Обложка
ищется

Обложка
ищется

L Сем. № 10—12.

БИБЛІОТЕКА Дмитрія Ивановича ВОЛКОВСКОГО

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 598—600.

Содержаніе: Къ 25-лѣтію „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики“.— Уравненія движенія планеты около солнца. *Проф. В. П. Ермакова.* — Horror absoluti. Источникъ принципа относительности. *Проф. О. Д. Хвольсона.* — Возможный смыслъ теоріи квантъ. *Проф. Н. Умова.* — Демокритъ и Архимедъ. *Прив.-доц. И. Ю. Тимченко.* — О конкурсныхъ экзаменахъ (Къ 25-лѣтію ихъ существованія). *Проф. Д. Синцова.* — Изъ записной книжки преподавателя. О перемѣстительномъ свойствѣ произведенія нѣсколькихъ сомножителей. *Проф. В. А. Циммермана.* — Графическій пріемъ при изученіи системы линзъ. *Проф. А. Л. Королькова.* — Капиллярный анализъ. *В. А. Гернета.* — Къ теоріи maxim'a и minim'a функціи одного перемѣннаго. *Прив.-доц. Е. Л. Буницкаго.* — О наибольшихъ величинахъ въ геометріи. *Прив.-доц. Ю. Г. Рабиновича.* — Научная хроника: Рѣшеніе задачи о трехъ тѣлахъ. — Библіографія: I. Рецензіи. О. Д. Хвольсонъ. „Курсъ физики“. *А. Эйхенвальда.* — Николай Ивановичъ Лобачевскій. „Новыя начала геометріи съ полной теоріей параллельныхъ“. *В. Кагана.* III. Новости иностранной литературы. W. Killing und H. Hovestadt. „Handbuch des mathematischen Unterrichts“. *В. Кагана.* — Книги и брошюры, поступившія въ редакцію. — Объявленія.

Къ 25-лѣтію „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики“.

Настоящимъ номеромъ заканчивается 25-лѣтіе „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики“. Это 25-лѣтіе фактическое, а не хронологическое: выходитъ въ свѣтъ послѣдній номеръ L-го семестра, которымъ редакція, по установившемуся въ научной журнальной литературѣ обычаю, заканчиваетъ первую серію. Въ дѣйствительности для выпуска этихъ 50 семестровъ потребовались лишніе два года, такъ какъ одно время журналъ находился въ затруднительномъ положеніи и выходилъ недостаточно правильно. Завершивъ такой большой періодъ, редакція естественно считаетъ необходимымъ дать краткія свѣдѣнія о возникновеніи журнала и объ его развитіи за четверть вѣка, ознакомить читателей съ условіями своего труда и дѣятельности,

со своими взглядами и надеждами на будущее. Не ограничиться формальнымъ сообщеніемъ, а по возможности дѣйствительно очертить то, что вынесено руководителями дѣла изъ опыта въ теченіе четверти вѣка, — такова цѣль настоящей заключительной статьи.

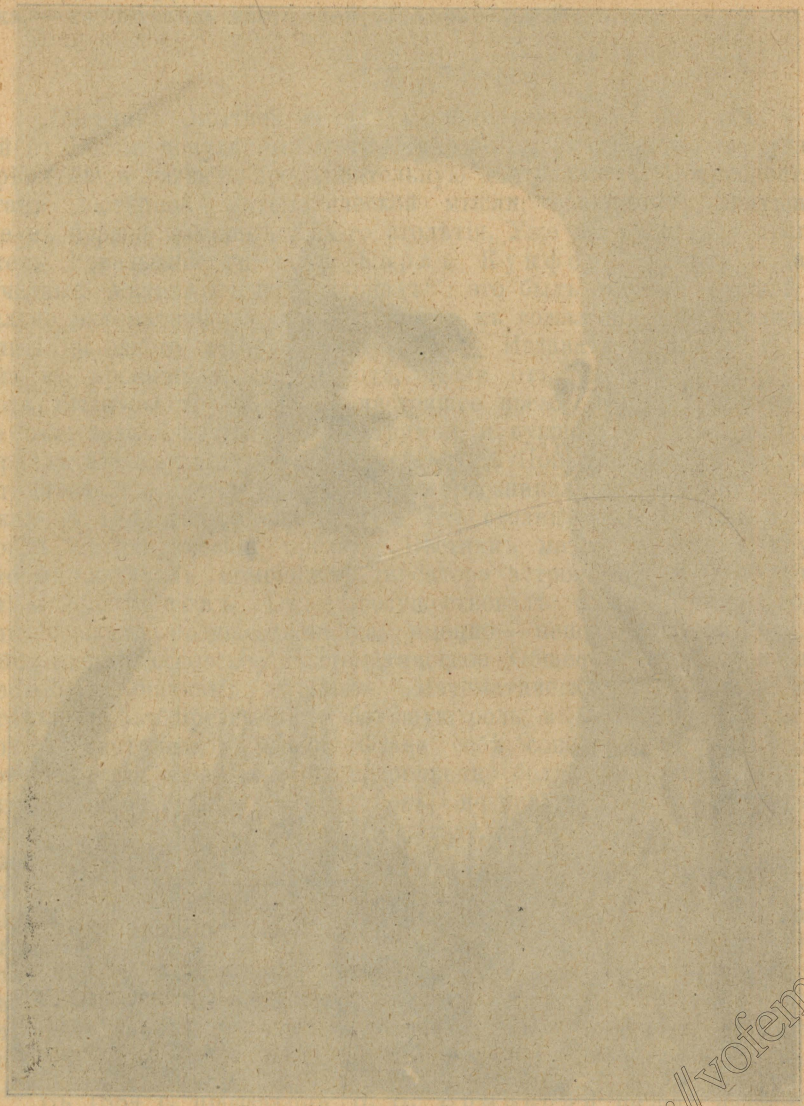
„Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики“ — первый въ Россіи популярный математическій журналъ, которому удалось укрѣпиться и развить продолжительную дѣятельность. Потребность въ органѣ доступной математической мысли, повидимому, ощущалась еще въ первой половинѣ XIX-го столѣтія. Уже въ 1833 году преподаватель Ревельской гимназіи Карлъ Купферъ началъ издавать „Учебный Математическій журналъ“; это былъ первый русскій спеціально математическій органъ. Намъ, къ сожалѣнію, не удалось получить ни одного номера этого изданія. Издавать спеціальный журналъ въ провинціальномъ городѣ, вдали отъ университетскихъ центровъ, было бы трудно и въ настоящее время. Въ ту раннюю пору это была задача почти неосуществимая, и нужно удивляться тому, что журналъ все же просуществовалъ два года. Попытка создать доступный математическій органъ послѣ этого не возникала въ теченіе четверти вѣка. Въ 1861 году, также вдали отъ столицъ, въ Вильнѣ возникъ второй математическій органъ „Вѣстникъ математическихъ наукъ“, который издавалъ помощникъ директора астрономической обсерваторіи М. М. Гусевъ. Онъ просуществовалъ лишь однимъ годомъ больше своего предшественника, именно — неполныхъ три года. Съ 1866 года Московское Математическое Общество начало издавать спеціальный научный журналъ „Математическій Сборникъ“. Этотъ органъ сыгралъ чрезвычайно большую роль въ исторіи развитія русской математической мысли. Ставя себѣ совершенно иныя задачи, этотъ журналъ находился въ несравненно болѣе благопріятныхъ условіяхъ; онъ не искалъ сотрудниковъ, не долженъ былъ приноравливаться къ опредѣленному уровню читателей, а главное — онъ не нуждался въ средствахъ. Но важнѣе всего то, что оказалось достаточно силъ интеллектуальныхъ, чтобы съ достоинствомъ вести руководящій научный органъ. То была эпоха мощнаго подъема русскаго просвѣщенія — при широкомъ общемъ развитіи высшаго образованія стали заполняться и математическія аудиторіи; такимъ образомъ, нарасталъ контингентъ лицъ, интересовавшихся точнымъ знаніемъ; нарождался читатель для болѣе доступнаго органа, который и былъ призванъ къ жизни на сей разъ высоко компетентнымъ лицомъ.

Въ 1884 г. профессоръ В. П. Ермаковъ началъ издавать въ Кіевѣ популярно-научный журналъ подъ названіемъ „Журналъ Элементарной Математики“. Изъ вступительной статьи редактора видно, что это рѣшеніе было принято послѣ продолжительныхъ колебаній, споровъ и, главное, послѣ тщательнаго обсужденія задачъ новаго изданія. Перечитывая нѣсколько разъ эту статью, чтобы сдѣлать извлеченія, мы затруднились что-либо изъ нея опустить. Мы воспроизведемъ здѣсь ее цѣликомъ. Она выражаетъ взгляды на задачи



Проф. В. П. Ермаковъ.

Основатель, редакторъ и издатель „Журнала Элементарной Математики“.



http://vofem.ru

элементарнаго математическаго органа основателя журнала, дѣтищемъ котораго является „Вѣстникъ Опытной Физики“. Руководители „Вѣстника“ всегда имѣли въ виду эту программу, и теперь, почти черезъ 30 лѣтъ, интересно выяснить, въ какой мѣрѣ журналъ пошелъ по намѣченному пути, въ какую сторону онъ уклонился и чѣмъ это было вызвано.

Журналъ предназначается для преподавателей, учениковъ высшихъ классовъ и вообще для всѣхъ любителей математики.

По элементарной математикѣ у насъ не имѣется почти никакой литературы, за исключеніемъ развѣ однихъ учебниковъ; между тѣмъ съ каждымъ годомъ чувствуется въ такой литературѣ все болѣе и болѣе настоятельная потребность. Преподаватель математики, попадая по окончаніи университета въ какой-нибудь губернскій городъ, по неимѣнію подходящей библіотеки, не можетъ, если бы даже и желалъ, продолжать свои занятія по высшей математикѣ. Впрочемъ, большинство лицъ, окончившихъ университеты, не имѣетъ охоты къ занятіямъ высшей математикой; эта наука — удѣлъ немногихъ; но всѣ эти лица, однако же, съ удовольствіемъ слѣдятъ за всѣми новостями въ области элементарной математики.

Прежде всего Редакція считаетъ нужнымъ выяснить свои взгляды на содержаніе, цѣль и значеніе предполагаемаго журнала.

Самый важный предметъ въ области элементарной математики есть, безспорно, геометрія. Въ геометріи самый трудный вопросъ есть вопросъ о рѣшеніи задачъ на построеніе фигуръ. Мы предполагаемъ въ рядѣ небольшихъ статей выяснить методы и пріемы рѣшенія геометрическихъ задачъ. Съ этой цѣлью намъ придется коснуться теоріи гармоническаго дѣленія, что мы причисляемъ къ элементарной геометріи. Сюда же, по нашему мнѣнію, относится и элементарная теорія эллипса, гиперболы и параболы, которую мы намѣрены изложить.

Особенное вниманіе мы обратимъ на тѣ статьи изъ элементарной математики, которыя можно найти только въ рѣдкихъ учебникахъ. Такихъ статей весьма много; однѣ изъ нихъ на самомъ дѣлѣ относятся къ элементарной математикѣ, но не входятъ въ программы преподаванія; другія причисляются къ высшей математикѣ и входятъ отчасти въ курсъ университетскаго преподаванія.

Мы съ удовольствіемъ будемъ помѣщать также статьи по физикѣ, имѣющія цѣлью толковое и ясное изложеніе отдѣльныхъ физическихъ теорій. Еще съ большею охотою будемъ помѣщать извѣстія о новыхъ открытіяхъ и приборахъ по физикѣ, а также объясненія физическихъ и метеорологическихъ явленій.

Въ журналѣ будутъ помѣщаемы также тѣ статьи изъ высшей математики, которыя могутъ быть изложены пріемами элементарной математики. Изъ высшей алгебры въ числѣ другихъ статей будетъ помѣщено рѣшеніе уравненій третьей и четвертой степеней. Рѣшеніе этихъ уравненій будетъ поставлено въ связь съ условіями возможности рѣшенія геометрическихъ задачъ при помощи циркуля и линейки. Кое-что изъ теоріи чиселъ и анализа неопредѣленныхъ уравненій найдетъ мѣсто въ нашемъ журналѣ въ формѣ отдѣльныхъ

задачъ. Въ рядѣ отдѣльныхъ небольшихъ статей предполагается изложить всю элементарную теорію вѣроятностей. Особеннаго вниманія заслуживаютъ также методы древнихъ геометровъ, относящіеся къ вычисленію площадей и дугъ кривыхъ линій при помощи метода предѣловъ и метода безконечно малыхъ. Принимая во вниманіе также интересы реальныхъ училищъ, изрѣдка будутъ помѣщаться задачи по механикѣ и начертательной геометріи.

