Обложка
пщется

Обложка
ищется

L Сем. № 9.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 597.

Основныя свойства элементовъ.

Т. В. Рихардса.

(Фарадеевская лекція).

Читано передъ членами Химическаго Общества въ аудиторіи Королевскаго Института въ Лондонѣ 14 іюня 1911 года.

(Окончаніе).*

Всѣ эти изысканія оставили столь неглубокій слѣдъ въ литературѣ вопроса, что въ первый періодъ настоящаго изслѣдованія они оставались совершенно незамѣченными. Этотъ недосмотръ, однако, не имѣлъ большого значенія; къ вопросу необходимо было приступить съ новой стороны, такъ какъ во всѣхъ старыхъ изслѣдованіяхъ упускались изъ виду весьма существенные факторы явленія. Правда, уже прежніе изслѣдователи принимали во вниманіе сродство, но они упускали изъ виду природу тѣхъ веществъ, на которыя сродство дѣйствуетъ. Очевидно, измѣненіе объема въ каждомъ случаѣ должно зависѣть не только отъ величины давленія, производимаго сродствомъ, но также,

*) См. „Вѣстникъ", № 596.

между прочимъ, и отъ сжимаемости разсматриваемыхъ веществъ. Чѣмъ больше сжимаемость, тѣмъ большее измѣненіе объема должно вызываться даннымъ давленіемъ сродства. Для того, чтобы можно было сдѣлать опредѣленное заключеніе, необходимо принять въ расчетъ различіе въ сжимаемости.

Эти соображенія повели къ измѣренію сжимаемости большого числа элементовъ и простыхъ соединеній. Такъ какъ примѣнявшіеся раньше методы для твердыхъ и жидкихъ тѣлъ были неудовлетворительны, то въ Гарвардѣ былъ придуманъ новый методъ, въ высшей степени цѣлесообразный. Сжимая чистую ртуть въ трубкѣ опредѣленной формы, измѣряютъ давленіе и измѣненіе объема, а затѣмъ бо́льшую часть ртути вытѣсняютъ изучаемымъ веществомъ и опять отмѣчаютъ отношеніе между давленіемъ и объемомъ. Теперь легко вычислить разность между сжимаемостью ртути и сжимаемостью даннаго вещества. Очевидно, при такомъ методѣ сжимаемость самого аппарата исключается. Отношеніе объема къ давленію легко опредѣлить слѣдующимъ способомъ: ртутный менискъ приводятъ въ соприкосновеніе съ очень маленькой платиновой точкой въ трубкѣ весьма малаго діаметра, прибавляютъ взвѣшенные шарики ртути и отмѣчаютъ соотвѣтственныя давленія [1]). Вслѣдствіе недостатка времени я не могу останавливаться на подробностяхъ опыта.

Посредствомъ этого метода была изучена сжимаемость 35 элементовъ и многихъ простыхъ соединеній съ такой степенью точности, которая не оставляла сомнѣній въ правильности найденныхъ относительныхъ значеній. Сразу же обнаружилось, что образованіе соединенія сжимаемаго элемента, при прочихъ равныхъ условіяхъ, сопровождается бо́льшимъ приращеніемъ объема, чѣмъ образованіе подобнаго же соединенія менѣе сжимаемымъ элементомъ [2]). Этого именно и слѣдовало ожидать согласно нашей теоріи, и, насколько мнѣ извѣстно, никакой другой гипотезой этотъ фактъ не можетъ быть объясненъ.

Другая существенная сторона теоріи сжимаемости атомовъ относится къ сцѣпленію (когезіи) [3]). Если давленіе химическаго сродства вызываетъ сжатіе атомовъ, то не можетъ ли давленіе когезіоннаго сродства (см. ниже) оказывать такое же дѣйствіе? Траубе догадывался объ этой возможности, но онъ на весь этотъ вопросъ смотрѣлъ съ совершенно другой точки зрѣнія [4]). Допускаютъ, вообще, что сцѣпленіе, пре-

---

[1]) Richards въ сотрудничествѣ съ Stall, Bonnet, Brink, Mathews, Jones, Speyers; Publication Carnegie Institute of Washington, №№ 7 и 76; Journal American Chemical Society, 1904, т. 26, стр. 399; 1909, т. 31, стр. 154; Zeitschr. physikal. Chem., 1904, т. 49, стр. 1; 1907, т. 61, стр. 77.

[2]) Richards, Proceedings American Academy, 1904, т. 39, стр. 581.

[3]) Ibid.

[4]) См., въ особенности, Traube, Ann. Physik., 1897, (III), т. 61, стр. 383; 1901 (IV), т. 5, стр. 548; 1902, т. 8, стр. 267; 1907, т. 22, стр. 519; Zeitschr. physikal. Chem., 1910, т. 68, стр. 289; также Walden, Zeitschr. physikal. Chem., 1909, т. 66, стр. 385. Ихъ объясненіе основано, главнымъ образомъ, на примѣненіи уравненія Ванъ-деръ-Ваальса и упрощающемъ

пятствующее испаренію твердыхъ и жидкихъ тѣлъ, порождаетъ высокое внутреннее давленіе; не должно ли оно стремиться уменьшить объемъ молекулъ? Молекулы съ высокимъ когезіоннымъ сродствомъ (именно, молекулы малолетучихъ веществъ) должны обладать большей сжимаемостью и меньшимъ объемомъ, тогда какъ молекулы съ слабымъ когезіоннымъ сродствомъ должны быть болѣе объемисты. Больше того, на эти молекулы, уже сжатыя ихъ собственнымъ сцѣпленіемъ, добавочное давленіе оказывало бы, естественно, лишь весьма малое вліяніе. Такъ, если мы разсмотримъ два вещества, которыя въ прочихъ отношеніяхъ сходны между собою, то менѣе летучее оказывается менѣе сжимаемымъ, болѣе плотнымъ и обладаетъ бо́льшимъ поверхностнымъ натяженіемъ [1]). Эти выводы изъ теоріи согласуются съ фактами въ 80% случаевъ, изученныхъ до настоящаго времени; напримѣръ, орто-ксиленъ плотнѣе, менѣе летучъ, менѣе сжимаемъ и обладаетъ бо́льшимъ поверхностнымъ натяженіемъ, чѣмъ мета-ксиленъ и пара-ксиленъ [2]). Эти соотношенія иногда маскируются различіями въ строеніи и химической природѣ веществъ. Особенно ясно параллелизмъ сказывается въ изомерныхъ соединеніяхъ. Коротко говоря, въ огромномъ большинствѣ случаевъ данныя съ несомнѣностью указываютъ, что сцѣпленіе, какъ и химическое сродство, при своемъ дѣйствіи производитъ давленіе, такъ что то и другое въ извѣстной степени опредѣляетъ собою объемы, занимаемые молекулами.

Такимъ образомъ, вычисленіе пространства, занимаемаго твердымъ или жидкимъ тѣломъ, становится задачей весьма сложной. Необходимо принять въ расчетъ не только дѣйствующіе въ каждомъ случаѣ различные виды химическаго сродства, но еще и когезіонное притяженіе — какъ взаимодѣйствующихъ веществъ, такъ и продуктовъ — и весьма

допущеніи коволюма; однако, въ новѣйшей статьѣ Вальдена приведенъ рядъ интересныхъ и важныхъ зависимостей, относящихся къ внутреннему давленію и для своего объясненія требующихъ, повидимому, гипотезы сжимаемыхъ атомовъ.

[1]) Richards и Mathews, Zeitschr. physikal. Chem., 1908, т. 61, стр. 449.

[2]) Съ помощью Спейера (C. L. Speyer) я опредѣлилъ эти константы съ большой тщательностью. Вещества были необыкновенно чисты, такъ какъ *p*-ксиленъ замерзаетъ при 13,2°. Подробности будутъ опубликованы по возможности въ ближайшемъ будущемъ. Результаты приведены въ слѣдующей таблицѣ:

	Точка кипѣнія	Плотность 20°/4°	Поверхностное натяженіе *мг./мм.*; 20°	Сжимаемость $\times 10^6$ при 20° на мегабаръ
o-ксиленъ	144.0°	0.8811	3.09	61.1
m-ксиленъ	139.0	0.8658	2.96	64.8
p-ксиленъ	136.2	0.8611	2.92	66.8

обширный рядъ сжимаемостей для каждаго изъ разсматриваемыхъ веществъ. Между тѣмъ обнаружить параллелизмъ въ измѣненіяхъ объема представляется возможнымъ исключительно въ томъ случаѣ, когда главной перемѣнной является только одинъ изъ этихъ факторовъ.

Въ настоящее время мы еще очень далеки отъ точной математической разработки выводовъ, если таковая, вообще, когда-либо будетъ достигнута. Но это обстоятельство отнюдь не можетъ служить доводомъ противъ возможности самой идеи. Въ самомъ дѣлѣ, хотя математическій анализъ не далъ еще метода для точнаго рѣшенія задачи о трехъ тѣлахъ, но это нисколько не мѣшаетъ природѣ заставлять три или больше тѣлъ взаимодѣйствовать по законамъ тяготѣнія, какъ не мѣшаетъ астрономамъ вычислять приближенно всѣ слѣдствія съ желаемой степенью точности.

