

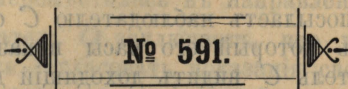
Обложка
щется

Обложка
щется

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



Содержаніе: Эфиръ (Исторія одной гипотезы). *М. Ла-Роза.* (Окончаніе). — XIII Съездъ русскихъ естествоиспытателей и врачей въ Тифлисъ. *Проф. Д. Синцова.* — Научная хроника: Обитаемость планетъ. — Засѣданіе Солнечнаго Союза въ Боннѣ съ 31 іюля по 5 августа 1913 года. — Библиографія: I. Рецензіи. „Труды Перваго Всероссийскаго Съѣзда преподавателей математики“. *В. К.* — Задачи №№ 126 — 129 (6 сер.). — Рѣшенія задачъ. Отдѣлъ I. №№ 81 и 86 (6 сер.). — Объявленія.

Эфиръ.

Исторія одной гипотезы.

М. Ла-Роза.

(Докладъ, прочитанный въ „Biblioteca philosophica“ въ Палермо).

(Окончаніе *).

Чтобы лучше выяснитъ этотъ чрезвычайно важный пунктъ и сдѣлать болѣе наглядными идеи Эйнштейна относительно понятій времени и пространства, мы придется привести разсужденіе, правда, вполне элементарнаго, но математическаго характера.

Три наблюдателя A, B, C (фиг. 3) находятся на платформѣ, которая движется въ направленіи AB съ постоянной поступательной скоростью.

Допустимъ, что они производятъ измѣренія скорости распространенія свѣта въ двухъ взаимно перпендикулярныхъ направленіяхъ AB и AC .

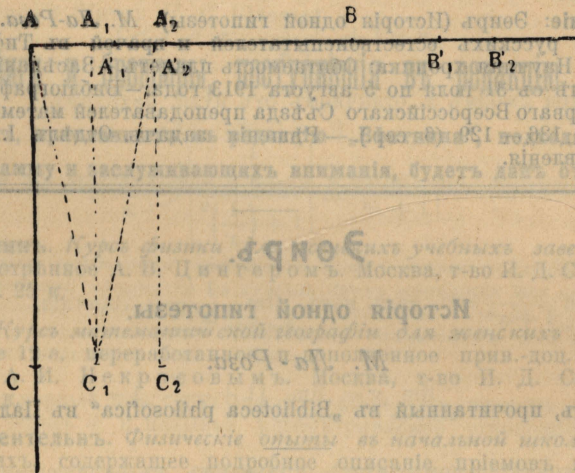
Наблюдатель O , не принимающій участія въ движеніи платформы, присутствуетъ при этихъ измѣреніяхъ и какимъ-нибудь способомъ узнаетъ результаты, полученные движущимися наблюдателями.

*) См. № 590 „Вѣстника“.

Если у всехъ трехъ наблюдателей A, B, C есть хорошіе, совершенно одинаково идущіе часы, то они могутъ при помощи ихъ опредѣлить моментъ выхода и моментъ прибытія свѣтового пучка и отсюда вычислить искомую скорость, если извѣстны разстоянія AB и AC (предположимъ для простоты, что они равны).

Если часы идутъ вначалѣ не одинаково, какъ мы это только-что приняли, то наши наблюдатели могутъ довольно сложнымъ способомъ свѣрить ихъ, привести въ согласіе и все-таки получить искомую скорость.

Наблюдатель A посылаетъ наблюдателю C свѣтовой сигналъ въ нѣкоторый моментъ, въ который его часы показываютъ, напримѣръ, ровно 0 час. Наблюдатель C видитъ доходящій до него сигналъ въ



Фиг. 3.

тотъ моментъ, когда его часы показываютъ, напримѣръ, 0 час. 25 сек. Свѣтовой пучекъ падаетъ на зеркало, которое наблюдатель C располагаетъ такъ, что свѣтъ снова возвращается къ наблюдателю A .

Этотъ послѣдній въ тотъ моментъ, когда свѣтъ къ нему возвращается, видитъ, что его часы показываютъ, напримѣръ, 0 час. 40 с., и заключаетъ отсюда, что наблюдатель C получилъ сигналъ черезъ $40 \frac{1}{2}$ с. послѣ того, какъ онъ былъ произведенъ, т. е. онъ дѣлаетъ выводъ,

что часы наблюдателя C будутъ согласованы съ его часами, если они въ моментъ полученія сигнала будутъ показывать 0 час. 20 с. Наблюдатель A сообщаетъ этотъ результатъ наблюдателю C , и если теперь этотъ послѣдній передвинетъ стрѣлку своихъ часовъ на 5 с. назадъ, то показанія его часовъ будутъ совпадать съ показаніями часовъ наблюдателя A . Если наблюдатели A и C , какъ я уже упомянулъ, зна-

ють, кромѣ того, величину разстоянія AC , то, дѣля это разстояніе на время, употребленное свѣтовымъ пучкомъ для его прохожденія, они найдутъ значеніе c скорости свѣта.

Посмотримъ теперь, что скажетъ обо всемъ этомъ наблюдатель O , который внимательно слѣдилъ и замѣтилъ, что путь, пройденный свѣтомъ отъ A къ C и обратно, въ дѣйствительности есть AC_1A_2 ; такъ какъ онъ знаетъ о движеніи платформы, то онъ видѣлъ, что за то время, которое понадобилось свѣту для распространенія отъ A къ C и обратно, платформа перемѣстилась въ направленіи AB .

Отсюда наблюдатель O заключаетъ, что наблюдателямъ A и C дѣйствительно удастся согласовать показанія своихъ часовъ, но въ то же время онъ замѣчаетъ, что измѣренный ими промежутокъ времени больше, чѣмъ тотъ, который нуженъ свѣту для распространенія на разстояніе, равное AC . Онъ вынужденъ поэтому заключить, что значеніе, найденное наблюдателями A и C для скорости свѣта, меньше того, которое получилъ бы онъ самъ, потому что наблюдатели A и C дѣлятъ разстояніе AC на время, въ теченіе котораго свѣтъ въ дѣйствительности пробѣгаетъ болѣе длинный путь, а именно AC_1 . Это время t_1 относится къ времени t , необходимому для прохожденія разстоянія AC , какъ $AC_1 : AC$.

Изъ фиг. 3 мы видимъ, что

$$AC_1^2 = AA_1^2 + A_1C_1^2,$$

откуда

$$\frac{t_1^2}{t^2} = \frac{AC_1^2}{AC^2} = 1 + \frac{AA_1^2}{AC^2}.$$

Но AA_1 есть пространство, проходимое наблюдателемъ за тотъ промежутокъ времени, въ теченіе котораго свѣтъ распространяется отъ A до C_1 . Если мы обозначимъ теперь поступательную скорость скорости ABC черезъ v , то получимъ, что

$$AA_1 = vt_1;$$

а такъ какъ $AC = ct$ (ибо черезъ t мы обозначили именно то время, въ теченіе котораго свѣтъ проходитъ разстояніе, равное AC и черезъ c — скорость свѣта), то, подставляя эти значенія, мы получимъ, что

$$\frac{t_1^2}{t^2} = 1 + \frac{v^2 t_1^2}{c^2 t^2};$$

отсюда легко получить, что

$$t_1 = \beta t,$$

гдѣ $\beta =$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Промежутокъ времени t_1 , очевидно, больше, чѣмъ t , такъ какъ знаменатель дроби β меньше единицы.

Наблюдатель O ожидаетъ, слѣдовательно, что скорость, найденная наблюдателями A и C , равна $\frac{c}{\beta}$; между тѣмъ, такъ какъ онъ сообщается съ ними, то онъ, къ своему удивленію, узнаетъ, что полученный ими результатъ какъ разъ равенъ c (въ силу второго постулата Эйнштейна). Въ такомъ случаѣ ему приходится думать, что часы наблюдателей A и C несогласованы съ его часами, а именно идутъ медленнѣе, или, другими словами, — что употребляемая наблюдателями A и C единица времени не равна его единицѣ времени *), а больше ея (и именно въ β разъ); а тогда наблюдатели A и C , измѣряя время t_1 , получаютъ въ результатѣ то же самое число t , которое необходимо для того, чтобы получить скорость c .

Разсмотримъ теперь измѣреніе, которое производятъ наблюдатели A и B . Какъ и раньше, наблюдатель A посылаетъ наблюдателю B свѣтовой сигналъ какъ разъ въ моментъ времени 0 час., который онъ отмѣчаетъ по своимъ часамъ. Наблюдатель B получаетъ этотъ сигналъ, напримѣръ, въ тотъ моментъ, когда его часы показываютъ 0 час. 28 с.; въ B свѣтовой пучекъ отражается отъ зеркала и возвращается въ A въ тотъ моментъ, когда часы наблюдателя A показываютъ, напримѣръ, 0 час. 40 с. На основаніи вышеприведеннаго разсужденія наблюдатель A сообщитъ наблюдателю B , что его часы должны были показывать 0 час. 20 с. Наблюдатель B переставитъ свои часы на 8 с. назадъ и будетъ убѣжденъ, что его часы идутъ согласно съ часами наблюдателя A .

Затѣмъ оба они опредѣлятъ скорость свѣта, дѣля разстояніе AB на время 20 с. (т. е. на половину того времени, въ теченіе котораго свѣтъ прошелъ туда и обратно).

Посмотримъ теперь опять, какое заключеніе составитъ объ этихъ опредѣленіяхъ наблюдатель O .