Намъ часто приходилось слышать мнѣніе, что научный журналъ, хотя бы и по элементарной математикѣ, не будетъ имѣть успѣха. Говорятъ, что наука у насъ будто бы въ упадкѣ, что вѣкъ нашъ по преимуществу практическій, что всѣ заражены стремленіемъ къ пріобрѣтенію матеріальнаго благосостоянія. Пускай такъ. Но самыми отвлеченными свѣдѣніями по математикѣ могутъ пользоваться и люди практическіе, даже исключительно занятые приращеніемъ своего матеріальнаго состоянія. Такъ, въ настоящее время одно изъ средствъ помѣщенія сбереженій и даже средствъ наживы доставляютъ процентныя бумаги, но о существѣ процентныхъ бумагъ знаютъ только немногіе. Конечно, не наше дѣло разбирать разнообразныя условія выпуска процентныхъ бумагъ; мы считаемъ себя обязанными выяснить только математическую сторону подобныхъ операцій. Намъ слѣдуетъ разсмотрѣть условія выпуска и погашенія процентныхъ бумагъ какъ съ выигрышами, такъ и безъ оныхъ. Мы дадимъ также формулы, по которымъ можетъ быть вычислена доходность процентныхъ бумагъ, принимая во вниманіе срокъ, на который онѣ выпущены, сроки и условія тиражей, номинальную и биржевую цѣны. У насъ также мало распространенъ обычай страхованія жизни, хотя и есть нѣсколько обществъ для застрахованія капиталовъ и пожизненныхъ доходовъ. Съ цѣлью выясненія пользы и условій подобнаго страхованія, мы предполагаемъ помѣстить таблицы смертности, а также таблицы и формулы для вычисленія премій при страхованіи жизни. Вообще мы охотно дадимъ мѣсто математическимъ вопросамъ изъ сферы коммерческой дѣятельности и вообще практической жизни.

Содержаніе статей, предполагаемыхъ къ печатанію въ нашемъ журналѣ, насколько это возможно, должно быть интересно для большинства любителей математики. Этой цѣли можно достигнуть толковымъ изложеніемъ уже извѣстныхъ отдѣловъ какъ по высшей, такъ, отчасти, и по низшей математикѣ. Конечно, можно придумать множество излишнихъ теоремъ и особенно удивительныхъ формулъ, которыя будутъ интересны развѣ только для самого автора. Есть такіе любители математики, которые, придумавъ двадцать одну формулу для логариѳмическаго модуля, воображаютъ, что они сдѣлали необыкновенныя открытія. Предупреждаемъ заранѣе, что подобнаго рода статьи не будутъ приняты къ печатанію. По содержанію и изложенію статьи должны быть таковы, чтобы онѣ могли быть поняты лицами, знакомыми съ курсомъ математики, преподаваемой въ гимназіяхъ. Изложеніе должно быть кратко, ясно, безъ излишнихъ формулъ. Мы, конечно, не противъ сложныхъ формулъ, но онѣ должны быть только тамъ, гдѣ безъ нихъ дѣйствительно нельзя обойтись.

Скажемъ еще нѣсколько словъ о тѣхъ желаніяхъ, которыя пришлось намъ слышать относительно предполагаемаго нами изданія.

Одни выражаютъ желаніе, чтобы страницы нашего журнала были открыты для педагогическихъ преній съ цѣлью уясненія методовъ и пріемовъ преподаванія математики. На это мы замѣтимъ, что основной педагогическій пріемъ

состоитъ въ краткости и ясности изложенія: поменьше теоріи и побольше упражненій и задачъ. Мы такъ много разсуждали о педагогическихъ пріемахъ, что подобныя пренія успѣли уже порядкомъ надоѣсть; къ тому же главные педагогическіе пріемы уже установились, а на мелочахъ едва ли мы сойдемся.

Другіе выражаютъ желаніе, чтобы въ журналѣ былъ отдѣлъ исторіи математики. На это нужно замѣтить, что подробное изложеніе исторіи математики не представляетъ интереса для большинства читателей и потому не годится для нашаго журнала. Можно, однако же, выбрать изъ исторіи нѣсколько интересныхъ статей хотя бы о томъ, какъ развивалось понятіе объ отрицательныхъ и мнимыхъ величинахъ, объ инерціи, какое объясненіе давали древніе нѣкоторымъ физическимъ явленіямъ, и т. п. Статьи подобнаго рода будутъ съ удовольствіемъ помѣщены въ журналѣ.

Третьи желаютъ имѣть въ журналѣ критическій отдѣлъ о вновь выходящихъ учебникахъ и другихъ книгахъ по математикѣ. На это нужно замѣтить, что о большинствѣ учебниковъ нельзя ничего сказать ни хорошаго ни дурного. Впрочемъ, если что-нибудь появится особенно замѣчательное въ математической литературѣ, мы всегда готовы объ этомъ сообщить.

Четвертые выражаютъ мнѣніе, что предполагаемый къ изданію журналъ долженъ исключительно состоять изъ задачъ и ихъ рѣшеній: каждый математическій вопросъ представляетъ наиболѣе интереса, если онъ предложенъ въ формѣ задачи. Таково было и наше первоначальное мнѣніе, и только глубокое убѣжденіе въ необходимости вообще математической литературы заставило насъ удѣлить задачамъ сравнительно небольшой отдѣлъ. Въ журналѣ будутъ помѣщены задачи по всѣмъ отдѣламъ элементарной математики. Мы покорнѣйше просимъ учителей предлагать эти задачи для рѣшенія желающимъ ученикамъ. Ученики могутъ присылать въ редакцію свои рѣшенія лично или черезъ преподавателей. Наилучшія рѣшенія, послѣ необходимаго исправленія, будутъ напечатаны.

Необходимо сказать нѣсколько словъ о характерѣ тѣхъ задачъ, которыя будутъ предложены въ журналѣ. Задачи должны быть типическія, немногословныя, но представляющія нѣкоторыя трудности для рѣшенія: только такія задачи способны возбудить надлежащій интересъ къ математикѣ. Мы будемъ по возможности избѣгать задачъ не только многословныхъ, но и такихъ, которыя рѣшаются на слишкомъ сложныхъ чертежахъ. Предлагая задачи въ нѣкоторой послѣдовательности, такимъ образомъ, чтобы на этихъ задачахъ выяснялись методы ихъ рѣшенія, мы принуждены будемъ помѣщать и такія задачи, рѣшеніе которыхъ извѣстно и можетъ быть найдено въ задачникахъ.

Изъ всего сказаннаго вытекаетъ, что единственная наша цѣль — популяризація математическихъ знаній. Но, быть можетъ, скажутъ: развѣ можно излагать популярно математику, развѣ можно излагать элементарно то, что можетъ быть изложено проще и яснѣе помощью высшей математики? Возраженіе серьезное, и мы убоялись бы его, если бы не имѣли извѣстныхъ въ ученомъ мірѣ предшественниковъ, которые отчасти стремились къ той же цѣли. Извѣстный ученый Гельмгольцъ нисколько не унизилъ своего достоинства, написавши нѣсколько прекрасныхъ статей по физикѣ. Скажутъ, впрочемъ, что изъ всей математики одна физика представляетъ въ этомъ отношеніи исключеніе. На это можно возразить, что древніе геометры не знали нашей высшей

математики и, однако же, умѣли рѣшать довольно трудные вопросы. Недавно умершій членъ Парижской Академіи наукъ, Шаль, показалъ, какихъ удивительныхъ результатовъ можно достигнуть въ геометріи, не прибѣгая ни къ методу Декарта ни къ дифференціальному исчисленію.

Въ концѣ концовъ, намъ приходится заранѣе извиниться, что мы много обѣщаемъ, но, можетъ быть, мало дадимъ. Мы далеко не успѣемъ исчерпать всего того богатаго матеріала, на который указано выше; но мы нарочито остановились на болѣе подробномъ выясненіи содержанія предполагаемаго журнала, такъ какъ мы неоднократно слышали мнѣніе, что подобный журналъ не можетъ долго просуществовать. Говорятъ, что въ два, три года исчерпается весь интересный матеріалъ и затѣмъ придется пробавляться помѣщеніемъ статей плохого качества; насколько справедливо подобное мнѣніе, предоставляемъ судить знатокамъ математической литературы. Повторяемъ, что намъ предстоитъ заботиться не о наполненіи журнала, а о выборѣ наилучшихъ статей.

Высказавши наши взгляды на предполагаемое изданіе, мы, однако же, далеки отъ того, чтобы считать себя безгрѣшными; очень возможно, что наши взгляды въ частности и даже въ цѣломъ ошибочны. Мы будемъ стараться, впрочемъ, угадать потребности большинства любителей математики; мы позволимъ себѣ только отчасти направлять эти потребности, по нашему убѣжденію, въ наиболѣе полезную сторону.

Мы покорнѣйше просимъ всѣхъ любителей математики и, въ особенности, лицъ, заботящихся о распространеніи математическихъ знаній, принять участіе въ нашемъ изданіи присылкою такихъ задачъ и статей, которыя бы по содержанію и изложенію подходили къ указанной нами программѣ.

По естественной осторожности, мы выбрали самый малый объемъ для журнала; но, чѣмъ меньше журналъ по объему, тѣмъ цѣннѣе онъ долженъ быть по содержанію. Журналъ будетъ выходить два раза въ мѣсяцъ, за исключеніемъ трехъ лѣтнихъ мѣсяцевъ, выпусками въ одинъ печатный листъ, а иногда и болѣе. Сообразно тому сочувствію, съ которымъ будетъ встрѣченъ нашъ журналъ, и денежнымъ средствамъ, объемъ можетъ быть увеличенъ; тогда, если выяснится потребность, могутъ быть открыты и нѣкоторые другіе изъ упомянутыхъ выше отдѣловъ.

Журналъ основанъ еще и съ тою цѣлью, чтобы привлечь къ участію въ немъ, главнымъ образомъ, преподавателей математики, чтобы дать имъ и средство для обогащенія и возможность дальнѣйшаго развитія ихъ математическихъ знаній. Но было бы весьма желательно и полезно, чтобы въ нашемъ изданіи приняли также участіе и лица, извѣстныя въ наукѣ; въ особенности это желательно въ первые годы существованія журнала: эти лица укажутъ намъ направленіе, которому мы будемъ слѣдовать далѣе. Спѣшимъ увѣдомить, что въ нашемъ журналѣ выразили желаніе принять участіе: профессоръ математики М. Е. Ващенко-Захарченко и профессоръ физики Н. Н. Шиллеръ.

Энергія, которую проявилъ В. П. Ермаковъ при осуществленіи этого новаго дѣла, воистину поразительна. Достаточно сказать, что въ теченіе перваго года существованія журнала, В. П. помѣстилъ

20 своихъ статей. Они охватываютъ различные отдѣлы элементарной математики въ полномъ согласіи съ намѣченной программой. Много задачъ оригинальныхъ и, большею частью, трудныхъ, темы для сотрудниковъ съ подробно разработаннымъ планомъ, статьи фактическаго содержанія и принципіальныя по своему значенію, полное отсутствіе статей педагогическаго характера — таково общее содержаніе журнала. Обозрѣвая отдѣльныя статьи, нужно сказать, что отъ всѣхъ ихъ вѣетъ свѣжестью, оригинальностью матеріала и мысли. Авторитетъ В. П. Ермакова, очевидно, объединилъ въ новомъ дѣлѣ наиболѣе живыя и интеллигентныя силы; но здѣсь чувствуется и накопившійся запасъ, ищущій себѣ выраженія. Небольшое число статей по физикѣ носитъ теоретическій характеръ, только статьи Э. К. Шпачинскаго относятся къ опытной физикѣ.

Можетъ быть, въ этомъ не такъ легко сознаваться руководителямъ дѣла черезъ четверть вѣка; но мы все же должны сказать, что то былъ лучшій періодъ существованія журнала. В. П. Ермакову и его сотрудникамъ удалось поставить „Журналъ Элементарной Математики“ на высоту европейскихъ органовъ того же характера, удалось снискать ему симпатіи среди любителей математики, создать ему постоянный контингентъ читателей.

Однако, какъ ни увлеченъ былъ В. П. Ермаковъ своей задачей, но удѣлять этому дѣлу долго столько труда было невозможно — для этого нужно было отдать журналу все свое время. Вотъ почему во второй годъ изданія журнала В. П. Ермаковъ сталъ подыскивать лицо, которому онъ могъ бы передать руководство налаженнымъ уже дѣломъ. Наиболѣе подходящимъ лицомъ былъ сотрудникъ журнала, уже завѣдывавшій въ теченіе второго года его существованія физическимъ отдѣломъ, Эразмъ Корнеліевичъ Шпачинскій. Въ статьѣ, помѣщенной памяти перваго издателя „Вѣстника Опытной Физики“ *), сообщены свѣдѣнія о прежней жизни и дѣятельности Э. К. Шпачинскаго и объ условіяхъ, при которыхъ онъ завоевалъ себѣ въ Кіевѣ мѣсто въ ученомъ кругу. В. П. Ермаковъ отнюдь не устранилъ себя отъ дѣятельнаго участія въ журналѣ, но, сохраняя за собой роль идейнаго руководителя и сотрудника, В. П. Ермаковъ счелъ себя вынужденнымъ передать остальной и громоздкій трудъ по изданію и веденію дѣла новому редактору. При этомъ рѣшено было удвоить размѣръ журнала и удѣлить больше мѣста физикѣ. Такъ какъ Э. К. Шпачинскій и по образованію своему стоялъ ближе къ физикѣ, чѣмъ къ математикѣ, то рѣшено было отмѣтить это и въ самомъ наименованіи журнала. Такимъ образомъ, вмѣсто „Журнала Элементарной Математики“ появился въ свѣтъ „Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики“, первый номеръ котораго вышелъ 21 августа 1886 года.