Идея о сжимаемости атомовъ, логически проведенная, даетъ намъ совершенно новую концепцію молекулярной механики вселенной. Во всѣхъ явленіяхъ можно найти вліяніе атомистической сжимаемости, и въ большинствѣ случаевъ каждый фактъ при помощи этой гипотезы можетъ быть объясненъ легко и безъ натяжки. Даже кажущіяся исключенія, какъ аномальный объемъ льда, находятъ себѣ удовлетворительное объясненіе въ дѣйствіи нѣкоторыхъ привходящихъ обстоятельствъ. Я не могу здѣсь подробно излагать различныя примѣненія этой теоріи, но нѣкоторыхъ я коснусь слегка, чтобы показать скрытыя въ ней возможности.

Когда восполняется одна изъ валентностей атома, то вслѣдствіе давленія, производимаго сродствомъ въ соотвѣтствующей части поверхности атома, здѣсь имѣетъ мѣсто нажатіе, или депрессія. Чѣмъ сильнѣе сродство, тѣмъ больше соотвѣтственная деформація. Такая концепція, очевидно, даетъ намъ новую картину асимметричнаго углероднаго атома: когда съ нимъ соединяются четыре другихъ различныхъ атома, то онъ получаетъ на своей поверхности четыре депрессіи неодинаковой величины, и такимъ образомъ атомъ деформируется въ видѣ несимметричнаго тетраэдра. Присоединенные атомы сидятъ, по нашей гипотезѣ, на четырехъ граняхъ тетраэдра; такимъ образомъ отпадаетъ неестественное представленіе объ атомахъ, насаженныхъ на четыре верхушки. Согласно нашей гипотезѣ, нѣтъ надобности представлять себѣ, что углеродный атомъ уже съ самаго начала имѣетъ видъ тетраэдра: эту форму онъ получаетъ лишь послѣ присоединенія четырехъ другихъ атомовъ. Легко понять, что развитіе каждаго новаго сродства должно вліять на дѣйствовавшія раньше сродства, подобно тому какъ въ резиновомъ шарѣ новое нажатіе въ одномъ мѣстѣ измѣняетъ имѣвшееся уже вдавленіе въ другомъ мѣстѣ. Такимъ образомъ отчасти объясняется дѣйствіе каждаго вновь вступающаго атома на сродства имѣвшихся уже раньше другихъ атомовъ.

Съ точки зрѣнія этой идеи множество другихъ физико-химическихъ явленій получаетъ совершенно новое освѣщеніе. Возникаютъ новыя представленія о механизмѣ критическихъ явленій, новыя понятія о поверхностномъ натяженіи, о проводимости, ковкости, твердости и коэффиціентѣ расширенія. Спеціальныя зависимости между веществомъ и свѣтомъ, какъ, напримѣръ, явленіе магнитнаго вращенія, флуоресценція, парціальная абсорбція и т. д., могутъ быть объяснены видоизмѣненными колебаніями деформированныхъ атомовъ. Далѣе, устраняются отклоненія отъ извѣстныхъ законовъ, относящихся къ объему (напримѣръ, уравненіе Ванъ-деръ-Ваальса, упомянутое выше; сравнительные объемы водныхъ растворовъ, въ особенности электролитически диссоцiированныхъ веществъ [1]); варіаціи кристаллическихъ формъ изоморфныхъ веществъ). Какъ извѣстно, въ настоящее время распространено воззрѣніе, что атомы построены изъ множества гораздо меньшихъ частицъ; наша теорія, хотя и совершенно не зависитъ отъ этого воззрѣнія, отлично съ нимъ уживается. Въ самомъ дѣлѣ, отчего бы подобной структурѣ не обладать сжимаемостью?

Чѣмъ глубже мы изучаемъ данныя современныхъ изслѣдованій, тѣмъ болѣе вѣроятной представляется гипотеза сжимаемыхъ атомовъ. Десятилѣтній опытъ и размышленія привели меня къ глубокому убѣжденію, что эта идея чрезвычайно полезна и плодотворна, что она даетъ импульсы ко все новымъ и новымъ изслѣдованіямъ, что она вноситъ связь и систему въ разнообразные факты. Плодотворность гипотезы служитъ для нея лучшимъ оправданіемъ.

Связь между теплотой реакціи и измѣненіемъ объема представляетъ огромный интересъ въ химической термодинамикѣ и въ вопросѣ о механизмѣ выдѣленія энергіи при механическомъ превращеніи. При поискахъ точныхъ данныхъ, которыя могли бы служить основой для разработки этого вопроса, скоро обнаружилось, что многія числа ненадежны. Здѣсь, въ области термохиміи, какъ и въ области атомныхъ вѣсовъ и сжимаемости, для достиженія точныхъ результатовъ были необходимы новые методы. Въ виду этого былъ изобрѣтенъ способъ, который сразу устраняетъ вредную „поправку на охлажденіе“, этого злѣйшаго врага точности; для этого достаточно заставить сосудъ, окружающій калориметръ, измѣнять свою температуру съ такой же скоростью, какъ калориметръ. Это можетъ быть достигнуто различными способами, изъ которыхъ былъ выбранъ слѣдующій, какъ наилучшій для химической лабораторіи. Калориметръ, заключенный въ нѣсколько болѣе широкій водонепроницаемый сосудъ съ трубками сверху — въ родѣ подводной лодки — погруженъ подъ поверхность разбавленной неочищенной щелочи въ ведрѣ. Термометры внутри и снаружи позволяютъ приводить температуры къ одной и той же точкѣ. Начинаютъ реакцію въ калориметрѣ, и въ тотъ же моментъ съ соотвѣтственной скоростью льютъ по каплямъ кислоту въ щелочь въ ведрѣ, чтобы температуры снаружи и внутри шли вровень одна съ другой. Такимъ образомъ внутренній сосудъ не теряетъ теплоты, и термохимическая реакція протекаетъ строго адіабатически. Этотъ методъ уже примѣнялся въ Гарвардѣ и далъ весьма хорошіе результаты при опредѣленіи множества разнообразныхъ термохимическихъ данныхъ: теплоты сгоранія

[1]) Въ новѣйшее время Бакстеръ изслѣдовалъ этотъ вопросъ съ точки зрѣнія теоріи сжимаемости атомовъ (Journal American Chemical Society, 1911, т. 33, стр. 922).

углеводородовъ, теплоты растворенія металловъ въ кислотахъ и нейтрализаціи, далѣе, при опредѣленіи удѣльной теплоты растворовъ, а также элементовъ при очень низкихъ температурахъ и, наконецъ, скрытой теплоты парообразованія [1]). Особенно цѣннымъ этотъ методъ оказался для изученія медленныхъ реакцій, гдѣ поправка на охлажденіе иногда составляетъ значительную часть всего результата. Были приложены усилія достигнуть въ опытныхъ изысканіяхъ, относящихся къ химической энергетикѣ, такой же степени точности, къ какой стремились при новѣйшемъ пересмотрѣ атомныхъ вѣсовъ. И хотя, вслѣдствіе большой сложности проблемы, достигнутая до настоящаго времени точность уступаетъ той, однако, есть полное основаніе полагать, что относительное увеличеніе степени точности сравнительно съ прежними изслѣдованіями въ обоихъ случаяхъ приблизительно одно и то же.

Для термохимическихъ проблемъ точныя данныя имѣютъ особенное значеніе, котораго совершенно лишены результаты неточные. Такъ, можно надѣяться, что достаточно точное опредѣленіе отношеній между теплотой образованія органическихъ веществъ прольетъ свѣтъ на органическую структуру и природу валентности, тогда какъ значенія, только приблизительныя, для этой цѣли вовсе не могутъ быть полезны. То, что уже достигнуто, заставляетъ насъ подозрѣвать существованіе въ высокой степени интересныхъ соотношеній между теплотой сгоранія, теплотой парообразованія, сжимаемостью и многими другими свойствами и въ извѣстной степени подтверждаетъ теорію сжимаемыхъ атомовъ [2]). Больше того, новые результаты, въ связи съ болѣе точнымъ знаніемъ свободной энергіи химическихъ превращеній, позволятъ вычислить связанную энергію и дадутъ основу для рѣшенія вопроса, является ли, дѣйствительно, связанная энергія простой функціей измѣненія теплоемкости, какъ это неоднократно указывали изслѣдователи [3]), или нѣтъ? Я здѣсь могу лишь намекнуть на представляющіяся здѣсь возможности, такъ какъ подробное изложеніе любой изъ нихъ потребовало бы много часовъ.

