ. Вопросъ о природѣ этихъ предложеній, хотя и представляетъ значительный интересъ во многихъ отношеніяхъ, слишкомъ сложенъ и не можетъ быть затронутъ въ настоящей статьѣ.

Проклъ приводитъ описаніе и другихъ видовъ предложеній, связанныхъ съ логическимъ несовершенствомъ метода. Таковы: лемма, случай, возраженіе, редукція ****).

Лемма прерываетъ естественную цѣпь предложеній и поэтому, хотя она и требуетъ доказательства, но, не подвергаясь сомнѣнію, приводится безъ такого съ прибавленіемъ словъ: „какъ будетъ доказано въ послѣдствіи“ (*ὅς ἐξῆς δοκῶσι*). Лемма является въ теченіе доказательства другого предложенія и лишена поэтому протазиса и заключенія. Греческіе математики позднѣйшаго періода извлекали изъ доказательствъ древнихъ авторовъ подобнаго рода предложенія, встрѣчающіяся тамъ явно или неявно, облакали ихъ въ обычную форму и снабжали доказательствами. Такого рода леммы встрѣчали мы, напримѣръ, въ VII-ой книгѣ „Математическаго Сборника“ Паппа Александрійскаго *****). Въ послѣдствіи стали называть леммами всѣ тѣ предложенія, хотя бы и облеченныя въ классическую форму и снабженныя правильнымъ доказательствомъ, которыя какъ бы прерываютъ естественную послѣдовательность предложеній и служатъ, главнымъ образомъ, лишь для доказательства непосредственно слѣдующаго за ними предложенія. Такъ, Проклъ считаетъ упомянутое

*) Эвклидовыхъ Началъ восемь книгъ, стр. 200. (Опредѣленіе 1 шестой книги).

**) „Посему какъ BD , сторона треугольника ABD , противулежащая углу BAD , къ DA , сторонѣ треугольника ADC , противулежащей углу при C равному BAD ; такъ та же AD , сторона треугольника ABD , противулежащая углу при B , къ DC , сторонѣ треугольника ADC , противулежащей углу DAC равному углу при B ; и также BA , противулежащая прямому углу ADB , къ AC , противулежащей прямому углу ADC “. Эвклидовыхъ Началъ восемь книгъ, стр. 216. У Евклида есть предложенія, въ которыхъ говорится что стороны равноугольныхъ треугольниковъ пропорціональны (Предложеніе 4-ое VI-ой книги, Эвклидовыхъ Началъ восемь книгъ, стр. 207, 208), но въ этомъ предложеніи и доказательствѣ его треугольники не называются подобными. Вообще, въ шестой книгѣ „Началъ“ Евклидъ въ первый разъ пользуется опредѣленіемъ подобія только въ предложеніи 8-мъ.

***) Ср. Procli D. Commentarii, I. c. p. 212, II. 12 — 17. Арабскій комментаторъ называетъ порисмы — слѣдствія „fructus“ (Codex Leidensis, 399, I. c. p. 40) Герардъ Кремонскій употребляетъ слово „corollarium“ (Anarithi Commentarii I. c. p. 42).

****) Procli D. Commentarii, I. c. pp. 211 — 213. Ср. Codex Leidensis 399, I. c. pp. 39 — 41.

*****) Леммы къ твореніямъ Евклида и Аполлонія относящимся къ „ученію объ аналитическомъ методѣ“ — высшей геометріи древнихъ.

выше 7-ое предложёніе I-ой книги „Началь“ леммой къ слѣдующему предложёнію 8-ому *).

Случай (*πρόβις* — *casus*) есть предложёніе, протасисъ котораго совпадаетъ съ протасисомъ главнаго предложёнія, *ekthesis* же или *kataskene* предусматриваютъ расположеніе геометрическихъ образовъ, отличное отъ принятаго при доказательствѣ главной теоремы „Случай“ указываютъ на несовершенство протасиса; древніе предпочитали не разсматривать различныхъ случаевъ въ построеніи, перенося ихъ въ протасисъ и расщепляя такимъ образомъ одну теорему на нѣсколько другихъ **).

Возраженіе (*ἔνστασις* — *objectio*) стоитъ близко къ „леммѣ“ и къ „случаю“. Можно предположить, что данное предложёніе не имѣетъ мѣста въ извѣстномъ случаѣ: требуется доказать, что случай этотъ невозможенъ, или же, что, если онъ и возможенъ, то теорема все-таки вѣрна.

Редукція (*ἀπαγωγή*) — приведеніе задачи къ другой, разсматриваемой впослѣдствіи.

Ptoxis, *enstasis* и *apagoge* совершенно чужды классической геометріи ***).

Явленіе Штарка — разложеніе спектральныхъ линій въ электрическомъ полѣ.

А. Рабиновича.

Существованіе явленія Зеемана — разложенія спектральныхъ линій въ магнитномъ полѣ давно наводило физиковъ на мысль о возможности аналогичнаго дѣйствія на спектральныя линіи электрическаго поля.

*) Procli D. *Commentarii* I. c. p. 264, II. 13 — 15: „ἔοικεν δὲ εἶναι τοῦτο τὸ θεωρήμα λήμμα προλαμβάνονμενον τοῦ ὀρθοῦ θεωρήματος“.

**) Ср. P. Tannery. *La géométrie grecque*, p. 152: „les anciens géomètres préféraient multiplier les énoncés quand il le fallait, mais il leur arrivait de faire des omissions; les auteurs de lemmes ont donc eu aussi à ajouter des cas, qui, parfois, sont passés dans les textes eux-mêmes“. Въ предложёніи XVI-мъ I-ой книги „Началь“: „Всякаго треугольника, ежели одна изъ сторонъ продолжена, внѣшній уголъ больше каждаго изъ внутреннихъ противолежащихъ угловъ“ (Эвклидовыхъ Началь восемь книгъ, стр. 23, 24) — есть *casus in constructione*: противолежащій уголъ можетъ лежать накрестъ съ внутреннимъ или не лежать съ нимъ при одной сторонѣ. Случай эти требуютъ двойнаго построенія: ихъ можно превратить въ *casus in protasi*, расщепивъ теорему на двѣ: 1. Внѣшній уголъ больше внутренняго, лежащаго съ нимъ накрестъ. 2) Внѣшній уголъ больше внутренняго, не лежащаго съ нимъ накрестъ. — Доказательство второй теоремы требуетъ лишь построенія угла, вертикальнаго съ внѣшнимъ, и ссылки на первую теорему.

***) Ср. P. Tannery. *La géométrie grecque*, p. 152.

Въ 1901 году появилась статья извѣстнаго теоретика, много занимавшагося магнитнымъ расщепленіемъ, В. Фогта (W. Voigt), разбивавшая дѣйствіе постояннаго электрическаго поля на колеблющійся электронъ.

Фогтъ пришелъ къ заключенію, что линіи спектра при этомъ разлагаются на составляющія различной длины волны, при чемъ разстояніе между этими составляющими должно быть пропорціонально квадрату силы электрическаго поля. Отсутствие наблюдений, обнаруживающихъ это теоретически выведенное имъ расщепленіе, Фогтъ объяснилъ чрезвычайной незначительностью эффекта.

Независимо отъ другихъ изслѣдователей занялся этимъ вопросомъ І. Штаркъ [I. Stark. „Annalen der Physik“ (4) 43, 965 (1914)]. Онъ пришелъ къ заключенію, что измѣненіе электрическаго состоянія атома вслѣдствіе его іонизаціи должно повести къ измѣненію періода его свѣтовыхъ колебаній. Нужно было придумать установку, позволяющую наблюдать этотъ эффектъ. Экспериментальныя затрудненія были очень велики. Предстояло подвергнуть свѣтящейся газъ дѣйствію сильнаго электрическаго поля, т. е. создать въ немъ большую разность потенциаловъ. Но свѣтящейся, нагрѣтый газъ всегда іонизированъ и является проводникомъ электричества; поэтому въ немъ очень трудно установить необходимую разность потенциаловъ: они стремятся сравняться.

Штарку пришло въ голову воспользоваться положительными (каналовыми) лучами, проходящими черезъ отверстія катода въ направленіи обратномъ катоднымъ лучамъ при электрическомъ разрядѣ черезъ эвакуированную трубку. Положительные лучи состоятъ главнымъ образомъ изъ положительно заряженныхъ частицъ и атомовъ вещества, наполняющаго трубку. Эти частицы испускаютъ свѣтъ, характеръ котораго зависитъ отъ содержимаго трубки.

Чтобы изслѣдовать электрическое разложеніе спектральныхъ линій различныхъ веществъ, Штарку нужно было сначала точно знать нормальные спектры соответствующихъ каналовыхъ лучей; поэтому онъ отложилъ предположенныя изслѣдованія на нѣсколько лѣтъ и за это время изучилъ спектры многихъ элементовъ въ этихъ лучахъ.