Новый руководитель журнала естественно предпосылаетъ первому номеру и свою вступительную статью. Хотя здѣсь съ первыхъ же

*) См. „Вѣстникъ“, № 577.

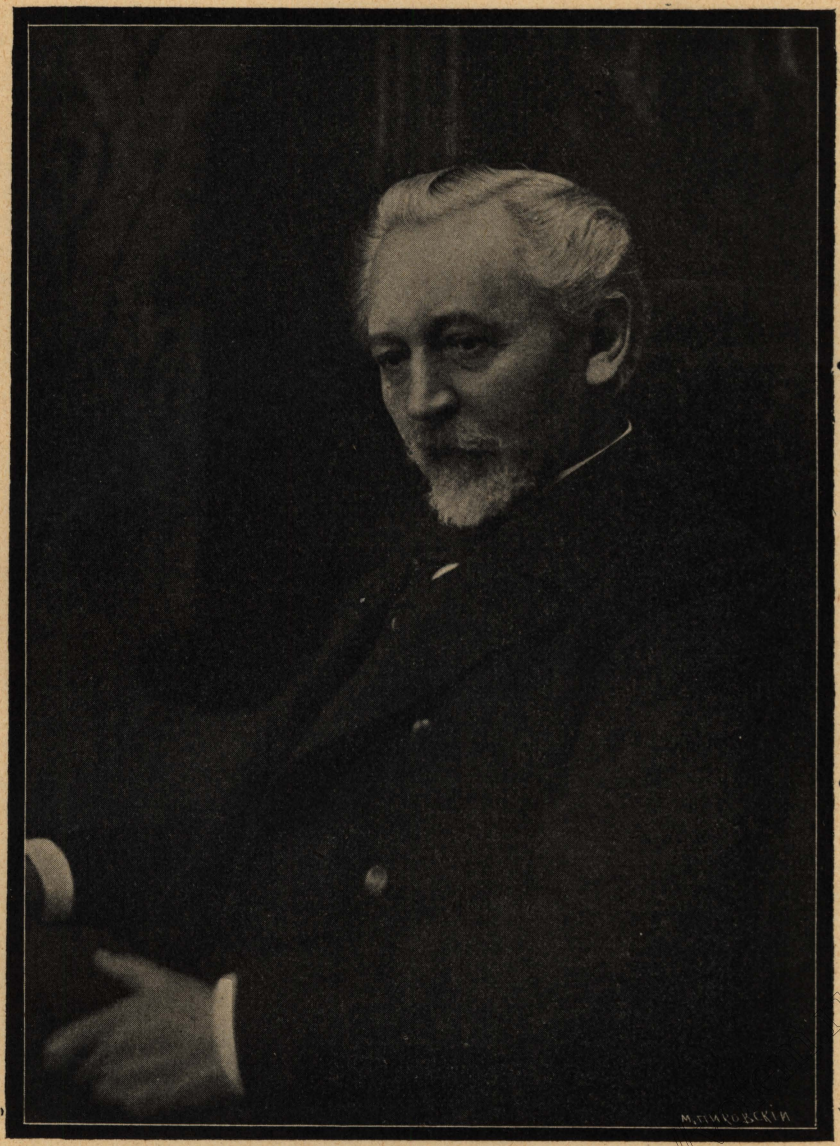
строкъ указывается, что „въ общемъ направленіе и основныя задачи новой редакціи не могутъ существенно отличаться отъ взглядовъ и тенденцій прежней“, но при внимательномъ чтеніи нельзя не видѣть въ этомъ вступленіи существенно иной взглядъ на задачи журнала.

„Журналъ нашъ предназначается преимущественно, но не исключительно для воспитывающагося въ нашихъ учебныхъ заведеніяхъ юношества и поэтому прежде всего будетъ стремиться удовлетворить, въ области физико-математическихъ наукъ, той потребности къ расширенію умственнаго кругозора, которая въ особенности сильно заявляетъ свои права въ юношескомъ возрастѣ, обнаруживаясь въ средѣ учащейся молодежи всегда въ видѣ непреодолимаго стремленія знать больше, чѣмъ положено знать по офиціальной программѣ“.

Итакъ, на первый планъ ставятся интересы учащихся. Это обязываетъ редакцію нѣсколько понизить уровень журнала, такъ какъ „Журналъ Элементарной Математики“ несомнѣнно стоялъ выше этихъ задачъ. Во вторую очередь выдвигаются интересы преподавателя; имъ отводится спеціальный педагогическій отдѣлъ, отъ котораго В. П. Ермаковъ довольно категорически отрекался. Этотъ педагогическій отдѣлъ имѣетъ цѣлью „способствовать разъясненію различныхъ педагогическихъ вопросовъ, поскольку они относятся къ преподаванію физики и математики“.

Однако, по существу первые номера новаго журнала мало отличаются отъ „Журнала Элементарной Математики“. Мы находимъ здѣсь тѣхъ же сотрудниковъ съ В. П. Ермаковымъ во главѣ, приблизительно такія же статьи, темы и задачи; даже физическій отдѣлъ нарастаетъ лишь съ 3-го, 4-го семестра. Надъ журналомъ еще витаетъ духъ В. П. Ермакова. Да позволено намъ будетъ отмѣтить, что въ № 1 журнала можно найти и фамилію теперешняго его редактора, тогда еще ученика 7-го класса Екатеринославской гимназіи.

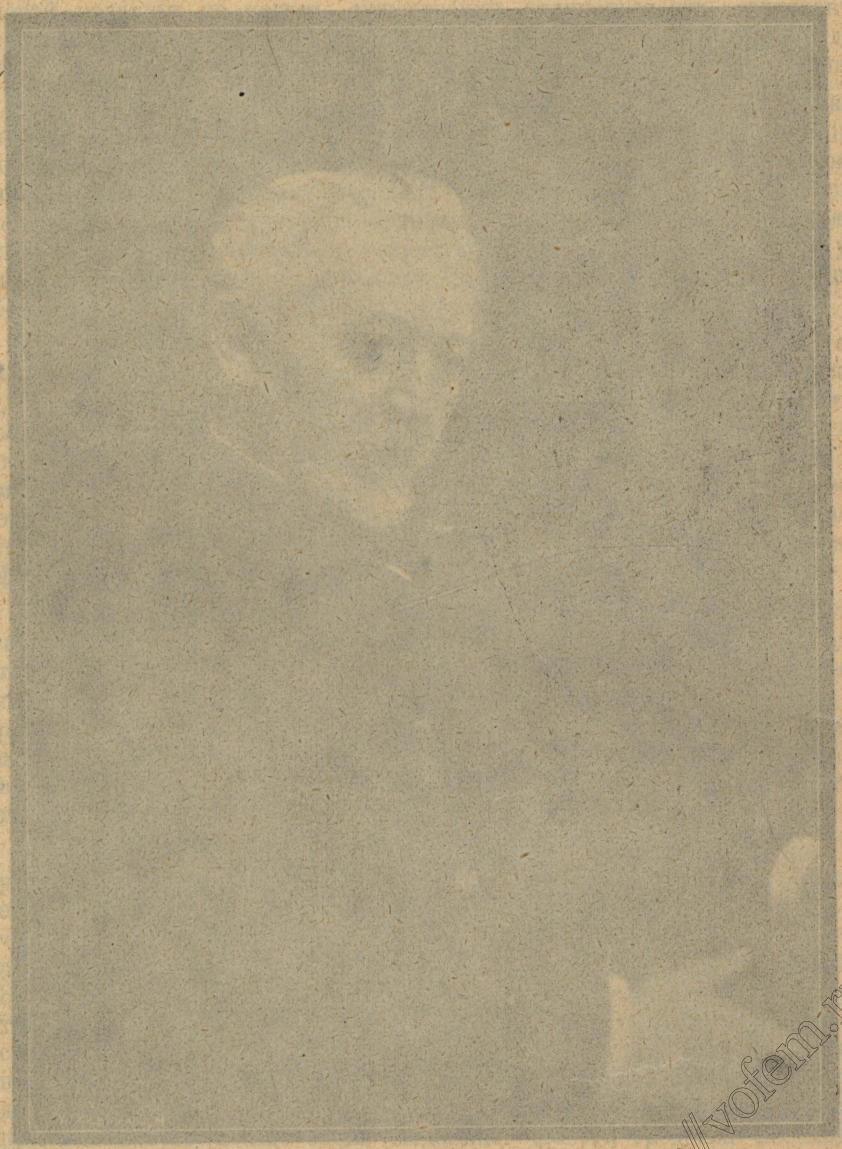
Принимая на себя изданіе „Вѣстника“, Э. К. Шпачинскій разсчитывалъ посвятить себя этому дѣлу цѣликомъ. Какъ онъ, такъ и его вдохновители разсчитывали, что журналъ разовьется, кругъ его читателей расширится и при нѣкоторой поддержкѣ Министерства Народнаго Просвѣщенія, съ одной стороны, при скромныхъ требованіяхъ Э. К. Шпачинскаго, съ другой стороны, журналъ сможетъ оплатить трудъ редактора и дастъ ему возможность посвятить этому дѣлу всѣ свои силы. Этому, однако, не суждено было сбыться. Когда число подписчиковъ возросло, приблизительно, до 500 и бюджетъ журнала вмѣстѣ съ субсидіей составилъ немного болѣе 3000 рублей, то дальнѣйшее нарастаніе пріостановилось и шло очень медленно. На эти средства необходимо было отпечатать и разослать около 40 печатныхъ листовъ; уже одно это въ ту пору поглощало свыше 2400 рублей. Что могло остаться редактору-издателю, даже если онъ несъ всю черную работу? А между тѣмъ трудъ возрасталъ, такъ какъ другіе сотрудники, вкладывавшіе по началу много труда, понемногу остыли и предоставили все дѣло „отвѣтственному редактору-издателю“. То было очень тяжелое разочарованіе, настоящая жизненная драма, такъ какъ съ надеждой на под-



Эразмъ Корнеліевичъ Шпачинскій.

Основатель и редакторъ-издатель „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики“ съ 1886 г. по 1898 г.

Скончался 6-го ноября 1912 г.



Граф Корнелий Шапинский.

Основатель и редактор-издатель „Вестника Опытной Физики и Элемен-
тарной Математики" с 1886 г. по 1898 г.

Скончался 6-го ноября 1912 г.

http://vofem.ru

держку журнала у Э. К. Шпачинскаго были связаны и другія надежды — получить возможность посвятить себя научной дѣятельности.

Убѣдившись въ томъ, что эти надежды представляли собой однѣ лишь мечты и проведши 5 лѣтъ въ очень трудныхъ матеріальныхъ условіяхъ, Э. К. Шпачинскій былъ вынужденъ искать другихъ средствъ къ существованію. Въ 1891 г. онъ поступилъ на службу въ канцелярію попечителя Одесскаго учебнаго округа и переѣхалъ въ Одессу, куда и перенесъ свой журналъ. Теперь для Э. К. Шпачинскаго наступило нѣсколько болѣе благопріятное время, — но зато въ худшихъ условіяхъ оказался его журналъ. Э. К. Шпачинскій былъ занятъ почти весь день на службѣ и могъ посвящать журналу только вечеръ. Съ другой стороны, лица, оказывавшія Э. К. дѣятельную поддержку, находились далеко отъ него, а большое разстояніе — лучшее средство для охлажденія. Если къ этому прибавить, что всѣ эти обстоятельства охладили пылъ Э. К., что его семья видѣла въ „Вѣстникѣ“, поглощавшемъ его досугъ, своего рода злой рокъ, что редакторъ, стоя теперь у посторонняго дѣла, не могъ достаточно слѣдить за наукой, то станетъ ясно, почему это дѣло мало-по-малу становилось для Э. К. Шпачинскаго невыносимымъ. Само собою разумѣется, что все это не могло не отразиться на журналѣ. Наступилъ даже кризисъ, такъ какъ редакторъ былъ не въ силахъ своевременно выпускать номера. Это были трудные годы „Вѣстника“, о которыхъ мы говорили выше.

Имѣя возможность удѣлить „Вѣстнику“ только свой досугъ, Э. К. Шпачинскій пригласилъ, въ качествѣ секретаря и помощника, молодого студента В. А. Гернета. Сначала секретарь велъ только письмоводство и корректуру, но мало-по-малу къ нему стали переходить болѣе отвѣтственныя функціи, въ особенности, когда онъ закончилъ свое образованіе въ университетѣ. Молодой человѣкъ, готовившій себя къ научной дѣятельности, внесъ въ дѣло ту энергію, которой уже недоставало у редактора. По мѣрѣ того, какъ расширялся кругозоръ новаго сотрудника, какъ углублялась его научная работа и крѣпла почва подъ его ногами, онъ постепенно овладѣвалъ всѣмъ руководствомъ дѣла, — тѣмъ болѣе, что редакторъ охотно шелъ этому навстрѣчу. И когда этотъ переходъ совершился фактически, Э. К. Шпачинскій съ облегченнымъ сердцемъ передалъ дѣло официально въ болѣе молодыя руки. Двадцатый семестръ былъ выпущенъ еще Э. К. Шпачинскимъ; съ двадцать перваго издателемъ журнала состоитъ В. А. Гернетъ. Мы не повторяемъ здѣсь очень характерныхъ прощальныхъ строкъ Э. К. Шпачинскаго, такъ какъ онѣ были уже напечатаны въ № 1 текущаго года въ некрологѣ покойнаго основателя журнала.