Нельзя ли сопоставить всѣ перемѣнныя свойства элементовъ такимъ образомъ, чтобы обнаружить многостороннюю зависимость, связывающую ихъ? Нельзя ли собрать въ одно цѣлое разрозненные факты и посредствомъ такого синтеза получить правильную концепцію о конечной природѣ вещей? Правда, врядъ ли мы когда-либо получимъ

---

[1]) Richards въ сотрудничествѣ съ Гендерсономъ (Henderson), Форбесомъ (Forbes), Фревертомъ (Frevert), Матью (Mathews), Роу (Rowe), Джессомъ (Jesse), Бургессомъ (Burgess) и Джэксономъ (Jackson), Proceedings American Academy, 1905, т. 41, стр. 3; 1907, т. 42, стр. 573; 1908, т. 32, стр. 268, 432, 1176; Zeitschr. Physikal. Chem., 1905, т. 52, стр. 551; 1907, т. 59, стр. 531; 1909, т. 70, стр. 414.

[2]) Richards, Proceedings American Academy, 1908, т. 39, стр. 581; а также Zeitschr. physikal. Chem., 1904, т. 49, стр. 15.

[3]) Этимъ вопросомъ занимались Гельмгольцъ, Льюисъ (Lewis), Вантъ-Гоффъ, Нернстъ и Габеръ (Haber), а также авторъ и многіе другіе. Интересную сводку съ указаніями литературы можно найти въ книгѣ Габера: „Thermodynamics of Technical Gas Reactions“; англійскій переводъ Ламба (Lamb), London и New-York, 1908.

окончательный отвѣтъ на эти вопросы, но тѣмъ не менѣе наука должна безъ устали стремиться къ рѣшенію связанныхъ съ ними проблемъ.

Прежде всего, очевидно, нужно выяснить, какимъ образомъ одно свойство мѣняется въ связи съ каждымъ другимъ. Имѣя это въ виду, обратимся къ иррегулярной системѣ періодической классификаціи, составившей предметъ Фарадеевской лекціи, прочитанной 22 года тому назадъ Менделѣевымъ. Эта таинственная таблица должна скрывать въ себѣ руководящія идеи, которыя укажутъ намъ путь впередъ.

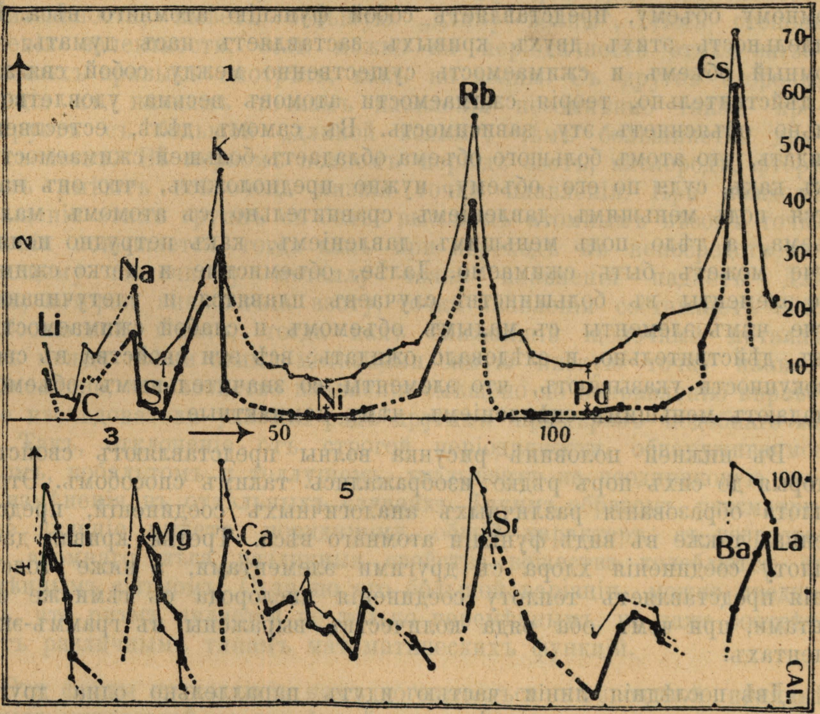


Рис. 3.

1) Сравненіе атомныхъ объемовъ и сжимаемостей. 2) Сжимаемость и атомный объемъ. 3) Атомный вѣсъ. 4) Теплота образованія. 5) Сравненіе теплоты образованія хлоридовъ и окисловъ.

Каждое свойство мы должны, очевидно, разработать не только съ качественной стороны, но и строго количественнымъ образомъ. Съ этой цѣлью мы будемъ наносить на одной координатной оси атомные вѣса, а на второй — всѣ другія свойства; по параллелизму или антипараллелизму полученныхъ волнообразныхъ линій мы будемъ въ состояніи обнаружить различныя зависимости между изучаемыми свойствами. Этотъ методъ не новъ. Кэрнелли (Carnelley) сравнивалъ кривую атомныхъ объемовъ Лотаря Майера съ кривой точекъ плавленія; другія аналогичныя данныя тоже подверглись такому графическому изученію; все же этотъ методъ до сихъ поръ еще не былъ использованъ исчерпывающимъ образомъ.

Обратимся къ діаграммѣ (рис. 3), изображающей зависимость между атомнымъ вѣсомъ и рядомъ другихъ свойствъ. Среди линій наиболѣе выдается вверхъ только-что упомянутая кривая атомныхъ объемовъ. Пониже нанесена почти параллельная ей линія, изображающая сжимаемость элементовъ твердыхъ тѣлъ, согласно Гарвардскимъ опредѣленіямъ; какъ мы непосредственно видимъ, сжимаемость, подобно атомному объему, представляетъ собой функцію атомнаго вѣса. Параллельность этихъ двухъ кривыхъ заставляетъ насъ думать, что атомный объемъ и сжимаемость существенно между собой связаны. И дѣйствительно, теорія сжимаемости атомовъ весьма удовлетворительно объясняетъ эту зависимость. Въ самомъ дѣлѣ, естественно ожидать, что атомъ большого объема обладаетъ большей сжимаемостью, такъ какъ, судя по его объему, нужно предположить, что онъ находится подъ меньшимъ давленіемъ сравнительно съ атомомъ малаго объема, а тѣло подъ меньшимъ давленіемъ, какъ нетрудно понять, легче можетъ быть сжимаемо. Далѣе, объемистые и легко сжимаемые элементы въ большинствѣ случаевъ плавятся и улетучиваются легче, чѣмъ элементы съ малымъ объемомъ и слабой сжимаемостью. Такъ, дѣйствительно, и слѣдовало ожидать; всѣ эти свойства въ своей совокупности указываютъ, что элементы со значительнымъ объемомъ обладаютъ меньшимъ сцѣпленіемъ, чѣмъ компактные.

Въ нижней половинѣ рисунка волны представляютъ свойства, которыя до сихъ поръ рѣдко изображались такимъ способомъ. Это — теплота образованія различныхъ аналогичныхъ соединеній, представленная также въ видѣ функціи атомнаго вѣса. Третья кривая даетъ теплоту соединенія хлора съ другими элементами, а ниже толстая линія представляетъ теплоту соединенія кислорода съ тѣми же элементами, при чемъ оба ряда количествъ выражены въ граммъ-эквивалентахъ.

Двѣ послѣднія линіи частью идутъ параллельно одна другой; обнаруживаемое ими уклоненіе отъ параллельности весьма многозначительно. Верхушки кривыхъ, соотвѣтствующихъ окисламъ, по мѣрѣ возрастанія атомнаго вѣса, оказываются явственно смѣщенными вправо отъ кривой хлоридовъ. Литій отмѣчаетъ собой максимумъ для обѣихъ кривыхъ, но въ дальнѣйшихъ верхушкахъ кислородная кривая значительно отстаетъ; она имѣетъ максимумъ для лантана съ атомнымъ вѣсомъ 139 [1]) и остается смѣщенной на всемъ протяженіи до свинца,

[1]) Приводимъ главныя данныя, которыя привели къ этому обобщенію, а именно теплоту окисленія металловъ, имѣющихъ сильное сродство къ кислороду: литій, 72; натрій, 50; магній, 72; калій, 43; кальцій, 76; рубидій, 42; стронцій, 71; цезій, 41; барій, 67 и лантанъ, 74. Эти значенія соотвѣтствуютъ граммъ-эквивалентамъ, т. е. соединенію съ 8 граммами кислорода, и выражены въ большихъ калоріяхъ. Здѣсь все время имѣются въ виду типичные окислы. Числа основаны, главнымъ образомъ, на данныхъ новѣйшей работы