Ему удалось открыть въ нихъ и явленіе Допплера, т. е. спектры получались различные въ зависимости отъ того, наблюдались ли они сбоку или вдоль трубки: въ послѣднемъ случаѣ, если наблюдатель стоялъ такъ, что положительные лучи направлялись отъ катода къ нему, спектральныя линіи были сдвинуты къ фіолетовому концу спектра, въ сторону болѣе короткихъ волнъ.

Наконецъ, въ 1913 году Штаркъ могъ поставить свои опыты надъ дѣйствіемъ электрическаго поля на каналовые лучи. Положительныя частички, выходящія изъ отверстій (каналовъ) катода онъ подвергалъ дѣйствію сильнаго добавочнаго электрическаго поля, независимаго отъ того, которымъ производились самые катодные лучи. Для этого за катодомъ *C* (см. рис. 1) располагался третій добавочный электродъ *B*, и между нимъ и катодомъ устанавливалась разность потенциаловъ, при чемъ дѣйсъ катодъ по большей части служилъ анодомъ, т. е. соединялся съ положительнымъ полюсомъ батареи или динамомашины,

поддерживавшей это добавочное поле. Направление его, следовательно, совпадало съ положительными лучами, которые попадали въ него, пройдя каналы катода, и здѣсь еще болѣе ускорялись.

Частицы, движущіяся съ такою скоростью, должны іонизировать воздухъ. Вслѣдствіе этого возникалъ бы электрическій токъ черезъ газъ, который уравнивалъ бы разность потенциаловъ и уменьшалъ бы силу поля. Съ этимъ дѣйствіемъ положительныхъ лучей Штарку

пришлось бороться. Разрѣшилъ онъ вопросъ тѣмъ, что укоротилъ поле и длину пробѣга частицъ, придвинувъ добавочный электродъ на 1,1—2,6 мм. къ катоду. На такомъ маломъ разстояніи, при господствующемъ въ трубкѣ разряженіи, частица не успѣвала сталкиваться со многими другими частицами и іонизировать ихъ.

Направляя сбоку спектроскопъ на пространство между катодомъ и добавочнымъ электродомъ, Штаркъ получалъ спектръ положительныхъ лучей.

Соединяя эти электроды съ полюсами добавочной батареи, онъ наблюдалъ измѣненіе спектра подъ вліяніемъ электрическаго поля. При такой установкѣ онъ изслѣдовалъ, такъ называемый, поперечный эффектъ, т. е. ось спектроскопа была перпендикулярна направленію электрическихъ силовыхъ линий.

Полученные спектры фотографировались, при чемъ экспозиція продолжалась отъ 25 минутъ до 24 часовъ. Съ водородомъ и геліемъ получились хорошіе результаты: нѣкоторые спектральныя линіи ихъ разложились на нѣсколько компонентовъ, вполне отчетливо и довольно сильно, такъ что не пришлось прибѣгать къ спектрографамъ большой разрѣшающей силы.

Изслѣдованіе продольнаго эффекта, т. е. наблюденіе вдоль электрическихъ силовыхъ линій представляло значительныя затрудненія, такъ какъ, кромѣ свѣта, излучаемаго положительными частицами, въ спектрографъ попадалъ бы черезъ каналы катода интенсивный свѣтъ изъ пространства между катодомъ и анодомъ (такъ называемаго перваго катоднаго слоя) и, кромѣ того, мѣшало бы явленіе Доплера, смѣщающее всѣ линіи къ фіолетовому концу спектра.

Это затрудненіе Штаркъ устранилъ чрезвычайно остроумно, измѣнивъ устройство трубки слѣдующимъ образомъ (см. рис. 2). Снабдивъ катодъ *C* вмѣсто многихъ отверстій одной щелью, онъ припаялъ перпендикулярно къ нему около щели продырявленную пластинку *C'*.

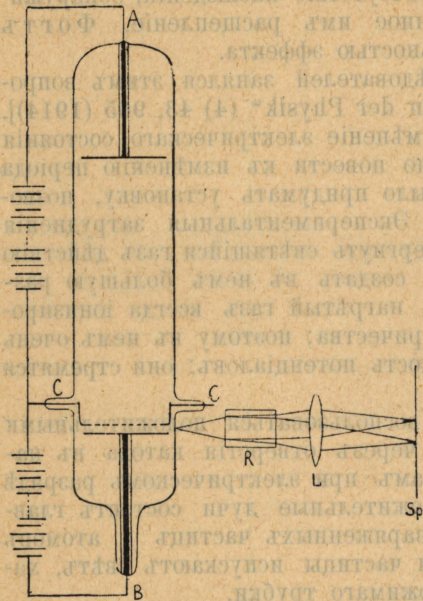


Рис. 1.

Добавочный же электрод *B* онъ повернулъ на 90° изъ прежняго положенія, обративъ его не къ основной части катода, а къ продырявленной пластинкѣ. Положительные лучи попадали черезъ щель катода въ пространство между добавочнымъ электродомъ и продырявленной частью катода. Теперь ихъ направленіе не совпадало уже съ электрическими линіями силъ, а было имъ перпендикулярно. Эффектъ же наблюдался спектральнымъ аппаратомъ, ось котораго совпадала съ направленіемъ силовыхъ линій, черезъ отверстія продырявленной пластинки.

Результаты изслѣдованій продольнаго эффекта показали, что линіи здѣсь также разлагаются на слагающія разной длины волны; число этихъ слагающихъ меньше, чѣмъ при поперечномъ эффектѣ, при чемъ онѣ по числу и положенію совпадаютъ съ тѣми слагающими поперечнаго эффекта, въ которыхъ электрическія колебанія совершаются перпендикулярно направленію электрическаго поля.

Интереснымъ являлось, поляризованы ли линіи при продольномъ эффектѣ; теорія Штарка заставляла предполагать, что онѣ не поляризованы, однако, возможность круговой поляризаціи не исключалась. Штаркъ показалъ, что въ этомъ случаѣ слагающія не поляризованы, ни у водорода, ни у гелія.

Значительно разнообразіе получились результаты разложенія при поперечномъ эффектѣ (направленіе зрѣнія перпендикулярно электрическимъ силовымъ линіямъ), о которомъ впрѣдъ и будетъ рѣчь.

Чрезвычайно важно было опредѣлить, какъ поляризованы отдѣльные слагающія, на которыя разлагались спектральныя линіи.

Для этого между трубкой и щелью спектрографа (см. рис. 1) Штаркъ помѣщалъ пластинку или ромбоздръ известковаго шпата *R*, вырѣзанную параллельно оси. Вслѣдствіе двойного лучепреломленія она давала два изображенія поля, одно надъ другимъ, которыя линзой *L* (цейссовскимъ тессаромъ) направлялись на щель *Sp*. При этомъ верхнее изображеніе давало линіи, соответствовавшія электрическимъ колебаніямъ параллельнымъ полю, а нижнее — перпендикулярнымъ къ нему.

При такой установкѣ Штаркъ фотографировалъ наиболѣе яркія линіи, сначала водорода и гелія, а затѣмъ и другихъ элементовъ: литія, натрія, магнія, кальція, алюминія, таллія и ртути.

Не только для различныхъ веществъ, но и для различныхъ линій одного и того же элемента получались различныя разложенія — какъ по числу, такъ и по направленію поляризаціи компонентовъ.

Такъ, напримѣръ, линія *H γ* водорода распадалась въ электрическомъ полѣ силою въ 18 000 вольтъ на *см.* — на 7 составляющихъ — 4

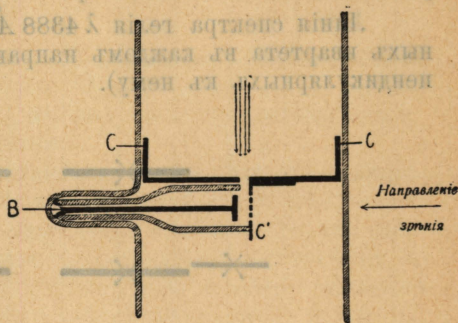


Рис. 2.

съ колебаніями параллельными электрическому полю и 3 — съ колебаніями перпендикулярными ему. Отношеніе интенсивностей приблизительно передается приложеннымъ чертежомъ (см. рис. 3) такъ же, какъ и расположеніе составляющихъ относительно неразложенной линіи. На томъ же чертежѣ для сравненія приложенъ и продольный эффектъ. Въ этомъ случаѣ линія распадается на три неполяризованныхъ компонента, соответствующихъ тремъ составляющимъ поперечнаго эффекта съ колебаніями перпендикулярными направленію электрическаго поля. То, что линіи при продольномъ разсматриваніи не поляризованы, обозначено на чертежѣ двумя пересѣкающимися стрѣлками.

Линія спектра гелія $\lambda 4388 \text{ \AA}$ распадалась на два несимметричныхъ квартета въ каждомъ направленіи (параллельныхъ полю и перпендикулярныхъ къ нему).