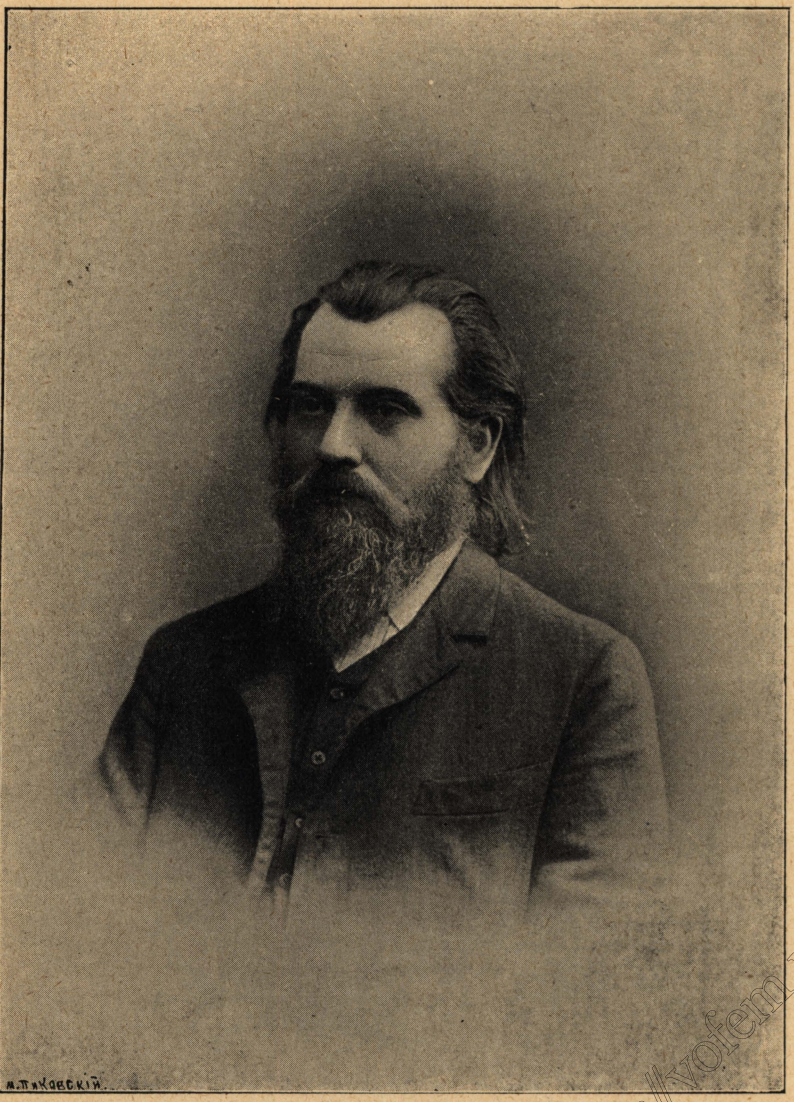
Будучи химикомъ по образованію, В. А. Гернетъ взялъ на себя изданіе журнала только послѣ того, какъ кружокъ Одесскихъ университетскихъ математиковъ твердо обѣщалъ ему свое содѣйствіе. Обязанности редактора взялъ на себя проф. В. А. Циммерманъ, но сдѣлалъ это лишь въ качествѣ официальнаго представителя совмѣстной работы. Фактически только тогда совершился переходъ журнала

отъ кіевской группы математиковъ къ одесской. Подъ предсѣдательствомъ новаго редактора состоялось совѣщаніе, въ которомъ было выработано заявленіе новой редакціи. Въ этомъ совѣщаніи приняли участіе слѣдующія лица: Е. Л. Буницкій, В. А. Гернетъ, проф. И. М. Занчевскій, прив.-доц. В. Ф. Каганъ, проф. И. В. Слешинскій, прив.-доц. И. Ю. Тимченко и С. О. Шатуновскій. Этотъ кругъ почти весь и остался фактически вдохновителемъ одесскаго физико-математическаго журнала; впослѣдствіи къ нему присоединились ученики этихъ лицъ, посвятившіе себя научной работѣ. Не всѣ въ равной мѣрѣ принимали прямое участіе въ изданіи; въ различное время, въ зависимости отъ хода собственныхъ работъ, одни стояли ближе къ нему, другіе дальше. Но благодаря тѣсному общенію и царящей въ одесской математической группѣ согласной работѣ можно категорически сказать, что журналъ всегда отражалъ на себѣ взгляды и настроеніе всего кружка. Заявленіе же, опубликованное новой редакціей, служило и служитъ выраженіемъ взглядовъ, которыхъ руководители дѣла придерживаются и по настоящее время. Мы приводимъ это заявленіе цѣликомъ.

Желая выяснить свой взглядъ на цѣль и назначеніе «Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики», новая редакція исходитъ изъ той мысли, что у извѣстной части русской публики существуетъ въ большей или меньшей степени интересъ къ точнымъ наукамъ. Поддержаніе и возможно большее распространеніе этого интереса и составляетъ цѣль нашего журнала. Тѣ средства, которыми журналъ располагаетъ, и, вообще, тѣ условія, при которыхъ онъ существуетъ, слѣдующимъ образомъ опредѣляютъ, по мнѣнію редакціи, его значеніе, соотвѣтственно вышеуказанной цѣли.

Лица, ознакомившіяся съ элементарною математикою и физикою въ объемѣ курсовъ среднихъ учебныхъ заведеній, должны находить въ этомъ журналѣ матеріалъ, служащій къ самостоятельному примѣненію, къ расширенію и болѣе глубокому усвоенію пріобрѣтенныхъ знаній. Для тѣхъ, кто съ успѣхомъ занимается самостоятельными изслѣдованіями въ областяхъ, входящихъ въ программу «Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики», этотъ журналъ долженъ являться проводникомъ въ свѣтъ добытыхъ ими результатовъ. Наконецъ, преподающимъ математику и физику и, вообще, лицамъ, которыя интересуются вопросами, относящимися къ преподаванію элементарной математики и физики, журналъ долженъ предоставлять свои страницы для возбужденія и обсужденія такихъ вопросовъ.

Понимая такимъ образомъ назначеніе журнала, редакція, во-первыхъ, будетъ попрежнему помѣщать въ немъ задачи на разные отдѣлы элементарной математики и физики, при чемъ будетъ печатать имена приславшихъ правильныя рѣшенія; во-вторыхъ, имѣетъ въ виду печатать статьи оригинальныя и переводныя, способныя шире и глубже освѣтить вопросы элементарной математики и физики, а также статьи и замѣтки, содержащія новые результаты изъ той же области начальной математики и физики; въ-третьихъ, выдѣляетъ особый отдѣлъ, посвященный вопросамъ преподаванія математики и



В. А. Гернетъ.

Издатель „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики“ съ 1898 г.

http://kofem.ru

В. А. Гернет.

http://vofem.ru



Проф. В. А. Циммерманъ.

Редакторъ „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики“
съ 1898 г. по 1904 г.

http://vofem.ru

Проф. В. Ф. Цимерманъ.

Редакторъ „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики“
съ 1898 г. по 1904 г.

http://vofem.ru

физики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ, и приглашаетъ лицъ, занимающихся и интересующихся дѣломъ преподаванія, содѣйствовать успѣху этого — надѣемся, полезнаго — отдѣла какъ возбужденіемъ, такъ обсужденіемъ и рѣшеніемъ дидактическихъ вопросовъ.

Кромѣ того, редакція имѣетъ въ виду сохранить слѣдующіе прежніе отдѣлы: обзоръ иностранныхъ журналовъ, научную хронику, отдѣлъ разныхъ извѣстій и математическихъ мелочей.

Считаемъ возможнымъ прибавить, что, стремясь къ болѣе успѣшному выполненію намѣченной программы, редакція заручилась содѣйствіемъ нѣкоторыхъ профессоровъ Новороссійскаго Университета.

Съ этого времени въ руководство дѣломъ опять вкладывается достаточно энергіи, журналъ вновь начинаетъ выходить правильно, и кругъ его читателей расширяется. Въ 1902 г. въ составъ редакціи въ качествѣ второго редактора входитъ прив.-доц. В. Ф. Каганъ, принимавшій и раньше дѣятельное участіе въ веденіи дѣла. Съ 1904 г. В. Ф. Каганъ становится единственнымъ офиціальнымъ руководителемъ дѣла; но и моральную, и идейную, и фактическую поддержку онъ всегда находилъ въ кругу одесской математической группы. Непрерывную и, главное, неослабную поддержку редакторъ всегда получалъ отъ приватъ-доцента Е. Л. Буницкаго, который въ теченіе 15 лѣтъ безсмѣнно завѣдуетъ труднымъ и отвѣтственнымъ отдѣломъ задачъ.

Да позволено будетъ теперь къ ряду приведенныхъ выше редакціонныхъ заявленій присоединить еще одно, на сей разъ ретроспективное, выражающее взглядъ на задачи журнала, на его настоящее и будущее, лицъ, ведущихъ журналъ въ теченіе продолжительнаго времени и стоящихъ во главѣ его въ день 25-лѣтняго юбилея. Это будетъ, впрочемъ, скорѣе не заявленіе, а соображенія, являющіяся, главнымъ образомъ, результатомъ продолжительнаго опыта.

Всѣ заявленія начинаются съ вопроса о томъ, для кого предназначается журналъ. Теперь мы можемъ измѣнить его постановку, мы должны сказать, кто читаетъ нашъ журналъ. Подавляющее большинство читателей „Вѣстника“ — преподаватели гимназіи; это, такъ сказать, основное ядро. Къ нимъ присоединяются, по большей части, по ихъ же иниціативѣ и указанію, учащіеся среднихъ учебныхъ заведеній, интересующіеся почти исключительно отдѣломъ задачъ. Далѣе слѣдуютъ студенты-математики и техники и, наконецъ, группа свободныхъ любителей математики.

Что даетъ этимъ лицамъ журналъ, что онъ долженъ имъ давать и что онъ можетъ имъ дать? Что стоитъ на пути осуществленія его задачъ?

Средняя школа, ея учащіе и учащіеся, таковъ, какъ мы сказали, контингентъ лицъ, которыхъ «Вѣстникъ» долженъ обслуживать. Но вести журналъ такъ, чтобы его матеріалъ былъ равно интересенъ преподавателю и ученику, невозможно. Не исключена, конечно, возможность, что то или иное одаренное лицо напишетъ статью, которую съ одинаковымъ интересомъ прочтетъ и учитель и хорошій ученикъ. Бываетъ и такъ, что статья, по существу своему, интересна для преподавателя и доступна ученику. Но такія статьи составляютъ исключеніе. Въ общемъ и среднемъ матеріалъ долженъ быть разсчитанъ либо на преподавателя, либо на учениковъ. Э. К. Шпачинскій, какъ мы видѣли, поставилъ въ своемъ заявленіи интересы учениковъ на первомъ мѣстѣ. Это обязывало его приноровить уровень журнала къ интересамъ учащихся; но это сдѣлано не было — и, по глубокому нашему убѣжденію, это и не можетъ быть выполнено, если не сдѣлать журнала спеціально ученическимъ. Трудно сказать, осуществимо ли что-либо подобное. Въ европейской литературѣ есть только одинъ такой журналъ „Journal des mathématiques élémentaires“ Vuibert'a. Но онъ составленъ исключительно изъ задачъ, среди которыхъ изрѣдка промелькнетъ небольшая статейка. Нашъ журналъ приноравливается поэтому къ уровню преподавателя. Для учениковъ и притомъ для лучшихъ, одаренныхъ учениковъ предназначаются задачи и сравнительно небольшое число статей, подходящихъ подъ уровень знанія начинающаго юноши. Для насъ не подлежитъ сомнѣнію, что и это играетъ большую роль для тѣхъ учащихся, которыхъ преподаватели умѣютъ этимъ заинтересовать. И именно руководство преподавателя здѣсь необходимо, такъ какъ задачи почти всегда требуютъ, если не болѣе широкихъ, то болѣе глубокихъ познаній, нежели тѣ, которыя даетъ общій курсъ школы. Когда просматриваешь фамиліи учениковъ, рѣшившихъ задачи въ журналѣ, систематически мелькаютъ имена людей, посвятившихъ себя наукѣ. Вотъ ученикъ полтавской гимназіи Г. Вороной (†), ученикъ екатеринославской гимназіи В. Каганъ, ученикъ Кіевской гимназіи Н. Бѣлянкинъ (†), ученикъ одесской гимназіи Ю. Рабиновичъ (теперь приватъ.-доцентъ въ Казани), М. Зиминъ изъ Ельца (теперь въ Новочеркасскѣ) и т. д., такихъ много. Не здѣсь ли они нашли первый импульсъ къ серьезнымъ занятіямъ математикой? Нынѣшній редакторъ за себя, во всякомъ случаѣ, можетъ отвѣтить на этотъ вопросъ утвердительно. Редакторъ отдѣла задачъ систематически наблюдаетъ, какъ юноша начинаетъ сначала рѣшать предлагаемыя задачи, затѣмъ начинаетъ самъ предлагать задачи, пока не выростаетъ до уровня другихъ отдѣловъ журнала.