атомный вѣсъ котораго выше 200. Отдѣльно взятый, этотъ простой фактъ, быть можетъ, не имѣлъ бы значенія, но рядъ другихъ аналогичныхъ фактовъ указываетъ на ту же тенденцію. Такъ, напримѣръ, обнаруживаемое щелочными металлами свойство электроположительности не появляется вновь въ цинкѣ, какъ этого можно было бы ожидать, но перенеслось въ ослабленной степени въ другую сторону; и, наконецъ, между элементами съ болѣе высокими атомными вѣсами остріе покидаетъ ртуть (элементъ, аналогичный цинку) и переходитъ далеко — къ таллію. Ясно, что степень нарастанія измѣненій, характерная для электроположительности, имѣетъ бо́льшую „длину волны", чѣмъ степень измѣненія валентности, если можно на періодичность этихъ зигзагообразныхъ кривыхъ смотрѣть, какъ на волны. Съ другой стороны, тенденція къ низкимъ точкамъ плавленія несомнѣнно также прогрессируетъ съ бо́льшей „длиной волны", чѣмъ большинство другихъ свойствъ. Въ первомъ полномъ періодѣ азотъ, кислородъ, фторъ и неонъ имѣютъ всѣ очень низкія точки плавленія. При каждомъ возвращеніи этихъ группъ съ болѣе высокимъ атомнымъ вѣсомъ точка плавленія повышается, тогда какъ при переходѣ къ непосредственно слѣдующему щелочному металлу точка плавленія падаетъ. Для сурьмы, которая аналогична азоту, точка плавленія составляетъ 900^0 по абсолютной шкалѣ, тогда какъ ближайшій щелочный металлъ имѣетъ между всѣми этими металлами самую низкую точку плавленія. Очевидно, что свойство плавленія смѣщено по направленію вправо. Другіе изслѣдователи указали рядъ другихъ примѣровъ подобнаго же рода. Такъ, отклоненіе отъ строгой періодичности, обнаруживаемое аргономъ, кобальтомъ и теллуріемъ, указываетъ на неодинаковую степень измѣненія въ отдѣльныхъ случаяхъ. Такимъ образомъ, разсматриваемое явленіе имѣетъ, повидимому, общій характеръ: съ возрастаніемъ атомнаго вѣса различныя свойства вещества колеблются съ перемѣннымъ ритмомъ. Судя по его большой варіаціи, можно предполагать, что ритмъ является не только перемѣннымъ, но даже соотвѣтствуетъ различнымъ типамъ математическихъ функцій.

Эти факты позволяютъ намъ догадываться о вѣроятной причинѣ сильныхъ отклоненій въ послѣдней части періодической таблицы. Не опредѣляется ли природа элементовъ нѣкоторыми основными свойствами, которыя можно сравнить съ Менделевыми признаками въ новѣйшей теоріи наслѣдственности? Если съ возрастаніемъ атомнаго вѣса свойства повторяются черезъ различные интервалы, то извѣстный ритмъ, имѣющій мѣсто въ началѣ, долженъ сглаживаться по мѣрѣ пе-

---

Ренгада (Rengade), де-Форкрана (Forkrand) и Гунца (Guntz). Бо́льшую часть литературы можно найти въ книгѣ Абегга (Abegg, „Handbuch der anorganischen Chemie"). Работа Гунца опубликована въ Compt. rend., 1903, т. 136, стр. 1071; 1905, т. 140, стр. 863; Bull. Soc. chim., 1906 (III), т. 35, стр. 503. Изслѣдованіе о лантанѣ произведено Матиньономъ (Mantignon), Ann. Chim. Phys., 1906 (VIII), т. 8, стр. 426. Теплота окисленія бериллія въ точности неизвѣстна, но, вѣроятно, составляетъ меньше 70 калорій на граммъ-эквивалентъ, судя по тому, что окиселъ бериллія при высокихъ температурахъ разлагается магніемъ рехода къ концу системы. Пользуясь аналогичнымъ явленіемъ изъ другой области и заимствуя терминъ изъ ученія о свѣтѣ, мы можемъ сказать, что перемѣнныя свойства, выражаемыя кривыми нашей діаграммы, сперва взаимно усиливаются, а затѣмъ вслѣдствіе интерференціи ослабляютъ другъ друга, такъ какъ обладаютъ неодинаковой длиной волны. Вначалѣ сложеніе волнъ усиливаетъ одинъ рядъ свойствъ, но потомъ измѣнившіяся отношенія могутъ уничтожить этотъ рядъ свойствъ и вызвать другой. Такимъ образомъ, всѣ разновидности вещества, являются, можетъ быть, функціями небольшого числа основныхъ свойствъ, которыя измѣняются съ различной скоростью по мѣрѣ возрастанія атомнаго вѣса.

Всякая попытка открыть природу этихъ основныхъ свойствъ должна носить въ высокой степени умозрительный характеръ. Вслѣдствіе нашего незнанія мы не можемъ различать причину отъ дѣйствія. Извѣстныя опредѣленныя отношенія между спектральными линіями наводятъ на мысль, что, по крайней мѣрѣ, однимъ изъ основныхъ условій существованія атома является способность его къ нѣкоторымъ опредѣленнымъ гармоническимъ колебаніямъ. При этомъ сжимаемые атомы, способные къ колебаніямъ извѣстнаго ритма, могутъ обладать устойчивостью, тогда какъ другіе аггрегаты являются неустойчивыми. Въ пользу такого представленія говоритъ пробѣлъ въ періодической системѣ въ томъ мѣстѣ, гдѣ должны находиться экаіодъ и эка-цезій, и поразительная неустойчивость непосредственно слѣдующихъ элементовъ.

Но здѣсь передъ нами космическая загадка, рѣшить которую предстоитъ лишь будущему. Въ настоящее же время у насъ нѣтъ для этого достаточныхъ данныхъ. Наша непосредственная задача, поэтому, — искать и провѣрять каждый шагъ съ возможно большей тщательностью. Точно установленные факты дадутъ прочный фундаментъ для будущей теоретической надстройки.

Не одно только любопытство побуждаетъ насъ къ этому изслѣдованію. Вся органическая жизнь поддерживается химической энергіей и протекаетъ въ механизмѣ и средѣ, состоящихъ изъ химическихъ веществъ. Стремленіе понять эти существенныя условія человѣческаго существованія является однимъ изъ самыхъ достойныхъ предметовъ нашихъ усилій. Поверхностное наблюденіе сложныхъ явленій жизни мало можетъ намъ дать. Ф а р а д е й прекрасно зналъ, что только терпѣливое изученіе основныхъ законовъ физической вселенной поможетъ намъ распутать этотъ сложный клубокъ. Въ результатахъ изслѣдованія одинаково заинтересованы здоровье человѣчества, его благосостояніе и рѣшеніе глубокихъ философскихъ вопросовъ. Никто не можетъ предсказать, насколько мы съ помощью нашего ограниченнаго интеллекта можемъ проникнуть въ тайны безконечной и безмѣрно чудесной вселенной. Тѣмъ не менѣе, каждый шагъ впередъ несомнѣнно приноситъ съ собой новыя благодѣянія для человѣчества и воодушевляетъ насъ въ стремленіи къ все болѣе великимъ цѣлямъ.

О раціональныхъ многосторонникахъ.

М. Зимина.

§ 1.

Многосторонникъ, образованный прямыми $a_1, a_2, a_3, \ldots$, назовемъ раціональнымъ, если каждыя три прямыя его образуютъ треугольникъ съ раціональными сторонами*). Изъ опредѣленія раціональнаго многосторонника вытекаютъ слѣдующія свойства системы прямыхъ, его образующихъ.

1) Косинусъ угла каждой пары прямыхъ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ будетъ числомъ раціональнымъ, ибо этотъ уголъ принадлежитъ треугольнику съ раціональными сторонами.

2) Отношеніе синусовъ двухъ угловъ, образованныхъ двумя парами прямыхъ $a_1, a_2, a_3, \ldots$, раціонально. Дѣйствительно, въ треугольникахъ $a_1 a_2 a_3$ и $a_2 a_3 a_4$ въ силу теоремы синусовъ отношенія

$$\frac{\sin(a_1 a_2)}{\sin(a_2 a_3)} \quad \text{и} \quad \frac{\sin(a_2 a_3)}{\sin(a_3 a_4)}$$

раціональны, а также раціонально и произведеніе этихъ отношеній, т. е.

$$\frac{\sin(a_1 a_2)}{\sin(a_3 a_4)}.$$

3) Отношенія площадей двухъ треугольниковъ, образованныхъ какими-либо прямыми системы $a_1, a_2, a_3, \ldots$, раціонально. Для доказательства достаточно выразить каждую площадь черезъ двѣ стороны треугольника и уголъ между ними и принять во вниманіе свойство (2).

Слѣдуетъ замѣтить, что свойства 1) и 2) системы прямыхъ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ зависятъ взаимно одно отъ другого, такъ что при существованіи 1-го свойства имѣетъ мѣсто и 2-ое и обратно. Докажемъ это.

Пусть косинусы всѣхъ угловъ паръ прямыхъ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ раціональны. Если подъ углами $(a_1 a_2)$, $(a_2 a_3)$, $(a_3 a_1)$ будемъ подразумѣвать внутренніе углы треугольника $a_1 a_2 a_3$, то можемъ написать:

$$(a_3 a_1) = \pi - (a_1 a_2) - (a_2 a_3),$$

откуда

$$\cos(a_3 a_1) = -\cos(a_1 a_2)\cos(a_2 a_3) + \sin(a_1 a_2)\sin(a_2 a_3).$$

*) Это значитъ, собственно говоря, съ соизмѣримыми сторонами; принявъ тогда общую мѣру за единицу, можно выразить стороны раціональными числами.