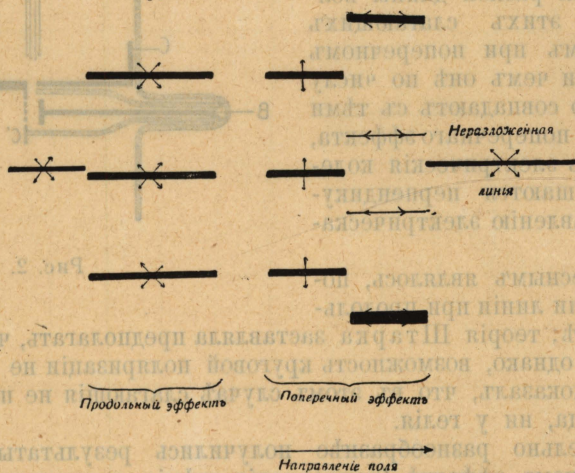


Рис. 3.

Для некоторыхъ линій, напримѣръ, *He* $\lambda 5016 \text{ \AA}$ (единицъ Angstrom'a) разложенія вовсе не получалось при обыкновенной силѣ поля въ 13 000 в/с.м. и небольшой сравнительно дисперсіи, которую пользовался Штаркъ.

Описывать всѣ случаи разложенія, изслѣдованныя имъ, было бы бесполезно и утомительно, поэтому перейдемъ къ попыткѣ Штарка связать видъ разложенія съ положеніемъ линій въ „серіяхъ“ Бальмера (Balmer) и Ридберга (Rydberg)*

Какъ извѣстно, Бальмеру удалось представить всѣ линіи водороднаго спектра (въ видимой его части) формулой

$$\frac{1}{\lambda} = N_0 \left[\frac{1}{(1+1)^2} - \frac{1}{(1+m)^2} \right]$$

* См. статью Ритца „Линейные спектры и строеніе атомовъ“. „Вѣстникъ“ № № 489, 490.

гдѣ λ — длина волны, N_0 — величина постоянная для всѣхъ элементовъ, а m — цѣлое число, мѣняющееся отъ 2 до 31. Подставляя эти значенія въ Бальмеровскую формулу, можно получить очень точныя значенія для λ — длины волны всѣхъ линий водороднаго спектра.

Ридбергъ, Кайзеръ (Kayser) и Рунге (Runge) нашли сходные законы и въ другихъ спектрахъ. По Ридбергу ихъ можно въ первомъ приближеніи написать такъ:

$$\frac{1}{\lambda} = N_0 \left[\frac{1}{(n+a)^2} - \frac{1}{(m+a')^2} \right]$$

гдѣ n и m цѣлыя числа, колеблющіяся въ извѣстныхъ предѣлахъ, а и a' — числа, постоянныя для каждой серіи. Принимая одно изъ чиселъ n и m постояннымъ и варьируя другое, мы получаемъ различныя серіи, главныя и побочныя, рѣзкія и диффузныя.

Въ явленіи Зеемана, т. е. при разложеніи спектральныхъ линий въ магнитномъ полѣ, линіи, принадлежащія къ одной серіи (связанныя формулой Ридберга съ одинаковыми значеніями a , a' и n или m), разлагаются одинаковымъ образомъ, въ смыслѣ направленія поляризаціи и числа компонентовъ. Того же Штаркъ ожидалъ и для открытаго имъ явленія. И дѣйствительно, первыя наблюденія какъ будто бы подтвердили его ожиданія: въ первой статьѣ, описывающей его опыты, онъ говоритъ, что наблюденіями установлено, хотя и неокончательно, слѣдующее правило: линіи одной и той же серіи даютъ одинаковый эффектъ въ электрическомъ полѣ въ смыслѣ числа, направленія колебаній и отношенія яркостей ихъ слагающихъ.

Но уже въ четвертой статьѣ, описывающей новыя опыты данныя, Штарку пришлось отказаться отъ этого простаго правила, даже въ отношеніи числа компонентовъ.

Пока онъ считаетъ возможнымъ высказать слѣдующія обобщенія: въ каждой серіи разложеніе, т. е. разстояніе между крайними компонентами увеличивается съ повышеніемъ номера линіи (т. е. съ увеличеніемъ числа m или n); въ двухъ различныхъ серіяхъ можно сравнивать только линіи одинаковаго номера. Такое сравненіе серій гелія и литія дало слѣдующее: линіи диффузныхъ побочныхъ серій разлагаются значительно сильнѣе, чѣмъ рѣзкія главныя и побочныя серіи.

Итальянскіе ученые Ло Сурдо (A. Lo Surdo) и Пуччанти (A. Ruccianti), производившіе опыты въ нѣсколько иныхъ условіяхъ, получили болѣе простыя правила разложенія спектральныхъ линій водорода: число компонентовъ параллельныхъ полю всегда равно 2, число слагающихъ перпендикулярныхъ полю равно номеру линіи въ серіи, т. е. числу m (или n). Это противорѣчіе между наблюдателями пока не разрѣшено.

Другой задачей чрезвычайной важности являлось опредѣлить зависимость эффекта отъ силы поля.

Штаркъ поставилъ рядъ изслѣдованій надъ спектральными линіями водорода и гелія при силѣ поля отъ 10 000 до 50 000 в/см. Зависимость разложенія, т. е. разстоянія между крайними компонентами (въ единицахъ Ångström'a), отъ силы электрическаго поля вообще

оказалась линейною, т. е. разложение пропорционально силѣ поля (см. напримѣръ, рис. 4 для линіи водорода $H\gamma$) какъ для колебаній параллельныхъ, такъ и перпендикулярныхъ полю.

Для линіи гелія $\lambda 4472 \text{ \AA}$ разложение возрастаетъ не прямо пропорционально силѣ поля, а нѣсколько медленнѣе, какъ думаетъ Штаркъ, пропорционально корню квадратному изъ силы поля (см. рис. 5). Эта линія кромѣ того отличается диссиметричнымъ разложениемъ.

Эти результаты опытовъ Штарка чрезвычайно важны, такъ какъ они противорѣчатъ предсказаніямъ теоріи Фогта, требовавшимъ пропорциональности эффекта квадрату силы поля.

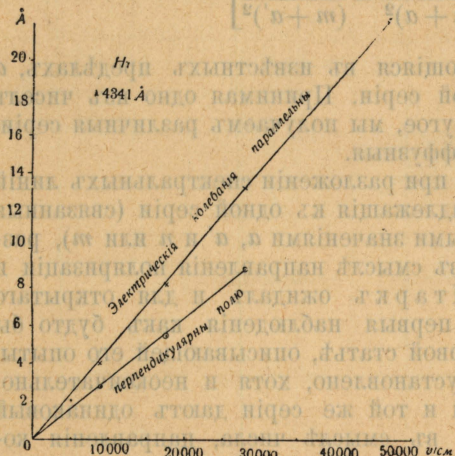


Рис. 4.

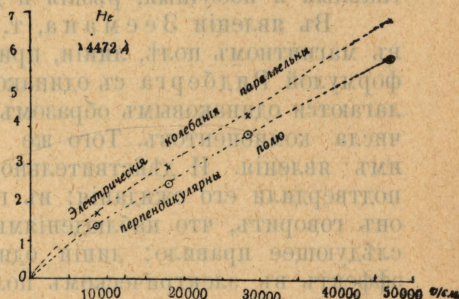


Рис. 5.

Въ настоящее время всякой новой теоріи электрическаго эффекта придется считаться съ этими опытными данными.

Также очень интересны наблюденія Штарка надъ измѣненіемъ интенсивности различныхъ составляющихъ при перемѣнѣ направленія поля для разныхъ газовъ въ трубкѣ и попытка его объяснить эти явленія.

Въ трубкѣ, содержащей только слѣды чистаго водорода, при разложеніи серіи линій электрическимъ полемъ компоненты съ болѣе длиною волны (т. е. находящіеся ближе къ красному концу спектра) приблизительно на 30% ярче, интенсивитѣ компонентовъ съ короткими волнами, если направленіе электрическаго поля совпадаетъ со скоростью канальныхъ лучей; отношеніе яркостей мѣняется на обратное, если поле направитъ противоположно канальнымъ лучамъ.

Въ трубкѣ же, содержащей, кромѣ водорода, слѣды гелія, компоненты съ короткими и длинными волнами имѣютъ одинаковую яркость, а измѣненіе направленія поля ничего не мѣняетъ.

Таковы факты. Штаркъ объясняетъ ихъ слѣдующимъ образомъ. Наблюденіемъ явленія Допплера удалось установить, что въ трубкѣ съ чистымъ водородомъ свѣченіе вызывается, главнымъ образомъ, быстро движущимися положительно заряженными частицами водорода. Въ трубкѣ же, гдѣ, кромѣ водорода, есть еще и слѣды гелія, излу-

чають преимущественно покоящиеся частицы и атомы водорода, разбиваемые, ионизируемые движущимися положительными частицами.