Итакъ, для учениковъ — задачи и немногія статьи, остальное — для преподавателя. Что можетъ и долженъ дать журналъ преподавателю? Физика и элементарная математика находятся здѣсь въ различныхъ условіяхъ.

Физика находится въ состояніи быстраго и мощнаго развитія. Двадцатипятилѣтіе существованія журнала было эпохой несмѣняемыхъ замѣчательныхъ открытій, до корня измѣнившихъ мировоззрѣніе физика. Намъ кажется, что „Вѣстникъ“ откликался на весь этотъ рядъ



Прив.-доц. В. Ф. Каганъ.

Редакторъ „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики“ съ 1904 г.

http://rofem.ru



Прив.-доц. В. Ф. Каганъ.

Редакторъ „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики" съ 1904 г.

http://vofem.ru



Прив.-доц. Е. Л. Буницкій.

Редакторъ отдѣла задачъ съ 1896 г.

http://vofem.ru

Прив.-доц. Е. Л. Буницкій.
Редакторъ отдѣла задачъ съ 1896 г.

http://vofem.ru

научныхъ событій. Но два обстоятельства нужно имѣть въ виду при оцѣнкѣ того, что журналъ дѣйствительно даетъ. Во-первыхъ, журнальная статья не можетъ замѣнить руководство. Ея задача обратить лишь вниманіе на сущность новыхъ идей и открытій; полное развитіе этихъ идей можно найти сначала только въ оригинальныхъ работахъ, потомъ въ руководствахъ; замѣнить обстоятельныя сочиненія журналъ не въ состояніи. Кто ограничивается только статьями популярнаго, хотя бы и научно-популярнаго журнала, тотъ полнаго удовлетворенія своимъ запросамъ получить не можетъ. Во-вторыхъ, чтеніе научной статьи, хотя бы и популярной, требуетъ напряженія и вниманія, требуетъ часто справки и размышленія, требуетъ работы. Кто не можетъ или не хочетъ вложить этого труда, тотъ не получитъ удовлетворенія. Журналъ можетъ служить лишь подспорьемъ, руководящей нитью въ этомъ трудѣ, но не больше.

Въ элементарной математикѣ дѣло обстоитъ значительно иначе. Фактическій матеріалъ здѣсь является наслѣдіемъ частью еще античной математики, частью истекшихъ столѣтій. Молодой журналъ былъ здѣсь въ благопріятныхъ условіяхъ въ томъ отношеніи, что имѣлъ значительный матеріалъ, который могъ найти себѣ мѣсто на страницахъ новаго и перваго органа по элементарной математикѣ. Но въ этомъ отношеніи были правы тѣ, которые указывали, что элементарный матеріалъ будетъ въ короткое время исчерпанъ. Намѣченная въ этомъ отношеніи программа В. П. Ермакова была въ сравнительно короткое время выполнена имъ самымъ и его преемниками. Къ тому же за это время какъ въ иностранной, такъ и въ русской литературѣ появился рядъ сочиненій, широко охватывающихъ эти вопросы. Границы, отдѣляющія элементарные отдѣлы отъ высшихъ, въ математикѣ несомнѣнно рѣзче и глубже, нежели въ физикѣ. Глубокіе вопросы, составляющіе предметъ изысканій современной математики, въ подавляющемъ большинствѣ своемъ совершенно недоступны элементарному изложенію и популяризаціи. Это отражается рѣшительно на всѣхъ европейскихъ журналахъ, посвященныхъ элементарной математикѣ. Журналъ «L'Enseignement mathématique», который по первоначальной программѣ своей предназначался преимущественно для культивированія вопросовъ преподаванія и элементарной математики, въ 1913 г. не помѣстилъ ни одной статьи, посвященной дѣйствительно элементарной математикѣ. Въ журналѣ «Periodico di Matematica», опредѣленно предназначенномъ для элементарной математики, систематически преобладаютъ статьи по высшей математикѣ; да и остальныя статьи часто лишь съ большой натяжкой могутъ быть отнесены къ элементарной математикѣ.

Есть, однако, категорія идей, которымъ въ истекшей четверти вѣка было посвящено очень много работъ и которыя дѣйствительно лежатъ на границѣ элементарной и высшей математики. Это—вопросы обоснованія математики, вопросы, часто лежащіе на рубежѣ математики и логики. Эти вопросы, собственно, стали культивироваться еще въ первой четверти XIX столѣтія, но къ концу этого столѣтія интересъ къ нимъ сильно возросъ. Относящіяся сюда работы привели, можно ска-

зать, къ завершенію обоснованія началъ ариѳметики и геометріи; во всякомъ случаѣ, онѣ отодвинули исходные пункты далеко въ область логики. Вмѣстѣ съ тѣмъ эти идеи въ корнѣ измѣнили наши взгляды на сущность математическаго познанія, на его источники и начала. Эти идеи перебросились въ область механики и физики; кто стоитъ къ нимъ близко, тотъ съ кристаллической ясностью видитъ непосредственную преемственную связь съ ними того глубокаго переворота, который частью совершился, частью еще только начинается въ области теоретической физики и механики.

„Вѣстникъ“ всегда удѣлялъ много вниманія идеямъ обоснованія математики; и, можетъ быть, въ этомъ заключается наиболѣе существенное различіе между взглядами кіевской редакціи, стоявшей на почвѣ болѣе фактическихъ вопросовъ, и одесской. Но и тутъ мы должны повторить то, что уже сказано было выше: журналъ играетъ и можетъ играть здѣсь лишь роль руководящаго путеводителя, исчерпывающее же изложеніе предмета могутъ дать только обстоятельныя спеціальныя сочиненія.

Что касается педагогическихъ вопросовъ, то редакція теперь ближе всего примыкаетъ къ взглядамъ, высказаннымъ В. П. Ермаковымъ. Редакція всегда удѣляла и будетъ удѣлять время вопросамъ преподаванія математики, но вопросамъ кореннымъ, принципіальнымъ. Принципіальные вопросы могутъ, конечно, касаться также изложенія того или иного отдѣла, той или иной теоремы, если рѣчь идетъ о существенно другой постановкѣ вопроса или объ иной точкѣ зрѣнія. Но съ вопросами преподаванія связывается бездна разсужденій, предложеній и указаній, которымъ нѣтъ числа и значеніе которыхъ чрезвычайно незначительно. Этихъ статей въ редакцію присылается очень много, но отъ печатанія ихъ редакція вынуждена воздерживаться. Открывая съ настоящаго времени новый отдѣлъ подъ названіемъ „Изъ записной книжки преподавателя“, редакція склонна удѣлять эти страницы тѣмъ преподавателямъ, которые заносятъ въ свою записную книжку лишь замѣтки принципіальнаго значенія.

Мы обращаемся теперь къ наиболѣе острому, можно сказать, больному вопросу. Въ границахъ общепризнанной программы, въ отдѣлахъ, необходимо долженствующихъ найти себѣ мѣсто въ журналѣ, выполняетъ ли „Вѣстникъ“ все то, что отъ него можно было бы требовать, должно было бы требовать, какъ отъ руководящаго органа для преподавателей школы? Что объ этомъ думаютъ руководители дѣла?

Кто бы изъ лицъ, руководившихъ журналомъ въ теченіе слишкомъ 25 — 30 лѣтъ ни сталъ лицомъ къ лицу съ этимъ вопросомъ, онъ будетъ отвѣчать на него съ тяжелымъ сердцемъ. Не изъ скромности онъ не дастъ утвердительнаго отвѣта и не изъ ложнаго стыда воздержится отъ отрицательнаго. Онъ не дастъ утвердительнаго отвѣта потому, чо недостатки и слабыя стороны дѣла всегда виднѣе всего тому, кто его ведетъ; но онъ и не возьметъ на себя вины за то, что выходитъ за предѣлы его силъ. Онъ разскажетъ о „милліонѣ терзаній“, пережитыхъ и переживаемыхъ, но имѣющихъ, въ концѣ концовъ, одинъ

источникъ — недостатокъ средствъ. „Вѣстникъ“, по убѣжденію его издателей, достигъ у насъ того распространенія, дальнѣйшее нарастаніе котораго можетъ быть вызвано лишь органическимъ ростомъ школы и читателя. Значительно большаго распространенія безъ значительнаго же пониженія научнаго уровня журналъ, какъ намъ кажется, получить не можетъ: нѣтъ большаго контингента читателей. Для того, чтобы журналъ въ полной мѣрѣ выполнялъ свою задачу, прежде всего необходимо, чтобы онъ имѣлъ руководителя, который удѣлялъ бы ему не свой досугъ, а главную часть своего времени и труда. Необходимо, далѣе, чтобы журналъ систематически и прилично вознаграждалъ весь трудъ сотрудниковъ; иначе онъ всегда будетъ въ значительной мѣрѣ вынужденъ довольствоваться случайнымъ матеріаломъ. На этой именно точкѣ зрѣнія стояли основатели журнала при передачѣ его Э. К. Шпачинскому. Мы видѣли, что этимъ надеждамъ не суждено было сбыться. Виновны ли въ этомъ тѣ, которые вели журналъ? Мы въ этомъ сомнѣваемся. Мы думаемъ, что создать журналъ и укрѣпить его, вести въ теченіе 30 лѣтъ, постоянно его расширяя, при условіяхъ его существованія составляетъ огромный трудъ, и у лицъ, его выполнившихъ, врядъ ли что осталось въ дебетѣ. Врядъ ли кто-либо поставитъ Э. К. Шпачинскому въ упрекъ, что онъ на половинѣ этого пути воскликнулъ: „Господа, я усталъ!“.

Мы могли бы разсказать длинную повѣсть упорныхъ попытокъ наладить болѣе цѣлесообразно нѣкоторые отдѣлы, которые мы считаемъ для журнала насущными, и препятствій, о которыя эти старанія разбивались. Но мы не хотѣли бы теперь предаваться ламентаціямъ. Не впадая въ излишній оптимизмъ, мы все же въ правѣ разсчитывать, что вторая серія журнала восполнитъ многіе его дефекты, что наиболѣе трудная и упорная борьба за твердое существованіе журнала уже позади, что вторую четверть вѣка онъ закончитъ съ сознаніемъ дѣйствительно руководящаго значенія для своихъ читателей и для школы. Во всякомъ случаѣ энергія руководителей дѣла не ослабѣетъ и будетъ всецѣло направлена въ эту сторону.

Выпуская настоящій юбилейный номеръ, мы обратились къ ученымъ, не отказывавшимъ журналу въ сотрудничествѣ, съ просьбой прислать для него статьи. Мы почти ни отъ кого не получили отказа; напротивъ, мы не имѣли возможности помѣстить въ этомъ тройномъ номерѣ всего присланнаго матеріала и были вынуждены отложить нѣкоторыя статьи для начала слѣдующаго семестра. Это довѣріе и вниманіе къ журналу придаетъ его руководителямъ бодрость и укрѣпляетъ ихъ увѣренностъ въ признанную полезность затрачиваемаго труда.

Редакція приноситъ горячую благодарность всѣмъ лицамъ, содѣйствовавшимъ укрѣпленію журнала, сотрудникамъ, безкорыстно отдававшимъ свой трудъ дѣлу распространенія физико-математическихъ знаній, авторамъ, не отказавшимъ украсить своими статьями настоящій номеръ, которымъ заканчивается первая серія „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики“.

Уравненія движенія планеты около солнца.

Проф. В. Ермакова.

Эти уравненія даются въ каждомъ курсѣ механики; но онѣ даются въ формѣ слишкомъ сложной и мало удобной для вычисленія орбитъ. Этимъ уравненіямъ можно дать довольно простую форму. Извѣстно, что движеніе планеты происходитъ въ плоскости, проходящей черезъ центръ солнца. Примемъ эту плоскость за координатную плоскость; начало координатъ помѣстимъ въ центрѣ солнца. Обозначимъ координаты планеты черезъ x и y, разстояніе планеты отъ центра солнца обозначимъ черезъ r ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$), время—черезъ t. Уравненія движенія планеты будутъ:

$$x = (a\cos\tau + b\sin\tau)^2 - (c\cos\tau + d\sin\tau)^2,$$

$$y = 2(a\cos\tau + b\sin\tau)(c\cos\tau + d\sin\tau),$$

$$r = (a\cos\tau + b\sin\tau)^2 + (c\cos\tau + d\sin\tau)^2,$$

$$ht = (a^2 + c^2 + b^2 + d^2)\tau + \tfrac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2 - d^2)\sin 2\tau - (ab + cd)\cos 2\tau.$$

По этимъ формуламъ координаты и время выразятся довольно простыми формулами черезъ новое перемѣнное τ.