Онъ замѣчаетъ, что пространство, пройденное свѣтомъ, вышедшимъ изъ A и пришедшимъ въ B , больше, чѣмъ разстояніе AB , такъ какъ B движется въ направленіи свѣтового пучка и какъ бы убѣгаетъ отъ него. Когда свѣтъ достигнетъ наблюдателя B (а это произойдетъ только въ томъ случаѣ, если положить $c > v$, гдѣ c и v имѣютъ тѣ же значенія, что и раньше), то этотъ послѣдній будетъ уже находиться въ B_1' на разстояніи отъ своего первоначальнаго поло-

*) Этотъ пунктъ необходимо выяснитъ себѣ какъ можно яснѣе. Обѣ единицы времени, которыя, по мнѣнію O , различны, соответствуютъ одному и тому же измѣренію. Другими словами, хотя и наблюдатель O и наблюдатели, находящіеся на движущейся плоскости, выбрали за единицу времени періодъ одного и того же явленія (напримѣръ, періодъ колебанія определенной спектральной линіи), наблюдатель O все-таки приходитъ къ тому заключенію, что на движущейся плоскости этотъ періодъ больше, чѣмъ въ его системѣ.

женія, равномъ $v\tau_1$, гдѣ τ_1 есть промежутокъ времени, въ теченіе котораго свѣтъ распространяется отъ A до B_1 .

Наблюдатель O можетъ легко вычислить этотъ промежутокъ времени, такъ какъ онъ замѣчаетъ, что относительная скорость, съ которой свѣтъ проходитъ движущійся путь AB , равна скорости c , уменьшенной на ту скорость, съ которой движется B впереди пучка свѣта, т. е. на v . Такимъ образомъ, $\tau_1 = \frac{AB}{c-v}$.

Достигнувъ B_1' , свѣтъ отражается и возвращается въ A , но такъ какъ A движется теперь навстрѣчу свѣтовому пучку, то дѣйствительно пройденный путь будетъ меньше AB , а именно на разстояніе $v\tau_2$, гдѣ τ_2 есть промежутокъ времени, въ теченіе котораго свѣтъ распространяется отъ B_1' до A_2' . На основаніи соображеній, аналогичныхъ предыдущимъ, мы получимъ, что $\tau_2 = \frac{AB}{c+v}$.

Въ общемъ опредѣленный наблюдателемъ O промежутокъ времени, въ теченіе котораго свѣтовой пучекъ прошелъ туда и обратно, равенъ

$$2t_2 = \tau_1 + \tau_2 = AB \left(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v} \right) = 2AB \frac{c}{c^2 - v^2}.$$

Если теперь наблюдатель O обозначитъ черезъ t промежутокъ времени, въ теченіе котораго свѣтъ проходитъ дѣйствительную длину $AB = AC$, то $AB = ct$; подставляя это значеніе въ предыдущее равенство, получаемъ:

$$2t_2 = 2t \frac{c^2}{c^2 - v^2} = 2t \cdot \beta^2.$$

На этотъ разъ наблюдатель O придетъ къ заключенію, что наблюдателямъ A и B не удалось согласовать ходъ своихъ часовъ. Промежутокъ времени, въ теченіе котораго свѣтъ дѣйствительно прошелъ отъ A до B (т. е. собственно до B_1'), равенъ τ_1 , между тѣмъ какъ тотъ промежутокъ времени, который наблюдатель A сообщаетъ наблюдателю B и по которому этотъ послѣдній регулируетъ свои часы, есть τ_2 . Часы наблюдателя B покажутъ, слѣдовательно, разницу по сравненію съ часами наблюдателя A , именно:

$$t_2 - \tau_1 = AB \left(\frac{c}{c^2 - v^2} - \frac{1}{c-v} \right) = AB \frac{v}{c^2 - v^2} = AB v \frac{\beta^2}{c^2},$$

если ее измѣрять въ единицахъ времени наблюдателя O . Если эту разницу вычислить въ единицахъ наблюдателей A, B, C , то она будетъ въ β разъ меньше, такъ какъ вторая единица — по мнѣнію наблюдателя O — въ β разъ больше, чѣмъ первая. Эта разница, которую мы обозначимъ черезъ θ , равна, слѣдовательно,

$$\theta = AB \cdot v \cdot \frac{\beta^2}{c^2}.$$

Наблюдатель O придет, следовательно, къ заключенію, что между показаніями двухъ часовъ, стоящихъ на движущейся платформѣ на разстояніи $AB = x$ по направленію движенія, существуетъ различіе, или, какъ говорятъ, разность фазъ, пропорціональная скорости перемѣщенія v и ихъ разстоянію x , при чемъ коэффициентъ пропорціональности равенъ величинѣ β , дѣленной на квадратъ скорости свѣта. Часы, находящіеся по направленію движенія впереди основныхъ часовъ, идутъ впередъ, находящіеся позади — отстаютъ.

Слѣдовательно, находящаяся въ движеніи система не только имѣетъ свою собственную единицу времени, не совпадающую съ единицей времени наблюдателя O , но и каждая точка этой системы имѣетъ свое собственное время; одному и тому же моменту наблюдателя O соотвѣтствуетъ въ движущейся системѣ безконечное количество различныхъ моментовъ. Въ этой системѣ, слѣдовательно, понятіе времени глубоко отличается отъ того, которое имѣетъ наблюдатель O .

Затѣмъ наблюдатель O замѣчаетъ, что промежутокъ времени t , въ теченіе котораго, согласно измѣреніямъ наблюдателей A и B , свѣтъ проходитъ разстояніе AB , отличается отъ того промежутка времени t_1 , который получился изъ измѣреній, произведенныхъ наблюдателями A и C . По мнѣнію наблюдателя O , второй промежутокъ времени равенъ $t\beta$, между тѣмъ какъ первый равенъ $t\beta^2$. Наблюдатель O приходитъ, такимъ образомъ, къ заключенію, что скорость свѣта, которую получили движущіеся наблюдатели, дѣдя разстояніе AB на t_2 , отличается отъ той, которую получили наблюдатели A и C ; а именно первая должна быть меньше послѣдней въ отношеніи 1 къ β .

Но такъ какъ наблюдатель O находится въ сообщеніи съ наблюдателями на движущейся плоскости, то онъ съ неменьшимъ удивленіемъ, чѣмъ раньше, узнаетъ, что результатъ, полученный наблюдателями A и B изъ своихъ измѣреній, равенъ опять-таки c (въ силу перваго принципа Эйнштейна), т. е. равенъ тому, который получилъ и онъ самъ.

Чтобы объяснить этотъ парадоксальный результатъ, наблюдатель O , который не можетъ уже ссылаться на разницу въ единицахъ времени (благодаря предыдущимъ наблюденіямъ ему удалось опредѣлить отношеніе обѣихъ единицъ), придетъ къ той мысли, что наблюдатели, находящіеся на платформѣ, считаютъ длины AB и AC неравными, а именно AB въ β разъ больше, чѣмъ AC ; поэтому ихъ и не удивляетъ, что время, въ теченіе котораго свѣтъ проходитъ разстояніе AB , оказывается (въ β разъ) больше, чѣмъ при прохожденіи разстоянія AC ; этотъ именно путь и приводитъ къ постоянству отношенія.

Но это возможно, по мнѣнію наблюдателя O , лишь въ томъ случаѣ, если единица длины, примѣняемая ими въ направленіи AB , меньше, чѣмъ примѣняемая въ направленіи AC , и именно въ отношеніи $1:\beta$ *).

*) По аналогіи съ тѣмъ, что было сказано выше объ измѣненіи единицы времени, здѣсь слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что обѣ единицы — какъ

Поэтому фигура, которую наблюдатели на платформѣ считают прямоугольникомъ со сторонами, относящимся между собою, какъ $\beta:1$, и съ бѣльшей стороной, расположенной по направленію движенія, эта самая фигура будетъ воспринята наблюдателемъ O , какъ квадратъ, сторона котораго равна меньшей сторонѣ прямоугольника. И наоборотъ, фигура, воспринимаемая наблюдателями на платформѣ, какъ квадратъ, одна сторона котораго параллельна направленію перемѣщенія, будетъ воспринята наблюдателемъ O , какъ прямоугольникъ, бѣльшая сторона котораго перпендикулярна къ направленію перемѣщенія. (Приборъ Майкельсона, который участвующимъ въ движеніи наблюдателямъ кажется равностороннимъ, для наблюдателя, не участвующаго въ движеніи, является неравностороннимъ: сторона его, лежащая въ направленіи перемѣщенія, кажется короче).

Слѣдовательно, не только сужденія наблюдателя O о времени отличаются отъ сужденій наблюдателей на движущейся платформѣ, но и сужденія его о величинахъ въ пространствѣ разнятся отъ сужденій этихъ послѣднихъ; геометрія наблюдателя O не совпадаетъ съ геометрией наблюдателей A, B, C .

Допустимъ теперь, что на другой плоскости, которую мы, простоты ради, выберемъ параллельно первой и которая движется въ томъ же направленіи со скоростью u , находятся еще три наблюдателя P, Q, R , которые производятъ тѣ же измѣренія, что и наблюдатели A, B, C .

Очевидно, что изъ результатовъ этихъ операцій наблюдатель O сдѣлаетъ вполнѣ аналогичные вышеизложеннымъ выводы относительно измѣренія длинъ и времени на этой плоскости.