Ред.

Видимъ, что произведенiе $\sin(a_1 a_2) \sin(a_2 a_3)$ рацiонально, а такъ какъ число $\sin^2(a_2 a_3) = 1 - \cos^2(a_2 a_3)$ тоже рацiонально, то, слѣдовательно, отношенiе

$$\frac{\sin(a_1 a_2) \sin(a_2 a_3)}{\sin^2(a_2 a_3)} = \frac{\sin(a_1 a_2)}{\sin(a_2 a_3)}$$

рацiонально. Такъ же докажемъ рацiональность отношенiя $\dfrac{\sin(a_2 a_3)}{\sin(a_3 a_4)}$, откуда непосредственно вытекаетъ и рацiональность отношенiя $\dfrac{\sin(a_1 a_2)}{\sin(a_3 a_4)}$.

Съ другой стороны, извѣстное соотношенiе между углами треугольника $a_1 a_2 a_3$

$$\cos(a_3 a_1) = \frac{\sin^2(a_1 a_2) + \sin^2(a_2 a_3) - \sin^2(a_3 a_1)}{2 \sin(a_1 a_2) \sin(a_2 a_3)}$$

обнаруживаетъ, что при рацiональности отношенiй синусовъ угловъ прямыхъ a_1, a_2, $a_3, \ldots$ косинусы этихъ угловъ будутъ также рацiональны.

Изъ свойства (3) вытекаетъ, что, если среди треугольниковъ, образованныхъ прямыми a_1, a_2, $a_3, \ldots$, одинъ какой-нибудь будетъ имѣть рацiональную площадь, то площади всѣхъ остальныхъ треугольниковъ также будутъ рацiональны.

§ 2.

Двѣ какiя-либо прямыя рацiональнаго многосторонника $a_1 a_2 a_3 \ldots$ съ каждою изъ остальныхъ прямыхъ образуютъ рацiональные треугольники. Оказывается, что обратное заключенiе также справедливо, т. е.

Если двѣ прямыя x и y съ каждою изъ прямыхъ a_1, a_2, $a_3, \ldots$ даютъ рацiональные треугольники, то совокупность прямыхъ x, y, a_1, a_2, $a_3, \ldots$ образуетъ рацiональный многосторонникъ.

Теорема будетъ доказана, если докажемъ, что будутъ рацiональными: 1) каждый треугольникъ, составленный одною изъ прямыхъ x, y и двумя изъ прямыхъ a_1, a_2, $a_3, \ldots$; 2) каждый треугольникъ, составленный тремя изъ прямыхъ a_1, a_2, $a_3, \ldots$.

Пусть прямыя x и y пересѣкаются въ O (см. чертежъ), и пусть прямыя a_1 и a_2 пересѣкаютъ x и y соотвѣтственно въ точкахъ X_1 и Y_1, X_2 и Y_2. Черезъ M обозначимъ точку пересѣченiя прямыхъ a_1 и a_2. Въ силу рацiональности треугольниковъ xya_1 и xya_2, т. е. OX_1Y_1 и OX_2Y_2, всѣ отрѣзки на прямыхъ x и y, а также X_1Y_1 и X_2Y_2 рацiональны. По теоремѣ Менелая*) изъ треугольника

*) Теорема Менелая заключается, какъ извѣстно, въ томъ, что сѣкущая разсѣкаетъ стороны треугольника такимъ образомъ, что произведенiе отношенiй, въ которыхъ каждая сторона дѣлится (внутренне или внѣшне) соотвѣтствующей точкой пересѣченiя, равно 1.

Ред.

OX_1Y_1, разсѣкаемаго прямою a_2, и треугольника OX_2Y_2, разсѣкаемаго прямою a_1, имѣемъ:

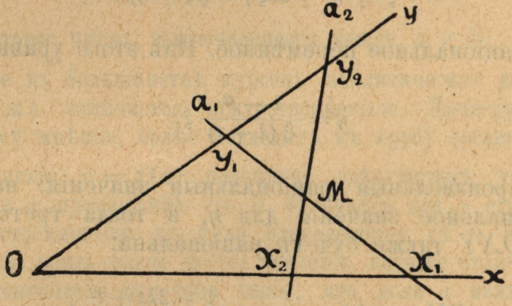
$$\frac{MX_1}{MY_1}\cdot\frac{X_2O}{X_2X_1}\cdot\frac{Y_2Y_1}{Y_2O}=1,\quad \frac{MX_2}{MY_2}\cdot\frac{X_1O}{X_1X_2}\cdot\frac{Y_1Y_2}{Y_1O}=1.$$

Эти равенства показываютъ, что отношенія

$$\frac{MX_1}{MY_1} \text{ и } \frac{MX_2}{MY_2}$$

раціональны, откуда при раціональности X_1Y_1 и X_2Y_2 вытекаетъ раціональность отрѣзковъ MX_1, MY_1, MX_2, MY_2. Итакъ, мы пришли къ заключенію, что треугольники MX_1X_2 и MY_1Y_2, т. е. xa_1a_2 и ya_1a_2, раціональны.

Полученный результатъ можно формулировать такъ. Если два треугольника xya_1 и xya_2 съ двумя общими прямыми x и y раціональны, то будутъ раціональны и треугольники, составленные одной изъ этихъ общихъ прямыхъ и двумя необщими прямыми a_1 и a_2.



Присоединяемъ къ прямымъ a_1 и a_2 третью прямую a_3, образующую, какъ и двѣ первыя, съ x и y раціональный треугольникъ. По только-что доказанному треугольникъ xa_1a_3, какъ и xa_1a_2, раціоналенъ. Изъ раціональности же треугольниковъ xa_1a_2 и xa_1a_3, имѣющихъ двѣ общія стороны x и a_1, слѣдуетъ по тѣмъ же основаніямъ раціональность треугольника $a_1a_2a_3$. Теорема о раціональности многосторонника $xya_1a_2a_3\ldots$, такимъ образомъ, доказана.

Если треугольникъ OX_1Y_1, т. е. xya_1 имѣетъ раціональную площадь, то будутъ также раціональными площади всѣхъ другихъ треугольниковъ, составленныхъ тремя какими-либо изъ прямыхъ x, y, a_1, a_2, a_3, ..

§ 3.

На основаніи вышеизложеннаго построеніе раціональнаго многосторонника сводится къ построенію прямыхъ x и y и ряда прямыхъ a_1, a_2, $a_3,\ldots$, каждая изъ которыхъ образуетъ съ x и y раціональный треугольникъ. Прямыя x и y должны быть выбраны такъ, чтобы

$\cos(xy)$ былъ раціоналенъ. Всего проще для этой цѣли взять треугольникъ OAB *) съ тремя раціональными сторонами и прямыя OA, OB принять за x, y. Третья сторона AB можетъ быть принята за одну изъ прямыхъ a_1, a_2, $a_3, \ldots$

Построеніе всякой другой прямой a, образующей съ x и y раціональный треугольникъ, выполняется слѣдующимъ образомъ. Пусть прямая a пересѣкаетъ прямыя x и y соотвѣтственно въ точкахъ X и Y. Обозначая $\cos AOB$ черезъ λ и полагая $OX = \xi$, $OY = \eta$, будемъ имѣть:

$$\overline{XY}^2 = \xi^2 + \eta^2 - 2\lambda\xi\eta,$$

при чемъ эта формула будетъ приложима ко всевозможнымъ положеніямъ прямой a, если условимся отрѣзки $OX = \xi$ и $OY = \eta$ считать положительными, когда ихъ направленія одинаковы соотвѣтственно съ направленіями OA и OB, и отрицательными въ противоположномъ случаѣ. Для раціональности треугольника OXY нужно, чтобы выраженіе $\xi^2 + \eta^2 - 2\lambda\xi\eta$ съ раціональными перемѣнными ξ и η было точнымъ квадратомъ. Полагаемъ:

$$\xi^2 + \eta^2 - 2\lambda\xi\eta = (t\xi + \eta)^2,$$

гдѣ t — новое раціональное перемѣнное. Изъ этого уравненія находимъ:

$$\eta = \frac{1 - t^2}{2(\lambda + t)}\,\xi.$$

Давая ξ и t произвольныя раціональныя значенія, найдемъ по этой формулѣ раціональное значеніе для η, и тогда третья сторона XY треугольника OXY также будетъ раціональна:

$$XY = \pm(t\xi + \eta) = \pm\frac{1 + 2\lambda t + t^2}{2(\lambda + t)}\,\xi.$$

Затѣмъ, имѣя ξ и η, безъ труда строимъ соотвѣтствующую прямую a. Измѣняя ξ и t, можемъ получить любое число прямыхъ требуемаго свойства.

Такимъ образомъ, вопросъ о нахожденіи прямыхъ a_1, a_2, $a_3, \ldots$, образующихъ съ прямыми x и y раціональные треугольники, а, слѣдовательно, и вопросъ о разысканіи раціональнаго многосторонника рѣшенъ вполнѣ и въ самомъ общемъ видѣ.

---

*) Просимъ читателя сдѣлать чертежъ.