Написанныя уравненія соотвѣтствуютъ тому случаю, когда движеніе происходитъ по эллипсу. Если движеніе происходитъ по гиперболѣ, то косинусъ и синусъ тригонометрическіе должны быть замѣнены гиперболическими:

$$\cos\tau = \tfrac{1}{2}(e^{\tau} + e^{-\tau}), \quad \sin\tau = \tfrac{1}{2}(e^{\tau} - e^{-\tau}).$$

Тогда послѣднее уравненіе нѣсколько измѣнится и приметъ форму:

$$ht = (a^2 + c^2 + b^2 + d^2)\tau + \tfrac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2 - d^2)\sin 2\tau + (ab + cd)\cos 2\tau.$$

Въ этомъ уравненіи синусъ и косинусъ также гиперболическіе:

$$\cos 2\tau = \tfrac{1}{2}(e^{2\tau} + e^{-2\tau}), \quad \sin 2\tau = \tfrac{1}{2}(e^{2\tau} - e^{-2\tau}).$$

Если движеніе происходитъ по параболѣ (случай кометы), то уравненія движенія будутъ:

$$x = (a + b\tau)^2 - (c + d\tau)^2,$$

$$y = 2(a + b\tau)(c + d\tau),$$

$$r = (a + b\tau)^2 + (c + d\tau)^2,$$

$$t = (a^2 + b^2)\tau + (ab + cd)\tau^2 + \tfrac{1}{3}(b^2 + d^2)\tau^3.$$

http://vofem.ru

Во всѣхъ уравненіяхъ a, b, c, d и h суть нѣкоторыя постоянныя величины.

Я полагаю, что данныя мною уравненія найдутъ примѣненіе въ астрономіи, особенно при вычисленіи орбиты кометы. Главная трудность при этомъ вычисленіи заключается въ точномъ опредѣленіи положенія той плоскости, въ которой происходитъ движеніе планеты либо кометы. Если положеніе этой плоскости опредѣлено, то вычисленіе орбиты въ этой плоскости по даннымъ формуламъ совершается довольно просто по двумъ либо тремъ наблюденіямъ.

По этому поводу въ январской или февральской книжкѣ за 1914 годъ журнала „L'Enseignement Mathématique“ будетъ помѣщена небольшая замѣтка подъ заглавіемъ: „Sur une nouvelle méthode pour l'integration des équations du mouvement d'une planète autour du soleil“.

Horror absoluti.

Источникъ принципа относительности.

Проф. О. Д. Хвольсона.

За послѣднее время появилось множество популярныхъ изложеній*) принципа относительности, созданнаго въ 1905 г. Эйнштейномъ, такъ что исторія возникновенія этого принципа, основныя его положенія и важнѣйшіе изъ него выводы можно, въ настоящее время, считать общеизвѣстными. Тѣмъ не менѣе я позволю себѣ напомнить главнѣйшіе сюда относящіеся факты.

Допуская существованіе мірового эѳира, мы должны предположить, что онъ безусловно неподвиженъ, что движущееся тѣло вовсе не увлекаетъ съ собою находящагося въ немъ эѳира. По многимъ причинамъ, на которыхъ мы не останавливаемся, не можетъ быть ни малѣйшаго сомнѣнія въ такомъ свойствѣ эѳира, если только онъ дѣйствительно существуетъ. Черезъ неподвижный эѳиръ движется земля со скоростью, которую можно принять равной 30 *км.* въ секунду. Элементарнѣйшія соображенія, или, если угодно, здравый смыслъ, заставляютъ насъ съ увѣренностью ожидать, что движеніе земли черезъ неподвижный эѳиръ должно отпечатлѣться на тѣхъ явленіяхъ, которыя наблюдаются нами на поверхности земли, и которыя мы считаемъ за явленія, происходящія въ эѳирѣ. Главнѣйшее изъ нихъ — распространеніе свѣта.

Вообразимъ себѣ двухъ наблюдателей A и B, изъ которыхъ A устроился со своими приборами на открытой платформѣ, находящейся

---

*) См., напримѣръ, мою статью „Принципъ относительности“ въ журналѣ „Природа“ за ноябрь 1912 г. и отдѣльно — въ изданіи кн-ства „Естествоиспытатель“, 2-е изданіе, С.-Петербургъ, 1914.

около локомотива длиннаго поѣзда, быстро ѣдущаго по прямому пути, а B подобнымъ же образомъ помѣстился въ концѣ поѣзда. Не подлежитъ ни малѣйшему сомнѣнію, что, если бы эти наблюдатели стали опредѣлять времена t_1 и t_2, въ теченіе которыхъ звукъ проходитъ, соотвѣтственно, разстоянія отъ B до A и отъ A до B, то времена t_1 и t_2 оказались бы неравными, и притомъ $t_1 > t_2$. Дѣйствительно: если v есть скорость звука въ воздухѣ, опредѣленная обычнымъ способомъ покоющимися наблюдателями, w—скорость поѣзда и s—разстояніе AB, то $t_1 = s:(v-w)$ и $t_2 = s:(v+w)$. Зная разстояніе s и измѣривъ времена t_1 и t_2, наблюдатели легко вычислятъ величины v и w. Здѣсь предположено отсутствіе самостоятельнаго движенія воздуха, т. е. вѣтра.

Съ совершенно такою же степенью достовѣрности мы должны ожидать, что два наблюдателя A и B, опредѣляющіе на поверхности земли скорость c свѣта, должны получить различныя величины для c, въ зависимости отъ того, какъ расположена прямая AB относительно движенія земли въ пространствѣ. Какъ извѣстно, до сихъ поръ не существуетъ способа опредѣленія скорости свѣта, распространяющагося только отъ одной точки до другой (если не считать способа Рёмера); всѣ способы основаны на измѣреніи времени, въ теченіи котораго свѣтъ распространяется отъ одной точки до другой и обратно. Приходится сравнивать время распространенія свѣта отъ A до B и обратно съ временемъ распространенія свѣта отъ A до C и обратно, гдѣ AB равно AC и притомъ AB параллельно къ направленію движенія земли, а AC къ нему перпендикулярно. Простое вычисленіе показываетъ, что эти времена должны быть различны. Однако, точнѣйшіе опыты Майкельсона обнаружили, что такой разности не существуетъ. Къ такому же отрицательному результату привели и другія опытныя изслѣдованія, въ которыхъ элементарная логика заставляла ожидать вліянія движенія земли черезъ неподвижный эѳиръ.

Съ точки зрѣнія „здраваго смысла“ невозможно понять результаты этихъ изслѣдованій. Приходится отказаться отъ тѣхъ основъ, на которыя опирается выводъ здраваго смысла, отказаться отъ элементарнѣйшихъ представленій, всегда казавшихся намъ самоочевидными, принять другія основы и на нихъ строить новое міровоззрѣніе, новую физику.

Это и было сдѣлано Эйнштейномъ введеніемъ въ науку новаго принципа относительности. Всѣмъ извѣстно, въ какой мѣрѣ этотъ принципъ мѣняетъ основныя понятія о времени и о пространствѣ и къ какимъ, можно сказать, чудовищнымъ парадоксамъ онъ приводитъ. Напомнимъ о нѣкоторыхъ особенно характерныхъ чертахъ новаго ученія.

Ни абсолютнаго движенія ни абсолютнаго покоя не только фактически не существуетъ, но и самыя понятія о нихъ должны быть признаны лишенными всякаго смысла; отсюда вытекаетъ, что міровой эѳиръ не существуетъ, ибо, если бы онъ существовалъ, то покоющееся въ немъ тѣло пришлось бы признать находящимся въ абсолютномъ покоѣ.

Никакого мірового времени, одинаково текущаго на всѣхъ тѣлахъ вселенной, не существуетъ. На каждомъ изъ тѣлъ, обладающихъ относительными другъ къ другу движеніями, существуетъ свой потокъ времени, воспринимаемый и измѣряемый наблюдателями, находящимися на этихъ тѣлахъ. Понятія объ одновременности и о порядкѣ послѣдовательности двухъ событій теряютъ всякій смыслъ. Если наблюдатели A, B и C находятся на трехъ тѣлахъ, движущихся съ различными относительными скоростями, то можетъ случиться, что два событія P и Q будутъ происходить для A одновременно, между тѣмъ какъ для B событіе P имѣетъ мѣсто раньше событія Q, а для C, наоборотъ, Q раньше, чѣмъ P.

Гдѣ бы и при какихъ бы условіяхъ различные наблюдатели ни измѣряли скорость свѣта, они всегда получаютъ для этой величины одно и то же численное значеніе c, хотя бы одинъ изъ нихъ приближался къ источнику свѣта со скоростью $0{,}9\,c$, а другой удалялся отъ него съ такою же скоростью.

На такихъ-то странныхъ основахъ, противорѣчащихъ нашимъ простѣйшимъ представленіямъ, построено новое ученіе. Неудивительно, что оно приводитъ къ длинному ряду парадоксальныхъ слѣдствій, изъ которыхъ напомню только объ одномъ: если B движется по нѣкоторому направленію со скоростью v_1 относительно A, и C движется по тому же направленію со скоростью v_2 относительно B, то C движется относительно A не со скоростью $v_1 + v_2$, но со скоростью

$$u = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}.$$

Эта скорость никогда не можетъ быть больше c; при $v_1 = c$ и v_2 произвольномъ все же получается $u = c$; даже при $v_1 = c$ и $v_2 = c$ имѣемъ $u = c$.

Не станемъ указывать на другіе парадоксы; обратимся отъ принципа относительности къ живымъ людямъ, изучающимъ этотъ принципъ. Мы видимъ передъ собою удивительный фактъ психологическаго характера, въ которомъ необходимо разобраться.

Построеніе и исторія развитія принципа относительности, этого громаднаго зданія, поставленнаго на мѣсто старой науки, не могутъ не вызвать большого недоумѣнія. Ему посвящено свыше 350-ти работъ и спеціальный обширный учебникъ (Лауэ). Весьма большое число наиболѣе выдающихся и талантливыхъ ученыхъ всѣхъ странъ всецѣло принимаютъ новое ученіе и считаютъ его окончательно установленнымъ и навсегда включеннымъ въ сокровищницу науки. Какъ это объяснить?

Принципъ относительности производитъ впечатлѣніе перевернутой громадной усѣченной пирамиды, поставленной на весьма маленькое основаніе, еле поддерживающее ее въ устойчивомъ равновѣсіи. Этимъ основаніемъ служитъ одинъ единственный фактъ: опыты, которые должны были бы обнаружить движеніе земли черезъ неподвиж-

ный эѳиръ, дали отрицательный результатъ. И этого достаточно, чтобы заставить насъ: во-первыхъ, отказаться отъ всей физики, построенной трудами величайшихъ ученыхъ, и даже отъ всей Ньютоновской механики, которою жила и при помощи которой развивалась и расцвѣла наука въ теченіи двухъ столѣтій; во-вторыхъ, — кореннымъ образомъ измѣнить самыя элементарныя представленія, доступныя и, повидимому, ясныя маленькимъ дѣтямъ, понимающимъ, что значитъ „раньше“, „позже“ и „одновременно“, и отказаться отъ такихъ „истинъ“, которыя, благодаря ихъ самоочевидности, даже никогда не считалось нужнымъ формулировать; въ третьихъ, — допустить справедливость самыхъ курьезныхъ парадоксовъ, счесть ихъ вѣрными и соотвѣтствующими нѣкоторой, хотя и туманно представляемой реальной дѣйствительности. Добавимъ, что требуется долгая и настойчивая работа надъ самимъ собою, чтобы отучить себя мыслить по старому, заставить себя свыкнуться съ новымъ, чуждымъ намъ міровоззрѣніемъ и научиться мыслить и разсуждать по новому.

Неужели вышеупомянутый отрицательный результатъ небольшого числа опытовъ представляетъ единственный источникъ небывалаго переворота въ наукѣ, поразительнаго успѣха новаго ученія, заставившаго признать его, несмотря на страшное насиліе, которому оно подвергаетъ разумъ и мысли, и которое только-что было очерчено?

Трудно объяснить побѣдоносное шествіе принципа относительности, завоевавшаго въ немногіе годы почти весь міръ, упомянутымъ единственнымъ источникомъ, который назовемъ внѣшнимъ, ибо онъ сводится къ фактамъ, лежащимъ внѣ насъ, хотя и воспринимаемымъ нами обычнымъ способомъ,—нашими органами чувствъ, и подвергаемымъ нами же логической интерпретаціи.

Невольно зарождается мысль о существованіи второго источника принципа относительности, источника внутренняго, лежащаго внутри насъ и сводящагося къ опредѣленнымъ свойствамъ нашей психики, производящимъ воздѣйствіе на нашъ образъ мыслей и придающимъ, незамѣтно для насъ, этимъ мыслямъ опредѣленное направленіе.

Когда-то въ наукѣ существовало ученіе объ horror vacui мертвой, окружающей насъ природы; оно оказалось несостоятельнымъ и отъ него пришлось отказаться. Но, думается мнѣ, что внутри насъ существуетъ другой horror, глубоко засѣвшій въ тайникахъ нашей психики; его можно назвать horror absoluti. Мы глубоко убѣждены, хотя этого не сознаемъ, что ничего абсолютнаго, безотносительнаго нѣтъ и быть не можетъ, что все нами, такъ или иначе, воспринимаемое, обладаетъ характеромъ чего-то относительнаго.