Но къ аналогичнымъ же заключеніямъ должны придти и наблюдатели A, B, C , наблюдая операціи, производимыя наблюдателями P, Q, R . Они не знаютъ о своемъ движеніи относительно наблюдателя O (ибо въ противномъ случаѣ ихъ измѣренія должны были бы совпадать съ измѣреніями наблюдателя O) и придутъ къ заключенію, что, въ то время какъ они сами остаются неподвижны, наблюдаемая система движется со скоростью $w = u - v$.

По мнѣнію наблюдателей A, B, C , единица времени въ системѣ P, Q, R бѣльше, чѣмъ ихъ собственная, а именно въ отношеніи

$\beta_1:1$, гдѣ $\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}$. Единицы длины совпадаютъ въ направленіи,

перпендикулярномъ къ направленію перемѣщенія, и различны въ направленіи перемѣщенія, а именно единицы наблюдателей P, Q, R меньше, чѣмъ ихъ собственные, въ отношеніи $1:\beta_1$. Часы всѣхъ наблюдателей системы PQR , находящихся въ различныхъ точкахъ по

наблюдателя O , такъ и наблюдателей, находящихся на платформѣ, — соответствуютъ одному и тому же масштабу, выбранному въ согласіи съ однимъ и тѣмъ же опредѣленіемъ, при чемъ величина этого масштаба — по мнѣнію наблюдателя O — измѣняется съ положеніемъ его относительно направленія скорости движущейся системы.

направленію движенія, по заключенію наблюдателей A, B, C , не идутъ согласно; между каждымъ изъ нихъ и основными часами существуетъ разность фазъ $\theta_1 = \kappa w \frac{\beta_1}{c^2}$, выраженная въ единицахъ времени наблюдателей P, Q, R .

Два событія, которыя происходятъ въ различныхъ точкахъ системы PQR и наблюдателями этой системы считаются за одновременныя, необходимо должны считаться наблюдателями A, B, C за послѣдовательныя, такъ какъ часы, которые первые наблюдатели считаютъ согласованными, по мнѣнію послѣднихъ, не согласованы.

Въ свою очередь, наблюдатели P, Q, R , находящіеся въ тѣхъ же условіяхъ, что и наблюдатели A, B, C , думаютъ, что именно плоскость этихъ послѣднихъ движется со скоростью w ; что касается пространственныхъ и временныхъ соотношеній, найденныхъ наблюдателями A, B, C , то они приходятъ къ такимъ же заключеніямъ, какъ и эти послѣдніе относительно первыхъ *).

Но, согласно теоріи относительности, у насъ не можетъ быть никакихъ оснований вмѣсто мнѣнія наблюдателей P, Q, R принять мнѣніе другихъ наблюдателей: принимать вмѣстѣ съ Эйнштейномъ принципъ относительности для всѣхъ явленій, происходящихъ во вселенной, равносильно допущенію, что такой наблюдатель, какъ O , невозможенъ, т. е. не можетъ быть такого привилегированнаго, абсолютно неподвижнаго наблюдателя, который былъ бы въ состояніи вскрыть ошибочность нашихъ сужденій о времени и посягаться надъ тѣми странными совпаденіями, которыя мы пытаемся установить между явленіями, происходящими въ далеко отстоящихъ другъ отъ друга мѣстахъ, какъ, напримѣръ, одновременность солнечныхъ пятенъ съ магнитными бурями или кульминаціи луны съ приливомъ.

Въ этомъ и заключается все различіе взглядовъ Лоренца и взглядовъ Эйнштейна. Лоренцъ допускаетъ существованіе неподвижнаго ээира, т. е. такого тѣла, по отношенію къ которому всѣ опредѣленія въ пространствѣ и во времени носили бы абсолютный и неизмѣнный характеръ: по Лоренцу, наблюдатель, которому удалось бы хоть на одно мгновеніе, такъ сказать, зацѣпиться за ээиръ, могъ бы насладиться тѣмъ веселымъ зрѣлищемъ, о которомъ я только-что говорилъ.

По Эйнштейну, этого не можетъ быть, и потому онъ отрицаетъ ээиръ. Слѣдовательно, всѣ сужденія о времени и

*) Совпаденіе результатовъ, добытыхъ наблюдателями A, B, C , съ результатами наблюдателя O и наблюдателей P, Q, R каждый изъ нихъ могъ бы объяснить тѣмъ, что свѣтъ, вышедшій изъ движущагося источника, распространяется со скоростью, которая есть результирующая скорости s и скорости источника свѣта; точка зрѣнія, прямо противоположная второму постулату Эйнштейна. Новые опыты Комстока (Comstock) и Тольмана (Tolmann) указываютъ, какъ будто бы, что такое предположеніе противорѣчитъ фактамъ. Но критическій анализъ этихъ опытовъ, сдѣланный Стюартомъ (Stewart), показалъ, что они не имѣютъ рѣшающаго значенія.

о величинахъ въ пространствѣ могутъ быть только относительными, и это вѣрно для любой точки въ пространствѣ и для любого тѣла, какое только можетъ существовать во вселенной. Всѣ эти сужденія зависятъ отъ положенія наблюдателя и отъ той скорости, съ которой система движется относительно наблюдателя.

Ни время ни пространство не могутъ существовать какъ абсолютныя величины; они суть не что иное, какъ лишь наше относительное сужденіе.

Это заключеніе можетъ показаться очень страннымъ. Но, говоря релятивисты, не менѣе странными казались пятьсотъ лѣтъ тому назадъ взгляды Коперника, утверждавшаго относительность нашихъ сужденій объ ориентировкѣ въ пространствѣ, относительность и измѣняемость даже того вертикальнаго положенія, которое мы принимаемъ, когда стоимъ. Не менѣе странными казались эти взгляды и намъ, когда мы въ дѣтскомъ возрастѣ впервые услышали, что подъ нашими ногами есть люди, которые ходятъ ногами къ намъ и головой внизъ, къ небу, которые живутъ и движутся такъ же, какъ и мы, не чувствуютъ головокруженія и не проваливаются вмѣстѣ съ моремъ и другими тѣлами въ бездны міровъ.

Спустя пятьсотъ лѣтъ, говорятъ релятивисты, надъ нашими сужденіями о времени будутъ смѣяться совершенно такъ же, какъ и теперь не всѣ могутъ подавить улыбку, читая въ какой-нибудь старой книгѣ изложеніе геоцентрической системы.

Въ связи съ этими взглядами на пространство и время и по основаніямъ, которыя я не могу здѣсь подробно излагать, мы можемъ предвидѣть, что съ измѣненіемъ скорости движущагося тѣла должна измѣняться также величина его массы и ея распредѣленіе, что всякое тѣло должно обнаруживать различную инерцію въ направленіи движенія и въ направленіи, перпендикулярномъ къ нему; мы можемъ выразить это такъ, что всякое тѣло имѣетъ поперечную массу, отличную отъ продольной. Послѣдняя больше первой и тѣмъ больше, чѣмъ больше скорость тѣла. Можно даже вычислить, что продольная масса стала бы безконечно больше, если бы скорость тѣла могла возрасти до скорости свѣта.

Благодаря этому въ новой механикѣ обычный принципъ сложенія скоростей уже не имѣетъ силы. Если мы будемъ складывать для одного и того же тѣла сколько угодно тысячъ скоростей, которыя всѣ имѣютъ одно направленіе и которыя хотя бы лишь немного меньше скорости свѣта, мы все-таки никогда не дойдемъ до того, чтобы тѣло стало двигаться со скоростью свѣта. Скорость, получающаяся при сложеніи какого угодно числа скоростей, лишь немного меньшихъ, чѣмъ скорость свѣта, всегда дастъ результирующую, меньшую, чѣмъ скорость свѣта, или, въ предѣльномъ случаѣ, равную ей, если число слагаемыхъ возрастетъ до безконечности. Скорость свѣта является

поэтому предѣломъ всѣхъ скоростей, какія только мы можемъ наблюдать во вселенной.

Въ новой механикѣ, слѣдовательно, понятія времени и длины должны измѣниться. Принципъ постоянства массы и принципъ сложения скоростей должны быть отброшены. Принципъ равенства дѣйствія и противодѣйствія тоже долженъ былъ бы быть отброшенъ, если бы для его спасенія не явилась новая гипотеза. Отъ старой механики не остается, такимъ образомъ, ничего; новая механика должна быть построена заново съ самаго основанія; такъ же заново долженъ быть построенъ и весь чувственно воспринимаемый міръ, поскольку онъ есть міръ механическій.

Что же у насъ остается и что даетъ намъ новая теорія? „Ничего!“—могли бы мы отвѣтить въ такой моментъ, когда волна отчаянія захватываетъ нашъ духъ и прижимаетъ его къ землѣ. Ничего, кромѣ нѣсколькихъ формулъ и геометрическаго образа, которому нашъ умъ напрасно будетъ пытаться придать осязаемую форму, ибо онъ взятъ изъ четырехмѣрнаго пространства.

Но релятивисты говорятъ, что не слѣдуетъ падать духомъ. Они увѣрены, что у нихъ есть достаточно элементовъ для возведенія новаго зданія, которое будетъ прекраснѣе и величественнѣе всякаго существовавшего раньше.

Неизмѣнными элементами, которые, по Максу Планку (Max Planck), могутъ въ согласіи съ теоріей относительности послужить прочной основой для физическаго пониманія вселенной, служатъ слѣдующія универсальныя постоянныя: скорость распространенія свѣта въ пустотѣ, электрическій зарядъ электрона, его масса въ состояніи покоя, элементарное количество энергіи (Wirkungsquantum), полученное изъ изученія тепловаго лучеиспусканія, ньютонова постоянная (Gravitationskonstante) и нѣкоторые другіе.