Въ отсутствіи поля Штаркъ представляетъ себѣ атомъ въ видѣ шара, на поверхности котораго расположены электроны, а въ центрѣ котораго находится положительное ядро (см. рис. 6А).

Когда на атомъ дѣйствуетъ поле, онъ деформируется, одни электроны становятся ближе къ ядру, другіе дальше (см. рис. 6В); вмѣсто одной спектральной линии появляются ея компоненты разной длины волны; но при этомъ интенсивности этихъ компонентовъ равны.

Иное дѣло, если такой деформированный въ электрическомъ полѣ атомъ начнетъ двигаться; тогда у него появляются передній и задній концы; переднимъ концомъ атомъ разбиваетъ встречающіеся ему другіе атомы и частицы, и поэтому впереди лежащій электронъ приходитъ въ болѣе сильныя колебанія, чѣмъ задній. Если теперь направленіе скорости атома совпадаетъ съ направлениемъ электрическаго поля, то, какъ видно изъ рис. 6D, передній электронъ, сильнѣе возбуждающійся, лежитъ ближе къ ядру и, по предположенію Штарка испускаетъ болѣе длинныя колебанія, чѣмъ задній. Поэтому, когда поле и скорость частицъ совпадаютъ, большей яркостью обладаютъ составляющія большей длины волны. Наоборотъ, если измѣнить направленіе поля на противоположное (рис. 6С), „переднимъ“ окажется электронъ удаленный отъ ядра, съ колебаніями меньшей длины волны, которые и выйдутъ на спектрограммѣ болѣе интенсивными.

Понятно, что это обращеніе интенсивностей выполнимо только для свѣта, испускаемаго движущимися частицами; поэтому оно наблюдается только въ чистомъ водородѣ; въ водородѣ же смѣшанномъ съ геліемъ, гдѣ, какъ сказано, свѣченіе исходитъ отъ неподвижныхъ атомовъ *H*, измѣненіе знака поля никакого измѣненія интенсивностей не вызываетъ.

Еще одно явленіе было разъяснено Штаркомъ въ связи съ его открытіемъ, а именно расширеніе спектральныхъ линій подъ влияніемъ давленія. Штаркъ уже въ 1906 году предположилъ, что при увеличеніи давленія, когда молекулы газа сликаются, электроны попадаютъ въ сильныя элементарныя электрическія поля сосѣднихъ молекулъ. Теперь это мнѣніе какъ будто подтверждается его открытіемъ, тѣмъ болѣе, что, какъ оказалось, наибольшее расширеніе испытываютъ линіи диффузныхъ побочныхъ серій, которыя и разложене даютъ наибольшее. Сравнивая спектрограммы расширенія и разложене, Штаркъ вывелъ заключеніе, что молекулярныя электрическія поля должны быть очень сильны, до 300 000 в/см.

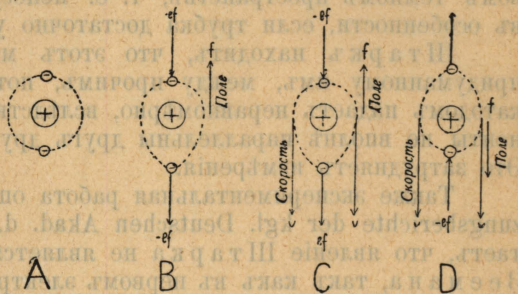


Рис. 6.

Открытие Штарка вызвало на свѣтъ много работъ другихъ ученыхъ, главнымъ образомъ, теоретическихъ, пытающихся объяснить новое явленіе.

Кромѣ того, итальянскій физикъ Ло Сурдо заявилъ въ печати („Physikalische Zeitschrift“, 15, 122) что онъ еще до Штарка наблюдалъ найденный имъ эффектъ, но не умѣлъ его тогда объяснить. Постановка опыта у него была иная: онъ не устраивалъ добавочнаго электрическаго поля, а пользовался тѣмъ сильнымъ паденіемъ потенціала, которое наблюдается въ эвакуированныхъ трубкахъ въ Круксовомъ темномъ пространствѣ, т. е. непосредственно передъ катодомъ, въ особенности, если трубка достаточно узка.

Штаркъ находитъ, что этотъ методъ наблюденія уступаетъ придуманному имъ, между прочимъ, потому, что потенціалъ передъ катодомъ падаетъ неравномѣрно, вслѣдствіе чего получающіеся компоненты не вполне параллельны другъ другу, а сходятся клинообразно. Это затрудняетъ измѣренія.

Также экспериментальная работа опубликована Виномъ („Sitzungsberichte der kgl. Deutschen Akad. d. Wiss.“ 1914, 70). Онъ считаетъ, что явленіе Штарка не является полнымъ аналогомъ явленія Зеемана, такъ какъ въ первомъ электронъ вмѣстѣ съ атомомъ обладаетъ весьма большими переносными скоростями, чего нѣтъ во второмъ. Винъ задался цѣлью найти магнитный аналогъ явленія Штарка, не являющійся въ то же время аналогомъ Зеемановскаго эффекта, разсуждая такъ: на электронъ оказываетъ одинаковое вліяніе электрическая сила E и сила vH , гдѣ v скорость частицы, а H сила магнитнаго поля.

Поэтому, подвергая положительные лучи дѣйствію магнитнаго поля, онъ получилъ разложеніе линий, нѣрѣзокъ благодаря различію скоростей, и сильное расширеніе линий. Последнее можно вычислить, пользуясь результатами опыта Штарка, если извѣстно v (оно опредѣляется по явленію Допплера). Согласіе между вычисленной и найденной величиной получилось довольно хорошее.

Теоретическія работы были опубликованы Гарбассо (A. Garbasso) Фогтомъ, Варбургомъ (E. Warburg) и Шварцшильдомъ (K. Schwarzschild).

Гарбассо („Physikalische Zeitschr.“, 15, 123) разсчитываетъ разстояніе между двумя компонентами съ колебаніями, параллельными электрическому полю, исходя изъ модели атома Бора-Рѣтгер-Форда и принимая во вниманіе работу, совершенную вѣншиимъ полемъ для новаго образованія расщепленнаго атома. Для разстоянія между двумя параллельными полю компонентами линіи водорода $H\beta$ при силѣ поля въ 13 000 в/см. получается 2Å , Штаркъ нашелъ изъ опыта $3,6\text{Å}$. Эта теорія даетъ пропорціональность между силою поля и разложениемъ, но не объясняетъ появленія другихъ компонентовъ.

Фогтъ, въ виду несогласія его первоначальной теоріи съ опытомъ, предложилъ видоизмѣненіе теоріи, которое могло бы привести къ объясненію этихъ фактовъ. Онъ предполагаетъ, что частицы каналовыхъ лучей являются диполями съ неодинаковымъ положительнымъ

и отрицательнымъ концами. Поэтому, если возбудить поле, то диполи, обращенные въ одну сторону различными концами, возбуждятся несимметрично. Новая теорія Фогта относится къ лучеиспусканію частицъ либо движущихся, либо находящихся подъ вліяніемъ движущихся частицъ.

Варбургъ („Berichte der Deutschen Physik. Ges.“ 15, 1259. 1913) изслѣдовалъ вліяніе электрическаго поля на спектральныя линіи водорода, исходя изъ Боровской модели атома. Его теорія даетъ не разложеніе линій на компоненты, а только расширеніе, при чемъ порядокъ его совпадаетъ съ найденными Штаркомъ величинами разложенія, а величина эффекта пропорціональна силѣ поля. Варбургъ считаетъ свою теорію несовершенной и думаетъ, что электрическій эффектъ принадлежитъ къ явленіямъ, необъяснимымъ на почвѣ классической электродинамики.

Шварцшильдъ („Berichte der Deutschen Phys. Ges. 16, 20. 1914) считаетъ, что колебанія электрона въ электрическомъ полѣ представляютъ частный случай задачи о притяженіи къ двумъ неподвижнымъ центрамъ: одинъ изъ нихъ — положительное ядро, а другой — та безконечно удаленная точка, изъ которой можно себя представить исходящимъ однородное электрическое поле. По этой теоріи долженъ получиться симметричный триплетъ, при чемъ въ средней составляющей колебанія происходятъ перпендикулярно полю, а въ крайнихъ — параллельно ему. Для поля въ $13\,000\text{ в/см.}$ теорія даетъ для разстоянія этихъ крайнихъ компонентъ $0,94\text{ \AA}$, что совпадаетъ съ порядкомъ найденныхъ Штаркомъ величинъ. По Шварцшильду разложеніе пропорціонально силѣ поля, а смѣщеніе средней составляющей по отношенію къ неразложенной линіи объясняется первоначальнымъ эксцентрицитетомъ орбиты электрона.