Замѣтка къ курсу анализа безконечно-малыхъ въ средней школѣ.

В. Шидловскаго.

Къ числу важныхъ вопросовъ курса анализа безконечно малыхъ относится разсмотрѣніе свойствъ производной и признаковъ возрастанія и убыванія функцій, какъ вблизи данной точки, такъ и въ данной области измѣненія аргумента; обстоятельное разсмотрѣніе этого послѣдняго вопроса требуетъ теоремы Лагранжа о конечномъ приращеніи функціи,—теоремы, выражающейся такъ: «Приращеніе функціи, соотвѣтствующее конечному приращенію аргумента, равно произведенію этого приращенія на производную, взятую для нѣкотораго промежуточнаго значенія аргумента (предполагается, что $f(x)$ имѣетъ производную въ области a, b измѣненія аргумента и непрерывна въ этой области). Теорему Лагранжа можно выразить посредствомъ равенства:

$$f(b)-f(a)=(b-a)\,.\,f'(c),$$

гдѣ c есть нѣкоторое число, заключающееся между a и b.

Приводимое въ большинствѣ курсовъ аналитическое доказательство теоремы Лагранжа отличается искусственностью. Приведу доказательство, которое, по моему мнѣнію, болѣе подходитъ къ курсу средней школы.

Пусть функція $y=f(x)$ подчинена слѣдующимъ условіямъ: 1) при всякомъ значеніи x приращенію его h отвѣчаетъ для y единственное только приращеніе k, стремящееся къ нулю одновременно съ h, и 2) при всякомъ значеніи x можно взять такое другое значеніе, которое отличается отъ перваго на количество конечное и при томъ такое, что, если x измѣняется въ промежуткѣ между этими двумя значеніями въ одномъ и томъ же смыслѣ, то y будетъ измѣняться также въ одномъ и томъ же смыслѣ, т. е. будетъ или постоянно увеличиваться или постоянно уменьшаться.

Пусть x_0, X будутъ два значенія перемѣнной x, удовлетворяющія названнымъ условіямъ; y_0, Y—соотвѣтствующія значенія функціи y.

Раздѣлимъ разность $X-x_0$ на произвольное большое число n равныхъ частей и назовемъ одну изъ нихъ h, такъ что $X-x_0=nh$.

Значеніямъ перемѣнной x

$$x_0,\quad x_1=x_0+h,\quad x_2=x_0+2h,\ \ldots,\ X=x_0+nh$$

будутъ соотвѣтствовать значенія функціи y

$$y_0,\quad y_1,\quad y_2,\ \ldots,\ Y.$$

Приращеніямъ перемѣнной x

$$h,\quad 2h,\ \ldots,\ nh$$

пусть соотвѣтствуютъ приращенія функціи y

$$k_1, \quad k_2, \ \ldots, \ k_n,$$

такъ что

$$Y - y_0 = k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_n,$$

и поэтому:

$$\frac{Y - y_0}{X - x_0} = \frac{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}{nh} = \frac{\frac{k_1}{h} + \frac{k_2}{h} + \cdots + \frac{k_n}{h}}{n},$$

гдѣ при безграничномъ возрастаніи n, приращеніе h безгранично уменьшается; поэтому $\frac{k_1}{h} = f'(x_0) + \varepsilon_0$, такъ какъ

$$\text{пред.}\ \frac{k_1}{h} = \text{пред.}\ \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} = f(x_0);$$

точно такъ же будемъ имѣть:

$$\frac{k_2}{h} = f'(x_1) + \varepsilon_1,$$

$$\frac{k_3}{h} = f'(x_2) + \varepsilon_2,$$

$$\frac{k_n}{h} = f'(x_{n-1}) + \varepsilon_{n-1},$$

гдѣ $\varepsilon_0, \ \varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ \ldots, \ \varepsilon_{n-1}$ суть величины безконечно-малыя.

Слѣдовательно,

$$\frac{Y - y_0}{X - x_0} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{f'(x_0) + f'(x_1) + \cdots + f'(x_{n-1})}{n} + \frac{\sum\limits_0^{n-1} \varepsilon}{n},$$

гдѣ $\sum\limits_0^{n-1} \varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{n-1}$ есть величина безконечно-малая и $\frac{\sum\limits_0^{n-1} \varepsilon}{n}$ также есть величина безконечно-малая; но выраженіе $\frac{f'(x_0) + f'(x_1) + \cdots + f'(x_{n-1})}{n}$ есть среднее ариѳметическое производныхъ въ интервалѣ $X - x_0$; но среднее ариѳметическое чиселъ больше наименьшаго изъ нихъ и меньше наибольшаго изъ нихъ; слѣдовательно,

$$f'(x_p) < \frac{Y - y_0}{X - x_0} < f'(x_q),$$

гдѣ $f'(x_p)$, напримѣръ, есть наименьшее значеніе производной, а $f'(x_q)$ есть наибольшее значеніе производной.

Слѣдовательно, выраженіе $\frac{Y-y_0}{X-x_0}$ будетъ равно производной, при нѣкоторомъ промежуточномъ значеніи x между x_0 и X, т. е. $f'(x_0+\theta\,.\,\Delta x)$, гдѣ $0<\theta<1$ (предполагается, что $f'(x)$ есть непрерывная функція отъ x). Такимъ образомъ, окончательно имѣемъ:

$$\frac{Y-y_0}{X-x_0}=\frac{\Delta Y}{\Delta X}=f'(x_0+\theta\,.\,\Delta x),$$

или

$$Y-y_0=(X-x_0)f'(x_0+\theta\,.\,\Delta x),$$

что и требовалось доказать.

Сущность подобнаго рода аналитическаго доказательства теоремы Лагранжа встрѣчаемъ у Дюгамеля и въ курсѣ Дзіобека (Dziobek)*). Мною приведено изложеніе доказательства, какъ мнѣ думается, въ формѣ, болѣе доступной пониманію учениковъ средней школы.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Распредѣленіе энергіи въ спектрѣ газа. Изученіе распредѣленія энергіи въ спектрѣ газа, свѣтящагося въ разрядной трубкѣ, представляетъ собою крайне трудную экспериментальную задачу. Прежде всего излученіе газовъ въ разрядныхъ трубкахъ крайне мало. Кромѣ того, оно весьма непостоянно. Авторъ новаго тщательнаго изслѣдованія этого вопроса Жолли (Jolly) утверждаетъ, что практически совершенно невозможно поддержать излученіе неизмѣннымъ для спектроскопическаго изслѣдованія въ теченіе, напримѣръ, дня.

Старыя наблюденія различныхъ изслѣдователей выяснили, что энергія полнаго излученія газа и энергія, приходящаяся на каждую отдѣльную линію спектра, зависятъ отъ плотности тока, проходящаго черезъ трубку и, въ нѣкоторыхъ опредѣленныхъ предѣлахъ, оказываются ей пропорціональными. Жолли въ своемъ изслѣдованіи преодолѣлъ значительныя экспериментальныя трудности и пришелъ къ слѣдующимъ болѣе обширнымъ и точнымъ выводамъ по этому вопросу. При маломъ токѣ излученіе пропорціонально плотности тока, какъ для всего спектра, такъ и для каждой его части. При болѣе мощ-

*) И все же изложенное доказательство содержитъ принципіальную погрѣшность, которую врядъ ли легко исправить. Предлагаемъ читателямъ эту погрѣшность обнаружить. Если не получимъ объ этомъ сообщенія отъ читателей, то сдѣлаемъ это сами.

Ред.

ныхъ разрядахъ съ повышеніемъ плотности тока энергія «перераспредѣляется» между линіями спектра; при этомъ она «перемѣщается» къ большимъ длинамъ волнъ. Если при такихъ разрядахъ давленіе въ трубкѣ увеличивается, то энергія еще замѣтнѣе перемѣщается въ ту же сторону — въ сторону волнъ большихъ длинъ. При этомъ по мѣрѣ повышенія давленія спектръ начинаетъ постепенно становиться сходнымъ со сплошнымъ спектромъ.

БИБЛІОГРАФІЯ.

II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ.

Авторы, переводчики и редакторы новыхъ сочиненій приглашаются присылать для этого отдѣла, извѣстнаго въ германской литературѣ подъ названіемъ „Selbstanzeigen", краткія сообщенія о выпущенныхъ ими сочиненіяхъ, объ ихъ характерѣ и объ ихъ назначеніи. Къ этимъ сообщеніямъ долженъ быть приложенъ экземпляръ сочиненія. Помѣщая эти сообщенія, редакція сохраняетъ, однако, за собою право помѣстить и независимую рецензію.

И. Александровъ. *Основанія ариѳметики соизмѣримыхъ чиселъ.* Курсъ старшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній. Изданіе 3-е, исправленное и дополненное. Москва, 1913. Стр. 20. Ц. 25 к.