Эти величины, по мнѣнію релятивистовъ, имѣютъ абсолютное значеніе, поскольку ихъ значенія не зависятъ отъ случайныхъ особенностей положенія и движенія наблюдателя. Въ этомъ новомъ направленіи теорія относительности является уже не разрушающимъ и уничтожающимъ бичемъ, а орудіемъ упорядоченія и созиданія.

ХІІІ-й Сѣздъ русскихъ естествоиспытателей и врачей въ Тифлисъ.

(Секція математики и педагогическихъ вопросовъ).

Проф. Д. Синцова.

Съ 16 по 24 іюня состоялся въ Тифлисъ ХІІІ-й Сѣздъ русскихъ естествоиспытателей и врачей. Въ противность всѣмъ неблагоприятнымъ прогнозамъ онъ вышелъ очень многочисленнымъ, — записалось на него свыше 3600 человекъ, которыхъ не остановили ни дальній путь (были пріѣзжіе изъ Якутска) ни жара, которой намъ Тифлисъ не пожалѣлъ (температура почвы доходила на солнцѣ до 64.9°C , въ тѣни же температура 35°R не была исключительно высокою). Конечно, многихъ привлекалъ самый Кавказъ; хотя многие чудные уголки его, въ родѣ Бамбакскаго ущелья на Карсской дорогѣ съ близлежащими Делижаномъ и знаменитымъ озеромъ Гокча, или Сурамскаго перевала на Батумской дорогѣ сравнительно мало извѣстны, но Минеральныя Воды, Военно-Грузинская дорога и Черноморское побережье сами по себѣ достаточно привлекательны и извѣстны.

Но не о красотахъ Кавказа и не о тяготахъ и неудобствахъ, связанныхъ съ наслажденіемъ ими, уместно говорить на страницахъ «Вѣстника».

Вечеромъ 15/VI происходило предварительное собраніе Сѣзда въ саду Новаго Клуба (Литературнаго Общества); здѣсь происходили первыя встрѣчи и знакомства, устанавливались времена докладовъ, не намѣченныхъ заранее, здѣсь же былъ подготовленъ выборъ президіума Сѣзда.

На слѣдующій день предсѣдатель Распорядительнаго Комитета Сѣзда попечитель Кавказскаго учебнаго округа Н. Ф. Рудольфъ открылъ Сѣздъ пріѣзженною рѣчью, въ которой указалъ на трудности, съ которыми пришлось имѣть дѣло устроителямъ Сѣзда, впервые созданнаго внѣ научныхъ центровъ Россіи и не получившаго отъ предыдущихъ Сѣздовъ матеріальныхъ средствъ, вскорѣ, впрочемъ, собранныхъ субсидіями правительственныхъ и общественныхъ учреждений. Распорядительному Комитету удалось преодолѣть препятствія, казавшіяся временами неодолимыми. Комитетъ, сообразно мѣстнымъ условіямъ, даже нѣсколько расширилъ работу Сѣзда учрежденіемъ нѣсколькихъ новыхъ подсекцій (лѣсоводства, бальнеологіи и климатотерапіи, маляріи), въ особенности же двухъ новыхъ секцій — 13. научной ветеринаріи и 14. педагогическихъ вопросовъ. При Сѣздѣ была организована особая научно-промышленная выставка по отдѣламъ, соответствующимъ секціямъ (для насъ, математиковъ, наиболѣе интересна была выставка педагогическая).

Затѣмъ предсѣдателемъ Распорядительнаго Комитета былъ предложенъ и единогласно избранъ въ предсѣдатели Сѣзда засл. проф. Московскаго университета И. А. Каблуковъ (химикъ), товарищами предсѣдателя — проф. Московскаго сельско-хозяйственнаго института П. М. Булагинъ и проф. Харьковскаго университета П. Г. Оршанскій (психіатръ). Послѣ отвѣтнаго

слова, въ которомъ И. А. Каблуковъ, благодаря за оказанную ему честь, отнесъ ее къ тому, что онъ является представителемъ Московскаго университета, предложилъ избрать предсѣдателя Распорядительнаго Комитета Н. Ф. Рудольфа въ почетные предсѣдатели Съѣзда, что было встрѣчено единодушными рукоплесканіями. За многочисленными привѣтствіями, произнесенными делегатами и оглашенными предсѣдателемъ, послѣдовали рѣчи И. П. Оршанскаго — «Явленія атавизма въ нервно-психической жизни человѣка» и Е. А. Сатунина — «Распределение животной жизни на Кавказѣ въ связи съ исторіей фауны этой страны».

Со слѣдующаго дня начались засѣданія секцій. Не всѣ секціи были одинаково многолюдны и удачны. Напримѣръ, секція физики, какъ и можно было предвидѣть, вышла довольно слабую и по количеству собравшихся и по числу докладовъ.

Секція математики оказалась довольно удачною: началась она блестящимъ докладомъ Н. Е. Жуковскаго (Москва) — «О примѣненіи скороходной норіи для подъема нефти изъ глубокихъ скважинъ», въ которомъ докладчикъ изложилъ способъ, по которому производились подъ его руководствомъ и въ довольно широкихъ размѣрахъ опыты студентами Московскаго университета, — оригинальнымъ приемомъ подъема жидкости въ трубкѣ при помощи движущейся въ ней цѣпи, своими шариками увлекающей за собою жидкость. — Упомяну здѣсь же, что на второмъ общемъ собраніи (20/vi) И. Е. Жуковский прочелъ рѣчь: «Новыя научныя завоеванія въ теоріи сопротивленія жидкостей», а въ секціи воздухоплаванія (18/vi) сдѣлалъ докладъ: «Вихревая теорія гребного винта».

Перейду къ другимъ докладамъ секціи математики. Пальма первенства принадлежала В. В. Бобынину, давшему намъ цѣлыхъ три обстоятельныхъ доклада по исторіи математики: 1. (18/vi) «Древне-индусская математика и отношеніе къ ней древней Греціи», въ которомъ почтенный докладчикъ доказывалъ, что большая часть открытій въ геометріи, приписываемыхъ Пифагору, должна быть отнесена на счетъ индусовъ, отъ которыхъ она Пифагоромъ была лишь перенесена въ Грецію. Во второмъ докладѣ (19/vi) В. В. Бобынинъ остановился на результатахъ изученія кавказскихъ народныхъ математическихъ знаній. Добытыя лингвистами и этнографами данныя позволяютъ установить типы системъ счисленія, принятыхъ различными кавказскими племенами. Можетъ быть, наиболѣе любопытенъ фактъ существованія у тушинцевъ весьма развитой 20-ричной системы счисленія: у нихъ имѣются названія по этой системѣ до 5000, — тогда какъ до сихъ поръ наибольшій примѣръ представляло французское *Quinze-vings*. Наконецъ, 21/vi В. В. Бобынинъ прочелъ докладъ о распространеніи клинообразныхъ письменъ и ихъ постепенной модификаціи благодаря скорописи. По справедливости секція наградила докладчика, выбравъ его дважды почетнымъ предсѣдателемъ въ засѣданіяхъ и представителемъ секціи въ бюро Съѣзда.

Интересный докладъ сдѣлалъ Я. В. Успенскій (С.-Пб.): «О нѣкоторыхъ теоремахъ, вытекающихъ изъ теоріи эллиптическихъ функцій» (Мемуаръ печатается въ «Сообщеніяхъ Харьковскаго Математическаго Общества»). М. Н. Лагутинскій (Харьковъ) сдѣлалъ два доклада: 1) «Объ алгебраическомъ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій» и 2) «Къ теоріи исклю-

ченія». Ю. Г. Рабиновичъ (Казань) сдѣлалъ также два доклада: 1) «О площади кривой поверхности» и 2) «Обобщеніе понятія о движеніи». Д. М. Синцовъ (Харьковъ): 1) «Къ теоріи комплексовъ съ элементомъ (точка, прямая, плоскость)» — дополненіе къ докладу на Московскомъ Сѣздѣ и 2) «Объ одной задачѣ плоской геометріи (построить треугольникъ по углу и противолежащимъ биссектрисѣ и сторонамъ)», — которую привелъ, въ качествѣ примѣра того, что только аналитическій приѣмъ даетъ возможность обнаружить невозможность рѣшенія задачи помощью циркуля и линейки. По одному докладу сдѣлали: П. С. Флоровъ (ст. Урюпинская) — «Элементарное рѣшеніе задачи Бюффона по теоріи вѣроятностей»; А. А. Волковъ (Москва), въ которомъ докладчикъ подчеркивалъ условный характеръ распределенія основныхъ положеній на аксіомы и опредѣленія, ссылаясь для примѣра на схемы Гильберта и Шура; П. И. Курилко (Климовичи, Могилевской губ.) — «Элементарное, независимое отъ положеній высшей алгебры, доказательство трансцендентности гониометрическихъ функцій»; авторъ пользуется разложеніемъ функцій въ безконечное произведеніе и устанавливаетъ нѣсколько предварительныхъ теоремъ, обыкновенно относимыхъ къ высшей алгебрѣ; Астаповъ (Сухумъ) — «О знакахъ разстоянія точки отъ прямой»; М. Ѳ. Ефимовъ (Томскъ) — «Объ эллиптическихъ интегралахъ» (за отсутствіемъ докладчика признанъ заслушаннымъ). Кромѣ того, въ соединенномъ засѣданіи секціи (18/vi) заслушанъ былъ докладъ проф. Екатеринославскаго Горнаго института Я. И. Грдины — «Динамика живыхъ организмовъ» и А. Н. Попова — «Всмірное тяготѣніе и принципъ относительности».