Всѣ эти попытки теоретически объяснить явленія, открытыя Штаркомъ, несовершенны, и, очевидно, преждевременны, такъ какъ экспериментальное изслѣдованіе открываетъ все новые факты, съ которыми придется считаться теоретикамъ. Къ тому же, полная теорія электрическаго расщепленія спектральныхъ линій должна будетъ исходить изъ совершенной модели атома, какой пока не существуетъ. Въдѣ не только новое явленіе Штарка, но и давно извѣстное явленіе Зеемана не объяснено вполне, по крайней мѣрѣ, его аномальныя случаи.

Значеніе открытія Штарка только увеличивается тѣмъ, что существующія теоретическія воззрѣнія оказались недостаточными для его истолкованія. Ставя новыя задачи экспериментаторамъ, оно вмѣстѣ съ тѣмъ дало толчокъ развитію теоретическихъ представленій о строеніи атома и излученіи электрона.

Законъ природы въ небесной эволюціи.

Т. Си.

(Перев. съ англійскаго).

I. Изученіе скопленій приводитъ насъ къ основному закону эволюціи.

Въ повседневной жизни очень часто случается какъ разъ то чего менѣ всего ожидаешь; это же самое недавно произошло при изученіи небесной эволюціи. Издавна механизмъ звѣздныхъ скопленій считался безнадежно сложнымъ, и никому не могло даже притти въ голову, что они окажутся самымъ доступнымъ средствомъ для простаго и естественнаго объясненія общаго закона космической эволюціи. Но случилось именно такъ, и результатъ этотъ теперь настолько очевиденъ, что мы удивляемся, какимъ образомъ прежніе изслѣдователи могли стоять на другой точкѣ зрѣнія.

Такимъ образомъ, наука, какъ это ни покажется страннымъ, нашла великій законъ природы сейчасъ же, какъ только она приступила къ изученію наиболѣе сложныхъ системъ; послѣ того какъ была открыта истинная тайна ихъ образованія, мы обобщили законъ, выведенный путемъ изученія скопленій, черезъ разсмотрѣніе звѣздныхъ системъ низшаго порядка. Этимъ путемъ мы установили совершенно общій законъ звѣздной вселенной, приложимый ко всѣмъ извѣстнымъ типамъ небесныхъ системъ, — начиная съ солнечной системы и восходя черезъ двойныя и сложные звѣзды къ шаровиднымъ скопленіямъ, какъ къ высшему порядку звѣздныхъ системъ, которыя часто состоятъ изъ многихъ тысячъ звѣздъ.

Дедукція великаго закона природы относительно космической эволюціи заслуживаетъ вниманіе читателя, слѣдящаго за литературой научной дедукціи, не только въ виду обнаруженныхъ фактовъ, но и благодаря тому новому свѣту, который онъ проливаетъ на методы науки. Пока наши предпосылки въ космогоніи были ложны, усилія наши, само собою разумѣется, оставались столь же тщетными, какъ поиски мѣшка съ золотомъ на концѣ радуги. Однако, такія тщетныя усилія примѣнялись многими выдающимися астрономами и математиками прошлаго столѣтія, и вслѣдствіе этого истинную науку космогоніи удалось основать только въ самые послѣдніе годы.

Революція во взглядахъ, вызванная исправленіемъ ложныхъ предпосылокъ, которыя долгое время вводили въ заблужденіе самыхъ выдающихся ученыхъ, — въ томъ числѣ Лапласа (Laplace), сэра Джона Гершеля (Herschel), лорда Кельвина (Kelvin), Ньюкома (Newcomb), сэра Георга Дарвина (Darwin) и Пуанкаре (Poincaré), — достаточно замѣчательна, чтобы заслужить вниманіе мыслящаго читателя, какъ профессиональнаго работника науки, такъ и не-специалиста. Такъ какъ неудовлетворительныя послышки дѣлаютъ негоднымъ основанное

на нихъ разсужденіе, то какъ первое условіе истиннаго научнаго прогресса необходимо установить предпосылки, заведомо основанныя на непоколебимомъ фундаментѣ. Въ физическихъ наукахъ это составляетъ трудную часть работы открытія, такъ какъ законы природы неизвѣстны заранее; поэтому открытія во физической вселенной сводятся, главнымъ образомъ, къ поискамъ правильныхъ предпосылокъ. Такъ какъ многіе изслѣдователи не приложили достаточныхъ стараній въ этомъ пунктѣ, то исторія физическихъ знаній представляетъ многочисленные примѣры ошибокъ, несмотря на огромныя усилія, потраченныя весьма выдающимися учеными.

II. Взглядамъ Гершеля необходимо отдать предпочтеніе передъ взглядами Лапласа.

Изъ астрономовъ новаго времени первымъ, кто серьезно задумался надъ происхожденіемъ скопленій, былъ знаменитый сэръ Вильямъ Гершель. Этотъ необыкновенный человѣкъ не только построилъ гигантскіе телескопы для изслѣдованія небесъ, но занесъ также въ каталоги своихъ открытій въ высшей степени проницательныя замѣчанія о происхожденіи различныхъ типовъ звѣздныхъ системъ, и, въ частности, о развитіи скопленій и туманностей. Свои взгляды на небесную эволюцію Гершель изложилъ въ рядѣ статей, опубликованныхъ въ журналѣ Королевскаго Общества „Philosophical Transactions“, отъ 1784 до 1818 г.; но они остались почти неизвѣстными для современныхъ читателей, такъ какъ въ теченіе долгаго времени эти статьи не были замѣчены.

Будущій проницательный историкъ удивится тому замѣчательному факту, что новѣйшіе изслѣдователи столь долго отдавали предпочтеніе ошибочной небулярной гипотезѣ Лапласа, тогда какъ болѣе состоятельныя воззрѣнія Гершеля оставались въ забвеніи свыше ста лѣтъ. Это отчасти объясняется тѣмъ обстоятельствомъ, что труды Лапласа, написанныя въ формѣ трактатовъ, были доступны публикѣ въ отдѣльныхъ изданіяхъ, тогда какъ творенія Гершеля были разбросаны въ видѣ отдѣльныхъ статей въ „Philosophical Transactions“; ихъ мало кто зналъ, и, повидимому, ими никто не занимался, пока ихъ въ 1909 г. не изучилъ авторъ настоящихъ строкъ, когда онъ заканчивалъ второй томъ своихъ „Изысканій объ эволюціи звѣздной системы“, 1910.

Эти забытыя статьи оказались чрезвычайно важными для современнаго развитія небесной эволюціи, и авторъ этихъ строкъ при великодушномъ содѣйствіи покойнаго сэра Вильяма Гюггинса (Huggins) поднялъ въ Англіи движеніе въ пользу изданія Собранія сочиненій Гершеля, которыя удалось, дѣйствительно, выпустить въ свѣтъ въ 1912 году. Нельзя достаточно высоко оцѣнить то значеніе, какое имѣло воскрешеніе теорій Гершеля: въ самомъ дѣлѣ, Гершель величайшій изъ всѣхъ новыхъ астрономовъ, а въ отношеніи звѣздной вселенной какъ цѣлаго, онъ никогда не будетъ имѣть соперниковъ.

III. Взгляды сэра Вильяма Гершеля на происхождение скоплений.

Что касается проблемы о происхождении шаровидных скоплений, то сэр Вильям Гершель давно уже показалъ, что эти массы звѣздъ имѣютъ настоящую сферическую форму („Philosophical Transactions“, 1789, стр. 217). Онъ пришелъ къ заключенію, что онѣ получили такую симметрическую форму благодаря многовѣковому дѣйствию центральныхъ силъ, которыя онъ считаетъ тождественными съ всемірнымъ тяготѣніемъ („Philosophical Transaction“, 1789, стр. 219). Гершель сравниваетъ формы круглыхъ туманностей и скоплений съ фигурами такихъ планетъ, какъ Земля, Юпитеръ, Сатурнъ, Уранъ, Меркурій, Венера и Марсъ; и онъ приходитъ къ заключенію, что всѣ эти массы обязаны своей сферической формой одной и той же причинѣ. Гершель прибавляетъ, что мы не можемъ избѣжать заключенія, что строеніе звѣздныхъ скоплений такъ же, какъ туманностей, объясняется непрерывнымъ дѣйствіемъ центральныхъ силъ. Аргументація Гершеля довольно пространная, и отъ начала до конца весьма интересна. Въ одномъ мѣстѣ онъ говоритъ:

„Такъ какъ, слѣдовательно, почти всѣ видѣнныя мною туманности и звѣздныя скопленія, число которыхъ не менѣе ста двадцати трехъ, болѣе сгущены и болѣе ярки въ серединѣ, и такъ какъ при всякой формѣ одинаково очевидно, что центральная аккумуляція или яркость должна быть результатомъ центральныхъ силъ, то мы рѣшаемся утверждать, что эта теорія теперь уже не представляетъ собой необоснованной гипотезы, но построена на твердомъ основаніи, которое не можетъ быть ниспровергнуто“.