Предлагаемая вниманію товарищей записка въ своемъ цѣломъ вовсе не касается преподаванія ариѳметики вообще. Она касается лишь преподаванія ариѳметики въ послѣднихъ классахъ въ данный переживаемый нами моментъ и вызвана слѣдующими фактами: 1) оканчивающіе курсъ нашихъ среднихъ учебныхъ заведеній, насколько я умѣлъ наблюдать, слабы въ пониманіи ариѳметики, 2) такой фактъ нежелателенъ и едва ли допустимъ, 3) насколько показываютъ практика и отзывы моихъ бывшихъ учениковъ и ученицъ 8-го класса, моя записка можетъ помочь дѣлу. Нисколько не претендуя на созданіе въ этомъ дѣлѣ крупной работы, я просилъ бы взглянуть на эту записку, именно, съ этой утилитарной точки зрѣнія даннаго момента состоянія нашихъ среднихъ школъ, а также логической послѣдовательности всей записки. Въ этомъ смыслѣ я ищу указаній. Что касается преподаванія ариѳметики вообще, то позволю себѣ припомнить слѣдующее.

Покойный дѣятель по народному образованію В. Б. Струве, знатокъ русской и иностранной школы, часто говаривалъ: «У насъ въ Россіи, въ литературѣ и практикѣ, въ кругахъ офиціальныхъ и неофиціальныхъ, часто встрѣчается крайняя нетерпимость къ методу преподаванія; между тѣмъ, чѣмъ больше знакомишься съ этимъ дѣломъ, тѣмъ больше убѣждаешься, что самыя разнородныя, подчасъ самыя противорѣчивыя системы преподаванія могутъ давать на практикѣ прекрасные результаты». Конечно, здѣсь все дѣло не въ системѣ, а въ самомъ преподавателѣ.

Припоминается мнѣ и такой фактъ. Лѣть тридцать тому назадъ, превосходный человѣкъ и незаурядный практическій педагогъ, М. Е. Медяникъ преподавалъ ариѳметику въ младшихъ классахъ Т—ской гимназіи особымъ способомъ. Девизомъ этого способа было «сначала — техника, а потомъ пониманіе». Я же самъ преподавалъ тамъ же по самымъ современнѣйшимъ указаніямъ — эвристическими и наглядными способами. Приблизительно въ 4-мъ классѣ сказывались результаты. Его ученики понимали дѣло никакъ не хуже, если не лучше, моихъ, но его ученики вычисляли превосходно, а мои—слабовато.

Комиссія по вопросамъ преподаванія математики.

2 февраля 1913 г. при отдѣлѣ средней школы Московскаго Педагогическаго Кружка организовалась Комиссія по вопросамъ преподаванія математики подъ предсѣдательствомъ К. Ѳ. Лебединцева. Въ весеннемъ полугодіи 1913 г. состоялось 5 засѣданій, въ осеннемъ — одно. На 1-мъ засѣданіи выяснилось, что членамъ Комиссіи интересно узнать, какъ на практикѣ разрѣшается цѣлый рядъ вопросовъ преподаванія математики методическаго и программнаго характера. На послѣдующихъ засѣданіяхъ въ связи съ поставленной задачей были заслушаны и обсуждены слѣдующіе доклады.

1. Н. Г. Панковъ: «Опытъ преподаванія ариѳметики въ начальной школѣ по методикѣ Д. Д. Галанина».

2. Д. Д. Галанинъ: «Опытъ и наблюденіе въ начальномъ преподаваніи ариѳметики».

3. К. Ѳ. Лебединцевъ: «Наблюденіе надъ сравнительной работоспособностью мальчиковъ и дѣвочекъ въ совмѣстной школѣ въ области изученія математики».

4. Н. Г. Плеханова: «Рефераты по исторіи ариѳметики въ IV классѣ».

5. А. А. Волковъ: «О курсѣ наглядной геометріи въ связи съ изученіемъ мѣръ и именованныхъ чиселъ въ I классѣ».

6. Н. Г. Плеханова: «Письменные отвѣты по математикѣ».

7. Н. Г. Бугославская: «Изученіе таблицы умноженія» (съ демонстрированіемъ ученическихъ работъ).

На слѣдующее собраніе предположенъ докладъ Н. А. Ряховскаго: «Опытъ и логика въ дѣлѣ преподаванія математики». На послѣднемъ собраніи предсѣдателемъ Комиссіи выбранъ Д. Д. Галанинъ.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей приватъ-доцента Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 150 (6 сер.). Построить окружность, пересѣкающую три данныя прямыя подъ углами данной величины *).

И. Александровъ (Москва).

№ 151 (6 сер.). Доказать, что при x и y цѣлыхъ числовая величина выраженія

$$(x+y)^n - x^n - y^n$$

дѣлится при n цѣломъ и первоначальномъ на число x^2+xy+y^2, а при n цѣломъ, первоначальномъ и разномъ $6k+1$ — и на число $(x^2+xy+y^2)^2$.

А. Ниппа.

№ 152 (6 сер.). Доказать слѣдующее предложеніе: если въ выпукломъ четырехугольникѣ $ABCD$ равнодѣлящія угловъ, составленныхъ парами прямыхъ AB, CD и BC, AD перпендикулярны, то четырехугольникъ циклическій (т. е. такой, который можно вписать въ кругъ). Можно ли обобщить это предложеніе и на тотъ случай, когда одна или обѣ пары противоположныхъ сторонъ разсматриваемаго четырехугольника параллельны?

Я. Назаревскій (Харьковъ).

№ 153 (6 сер). Рѣшить уравненіе

$$\frac{\sqrt[3]{48-x}-\sqrt[3]{3x-4}}{\sqrt[3]{12-x}-\sqrt[3]{3x-16}}=\sqrt[3]{\frac{13-x}{7-x}}.$$

Д. Ханжіевъ (Армавиръ).

---

*) Угломъ между окружностью и прямой называется уголъ касательной къ окружности и прямой въ точкѣ пересѣченія окружности съ прямою.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

ОТДѢЛЪ I.

№ 108 (6 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$x^4 + 5x - 6 = 0.$$

Помноживъ данное уравненіе на 4, запишемъ его затѣмъ въ видѣ:

$$4x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^2 + 20x - 24 - 1 = 0, \text{ т. е. } 4x^4 + 4x^2 + 1 - (4x^2 - 20x + 25) = 0,$$

т. е.

$$(2x^2 + 1)^2 - (2x - 5)^2 = 0, \quad \text{или} \quad [(2x^2 + 1) + (2x - 5)]\,[(2x^2 + 1) - (2x - 5)] = 0,$$

$$(2x^2 + 2x - 4)\,(2x^2 - 2x + 6) = 0.$$

Итакъ, данное уравненіе распадается на два квадратныхъ уравненія:

$$2x^2 + 2x - 4 = 0 \quad \text{и} \quad 2x^2 - 2x + 6 = 0,$$

рѣшая которыя находимъ два дѣйствительныхъ и два мнимыхъ корня даннаго уравненія, а именно:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -2, \quad x_{3,4} = \frac{1 \pm i\sqrt{11}}{2},$$

гдѣ $i = \sqrt{-1}$.

Д. Синцовъ (Харьковъ); *П. Гольманъ* (Кобеляки); *П. Войковъ* (Женева); *Л. Марголисъ* (Петербургъ); *N. N.*; *В. Коваӊько* (ст. Струнино); *Н. Назаровъ* (с. Дмитровская гора); *С. Конюховъ* (Томскъ); *И. Зюзинъ* (с. Татьянино); *А. Фесенко* (Харьковъ); *Флавіанъ Д.* (Петербургъ); *В. Павловъ* (с. Ворсма).

№ 110 (6 сер). *Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе*

$$x^2 - x + m = y\,(2x - 1)^2,$$

гдѣ m — *данное цѣлое число. Разобрать въ видѣ примѣра случай, когда* m = 169.

Умноживъ обѣ части даннаго уравненія на 4 и прибавляя, а затѣмъ вычитая въ первой части по единицѣ, представляемъ его послѣдовательно въ видѣ:

$$4x^2 - 4x + 1 + 4m - 1 = 4y\,(2x - 1)^2, \quad (2x - 1)^2 + 4m - 1 = 4y\,(2x - 1)^2,$$

или

$$4m - 1 = (4y - 1)\,(2x - 1)^2. \tag{1}$$

Изъ уравненія (1) находимъ, что

$$4y - 1 = \frac{4m - 1}{(2x - 1)^2}, \tag{2}$$

откуда

(3) $$v=\frac{4m-1+(2x-1)^2}{4(2x-1)^2}.$$

Изъ равенства (2) вытекаетъ, что для рѣшенія даннаго уравненія въ цѣлыхъ числахъ необходимо, чтобы выраженіе $2x-1$ равнялось числу, квадратъ котораго есть дѣлитель даннаго числа $4m-1$. Наоборотъ, если это условіе выполняется, то x есть число цѣлое, и изъ равенства (2) y опредѣляется формулой (3) также, какъ цѣлое число. Дѣйствительно, пусть точный квадратъ δ^2 есть дѣлитель числа $4m-1$. Такъ какъ $4m-1$ есть нечетное число, то и δ^2, а потому и δ также есть число нечетное. Поэтому, полагая