Вотъ этотъ-то живой и дѣятельный въ насъ horror absoluti и слѣдуетъ признать вторымъ источникомъ принципа относительности. Подъ его, незамѣтнымъ для насъ, вліяніемъ показались намъ пріемлемыми не только странныя основы этого принципа, но и вытекающія изъ него парадоксальныя слѣдствія, и его наличность объясняетъ тотъ огромный успѣхъ, которымъ пользуется новая доктрина.

Не мнѣ, конечно, указывать, какую роль играло понятіе объ абсолютѣ въ различныхъ философскихъ системахъ; напомню лишь, что абсолютность считалась за атрибутъ только одного Божества.

Допустимъ, что horror absoluti существуетъ, что онъ дѣйствительно представляетъ сокровенное свойство нашей психики. Тогда является вопросъ: можно ли допустить, что самый фактъ его существованія внутри насъ служитъ косвеннымъ доказательствомъ справедливости основныхъ положеній принципа относительности, а именно, что и время есть понятіе относительное въ вышеуказанномъ смыслѣ слова, и что абсолютный покой и абсолютное движеніе суть понятія, лишенныя всякаго смысла?

Не противорѣчитъ ли такое перенесеніе нашихъ личныхъ переживаній, нашихъ субъективныхъ ощущеній на внѣшній объектъ широкому теченію современной научной мысли, которое стремится по возможности исключить все антропоморфное изъ науки о внѣшнемъ мірѣ? Это теченіе нашло особенно полное и рѣзкое выраженіе въ знаменитой рѣчи проф. Планка, прочитанной имъ въ концѣ 1908 года въ Лейденѣ. Въ этой рѣчи блестяще показано, въ какой мѣрѣ еще не такъ давно вся физика была насквозь пропитана антропоморфизмомъ, какъ на немъ основывалось дѣленіе физики на отдѣлы, какъ его роль постепенно уменьшалась, и какъ послѣдніе его слѣды должны будутъ исчезнуть при дальнѣйшемъ развитіи науки.

Однако, несмотря на великій авторитетъ этого знаменитаго ученаго, рѣшаюсь высказать мысль, что идеей объ изгнаніи антропоморфныхъ признаковъ изъ науки объ окружающихъ насъ явленіяхъ не слѣдуетъ чрезмѣрно увлекаться, не слѣдуетъ идти слишкомъ далеко, и вотъ по какой причинѣ. Весь человѣкъ, тѣломъ и душою, физически и психически, представляетъ продуктъ весьма сложной и продолжительной дѣятельности природы. Свойства его тѣла и его психики выработались подъ вліяніемъ окружающаго его міра, и они должны быть отголосками свойствъ этого міра. Съ такой — можетъ быть, и нѣсколько смѣлой — точки зрѣнія получаетъ глубочайшій смыслъ старинное изреченіе, что человѣкъ созданъ по образу и подобію Бога; надо только стать на точку зрѣнія пантеизма или прямо отождествлять понятіе о Божествѣ съ понятіемъ о природѣ.

Итакъ, свойства человѣка суть отголоски свойствъ природы, а потому не слѣдуетъ слишкомъ страшиться переносить антропоморфныя видимости и ощущенія на внѣшнюю природу. Наоборотъ! осторожное и критическое ихъ изслѣдованіе можетъ, въ отдѣльныхъ случаяхъ, дать намъ цѣнныя указанія при изученіи природы.

Внутренній нашъ horror absoluti можетъ для насъ служить убѣждающимъ, хотя нами и не сознаваемымъ, косвеннымъ доказательствомъ справедливости новаго принципа относительности. И онъ несомнѣнно сыгралъ эту роль! Онъ оказался вторымъ источникомъ новаго ученія, его могучимъ двигателемъ. Horror absoluti далъ этому ученію огромную силу, далъ ему возможность быстро овладѣть умами ученыхъ и сдѣлалъ пріемлемыми всѣ его причуды.

Слѣдя за современными спорами по вопросамъ, связаннымъ съ принципомъ относительности, я часто задавалъ себѣ вопросъ: не лучше ли отъ него отказаться, не допустить ли все-таки идею объ абсолютномъ движеніи въ пространствѣ? Но я каждый разъ ясно чувствовалъ, какъ этому рѣзко и настойчиво сопротивлялся глубоко и непоколебимо сидящій во мнѣ horror absoluti.

Возможный смыслъ теоріи квантъ.

Проф. Н. Умова.

1.

Неудачи, постигшія попытки вывести законы излученія и удѣльныхъ теплотъ исходя изъ Максвеллова распредѣленія энергій въ системѣ молекулъ или осцилляторовъ, привели, какъ извѣстно, Планка къ его гипотезѣ квантъ. Но причина этихъ неудачъ осталась невыясненной и, пока не воспослѣдуетъ соотвѣтственное объясненіе, нельзя считать гипотезу квантъ единственной, разрѣшающей задачу. Важность вопроса побуждаетъ меня высказать здѣсь ту точку зрѣнія, которая можетъ какъ объяснить безплодность прежнихъ попытокъ, такъ и указать тотъ путь, который приводитъ къ принятымъ въ настоящее время наукой законамъ, исходя и въ тѣсной, не формальной, связи съ Максвелловымъ распредѣленіемъ энергій и минуя гипотезу излученія порціями или квантами.

Въ основной формулѣ удѣльной теплоты при постоянномъ объемѣ

$$c_v = \frac{dU}{dT}, \qquad (1)$$

гдѣ T есть абсолютная температура, величина U представляетъ энергію неупорядоченныхъ движеній, существующихъ въ системѣ. Эта величина U является опредѣляющей и самый законъ излученія.

Вся задача сводится къ нахожденію вида этой функціи U. Кинетическая теорія, исходя изъ закона распредѣленія энергій по Максвеллу, даетъ для вычисленія атомныхъ или молекулярныхъ теплотъ выраженіе

$$U = \frac{q}{2} RT, \qquad (2)$$

гдѣ q есть число степеней свободы и R — газовая постоянная. Пользуясь этимъ выраженіемъ, мы получаемъ законы, несогласные съ опытомъ. Планкъ даетъ другое выраженіе для U, приводящее къ законамъ, согласнымъ съ опытомъ, и такъ какъ остается невыясненной причина

негодности формулы (2), то для энергіи неупорядоченныхъ движеній системы все-таки остаются два несогласимые между собой вида.

Противорѣчія исчезнутъ, если мы будемъ искать опредѣленія не абсолютнаго, а относительнаго неупорядоченнаго движенія.

Когда система нагрѣвается, она получаетъ тепло отъ нѣкотораго физическаго агента; когда она излучаетъ, тотъ же агентъ уноситъ ея теплоту. Все дѣло заключается въ томъ, какія движенія системы будутъ по отношенію къ этому агенту имѣть значеніе неупорядоченныхъ и упорядоченныхъ? Разграниченіе такихъ движеній, зависящее отъ соотношенія между свойствами агента и свойствами матеріи, не должно и не можетъ совпадать съ тѣмъ, которое производится нашимъ разумомъ на основаніи установленныхъ имъ категорій движеній. Становясь на такую точку зрѣнія, гипотеза квантъ получаетъ совершенно иной смыслъ, и въ основу разсужденій можетъ быть положено Максвеллово распредѣленіе энергій.

Отношеніе агента къ упорядоченнымъ движеніямъ электрическихъ индивидовъ, составляющихъ матерію, является вполнѣ опредѣленнымъ уравненіями электромагнитнаго поля. Но его отношеніе къ неупорядоченнымъ движеніямъ этихъ индивидовъ еще не установлено.

A priori очевидно, что неупорядоченныя движенія системы не должны обязательно дѣйствовать на агента, ее проникающаго, какъ таковыя, во всей своей совокупности. Въ зависимости отъ свойствъ и связей агента дѣйствіе на него неупорядоченныхъ движеній въ общемъ случаѣ разложится на двѣ части: неупорядоченную ($н$) и упорядоченную ($у$).

Такимъ образомъ, энергія $е$ молекулы или осциллятора системы по отношенію къ агенту представится суммою двухъ членовъ:

$$е = н + у. \qquad (3)$$

Упорядоченная часть, по самому своему смыслу, должна быть одинаковой для всѣхъ молекулъ и представляться непрерывной функціей температуры. Неупорядоченная же часть $н$ будетъ мѣняться отъ одной молекулы къ другой и вмѣстѣ съ временемъ для одной и той же молекулы.

Для всей энергіи системы мы получимъ выраженіе:

$$E = \Sigma н + Ny, \qquad (4)$$

гдѣ N есть число молекулъ. По смыслу энергіи U въ выраженіи (1), какъ энергіи неупорядоченныхъ движеній, примѣняя третью аксіому Ньютона къ взаимодѣйствію системы и агента, мы имѣемъ:

$$U = \Sigma н. \qquad (5)$$

Свойства агента мы будемъ представлять нѣкоторою моделью, именно свойствами нѣкотораго манометра. Неудачи попытокъ кинети-

http://rofem.ru

ческой теоріи объясняются, какъ увидимъ далѣе, тѣмъ, что въ ихъ основѣ лежитъ отождествленіе агента съ самымъ грубымъ манометромъ, опредѣляющимъ давленіе газа, неспособнаго воспринимать импульсы отдѣльныхъ группъ молекулъ, а только всей ихъ совокупности, опредѣляемой предѣлами энергій 0 и ∞. Для такого манометра, какъ будетъ показано, $\Sigma н = 0$, и въ формулу (1) вмѣсто U вставлялась энергія не неупорядоченныхъ движеній, а упорядоченныхъ.

Другимъ крайнимъ типомъ манометра, обладающимъ крайней чувствительностью, является демонъ Максвелла, способный воспринимать импульсы отдѣльныхъ молекулъ. Для него $y = 0$ и $e = н$.

Между этими крайними типами могутъ быть вставлены манометры, чувствительность которыхъ опредѣляется способностью воспринимать группы импульсовъ, энергіи которыхъ лежатъ между предѣлами: произвольнымъ E и другимъ $E + \varepsilon$, гдѣ величину ε мы будемъ считать пока опредѣляемой природою манометра и дробь $\frac{1}{\varepsilon}$ — мѣрою его чувствительности. Для обыкновеннаго манометра $\varepsilon = \infty$ и чувствительность равна 0; для демона Максвелла $\varepsilon = 0$ и чувствительность безконечно велика. Я займусь выясненіемъ свойствъ манометровъ общаго типа.

2.

Выкладки, приводимыя ниже, не заключаютъ въ себѣ ничего новаго: они имѣются въ статьяхъ Нернста, Зоммерфельда, Планка, Эйнштейна и др. Но они скомбинированы въ иномъ освѣщеніи, рѣшающемъ вопросъ методой, отличной отъ той, которая установлена гипотезой квантъ.

Ограничимся разсмотрѣніемъ граммъ-молекулы, индивиды которой обладаютъ двумя степенями свободы. Распредѣленіе энергій пусть слѣдуетъ закону Максвелла. Мы имѣемъ:

$$\frac{dN}{N} = Ae^{-\frac{E}{kT}}dE, \quad AkT = 1. \tag{6}$$

Здѣсь dN есть число индивидовъ, обладающихъ энергіей въ предѣлахъ между E и $E + dE$, $k = \frac{R}{N}$, N есть число Авогадро. Предполагаемъ, что манометръ способенъ воспринимать и подсчитывать импульсы группъ индивидовъ, опредѣляемыхъ предѣлами несомыхъ ими энергій E и $E + \varepsilon$, гдѣ ε есть постоянная. Обозначимъ черезъ N_i число индивидовъ, энергія которыхъ лежитъ между предѣлами E_i и $E_i + \varepsilon$.

Мы имѣемъ:

$$N_i = AN\int_{E_i}^{E_i+\varepsilon} e^{-\frac{E}{kT}}dE = Ne^{-\frac{E_i}{kT}}\left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\right). \tag{7}$$

Средняя энергія въ этой группѣ будетъ:

$$\overline{e_i} = \frac{1}{N_i}\int_{E_i}^{E_i+\varepsilon} EdN = E_i + kT - \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1}. \qquad (8)$$

Такимъ образомъ, нашъ манометръ выдѣлитъ изъ неупорядоченныхъ движеній системы неупорядоченную часть E_i, мѣняющуюся съ временемъ и отъ одной молекулы къ другой, и упорядоченную, остающуюся одинаковою для всѣхъ молекулъ. Обозначая послѣднюю черезъ ϱ, мы получимъ очевидное неравенство:

$$y = \varrho = kT - \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1} < \varepsilon. \qquad (9)$$

Эту величину можно представить еще въ такомъ видѣ:

$$y = \varrho = kT - \frac{kT}{1 + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{kT} + \frac{1}{6}\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)^2 + \cdots}. \qquad (I)$$

Найдемъ еще для всей системы энергію относительныхъ неупорядоченныхъ движеній, т. е.

$$U = \Sigma N_i E_i. \qquad (10)$$

Мы имѣемъ:

$$\int_0^{\infty} EdN = \Sigma N_i E_i + N\varrho. \qquad (11)$$

Отсюда по равенствамъ (6) и (9), обозначая черезъ $\overline{U}$ среднюю энергію относительныхъ неупорядоченныхъ движеній, найдемъ:

$$kT = \overline{U} + kT - \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1}, \qquad (12)$$

откуда

$$\overline{U} = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1}, \quad \text{или} \quad \overline{U} = \frac{kT}{1 + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{kT} + \frac{1}{6}\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)^2 + \cdots}. \qquad (II)$$

Это есть формула Планка. Искомое

$$U = N\overline{U}. \qquad (13)$$

Величина ε опредѣляется гипотезой Планка:

$$\varepsilon = h\nu, \qquad (III)$$

http://vofem.ru

гдѣ h есть извѣстная универсальная постоянная, а ν есть число естественныхъ колебаній молекулы въ секунду.