Гершель доказываетъ съ помощью теоріи проектированія, принимая ее къ сферической фигурѣ скопленія, а также къ подобнымъ концентрическимъ слоямъ, изъ которыхъ оно состоитъ, что форма дѣйствительно шарообразна. Гершель говоритъ далѣе, что наблюдаемое постепенное возрастаніе яркости по направленію къ центру не согласуется со степенью возрастанія, вычисленной на основѣ предположенія о равномерномъ распредѣленіи звѣздъ, и потому скученность ихъ должна быть сильнѣе по направленію къ центру, при чемъ, однако, въ каждомъ изъ концентрическихъ сферическихъ слоевъ, составляющихъ скопленіе, плотность остается постоянной.

Посредствомъ аллегорическихъ выраженій Гершель описываетъ, какъ звѣзды стекаются, по направленію къ этимъ центрамъ притяженія, какъ онѣ стремятся скучиваться возлѣ образовавшагося уже скопленія, при чемъ однѣ заставляютъ другія отодвинуться и принять боковое положеніе; но всѣ онѣ въ равной мѣрѣ стремятся занять мѣсто въ центральномъ скопленіи, вслѣдствіе чего образуется сферическая фигура („Philosophical Transaction“, 1799, стр. 222). Гершель замѣчаетъ, что причина, моделирующая звѣздныя системы, вездѣ одна и та же, но произведенныя ею дѣйствія таковы, что формы скоплений получаются весьма разнообразныя. Нѣкоторыя изъ нихъ представляются большими, а другія — малыми; — это, вѣроятно, объясняется, главнымъ образомъ, тѣмъ, что эти массы звѣздъ находятся на различныхъ

разстояніяхъ. Гершель полагаетъ, что нѣкоторыя скопленія, можетъ быть, болѣе сжаты, а другія состоятъ изъ болѣе крупныхъ звѣздъ; но вызванныя этимъ различія небесныхъ тѣлъ не болѣе велики, чѣмъ различія между индивидами одного и того же вида на землѣ.

IV. Методъ Гершеля для вычисленія возраста скопленія.

„Будемъ продолжать разсматривать силу, формирующую различныя собранія звѣздъ въ сферическія скопленія. Если сила дѣйствуетъ безпрерывно, то производимое ею дѣйствіе должно быть пропорціонально времени, въ теченіе котораго сила дѣйствуетъ. Но, какъ было показано, сферическая фигура звѣзднаго скопленія вызвана центральными силами; слѣдовательно, тѣ скопленія, которыя *ceteris paribus* являются наиболѣе совершенными по своей формѣ, долѣе всѣхъ другихъ должны были подвергаться дѣйствію этихъ причинъ. Это допускаетъ различныя точки зрѣнія. Предположимъ на минуту, что 5000 звѣздъ были нѣкогда разсѣяны въ опредѣленномъ расположеніи, и что другія 5000 такихъ же звѣздъ были расположены такимъ же образомъ; въ такомъ случаѣ то изъ двухъ скопленій, которое долѣе подвергалось дѣйствію формирующей силы будетъ, согласно нашему предположенію, болѣе конденсированнымъ; оно достигло болѣе зрѣлости въ отношеніи своей фигуры. Изъ этого соображенія вытекаетъ очевидное слѣдствіе: мы можемъ судить объ относительномъ возрастѣ, зрѣлости или апогеѣ звѣздной системы по расположенію ея составляющихъ частей. Считаая, что степень яркости туманности соотвѣтствуетъ различной скученности звѣздъ въ скопленіи, можно то же самое заключеніе примѣнить и ко всѣмъ туманностямъ. Но изъ сказаннаго мы не въ правѣ заключить, что всякое сферическое скопленіе находится въ одинаковомъ состояніи въ смыслѣ абсолютнаго возраста: въ самомъ дѣлѣ, скопленіе, состоящее всего изъ тысячи звѣздъ, достигаетъ совершенства своей формы, конечно, скорѣе, чѣмъ другое, составленное изъ милліона. Молодость и старость — понятія относительныя; такъ, напримѣръ, дубъ въ извѣстномъ возрастѣ можно считать весьма молодымъ, тогда какъ кустарникъ однихъ съ нимъ лѣтъ доживаетъ уже свой конецъ. Методъ болѣе или менѣе достовѣрнаго сужденія о состояніи звѣздной системы, пожалуй, правильно будетъ вывести изъ примѣра, изложеннаго (у Гершеля) на стр. 218 (большая скученность по мѣрѣ приближенія къ центру): такъ, напримѣръ, скопленіе или туманность, въ которой степень сжатія и яркости весьма постепенно возрастаетъ по направленію къ серединѣ, находящаяся, можетъ быть, въ періодѣ окончанія своего роста, тогда какъ другое скопленіе, приближающееся къ состоянію, характеризуемому болѣе равномернымъ сжатіемъ, какое повидимому, представляютъ туманности, называемыя мною планетарными, могутъ считаться весьма старыми и приближающимися къ періоду измѣненія или разложенія. Я подозревалъ это раньше, когда я въ одной изъ моихъ прежнихъ работъ разсматривалъ чрезвычайную степень сжатія, которая должна господствовать въ туманности, чтобы дать ей видъ планеты. Эта догадка въ значительной мѣрѣ укрѣпляется доводомъ, основанномъ на силахъ, собравшихъ разсѣян-

ныя прежде звѣзды и давшихъ имъ ту форму, въ которой они теперь представляются намъ“ (В. Гершель, „Philosophical Transaction“ 1789, стр. 224 — 225).

V. Теорія Гершеля—Си о захватѣ звѣздъ вслѣдствіе собирающаго дѣйствія силы всемірнаго тяготѣнія.

Изъ динамической теоріи шаровидныхъ скопленій, которую авторъ развилъ въ статьѣ, напечатанной недавно въ „Proceedings of the American Philosophical Society“ въ Филадельфіи, можно видѣть, что сдѣланное Гершелемъ заключеніе оправдывается: скопленіе можетъ въ извѣстныхъ случаяхъ сжаться настолько, что оно распадается при чемъ образуется одна гигантская звѣзда типа Канопусъ. Это крайняя степень сжатія можетъ вызвать распаденіе скопленія и привести къ тому, что Гершель называетъ вселенской „лабораторіей“, „въ которой изготовляются самыя цѣлебныя лекарства противъ ветхости вселенной“ (Philosophical Transaction“, 1785, стр. 217). Лекарство природы состоитъ, повидимому, въ томъ, что подъ дѣйствіемъ отталкивающихъ силъ распавшіяся пары сгораютъ и разсѣиваются, образуя въ отдаленныхъ областяхъ вселенной новыя туманности; такимъ образомъ сызнова можетъ начаться образованіе скопленій и туманностей.

Послѣ этого общаго объясненія теоріи Гершеля о процессѣ собиранія отдѣльныхъ солнцъ, изъ которыхъ построены туманности, намъ остается описать болѣе подробно строеніе туманностей. Въ Динамической теоріи шаровидныхъ скопленій скопленія сравниваются съ шаромъ одноатомнаго газа въ состояніи динамическаго равновѣсія; это сравненіе основано на изслѣдованіи профессора Г. Плуммера (H. C. Plummer), напечатанномъ въ „Monthly Notices of the Royal Astronomical Society“, мартъ 1911 г., и на изслѣдованіяхъ „О физическомъ строеніи и твердости небесныхъ тѣлъ, напечатанныхъ авторомъ настоящей статьи въ „Astron. Nachr.“, 4053, 4104.

Изъ этого сравненія вытекаетъ, что различіе между звѣздными скопленіями и шаромъ одноатомнаго газа въ состояніи динамическаго равновѣсія состоитъ въ слѣдующихъ пунктахъ.

1. Плотность газоваго шара вблизи границы его болѣе значительна, между тѣмъ какъ масса звѣздъ вовсе не имѣетъ опредѣленной границы.

2. Плотность скопленія представляется также сравнительно болѣе шей вблизи центра.

3. Такъ какъ наблюдаемая плотность звѣздъ въ скопленіи довольно велика, и на пластинкѣ изображенія нѣсколько расплываются, то возможно, что при болѣе продолжительныхъ экспозиціяхъ или на лучшихъ пластинкахъ, на которыхъ изображенія не расплываются, получится сравнительно большее число звѣздъ въ области около середины радіуса скопленія и такимъ образомъ законъ плотности для скопленій окажется въ существенномъ согласнымъ съ закономъ плотности въ одноатомномъ газѣ.

Но въ цѣломъ показанія говорятъ за то, что процессъ захватыванія звѣздъ извнѣ еще продолжается. Этимъ можно было бы объяснить малую плотность въ наружной части скопленія, а также большую цен-

тральную плотность, которая представляет собой слѣдствіе аккумулятивной дѣятельности различныхъ слоевъ въ продолженіе миллионъ вѣковъ.