(4) $$(2x-1)^2=\delta^2,$$

т. е. $2x-1=\pm\delta$, находимъ, что

(5) $$x=\frac{\pm\delta+1}{2};$$

полученное значеніе для x есть число цѣлое, такъ какъ сумма нечетнаго числа $(\pm\delta)$ и единицы дѣлится на 2. Съ другой стороны, опредѣливъ y при найденномъ цѣломъ значеніи x по формулѣ (3), находимъ, что

(6) $$y=\frac{4m-1+4x^2-4x+1}{4(2x-1)^2}=\frac{4m+4x^2-4x}{4(2x-1)^2}=\frac{4m-1+\delta^2}{4\delta^2}.$$

Такъ какъ [см. (4), (6)] $4m-1+\delta^2=4m+4x^2-4x$, то число $4m-1+\delta^2$ кратно 4; но δ^2 есть дѣлитель числа $4m-1$, а потому сумма $(4m-1)+\delta^2$ кратна также числа δ^2. Будучи кратна двухъ взаимно простыхъ чиселъ, а именно 4-хъ и нечетнаго числа δ^2, сумма $(4m-1)+\delta^2$ кратна произведенія $4\delta^2$, а потому [см. (6)] формула

(7) $$y=\frac{4m-1+\delta^2}{4\delta^2}$$

даетъ для y число цѣлое. Изъ сказаннаго видно, что, подставляя въ формулы (5) и (7) ариѳметическіе корни изъ всѣхъ точныхъ квадратовъ, служащихъ дѣлителями извѣстнаго числа $4m-1$, мы получимъ всѣ цѣлыя рѣшенія даннаго уравненія. Слѣдуетъ замѣтить, что при любомъ цѣломъ m можно положить $\delta=1$; тогда приходимъ къ рѣшеніямъ $x=1$, $y=m$ и $x'=0$, $y=m$. Если $m=169$, то $4m-1=675$. Дѣлителями числа 675 служатъ лишь точные квадраты 1, 9, 25, 225, а потому, полагая въ формулахъ (5) и (7) $\delta=1$, 3, 5, 15, получимъ для разсматриваемаго случая слѣдующую исчерпывающую таблицу цѣлыхъ рѣшеній даннаго уравненія:

$$x_1=0,\ \ x_1'=1;\ \ y_1=169;\ \ x_2=-1,\ \ x_2'=2;\ \ y_2=19;\ \ x_3=-2,\ \ x_3'=3;$$

$$y_3=7;\ \ x_4=-7;\ \ x_4'=8;\ \ y_4=1.$$

С. Конюховъ (Томскъ); *П. Войновъ* (Женева); *В. Павловъ* (с. Ворсма).

№ 116 (6 сер.) *Дано, что цѣлыя положительныя отличныя отъ единицы числа* p, q, r *и* m *удовлетворяютъ равенству*

$$p^2+p+m=qr.$$

Доказать неравенство

$$4r^2(q-1)>(2p+1)^2.$$

По условію r и q суть цѣлыя положительныя числа, отличныя отъ единицы и, слѣдовательно, не меньшія двухъ. Поэтому

(1) $$r - 1 \geqq 1,$$

(2) $$q - 1 \geqq 1.$$

Перемноживъ неравенства (1) и (2), получимъ:

$$(r-1)(q-1) \geqq 1, \quad \text{откуда} \quad (r-1)(q-1) - 1 \geqq 0,$$

или

(3) $$rq - r - q \geqq 0.$$

Умножимъ неравенство (3) на положительное число $4r$ и сложимъ полученное съ неравенствомъ:

(4) $$4m > 1,$$

которое навѣрно правильно, такъ какъ по условію m больше единицы. Тогда получимъ: $4r^2q - 4r^2 - 4rq + 4m > 1$, или

(5) $$4r^2(q-1) > 4rq - 4m + 1.$$

Но по условію

(6) $$p^2 + p + m = qr;$$

подставивъ значеніе rq изъ равенства (6) въ правую часть неравенства (5), получимъ, что

$$4r^2(q-1) > 4p^2 + 4p + 4m - 4m + 1 = 4p^2 + 4p + 1,$$

или

(7) $$4r^2(q-1) > (2p+1)^2.$$

Замѣчаніе. Изъ приведеннаго доказательства разсматриваемаго предложенія вытекаетъ, что неравенство (7) вытекаетъ изъ равенства (6) при ограниченіяхъ нѣсколько болѣе широкихъ, чѣмъ приведенныя въ текстѣ этого предложенія: сохранивъ условіе, что r и q — положительныя и отличныя отъ единицы числа, достаточно допустить, что $m > \frac{1}{4}$ [см. (4)], а p — любое вещественное число, удовлетворяющее совмѣстно съ m, q и r равенству (6).

И. Зюзинъ (с. Татьянино); *В. Павловъ* (с. Ворсма); *Л. Креерь* (Гомель).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

И. П. Ивановъ, преподаватель Арзамасской Екатерининской женской гимназіи. *Физика въ вопросахъ*. Курсъ средней школы. Арзамасъ, 1913. Стр. 250 + III. Ц. 1 р.

М. Мигай, преподаватель методики естествознанія при Учительской Школѣ С.-Петербургскаго Губернскаго Земства. *Уроки физики.* Опытъ учебника физики для сельскихъ двухклассныхъ школъ. Съ 149 рис., съ добавленіемъ нѣкоторыхъ практическихъ указаній для преподавателя и спискомъ учебныхъ пособій. Изданіе Э. И. Блекъ. С.-Петербургъ, 1913. Стр. 163 + VIII. Ц. 80 к.

П. И. Колтоновскій, завѣдующій лабораторіей Могилевскаго Акцизнаго Управленія. *Поглощеніе жидкостей пористыми тѣлами.* Изданіе Г. В. Гольстена. С.-Петербургъ, 1913. Стр. 13.

Н. Томилинъ. *Курсъ физики.* Второй концентръ. Томъ второй — „Электричество". Съ 191 рис. С.-Петербургъ, 1913. Стр. 258. Ц. 1 р. 75 к.

Новыя идеи въ математикѣ. Непеpіодическое изданіе, выходящее подъ редакціей заслуженнаго профессора А. В. Васильева. Сборникъ № 5. „Принципъ относительности въ математикѣ". Кн-ство „Образованіе". С.-Петербургъ, 1914. Стр. 176. Ц. 80 к.

Новыя идеи въ астрономіи. Непеpіодическое изданіе, выходящее подъ редакціей профессора А. А. Иванова. Сборникъ № 3. „Космогоническія гипотезы II" Стр. 153. Ц. 80 к. Сборникъ № 4. „Распредѣленіе звѣздъ въ пространствѣ и ихъ движеніе". Стр. 159. Ц 80 к. Кн-ство „Образованіе". С.-Петербургъ, 1914.

Новыя идеи въ физикѣ. Непеpіодическое изданіе, выходящее подъ редакціей заслуженнаго профессора С.-Петербургскаго Университета И. И. Бормана. Сборникъ № 3. „Принципъ относительности" Изд 2-ое. Кн-ство „Образованіе". С.Петербургъ, 1914. Стр. 181. Ц. 80 к.

Новыя идеи въ химіи. Непеpіодическое изданіе, выходящее подъ редакціей профессора С.-Петербургскаго Университета Л. А. Чугаева. № 4. „Радіоактивныя вещества II". Кн-ство „Образованіе". С.-Петербургъ, 1914. Стр. 170 Ц. 80 к.

Новыя идеи въ философіи. Непеpіодическое изданіе, выходящее подъ редакціей Н. О. Лосскаго и Э. Л. Радлова. Сборникъ № 12. „Къ исторіи теоріи познанія I". Кн-ство „Образованіе". С.-Петербургъ., 1914. Стр. 155. Ц. 80 к.

Новыя идеи въ біологіи. Непеpіодическое изданіе, выходящее подъ редакціей профессоровъ В. А. Вагнера и Е. А. Шульца. Сборникъ № 2. „Новое въ ученіи о нервной системѣ I". Стр. 136. Сборникъ № 3. „Смерть и безсмертіе I". Стр. 149. Кн-ство „Образованіе". С.-Петербургъ, 1913. Цѣна каждаго сборника 80 к.

Новыя идеи въ соціологіи. Непеpіодическое изданіе, выходящее подъ редакціей профессоровъ М. М. Ковалевскаго и Е. В. Де-Роберти. Сборникъ № 2. „Соціологія и психологія". Кн-ство „Образованіе". С.-Петербургъ, 1914. Стр. 136. Ц. 80 к.

Новыя идеи въ экономикѣ. Непеpіодическое изданіе, выходящее подъ редакціей профессора М. И. Туганъ-Барановскаго. Сборникъ № 1. „Ученіе о распредѣленіи общественнаго дохода". Стр 144. Сборникъ № 2. „Теорія народонаселенія и мальтузіанство. Стр. 155. Кн-ство „Образованіе". С.-Петербургъ, 1914. Ц. каждаго сборника 80 к.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
ищется

Обложка
пщется