На подсекціи механики, кромѣ указанныхъ, были сдѣланы доклады А. Н. Динникомъ (Новочеркасскъ): 1) «О приложеніи цилиндрическихъ функцій къ теоріи упругости» (17/vi) и 2) «Объ устойчивости плоской формы движенія».

Кромѣ того (18/vi), въ засѣданіи секціи физики А. Н. Динникъ сдѣлалъ докладъ — «О формахъ равновѣсія вращающейся нити». — Далѣе, В. П. Ветчининъ (Москва) — «Расчетъ гребного винта» и М. Е. Чайковскій (Тифлисъ) — «Космическіе циклы и законы энергетики».

Изъ докладовъ подсекціи астрономіи укажемъ доклады объ астрономіи Г. А. Тихова (Пулково): 1) «Опредѣленіе цвѣта звѣздъ», 2) «Фотографированіе хромосферы и протуберанцевъ во время частныхъ затмѣній солнца», и въ соединенномъ засѣданіи подсекціи съ секціями физики и физической географіи (18/vi): Ф. Ю. Биске — «Новый способъ изслѣдованія измѣненій солнечной постоянной и измѣренія солнечной температуры»; Г. А. Тиховъ — «Спектрофотометрическіе способы опредѣленія температуры солнца и звѣздъ», а въ тотъ же день послѣ перерыва въ соединенномъ засѣданіи съ секціей физической географіи и подсекціей географіи Г. А. Тиховъ прочелъ докладъ «О своевременности учрежденія высокогорныхъ астрономическихъ обсерваторій».

Но наиболѣе оживленной и плодотворной вышла новая секція — XIV-я — секція педагогическихъ вопросовъ, которою завѣдывалъ самъ председатель Распорядительнаго Комитета Сѣзда Н. Ф. Рудольфъ. Она была разбита на два отдѣла: физико-математическій и естественно-историческій, но многія засѣданія были соединенными. Я останавливаюсь только на первомъ отдѣлѣ и соединенныхъ засѣданіяхъ.

17/VI происходило два общих засѣданія обоихъ отдѣловъ, на которыхъ доклады относились, главнымъ образомъ, къ преподаванію естественныхъ наукъ. Математическихъ наукъ касался докладъ А. А. Апостолова: «Объ измѣненіи методовъ преподаванія космографіи». Докладчикъ находилъ, что надо начинать изложеніе съ наблюденія неба самими учащимися при помощи преподавателя, — а не съ трудныхъ астрономическихъ понятій высоты и азимута, склоненія и прямого восхожденія. Тогда космографія явится легкимъ и интереснымъ предметомъ. Опытъ преподаванія докладчикомъ по этому методу въ старшихъ классахъ среднихъ учебныхъ заведеній и даже въ 4 и 5 отдѣленіяхъ двухклассной школы далъ весьма благопріятные результаты.

18/VI въ утреннемъ засѣданіи физико-математическаго отдѣла директоръ 3-й Тифлисской мужской гимназіи Б. К. Крамаренко доложилъ объ анкетѣ по вопросу преподаванія математики въ мужскихъ гимназіяхъ и реальныхъ училищахъ Кавказскаго учебнаго округа. Центромъ тяжести являлось опредѣленіе степени интереса учащихся къ математикѣ, степени трудности усвоенія различныхъ ея отдѣловъ и степени самостоятельности работы учащихся. Результатъ анкеты: интересъ учащихся къ математикѣ — средній; наименьшій у гимназистовъ къ алгебрѣ, у реалистовъ — къ анализу, который и кажется имъ наиболѣе труднымъ; для гимназистовъ наиболѣе трудною является алгебра; наибольшій интересъ вызываетъ тригонометрія; наибольшее затрудненіе у гимназистовъ встрѣчается въ пониманіи условій задачи, у реалистовъ — въ разысканіи плана рѣшенія; наименьшее — при доказательствѣ теоремъ; самостоятельность въ исполненіи домашнихъ работъ наблюдается у большинства учащихся. Второй докладчикъ М. Н. Песоцкій сообщилъ объ анкетѣ по тому же вопросу въ женскихъ гимназіяхъ Кавказскаго учебнаго округа. Докладчикъ отмѣтилъ, что интересъ къ математикѣ (анкета была произведена у оканчивающихъ 7-й классъ) слабѣе, чѣмъ въ мужскихъ учебныхъ заведеніяхъ; затрудненія не въ механизмѣ дѣйствій, а въ пониманіи условій задачи и доказательства теоремъ. Въ остальномъ данныя анкеты близки. Для 8-го класса — математическаго отдѣленія — характеръ анкеты былъ нѣсколько иной: помимо основныхъ вопросовъ, ученицамъ было предложено отвѣтить о мотивѣ выбора математическаго отдѣленія, о количествѣ работы въ 8-мъ классѣ и о подготовленности ихъ къ будущей дѣятельности въ качествѣ учительницъ. Оказалось, что большинство при выборѣ математическаго отдѣленія руководилось желаніемъ продолжать образованіе въ высшей школѣ; большую часть курсъ 8-го класса не затруднилъ, и большая часть считаетъ себя для практической дѣятельности подготовленной. Докладчикъ отмѣтилъ разницу, отличающую Кавказскій учебный округъ: вмѣсто обычныхъ 6-недѣльных уроковъ здѣсь въ 8-мъ классѣ гимназій на математику отводится 11 недѣльных часовъ. Н. Ф. Рудольфъ отмѣтилъ, что для облегченія работъ преподавателей за послѣднія 6 лѣтъ всѣ методическіе вопросы разрабатываются въ каждомъ городѣ въ особыхъ предметныхъ коммиссіяхъ; преподаватели даютъ примѣрные уроки въ присутствіи другихъ своихъ коллегъ по тому же предмету, которые потомъ подвергаютъ уроки разбору; матеріалы дѣятельности этихъ коммиссій собраны въ особой книгѣ, вышедшей подъ редакціей Б. К. Крамаренко. Секція постановила благодарить Кавказскій учебный округъ за анкету, признанную цѣннымъ вкладомъ въ русскую педагогическую литературу по математикѣ и выразила пожеланіе, чтобы и въ другихъ округахъ Россіи были предприняты работы подобнаго рода.

Третій докладъ — В. П. Свѣнцицкаго (Москва) — былъ посвященъ вопросу: «Математика въ среднихъ промышленныхъ училищахъ». Основные пункты доклада, принятые секціей: 1) необходимо усилить преподаваніе математики въ среднихъ промышленныхъ училищахъ; 2) во всѣхъ этихъ училищахъ необходимо ввести начала анализа бесконечно-малыхъ, а въ химико-техническихъ, сверхъ того, — начала аналитической геометріи.

19/VI утромъ засѣданіе секціи (соединенное) все было посвящено докладамъ, относившимся къ преподаванію математическихъ наукъ. Первымъ былъ поставленъ докладъ пишущаго эти строки: «Университетъ и средняя школа», въ которомъ, отмѣтивъ постепенное ослабленіе связи между средней и высшей школой при послѣдовательной смѣнѣ университетскихъ уставовъ 1804, 1835, 1863 и 1884 гг., докладчикъ указалъ на полную разобщенность въ настоящее время средней и высшей школы и, какъ средства сближенія, выставилъ введеніе началъ высшей математики (аналитической геометріи и началъ дифференціального исчисленія) въ курсъ гимназій и ознакомленіе кончающихъ среднюю школу съ тѣмъ, что ихъ ждетъ въ высшей; въ университетѣ же, гдѣ это разобщеніе особенно чувствительно на математическомъ факультетѣ, желательно измѣненіе характера преподаванія на I-мъ курсѣ, учрежденіе при кафедрѣ математики «математическихъ лабораторій» и дополненіе обязательнаго преподаванія курсами, полезными для будущаго преподавателя, какъ-то: исторіи математики, основаній геометріи и избранными главами элементарной геометріи. Необходимо также увеличеніе числа университетовъ для того, чтобы уменьшеніе числа студентовъ сдѣлало возможнымъ индивидуализацію преподаванія. Въ слѣдующемъ докладѣ А. А. Волковъ позначкомилъ съ постановкою дѣла подготовки преподавателей математики въ Московскомъ учебномъ округѣ, при чемъ отмѣтилъ выяснившееся для него слабое значеніе пробныхъ уроковъ и, напротивъ, большую пользу сообщенія занимающимися на курсахъ дѣйствительныхъ уроковъ съ послѣдующимъ ихъ разборомъ. Въ оживленныхъ преніяхъ высказывалось, однако, мнѣніе о полезности пробныхъ уроковъ (особенно въ 8-мъ классѣ женскихъ гимназій). Затѣмъ былъ прочитанъ докладъ, присланный П. А. Некрасовымъ, который, какъ средство для устраненія разрыва между средней и высшей школой, предлагалъ введеніе особыхъ «Лицейскихъ классовъ», какъ переходной ступени отъ средней школы къ высшей.