VI. Благодаря явленію захвата туманность по своему внутреннему строенію оказывается сложенной изъ концентрическихъ слоевъ равномерной яркости.

Происхожденіе звѣздныхъ скопленій объясняется такимъ образомъ, послѣдовательнымъ сближеніемъ тѣлъ, возникшихъ отдѣльно на значительныхъ разстояніяхъ другъ отъ друга; теперь остается разсмотрѣть происхожденіе туманностей, которыя подобно скопленіямъ обладаютъ плотностью, возрастающей по направленію къ центру, и, которыя развились, очевидно, такимъ же самымъ путемъ.

Сэръ Вильямъ Гершель замѣтилъ, что тысячи туманностей, которыя онъ наблюдалъ при своихъ изслѣдованіяхъ звѣздной вселенной, неправильныя, эллиптическія, планетарныя, круглыя или шаровидныя, всѣ безъ исключенія обладаютъ возрастающей яркостью по направленію къ центру. Единственное исключеніе изъ этого общаго правила представляютъ кольцевыя туманности; но эти послѣднія встрѣчались столь рѣдко, что врядъ ли заслуживаютъ упоминанія; въ самомъ дѣлѣ, намъ извѣстно о существованіи лишь очень немногихъ туманностей этого типа. Больше того, авторъ настоящихъ строкъ показалъ, что кольцевыя туманности представляютъ собой частные случаи спиральныхъ туманностей, которыя подчиняются закону Гершеля о возрастаніи яркости по направленію къ центру.

Такъ какъ согласно всѣмъ наблюденіямъ туманности обнаруживаютъ возрастающую яркость по направленію къ своимъ центрамъ, то Гершель вывелъ отсюда, что такая возрастающая къ центру скученность можетъ быть лишь результатомъ продолжительнаго дѣйствія центральныхъ силъ, какъ всемірное притяженіе. Онъ заключилъ отсюда, что избытокъ вещества, собравшійся теперь въ центральныхъ частяхъ этихъ свѣтящихся массъ, постепенно скопился подъ вѣковымъ дѣйствіемъ центральныхъ силъ. Но какимъ образомъ эти центральныя силы породили это наблюдаемое дѣйствіе? На этотъ вопросъ Гершель не даетъ отвѣта, кромѣ лишь аналогіи со стремленіемъ къ шаровидной формѣ, наблюдаемымъ въ капляхъ росы и въ круглой формѣ планетъ вслѣдствіе дѣйствія силы тяготѣнія. Это стремленіе, правда, можетъ служить объясненіемъ наблюдаемой шаровидной формы небесныхъ тѣлъ, но оно совершенно не объясняетъ удивительнаго строенія массы изъ ряда слоевъ, которые имѣютъ каждый равномерную плотность, при чемъ, въ центрѣ плотность наибольшая.

Во время Гершеля, однако, предполагали, что туманности представляютъ собой жидкую массу, находящуюся въ гидростатическомъ равновѣсіи; на основѣ этой гипотезы было доказано, что центральное распредѣленіе массы согласуется съ изслѣдованіями математиковъ о фигурахъ равновѣсія на землѣ и другихъ планетахъ.

Только послѣ новѣйшихъ космогоническихъ изслѣдованій автора настоящей статьи, которыя относятся къ 1908 г., стало извѣстнымъ, что

туманности представляют собой прерывистые массы космической пыли, существенно свободные от гидростатического давления. Установленный недавно факт, что планеты образовались на большом расстоянии от солнца, показали, что первоначально солнечная туманность тоже имела очень большие размеры; это согласовалось с тем, что многие туманности прозрачны, и доказывало, что ни в одной из этих масс не имеют места условия давления и равновесия жидкости. Сообразно с этим оказалось необходимым объяснить центральное возрастание плотности посредством динамических, а не гидростатических принципов.

Какъ я уже намекалъ выше, эта задача выполнена в Динамической теории шаровидных скоплений 1912 г. Здесь нужно упомянуть, что туманности состоятъ изъ частичекъ пыли, имеющихъ каждая свою собственную орбиту; очевидно, такимъ образомъ, что эти частицы в такой прерывистой туманности ведутъ себя совершенно такъ же, какъ отдѣльныя звѣзды в скопленіи.

Если бы, слѣдовательно, мы могли найти удовлетворительное динамическое объясненіе генезиса кучи черезъ собираніе индивидуальных звѣздъ, первоначально отдаленныхъ одна отъ другой большими расстояніями, и такимъ образомъ показать, какъ звѣзды, вступающія в подобное скопленіе, подвергаются захвату, при чемъ ихъ колебанія, направленные наружу, затухаютъ и движенія приводятся къ неизмѣнному уровню соответственнаго слоя звѣздъ, то сходное динамическое объясненіе могло бы также быть примѣнено къ туманностямъ.

Въ самомъ дѣлѣ, хорошо извѣстно, что въ туманностяхъ внутреннее распредѣленіе яркости и, весьма вѣроятно, также и плотности сходно съ распредѣленіемъ, наблюдаемымъ въ шаровидныхъ скопленіяхъ. Симметричныя туманности построены изъ концентрическихъ слоевъ равномерной яркости, и очевидно, что центральное распредѣленіе въ слое равномерной плотности произошло благодаря тому же процессу, который сыгралъ роль при образованіи шаровидныхъ звѣздныхъ скопленій. Въ пользу этого заключенія относительно скопленій и туманностей, подверженныхъ практически тождественнымъ условіямъ, говорить полная аналогія, и единственное отличіе состоитъ лишь въ томъ, что туманности имѣютъ сплошной, неясный свѣтъ, происходящій отъ свѣченія и частицъ, разбѣянныхъ по всей массѣ.

(Продолженіе слѣдуетъ).

<http://vofenn.ru>

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Явление Дебая. Въ прошломъ году въ „Вѣстникѣ“ были описаны явленія интерференціи, получающіяся при просвѣчиваніи кристалловъ лучами Рѣнтгена*). Явленія эти, какъ указывалось, объясняются тѣмъ, что правильно расположенныя въ пространственныхъ рѣшеткахъ молекулы кристалла играютъ по отношенію къ рѣнтгеновымъ лучамъ ту же роль, что штрихи диффракціонныхъ рѣшетокъ по отношенію къ свѣтовымъ. Но въ то время какъ штрихи диффракціонныхъ рѣшетокъ находятся все время въ покоѣ, на неизмѣнныхъ разстояніяхъ другъ отъ друга, молекулы кристалла, участвуя въ тепловомъ движеніи не остаются на своихъ мѣстахъ. Отсюда ясно, что если дѣйствительно, теплота есть кинетическая энергія молекулъ и послѣднія при болѣе высокихъ температурахъ движутся быстрѣе, то явленіе интерференціи рѣнтгеновыхъ лучей должно въ значительной степени зависѣть отъ температуры просвѣчиваемыхъ кристалловъ. На это обстоятельство было указано въ концѣ прошлаго года голландскимъ физикомъ Дебаемъ (Debye), который выработалъ даже подробную математическую теорію зависимости интерференціи рѣнтгеновыхъ лучей при прохожденіи сквозь кристаллы отъ температуры послѣднихъ. Согласно этой теоріи относительное расположеніе получающихся интерференціонныхъ пятенъ при повышеніи температуры кристалла не должно мѣняться, но яркость этихъ пятенъ должна уменьшаться весьма быстро, такъ что уже при сравнительно не очень высокихъ температурахъ эти пятна должны совершенно исчезнуть. Кромѣ того, по теоріи Дебая при повышеніи температуры кристалла яркость интерференціонныхъ пятенъ убываетъ не въ одинаковой степени для всѣхъ ихъ: тѣмъ дальше интерференціонное пятно отъ центрального, тѣмъ сильнѣе убываетъ его яркость при повышеніи температуры кристалла.

Въ началѣ этого года Лауе (Laue) и Ванъ-деръ-Лингенъ (Van-der-Lingen) произвели опытное изслѣдованіе этого вопроса. Они пропускали лучи отъ одной и той же рѣнтгеновской трубки одновременно черезъ два одинаковыхъ и одинаковымъ образомъ расположенныхъ кристалла каменной соли (и въ нѣкоторыхъ опытахъ черезъ двѣ одинаковыя слюдяныя пластинки), изъ которыхъ одинъ находился при комнатной температурѣ или при -190° (въ жидкомъ воздухѣ), а другой при помощи электрическаго тока нагрѣвался до $300-400^{\circ}$. Оказалось, что при 320° С. кристаллъ каменной соли не давалъ уже никакихъ интерференціонныхъ пятенъ, въ то время какъ просвѣчиваемый одновременно съ нимъ кристаллъ, находящійся при комнатной температурѣ или при температурѣ жидкаго воздуха, при той же экспозиціи давалъ обычную интерференціонную картину. Слюдяная пластинка при 400° С. еще давала интерференціонныя пятна, но число ихъ было гораздо меньше, чѣмъ при комнатной температурѣ, при чемъ исчезли крайнія пятна, и яркость оставшихся крайнихъ пятенъ была ослаблена гораздо больше, чѣмъ яркость прилегающихъ къ центру пятенъ. Такимъ образомъ теорія Дебая съ качественной стороны вполне оправдалась на опытѣ. Но весьма важно выяснитъ этотъ вопросъ во всѣхъ подробностяхъ и съ количественной стороны, такъ какъ онъ имѣетъ не только спеціальное значеніе: если явленіе интерференціи рѣнтгеновыхъ лучей (помимо

*) См. „Вѣстникъ“, № № 583, 584.