В. П. Свѣнцицкій посвятилъ свой второй докладъ вопросу «Причина недостатка въ техникахъ, окончившихъ среднія технические училища, и многотѣтнаго засиживанія студентовъ въ высшихъ специальныхъ учебныхъ заведеніяхъ и одна изъ мѣръ къ устраненію того и другого». Пожеланія докладчика слѣдующія: 1) необходимо принять мѣры къ устраненію причинъ, вызывающихъ уходъ учащихся изъ среднихъ техническихъ училищъ и позднее выступленіе лицъ, окончившихъ высшія специальные учебныя заведенія, на поприще практической дѣятельности; 2) необходимо реформировать среднюю школу въ такомъ направленіи, чтобы послѣдніе два класса служили подготовительными для поступленія въ высшія учебныя заведенія, а кончившіе шесть классовъ и неспособные къ усвоенію предметовъ послѣднихъ двухъ классовъ средней школы явились бы элементомъ, наиболее подходящимъ для пополненія среднихъ техническихъ училищъ; 4) необходимо измѣнить порядокъ пополненія высшихъ специальныхъ учебныхъ заведеній — дѣйствительными студентами

должны дѣлаться лишь лица, пробывшія слушателями пробный годъ, выполнившія извѣстный minimum требованій и доказавшія свою работоспособность.

На вечернемъ засѣданіи (19/vi) А. Ф. Петровскій прочелъ докладъ «О научномъ кинематографѣ» и польза его на основаніи 5-тилѣтняго опыта. Собраніе приняло пожеланія докладчика. П. М. Малышевъ въ докладѣ «Учебная литература и ея критика» подвергъ критикѣ дѣятельность Ученаго Комитета Министерства народнаго просвѣщенія по части критики учебниковъ.

20/vi утромъ передъ Общимъ Собраніемъ физико-математическій отдѣлъ секціи имѣлъ засѣданіе, на которомъ почетный предсѣдатель І. П. Чистяковъ пригласилъ членовъ Съѣзда принять участіе въ предстоящемъ въ Москвѣ на Рождествѣ II-омъ Съѣздѣ преподавателей математики какъ докладами, такъ и на выставкѣ. Затѣмъ были заслушаны доклады Д. Д. Галанина (Москва) — «Объ именованныхъ числахъ» и П. Е. Яралянца «Объ упрощенныхъ дѣйствіяхъ надъ періодическими десятичными дробями».

21/vi утреннее засѣданіе физико-математическаго отдѣла происходило совмѣстно съ секціей физики; на немъ заслушано было сообщеніе Н. А. Павлова — «Діаграммы и графики въ курсѣ физики». Собраніемъ были признаны діаграммы и графики желательными и полезными; признаны желательными плановѣрныя и систематическія практическія занятія по физикѣ въ средней школѣ. Затѣмъ былъ заслушанъ докладъ Б. В. Ильина — «О возможныхъ методахъ изложенія нѣкоторыхъ отдѣловъ физики».

Засѣданія секціи продолжались интенсивно и въ послѣдніе дни Съѣзда. 22/vi утреннее засѣданіе должно было*) происходить совмѣстно съ секціей математики; въ программѣ были поставлены доклады: Липкинъ — «Нѣкоторые теоремы стереометріи»; Аммосовъ, А. М. — «О переработкѣ курса анализа бесконечно-малыхъ въ средней школѣ и его пропедевтика»; Воскресенскій — «Желательныя и возможные изложенія курса анализа и аналитической геометріи въ средней школѣ»; Григорьянцъ — «Какъ преподавать геометрію въ средней школѣ». Вечернее засѣданіе 22/vi должно было происходить совмѣстно съ секціями химіи и медицины.

23/vi на общемъ собраніи секціи Песочкій долженъ былъ сдѣлать докладъ — «О лабораторномъ методѣ при преподаваніи математики». Мухинъ — «О приѣмахъ и школьныхъ приспособленіяхъ по демонстраціи и храненію наглядныхъ учебныхъ пособій». Остальные доклады — по естествознанію.

И даже утромъ въ день закрытія Съѣзда (24/vi) состоялись еще засѣданія обоихъ отдѣловъ, изъ которыхъ на физико-математическомъ были заслушаны доклады: П. С. Флорова — «Теорія вѣроятностей, какъ учебный предметъ школы» (авторъ ратуетъ за введеніе элементарнаго курса теоріи вѣроятностей въ 8-мъ классѣ женскихъ гимназій для спеціалистокъ-математичекъ) и Курилко П. — 1) «Тригонометрическія уравненія» и 2) «Преподаваніе тригонометріи и ея программы въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ».

24/vi послѣ ряда рѣчей (зоолога Н. Е. Кольцова, географа А. Н. Краснова и медика Л. А. Тарасевича) прочтенъ былъ общій отчетъ о

*) Я покинулъ Тифлисъ въ этотъ день и не знаю, состоялись ли эти доклады.

Съѣздъ, доложены и приняты резолюціи секцій, и Съѣздъ былъ объявленъ закрытымъ. Слѣдующій съѣздъ намѣченъ въ 1916 году въ Харьковѣ.

Оглядываясь на набросанную картину дѣятельности Съѣзда, можно признать его удавшимся, поскольку рѣчь идетъ о нашей специальности. И это надо отнести насчетъ новой секціи — «Секціи педагогическихъ вопросовъ». Эта секція сразу оказалась жизнеспособной; несомнѣнно, она будетъ фигурировать и на будущихъ Съѣздахъ, и возникновеніе ея будетъ неразрывно связано съ Тифлиссимъ Съѣздомъ.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Обитаемость планетъ. Старый вопросъ объ обитаемости планетъ, всегда интересовавшій широкіе круги, все еще относится скорѣе къ натурфилософіи, чѣмъ къ астрономіи, вслѣдствіе недоступности точныхъ изслѣдованій на этой почвѣ. Недавно этому вопросу посвятилъ особую брошюру извѣстный англійскій астрономъ Маундеръ (Maunder), завѣдующій Солнечнымъ Отдѣленіемъ обсерваторіи въ Гриничѣ. Маундеръ, впрочемъ, ставитъ вопросъ нѣсколько уже, — именно, существуютъ ли на другихъ небесныхъ тѣлахъ человѣкообразныя существа. Что всѣ солнца (т. е. центральное тѣло нашей системы и всѣ неподвижныя звѣзды), равно какъ и наша луна, не населены, вытекаетъ уже изъ состава этихъ тѣлъ. Особый интересъ представляетъ вопросъ объ обитаемости планетъ нашей солнечной системы. За основныя условія, опредѣляющія возможность существованія человѣческихъ существъ, Маундеръ принимаетъ три слѣдующія: существованіе воды, давленіе атмосферы, обусловливаемое силой тяжести, и извѣстныя условія температуры. По нашимъ представленіямъ, безъ воды не могутъ существовать даже низшія формы живыхъ существъ; но даже и при наличности воды нѣкоторыя планеты не могутъ быть обитаемы. Это относится, въ первую очередь, къ большимъ внѣшнимъ планетамъ: Юпитеру, Сатурну, Урану и Нептуну. Во-первыхъ, ихъ массы настолько велики, что давленіе атмосферы, соответственно большому ея вѣсу, было бы для человѣческихъ существъ совершенно невыносимо. Далѣе, солнечнаго тепла на этихъ удаленныхъ планетахъ, отчасти находящихся еще, повидимому, въ огненно-жидкомъ состояніи, не можетъ быть достаточно для поддержанія человѣческой жизни. Врядъ ли можно также допустить существованіе обитателей на самой внутренней планетѣ — Меркуріи, всегда обращенномъ къ солнцу одной и той же стороною, такъ что одна его половина находится постоянно подъ палящими лучами солнца, а другая находится въ условіяхъ ледянаго холода. Такимъ образомъ, рѣчь можетъ идти только о двухъ планетахъ — Венерѣ и Марсѣ, которыя, однако, по мнѣнію Маундера, тоже врядъ ли могутъ быть населены существами, подобными людямъ. Такъ, примѣръ, для планеты Марсѣ, въ общемъ довольно похожей на землю, Маундеръ вычисляетъ, что какъ низкое давленіе атмосферы, такъ и низкая средняя температура, согласно нашимъ представленіямъ, не могутъ быть благо-

приятны для существъ, похожихъ на людей. Такимъ образомъ, Маундеръ склоняется къ тому, что въ предѣлахъ солнечной системы земля является, дѣйствительно, исключительной, избранной планетой, и человѣка внѣ земли можно искать развѣ только на спутникахъ неподвижныхъ звѣздъ.

Засѣданіе Солнечнаго Союза въ Боннѣ съ 31 іюля по 5 августа 1913 года. Солнечный Союзъ (Solar Union) есть общество, призванное къ жизни американскимъ астрономомъ Гелемъ (G. E. Hale). Первоначальная цѣль союза заключалась въ томъ, чтобы установить соглашеніе, необходимое для плановѣрной совмѣстной работы по физикѣ солнца. Однако, въ короткое время это общество превратилось въ международный союзъ, имѣющій руководящее значеніе для всей области астрофизики. Три года тому назадъ имѣло мѣсто общее собраніе союза въ обсерваторіи на горѣ Вильсонъ (Mount Wilson) въ Калифорніи, которое ознакомило многочисленныхъ европейскихъ ученыхъ съ чудесами страны, каковыми являются ея научныя учрежденія и результаты, достигнутые этой обсерваторіей. На послѣднее собраніе, состоявшееся въ Боннѣ, съѣхалось до ста членовъ, въ томъ числѣ много американцевъ. Этотъ съѣздъ состоялся по инициативѣ Кайзера (Kayser) и Кюстнера (Küstner); здѣсь было приложено усиліе, чтобы, въ свою очередь, въ достаточной мѣрѣ отмѣтить заслуги старой Европы.

Занятія Союза заключались не въ докладахъ, а въ отчетахъ учреждений Союзомъ комиссій; къ этимъ отчетамъ присоединяются примыкающія къ нимъ сообщенія объ отдѣльныхъ изслѣдованіяхъ. Засѣданія протекають вслѣдствіе этого, быть можетъ, не столь оживленно, но зато съ большей пользой.

Изъ значительныхъ результатовъ, уже достигнутыхъ Союзомъ, надо особенно отмѣтить опредѣленіе нормальныхъ длинъ свѣтовыхъ волнъ. Опредѣленіе длинъ свѣтовыхъ волнъ въ спектрахъ элементовъ до сихъ поръ производилось почти исключительно дифференціальнымъ путемъ, примѣнительно къ Роулэндовскимъ (Rowland) таблицамъ солнечнаго спектра. Между тѣмъ обнаружилось, что единица длины, которой пользовался Роулэндъ, не совпадала вполне съ метромъ, а отличалась отъ него на 0,03 мм.; кромѣ того, масштабъ въ различныхъ частяхъ спектра давалъ отступленія въ предѣлахъ, примѣрно, въ 0,003 мм. на метрѣ. При тонкости спектроскопическихъ измѣреній это весьма замѣтное уклоненіе. По инициативѣ Солнечнаго Союза въ этомъ направленіи былъ предпринятъ обширный рядъ работъ. И въ настоящее время весь видимый спектръ размѣченъ рядомъ линій желѣза, съ точностью достигающихъ, примѣрно, 0,0003 мм. на метрѣ. Такъ какъ Гузъ (Goos) констатировалъ небольшія варіаціи въ длинахъ волнъ обыкновенной вольтовой дуги съ желѣзными электродами (смотря по условіямъ, при которыхъ она горитъ), то Союзъ теперь установилъ опредѣленные нормы для вольтовой дуги, устанавливающія нормальные эталоны для длины волны, съ точностью, достигающей $1 : 10^7$.

Другія соглашенія установлены относительно солнечныхъ протуберансовъ для статистическихъ цѣлей, относительно наблюденій вращенія солнца по принципу Доплера, относительно классификаціи солнечныхъ спектровъ, а также относительно наблюденій ближайшихъ солнечныхъ затменій.

БИБЛИОГРАФІЯ.

I. Рецензіи.

Труды Перваго Всероссийскаго Съезда преподавателей математики. Томъ I. «Общія Собранія». Стр. XVI + 604. Томъ II. «Секціи». Стр. VII + 364.

Мы необычайно требовательны. Когда вспомнишь, сколько споровъ и горячихъ споровъ было относительно Съезда, далъ ли онъ то, чего отъ него ждали, чего отъ него можно было ожидать, принесъ ли онъ вообще пользу, и когда въ то же время посмотришь на эти два объемистыхъ тома, то удивляешься тому, какъ мы требовательны. Эти два тома содержатъ огромный матеріалъ, теоретическій, педагогическій, библиографическій, по различнымъ отдѣламъ, по различнымъ вопросамъ. Теперь, въ напечатанномъ видѣ, эти доклады еще интереснѣе, чѣмъ на Съѣздѣ. Тамъ, въ переполненномъ залѣ, въ углу аудиторіи, въ сутюлокѣ Съезда, часто въ утомленномъ состояніи невозможно было не только слѣдить за этими докладами, оцѣнить ихъ значеніе, но даже разобратъ въ нихъ.

Теперь каждый изъ насъ имѣетъ эти доклады у себя въ рабочей обстановкѣ; кто удѣлитъ имъ нѣкоторое время, тотъ убѣдится, сколько продуманнаго матеріала было подготовлено къ Съѣзду; и каждый, несомнѣнно, найдетъ въ нихъ много для себя интереснаго. Доклады С. А. Богомолова («Обоснованіе геометріи въ связи съ ея преподаваніемъ»), Б. Б. Піотровскаго «Курсъ теоретической ариметики въ старшихъ классахъ средней школы», Т. А. Афанасьевой-Эренфестъ («Ирраціональные числа въ средней школѣ»), С. О. Шатуновскаго («О постулатахъ, лежащихъ въ основаніи понятія о величинѣ»), М. Л. Франка («Номография и ея значеніе въ средней школѣ») принадлежатъ къ числу тѣхъ, которые врядъ ли возможно было усвоить при устномъ изложеніи вслѣдствіе тонкаго теоретическаго ихъ характера, но которые вмѣстѣ съ тѣмъ полны глубокаго интереса. Доклады М. Г. Поппруженко и Ф. В. Филипповича («О введеніи анализа безконечно-малыхъ въ высшую школу»), А. П. Кулишера («О пропедевтическомъ курсѣ геометріи»), К. А. Поссе и В. Б. Струве («О согласованіи программъ средней и высшей школы») именно теперь подлежатъ особому изученію, такъ какъ предстоящій второй Съездъ уже долженъ вынести по этимъ вопросамъ твердыя рѣшенія.

Какъ на особенность Съезда, отличающую его отъ обыкновенныхъ, чисто научныхъ Съездовъ, слѣдуетъ указать, что секціонные доклады даже при болѣе внимательномъ ознакомленіи представляютъ въ общемъ значительно меньшій интересъ, нежели тѣ, которые были прочитаны на Общихъ Собраніяхъ.

Печатаніе трудовъ поглотило гораздо больше средствъ, чѣмъ это предполагалось по смѣтѣ; вслѣдствіе этого на второй томъ пришлось наложить платежъ въ размѣрѣ одного рубля. Мы увѣрены, что никто объ этомъ рублѣ не пожалѣетъ.

Обозрѣвая эти объемистые томы, нельзя не принести еще разъ благодарности тѣмъ, которые понесли такой огромный трудъ, чтобы собрать, расположить, прокорректировать, напечатать эти труды.

Первый Всероссийскій Сѣздъ преподавателей математики теперь только ликвидируется, и его наслѣдіе должно послужить основой и матеріаломъ для работъ второго Сѣзда. Къ этому вопросу мы вернемся въ ближайшихъ номерахъ «Вѣстника».

В. К.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей приватъ-доцента Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ «Вѣстникѣ», и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ «Вѣстникѣ», либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 126 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\frac{x^2 + 11x + 31}{x^2 + 11x + 29} = \frac{136 + 15x + x^2}{24 - 15x - x^2}.$$

Л. Закутинскій (Черкассы).

№ 127 (6 сер.). Въ данный прямоугольникъ вписать два круга одинаковаго радіуса такъ, чтобы они были вписаны въ противоположные углы прямоугольника и чтобы они касались другъ друга.

А. Григорьевъ (Полтава).

№ 128 (6 сер.). Определить два двузначныхъ числа, обладающихъ слѣдующимъ свойствомъ: если къ квадрату перваго числа приписать справа 4, то получится квадратъ втораго числа.

В. Яницкій (Острогъ).

№ 129 (6 сер.). Определить (безъ помощи логарифмовъ), что больше, 21^{23} или 23^{21} ?

А. Кисловъ (Москва).

РѢШЕНИЯ ЗАДАЧЪ.

ОТДѢЛЪ I.

№ 81 (6 сер.). Предполагая известными тригонометрическія формулы, выражающія соотношенія между элементами треугольника, вывести формулу

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

пользуясь слѣдующимъ чертежомъ: внутри угла xSy , равнаго суммѣ угловъ $a+b$, проведена прямая SD , образующая съ прямыми xS и yS соответственно углы a и b , и изъ точки D возставленъ къ прямой SD перпендикуляръ, встричающій прямыя Sx и Sy соответственно въ точкахъ M и N .

Мы примемъ известнымъ выраженіе площади треугольника по двумъ сторонамъ и лежащему между ними углу, такъ какъ оно, какъ известно, выводится легко изъ геометрической формулы площади треугольника и изъ тригонометрической формулы для одной изъ высотъ его. Предположимъ, что $a < \frac{\pi}{2}$ и $b < \frac{\pi}{2}$. Полагая $SM = m$, $SN = n$, имѣемъ:

$$(1) \quad \text{плоч. } MSN = \frac{mn}{2} \sin(a+b).$$

Кромѣ того, изъ прямоугольныхъ треугольниковъ MDS и NDS находимъ:

$$MD = m \sin a, \quad SD = m \cos a = n \cos b, \quad ND = n \sin b,$$

откуда

$$(2) \quad \text{плоч. } MDS = \frac{MD \cdot SD}{2} = \frac{m \sin a \cdot n \cos b}{2} = \frac{mn}{2} \sin a \cos b,$$

$$(3) \quad \text{плоч. } NDS = \frac{ND \cdot SD}{2} = \frac{n \sin b \cdot m \cos a}{2} = \frac{mn}{2} \cos a \sin b,$$

Сложивъ равенства (2) и (3), имѣемъ [см. (1)]:

$$\begin{aligned} \text{плоч. } MSN &= \text{плоч. } MDS + \text{плоч. } NDS = \frac{mn}{2} \sin(a+b) = \\ &= \frac{mn}{2} \sin a \cos b + \frac{mn}{2} \cos a \sin b = \frac{mn}{2} (\sin a \cos b + \cos a \sin b). \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{mn}{2} \sin(a+b) = \frac{mn}{2} (\sin a \cos b + \cos a \sin b).$$

Сокративъ обѣ части на $\frac{mn}{2}$, получимъ искомую формулу. Итакъ, формула синуса суммы дугъ доказана въ томъ предположеніи, что

$$0 < a < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad 0 < b < \frac{\pi}{2}.$$

При помощи обычных методов найденную формулу можно обобщить для любых дуг a и b .