окончательнаго рѣшенія вопроса о природѣ этихъ лучей) позволяетъ намъ какъ бы заглядывать внутри просвѣчиваемыхъ кристалловъ и изучать ихъ строеніе, то явленіе Дебая (зависимость интерференціонной картины отъ температуры кристалла) даетъ намъ возможность изучать тепловое движеніе молекулъ, изъ которыхъ они построены и вывести нѣкоторыя заключенія о характерѣ теплового движенія вообще.

Образуются ли неонъ и гелій изъ болѣе тяжелыхъ газовъ?
Въ прошломъ году всѣ газеты обошло сенсаціонное извѣстіе, что въ разрядныхъ трубкахъ, бывшихъ долгое время въ употребленіи, удалось при помощи спектральнаго анализа обнаружить присутствіе гелія и неона. Такъ какъ въ данныхъ трубкахъ этихъ газовъ никогда не было, то рѣшили, что гелій и неонъ образуются — хотя и въ очень незначительныхъ количествахъ при прохожденіи электрическаго разряда въ болѣе тяжелыхъ газахъ (т. е. въ результатѣ процесса сходнаго съ распадомъ радиоактивныхъ веществъ). Въ началѣ этого года Р. Стрѣтъ (R. I. Strutt), сынъ лорда Рэля, произвелъ тщательное изслѣдованіе этого вопроса. Результатъ его опытовъ былъ отрицательный: удаливъ всѣ резиновыя трубки и ртутные запоры, онъ не могъ обнаружить спектроскопически даже слѣдовъ гелія или неона послѣ весьма продолжительныхъ и сильныхъ разрядовъ. Такимъ образомъ, повидимому, наблюдавшееся въ прошломъ году появленіе гелія и неона въ разрядныхъ трубкахъ слѣдуетъ приписать тому, что на стѣнкахъ резиновыхъ трубокъ и между ртутью и стекломъ всегда имѣются приставшіе пузырьки атмосфернаго воздуха, въ которомъ, какъ извѣстно, благородные газы — хотя и въ малыхъ количествахъ, но содержатся всегда.

М. Я.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей прив.-доц. Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникъ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникъ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 211 (6 сер.). Изъ нѣкоторой точки A проведены къ прямой MN перпендикуляръ AB и рядъ наклонныхъ такъ, что каждая наклонная равна проеціи ближайшей наклонной. Доказать, что перпендикуляры, возставленные къ этимъ наклоннымъ изъ оснований ихъ на прямую MN , пересекаютъ прямую AB въ точкахъ, разстоянія которыхъ отъ AB составляютъ арифметическую прогрессію, и найти разность этой прогрессіи.

М. Бабинъ (ст. Дашковка).

№ 212 (6 сер.). Доказать справедливость неравенства

$$a^n - 1 = n \left(a^{\frac{n-1}{2}} - a^{\frac{n-1}{2}} \right),$$

где a — любое число, большее 1, а n — любое целое положительное число.

Д. Ханжиров (Армавирь).

№ 213 (6 сер.). Найти двузначное число, куб суммы цифр которого равен его квадрату.

В. Яницкий (Острог Волынской губ.).

№ 214 (6 сер.). Доказать тождество

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \dots n! = \frac{(n!)^{n-1}}{3! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 6! \dots n^{n-2}}$$

М. Рабинович (Москва).

РЪШЕНИЯ ЗАДАЧЪ.

ОТДѢЛЪ I.

№ 164 (6 сер.). Доказать тождество

$$4 \left(\frac{a}{1} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} \right) = \frac{abc}{lmn},$$

где l, m, n , — разстояніе центра круга, описаннаго около нѣкотораго треугольника, соответственно отъ его сторонъ a, b, c .

(Займств. изъ *Journal de Mathématiques élémentaires*).

Обозначимъ черезъ ABC нѣкоторый треугольникъ, черезъ a, b, c его стороны, противолежащія соответственно угламъ A, B, C , черезъ O — центръ круга описаннаго, черезъ $Oa = l, Ob = m, Oc = n$ — разстоянія центра круга описаннаго отъ сторонъ треугольника, черезъ S — площадь треугольника ABC . Такъ какъ α, β, γ суть середины треугольника ABC , то площадь треугольника $a\beta\gamma$ равна $\frac{S}{4}$. Стороны угла $\beta O\gamma$ соответственно перпендикулярны къ сторонамъ угла A , слѣдовательно, $\angle \beta O\gamma$ равенъ углу A или же дополняетъ его до двухъ прямыхъ. Поэтому $\Delta \beta O\gamma : \Delta ABC = (Ob \cdot Oc) : (AB \cdot AC)$, или $\Delta \beta O\gamma : S = (mn) : (bc)$, откуда (1) $\Delta \beta O\gamma = \frac{Smn}{bc}$, и подобнымъ же образомъ находимъ, что

$$(2) \Delta \gamma Oa = \frac{Snl}{ca}, \quad (3) \Delta a O\beta = \frac{Slm}{ab}.$$

Предположимъ сперва, что треугольникъ ABC остроугольный. Въ этомъ случаѣ центръ O лежитъ внутри треугольника ABC , а потому

$$(4) \Delta \beta O\gamma + \Delta \gamma Oa + \Delta a O\beta = \Delta a\beta\gamma.$$

т. е. [см. (1), (2), (3)]

$$\frac{Smn}{bc} + \frac{Snl}{ca} + \frac{Slm}{ab} = \frac{S}{4}.$$

Умноживъ обѣ части послѣдняго соотношенія на $\frac{4abc}{Slmn}$, получимъ

$$(5) \quad 4 \left(\frac{a}{l} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} \right) = \frac{abc}{lmn}.$$

Если же одинъ изъ угловъ треугольника, напимѣръ, уголъ A тупой, то равенство (4) придется замѣнить равенствомъ $\Delta\beta O\gamma - \Delta\gamma O\alpha - \Delta\alpha O\beta = \Delta\alpha\beta\gamma$, которое съ помощью формулъ (1), (2), (3) можно преобразовать къ виду $\frac{Smn}{bc} - \frac{Snl}{ca} - \frac{Slm}{ab} = \frac{S}{4}$, откуда, умножая снова обѣ части на $\frac{4abc}{Slmn}$, приходимъ къ соотношенію

$$(6) \quad 4 \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{m} - \frac{c}{n} \right) = \frac{abc}{lmn}.$$

Наконецъ, если треугольникъ ABC прямоугольный, то перпендикуляръ, опущенный изъ центра на гипотенузу, обращается въ нуль, и соотношеніе (5) теряетъ смыслъ, но остается въ силѣ вообще равносильное ему равенство

$$(7) \quad 4(amn + bnl + clm) = abc.$$

Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ одинъ изъ перпендикуляровъ l, m, n , напимѣръ, l обращается въ нуль, а перпендикуляры m и n дѣлаются равными соответственно $\frac{c}{2}$ и $\frac{b}{2}$. Легко видѣть, что соотношеніе (7) является наиболѣе общимъ и обнимаетъ собою всѣ разсмотрѣнные случаи, если условиться считать каждый изъ перпендикуляровъ l, m, n соответственно положительнымъ или отрицательнымъ смотря по тому, располагается ли онъ внѣ или внутри треугольника ABC .

Замѣчаніе. Такъ какъ $\angle BO\alpha$ равенъ A или, въ случаѣ тупого угла, $\pi - A$, то изъ прямоугольнаго треугольника $BO\alpha$ имѣемъ $\frac{O\alpha}{Ba} = \frac{|l|}{2a} = |\cot A|$, откуда, при принятомъ выше условіи относительно знака l , имѣемъ во всѣхъ случаяхъ $l = -2a \cot A$, и подобнымъ же образомъ получимъ $m = -2b \cot B$, $n = -2c \cot C$. Подставляя эти значенія l, m, n въ лѣвую часть равенства (7), можно показать, что оно равносильно извѣстному соотношенію

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$$

между котангенсами угловъ всякаго треугольника.

М. Бабинъ (Могилевъ); Н. Михальскій (Екатеринославъ); П. Волохинъ (Ялта); П. Безчеревныиъ (Владимиръ); С. Конюховъ (Томскъ); А. Иткинъ (Петроградъ); Л. Крееръ (Гомель); Г. Мизневичъ (Одесса).

Обложка
щется

Обложка
щется