Н. Андреевский (Умань); *К. Свицковъ* (Каменецъ-Подольскъ); *Л. Марголисъ* (Петербургъ); *В. Кованько* (ст. Струино); *А. Ильинъ* (Астрахань); *В. Маловичко* (Херсонъ); *Анна Ф.* (Харьковъ); *В. Павловъ* (с. Ворсма); *Б. Смирновъ* (м. Юзовка); *Р. Витвинский* (Тирасполь); *Г. Певзнеръ* (Бахмутъ); *Н. Назаровъ* (Петербургъ).

№ 86 (6 сер). Привести къ логарифмическому виду выражения

$$P = \sin \frac{A}{4} + \sin \frac{B}{4} + \sin \frac{C}{4} + \cos \frac{A}{4} + \cos \frac{B}{4} + \cos \frac{C}{4}$$

$$Q = \sin \left(A + \frac{B}{4} \right) + \sin \left(B + \frac{C}{4} \right) + \sin \left(C + \frac{A}{4} \right) + \\ + \cos \left(A + \frac{B}{4} \right) + \cos \left(B + \frac{C}{4} \right) + \cos \left(C + \frac{A}{4} \right)$$

при условии $A + B + C = 180^\circ$.

Приведемъ сперва къ логарифмическому виду сумму

$$(1) \quad \cos a + \cos b + \cos c$$

при условии

$$(2) \quad a + b + c = 90^\circ.$$

Замѣняя въ суммѣ (1) c черезъ $90^\circ - (a + b)$, [см. (2)], имѣемъ:

$$\cos a + \cos b + \cos c = \cos a + \cos b + \cos [90^\circ - (a + b)] = (\cos a + \cos b) + \\ + \sin (a + b) = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} + 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a+b}{2} = \\ = 2 \cos \frac{a+b}{2} \left(\cos \frac{a-b}{2} + \sin \frac{a+b}{2} \right).$$

Итакъ,

$$(3) \quad \cos a + \cos b + \cos c = 2 \cos \frac{a+b}{2} \left(\cos \frac{a-b}{2} + \sin \frac{a+b}{2} \right).$$

Но $\sin \frac{a+b}{2} = \cos \left(90^\circ - \frac{a+b}{2} \right)$, или [см. (2)] $\sin \frac{a+b}{2} = \cos \left(a+b+c - \frac{a+b}{2} \right) =$
 $= \cos \frac{a+b+2c}{2}$. Поэтому [см. (3)]

$$\cos a + \cos b + \cos c = 2 \cos \frac{a+b}{2} \left(\cos \frac{a-b}{2} + \cos \frac{a+b+2c}{2} \right) = \\ = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot 2 \cos \frac{a+c}{2} \cos \frac{(-b+c)}{2} = 4 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{b+c}{2} \cos \frac{c+a}{2}.$$

Итакъ, окончательно

$$(4) \quad \cos a + \cos b + \cos c = 4 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{b+c}{2} \cos \frac{c+a}{2}.$$

Преобразуемъ теперь P слѣдующимъ образомъ:

$$(5) \quad \begin{aligned} P &= \left(\sin \frac{A}{4} + \cos \frac{A}{4} \right) + \left(\sin \frac{B}{4} + \cos \frac{B}{4} \right) + \left(\sin \frac{C}{4} + \cos \frac{C}{4} \right) = \\ &= \left[\sin \frac{A}{4} + \sin \left(90^\circ - \frac{A}{4} \right) \right] + \left[\sin \frac{B}{4} + \sin \left(90^\circ - \frac{B}{4} \right) \right] + \left[\sin \frac{C}{4} + \sin \left(90^\circ - \frac{C}{4} \right) \right] = \\ &= 2 \sin 45^\circ \cos \left(45^\circ - \frac{A}{4} \right) + 2 \sin 45^\circ \cos \left(45^\circ - \frac{B}{4} \right) + 2 \sin 45^\circ \cos \left(45^\circ - \frac{C}{4} \right) = \\ &= 2 \sin 45^\circ \left[\cos \left(45^\circ - \frac{A}{4} \right) + \cos \left(45^\circ - \frac{B}{4} \right) + \cos \left(45^\circ - \frac{C}{4} \right) \right]. \end{aligned}$$

Такъ какъ по условію $A + B + C = 180^\circ$, то

$$\left(45^\circ - \frac{A}{4} \right) + \left(45^\circ - \frac{B}{4} \right) + \left(45^\circ - \frac{C}{4} \right) = 135^\circ - \frac{A+B+C}{4} = 135^\circ - \frac{180^\circ}{4} = 90^\circ.$$

Поэтому, преобразовавъ сумму $\cos \left(45^\circ - \frac{A}{4} \right) + \cos \left(45^\circ - \frac{B}{4} \right) + \cos \left(45^\circ - \frac{C}{4} \right)$ по формулѣ (4), имѣемъ:

$$\begin{aligned} &\cos \left(45^\circ - \frac{A}{4} \right) + \cos \left(45^\circ - \frac{B}{4} \right) + \cos \left(45^\circ - \frac{C}{4} \right) = \\ &= 4 \cos \frac{45^\circ - \frac{A}{4} + 45^\circ - \frac{B}{4}}{2} \cos \frac{45^\circ - \frac{B}{4} + 45^\circ - \frac{C}{4}}{2} \cos \frac{45^\circ - \frac{C}{4} + 45^\circ - \frac{A}{4}}{2} = \\ &= 4 \cos \left(45^\circ - \frac{A+B}{8} \right) \cos \left(45^\circ - \frac{B+C}{8} \right) \cos \left(45^\circ - \frac{C+A}{8} \right), \end{aligned}$$

а потому [см. (5)]:

$$\begin{aligned} P &= 8 \sin 45^\circ \cos \left(45^\circ - \frac{A+B}{8} \right) \cos \left(45^\circ - \frac{B+C}{8} \right) \cos \left(45^\circ - \frac{C+A}{8} \right) = \\ &= 4 \sqrt{2} \cos \left(45^\circ - \frac{A+B}{8} \right) \cos \left(45^\circ - \frac{B+C}{8} \right) \cos \left(45^\circ - \frac{C+A}{8} \right). \end{aligned}$$

Подобнымъ же образомъ, замѣчая, что $\cos \left(A + \frac{B}{4} \right) = \sin \left[90^\circ - \left(A + \frac{B}{4} \right) \right]$, находимъ:

$$(6) \quad \begin{aligned} Q &= \left\{ \sin \left(A + \frac{B}{4} \right) + \sin \left[90^\circ - \left(A + \frac{B}{4} \right) \right] \right\} + \\ &+ \left\{ \sin \left(B + \frac{C}{4} \right) + \sin \left[90^\circ - \left(B + \frac{C}{4} \right) \right] \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & + \left\{ \sin \left(C + \frac{A}{4} \right) + \sin \left[90^\circ - \left(C + \frac{A}{4} \right) \right] \right\} = \\
 & = 2 \sin 45^\circ \cos \left[45^\circ - \left(A + \frac{B}{4} \right) \right] + 2 \sin 45^\circ \cos \left[45^\circ - \left(B + \frac{C}{4} \right) \right] + \\
 & \quad + 2 \sin 45^\circ \cos \left[45^\circ - \left(C + \frac{A}{4} \right) \right] = \\
 & = 2 \sin 45^\circ \left[\cos \left(A + \frac{B}{4} - 45^\circ \right) + \cos \left(B + \frac{C}{4} - 45^\circ \right) + \cos \left(C + \frac{A}{4} - 45^\circ \right) \right]. \\
 \text{Но} \quad & \left(A + \frac{B}{4} - 45^\circ \right) + \left(B + \frac{C}{4} - 45^\circ \right) + \left(C + \frac{A}{4} - 45^\circ \right) = \\
 & = A + B + C + \frac{A+B+C}{4} - 135^\circ = 180^\circ + 45^\circ - 135^\circ = 90^\circ.
 \end{aligned}$$

Поэтому, согласно съ формулой (4), имѣемъ:

$$\begin{aligned}
 & \cos \left(A + \frac{B}{4} - 45^\circ \right) + \cos \left(B + \frac{C}{4} - 45^\circ \right) + \cos \left(C + \frac{A}{4} - 45^\circ \right) = \\
 & = 4 \cos \frac{1}{2} \left(A + B + \frac{B}{4} + \frac{C}{4} - 90^\circ \right) \cos \frac{1}{2} \left(B + C + \frac{C}{4} + \frac{A}{4} - 90^\circ \right) \times \\
 & \quad \times \cos \frac{1}{2} \left(C + A + \frac{A}{4} + \frac{B}{4} - 90^\circ \right) = \\
 & = 4 \cos \frac{1}{2} \left(A + B + \frac{B+C}{4} - \frac{A+B+C}{2} \right) \cos \frac{1}{2} \left(B + C + \frac{C+A}{4} - \frac{A+B+C}{2} \right) \times \\
 & \quad \times \cos \frac{1}{2} \left(C + A + \frac{A+B}{4} - \frac{A+B+C}{2} \right) = \\
 & = 4 \cos \frac{2A+3B-C}{8} \cos \frac{2B+3C-A}{8} \cos \frac{2C+3A-B}{8}.
 \end{aligned}$$

Поэтому [см. (6)]:

$$\begin{aligned}
 Q & = 8 \sin 45^\circ \cos \frac{2A+3B-C}{8} \cos \frac{2B+3C-A}{8} \cos \frac{2C+3A-B}{8} = \\
 & = 4 \sqrt{2} \cos \frac{2A+3B-C}{8} \cos \frac{2B+3C-A}{8} \cos \frac{2C+3A-B}{8}.
 \end{aligned}$$

Г. Певзнеръ (Бахмутъ); В. Обуховскій (Великій Устюгъ).

Обложка
щется

Обложка
щется