Разсмотримъ наши выраженія подробнѣе. Для манометра 1-го типа, свойства котораго отождествлялись въ существующихъ работахъ со свойствами агента, мы имѣемъ $\varepsilon = \infty$ и, согласно равенствамъ (I), (II), (III),

$$y = \varrho = kT, \quad \overline{U} = 0 \quad \text{и} \quad U = 0, \quad \nu = \infty.$$

Для другого крайняго типа, демона Максвелла, $\varepsilon = 0$ и

$$y = \varrho = 0, \quad \overline{U} = kT \quad \text{и} \quad U = NkT, \quad \nu = 0.$$

Этотъ типъ соотвѣтствуетъ безконечно длиннымъ волнамъ, и только для нихъ имѣетъ смыслъ подстановка величины NkT, равной RT, въ формулу (1).

При абсолютномъ нулѣ мы имѣемъ:

$$T = 0, \quad y = \varrho = 0, \quad \overline{U} = U = 0.$$

Для всѣхъ промежуточныхъ значеній ε, лежащихъ между 0 и ∞, величины y и U опредѣляются формулами (I), (II), (III) и для q степеней свободы

$$U = \frac{q}{2} N\overline{U}.$$

Для твердаго тѣла, при $q = 6$, получаемъ формулу Планка:

$$U = 3R \frac{\frac{h\nu}{k}}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Такимъ образомъ, теорія квантъ и излученія порціями, замѣна Максвелловскаго распредѣленія энергій Планковскимъ, устраняются слѣдующей гипотезой.

Эѳиръ обладаетъ различной степенью чувствительности по отношенію къ неупорядоченнымъ движеніямъ матеріальныхъ системъ.

Эта чувствительность зависитъ отъ числа естественныхъ колебаній молекулъ системы и представляется величиною $\frac{1}{h\nu}$, гдѣ h есть постоянная, зависящая отъ свойствъ эѳира и потому универсальная, а ν есть число естественныхъ колебаній молекулы системы.

Универсальность постоянной h получаетъ естественное объясненіе.

Москва.
Декабрь 1913 г.

Демокритъ и Архимедъ.

Прив.-доц. И. Ю. Тимченко.

Проклъ Діадохъ ученый философъ V-го столѣтія по Р. Х., въ своихъ комментаріяхъ на первую книгу Евклида помѣстилъ обзоръ исторіи математики, состоящій изъ извлеченій, заимствованныхъ имъ у древнѣйшихъ писателей, и служащій главнымъ источникомъ исторіи греческой геометріи до Евклида. Среди математиковъ, упоминаемыхъ Прокломъ, нѣтъ, однако, великаго философа V-го столѣтія до Р. Х. Демокрита, который пользовался въ древности славой выдающагося математика. Діогенъ Лаэртійскій обращаетъ вниманіе на то, что Платонъ, упоминающій почти всѣхъ древнихъ философовъ, нигдѣ не говоритъ о Демокритѣ; онъ говоритъ также и о томъ, что, по словамъ Аристоксена, Платонъ хотѣлъ сжечь всѣ сочиненія Демокрита, какія ему удалось собрать. Его отговорили отъ этого пиѳагорейцы Амоклъ и Плиній, увѣривъ его, что это безполезно, такъ какъ сочиненія Демокрита слишкомъ уже распространены и находятся во многихъ рукахъ.

До послѣдняго времени намъ почти ничего не было извѣстно о Демокритѣ, какъ о математикѣ. Діогенъ разсказываетъ, что онъ былъ ученикомъ Анаксагора, и что онъ ѣздилъ въ Египетъ съ цѣлью научиться геометріи у жрецовъ; объ этомъ, по его словамъ, писали Димитрій и Антисѳенъ Родосскій. Даетъ онъ также списокъ сочиненій Демокрита, изъ которыхъ нѣкоторыя посвящены были математикѣ чистой и прикладной; этотъ списокъ и раздѣленіе сочиненій по спеціальностямъ онъ заимствовалъ у Ѳразила. (Diogenis Laertii vitae philosophorum, lib. IX, Cap. VII, 35, 47, ed. Cobet, pp. 236, 238 — 239).

Вотъ списокъ математическихъ сочиненій Демокрита:

„О разности гномона или о касаніи круга и сферы“, „о геометріи“, „геометрическія книги“, „числа“, „о невыразимыхъ посредствомъ отношеній линіяхъ и тѣлахъ (*περὶ ἀλόγων γραμμῶν καὶ ναστῶν*)“, „*ἐκπετάσματα*“ (развертываніе — представленіе армиллярной сферы на плоскости — Ptolem. geogr. VII, 7) „великій годъ, или правила астрономіи“, „состязаніе клепсидра (*ἅμιλλα κλεψύδρης*)“, „уранографія“, „географія“, „полографія“, „актинографія“.

Объ этихъ сочиненіяхъ почти ничего неизвѣстно, кромѣ заглавій.

Климентъ Александрійскій *) приводитъ разсказъ Демокрита, въ которомъ послѣдній выставляетъ себя ученикомъ египтянъ и говоритъ, между прочимъ: „въ сложеніи линій, вмѣстѣ съ доказательствомъ, никто меня не превзошелъ, даже такъ называемые египетскіе гарпедонапты“.

*) Stromatum lib. I, c. 15, ed. Sylburgii — p. 131, ed. Potteri — p. 357: *γραμμέων συνθέσιος μετὰ ἀποδείξιος οὐδείς κώ με παρῆλλαξεν, οὐδ᾽οἱ Αἰγυπτίων καλεόμενοι Ἁρπεδονάπται.*

Если бы эта цитата изъ Демокрита была подлинной, то указаніе на „доказательство“ (apodeixis) давало бы основаніе, съ одной стороны, ставить геометрическую науку Демокрита въ связь съ классической геометріей александрійскаго періода, съ другой — предполагать существованіе настоящей геометрической науки и у египтянъ. Подлинность этой цитаты, однако, совершенно невѣроятна. Тѣмъ не менѣе слово „гарпедонапты“, вѣроятно, не выдумано и дѣйствительно употреблялось греками, какъ названіе египетскихъ ученыхъ, — можетъ быть, какъ переводъ какого-нибудь египетскаго слова. „Harpedonaptae“ значитъ „привязыватели шнурковъ“; на такое значеніе этого слова указалъ еще Potter, знаменитый комментаторъ Климента Александрійскаго (1715); онъ полагалъ, что слово это указывало на математическую профессію вообще, — какъ впослѣдствіи слово „геометръ“ *). М. Канторъ переводитъ слово „harpedonaptae“ нѣмецкимъ словомъ „Seilknüpfer“ и полагаетъ, что слово это относилось къ спеціальнымъ пріемамъ земледѣлія или практической геометріи. Такимъ образомъ, въ Египтѣ были занимавшіеся спеціально геометріей люди, слава объ учености которыхъ доходила и до грековъ; къ нимъ, вѣроятно, и ѣздилъ учиться Демокритъ, какъ свидѣтельствуютъ Димитрій и Антисѳенъ.

Въ новооткрытомъ сочиненіи Архимеда „*περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος*“ мы находимъ свѣдѣнія о Демокритѣ, которыя проливаютъ новый свѣтъ на его математическія знанія и на роль его въ исторіи математики.

Архимедъ приписываетъ Демокриту знаніе теоремы объ отношеніи объемовъ конуса и пирамиды къ объемамъ цилиндра и призмы. Въ упомянутомъ сочиненіи Архимедъ предлагаетъ методъ опредѣленія размѣровъ геометрическихъ фигуръ и тѣлъ, связанный, съ одной стороны, съ основными предложеніями статики, съ другой — съ представленіемъ о томъ, что фигуры эти и тѣла состоятъ изъ недѣлимыхъ элементовъ: плоскія фигуры — изъ линій, тѣла — изъ плоскихъ фигуръ. Методъ свой Архимедъ не считалъ, конечно, строгимъ и точнымъ, приводящимъ къ настоящимъ геометрическимъ доказательствамъ; это былъ лишь эвристическій методъ, цѣль котораго облегчить нахожденіе строгаго доказательства (apodeixis).

„Легче“, говоритъ Архимедъ, „найти доказательство, пріобрѣтя сначала нѣкоторое понятіе о томъ, что мы ищемъ, посредствомъ этого метода, чѣмъ искать такое доказательство безъ всякаго предварительнаго знанія... Такъ, Евдоксъ первый нашелъ доказательство предложеній о конусѣ и пирамидѣ, въ силу которыхъ конусъ составляетъ третью часть цилиндра, а пирамида — призмы, имѣющихъ тоже основаніе и ту же высоту; однако, не мало участія въ этомъ принималъ

---

*) „... *ἁρπεδόνας ἅπειν* idem est, quod *γραμμὰς συντίτεσθαι* in quo his viris, utpote mathematicorum filiis, praecipue studium erat“.

и Демокритъ, который первый высказалъ упомянутыя предложенія безъ доказательства (*χωρὶς ἀποδείξεως*)".

Говоря о „доказательствѣ", Архимедъ, конечно, разумѣетъ подъ этимъ діалектическое доказательство въ классической формѣ, встрѣчаемой у всѣхъ геометровъ перваго Александрійскаго періода. Демокритъ долженъ былъ, однако, придти къ убѣжденію въ справедливости высказанныхъ имъ далеко не очевидныхъ предложеній съ помощью какого-нибудь особаго метода. По своимъ философскимъ воззрѣніямъ Демокритъ былъ атомистомъ, и это одно заставляетъ насъ предполагать, что у него именно заимствовалъ Архимедъ идею метода о недѣлимыхъ. Предположеніе это вполнѣ подтверждается разборомъ отрывка изъ Демокрита, приводимаго въ одномъ изъ сочиненій Плутарха (De communibus notionibus, 39, p. 1079 E.—Diels, „Die Fragmente der Vorsokratiker", Fr. 155, S. 432).

„Если конусъ разрѣзать плоскостями, параллельными основанію, то что слѣдуетъ думать о площадяхъ отрѣзковъ: будутъ ли они равны или не равны? Если они не равны, то они дѣлаютъ конусъ неглад-кимъ, имѣющимъ множество выступовъ и углубленій наподобіе лѣстницы; если же допустить, что отрѣзки равны, окажется, что конусъ имѣетъ свойство цилиндра, состоя изъ равныхъ, а не неравныхъ круговъ, что крайне нелѣпо".

Этотъ парадоксъ представляетъ не малый интересъ, какъ новый варіантъ парадоксовъ, связанныхъ съ представленіемъ о безконечности, подобно знаменитымъ парадоксамъ Зенона. Для насъ приведенный отрывокъ интересенъ потому, что мы видимъ, какъ именно представлялъ себѣ Демокритъ конусъ и цилиндръ состоящими изъ недѣлимыхъ элементовъ — круговъ. Остается только указать, путемъ какихъ ариѳметическихъ выкладокъ Демокритъ могъ вычислить отношенія суммъ элементовъ, составляющихъ цилиндръ и конусъ или призму и пирамиду. Съ этой цѣлью обратимся мы къ сочиненіямъ математиковъ XVI вѣка, этихъ великихъ знатоковъ древнихъ геометровъ, проникшихъ наиболѣе далеко въ глубину ихъ мыслей и снова открывшихъ забытый въ теченіе вѣковъ методъ недѣлимыхъ. Въ „Ариѳметикѣ безконечныхъ" Валлиса (Arithmetica Infinitorum, Oxonii 1656) мы находимъ слѣдующія предложенія:

Предложеніе XIX. Лемма.

Пусть предложенъ рядъ количествъ, ариѳметически-пропорціональныхъ въ двойномъ отношеніи (или такъ, какъ въ рядѣ квадратныхъ чиселъ), непрерывно возрастающихъ, начиная отъ точки или 0, (какъ числа 0, 1, 4, 9, 16,...); требуется найти, какое отношеніе имѣетъ этотъ рядъ къ ряду такого же числа количествъ, равныхъ наибольшему изъ предложенныхъ.

http://vofem.ru

Мы будемъ вести изслѣдованіе путемъ наведенія; получимъ:

$$\frac{0+1=1}{1+1=2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6},\quad \frac{0+1+4=5}{4+4+4=12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12},$$

$$\frac{0+1+4+9=14}{9+9+9+9=36}=\frac{7}{18}=\frac{1}{3}+\frac{1}{18},$$

$$\frac{0+1+4+9+16=30}{16+16+16+16+16=80}=\frac{3}{8}=\frac{9}{24}=\frac{1}{3}+\frac{1}{24},$$

$$\frac{0+1+4+9+16+25=55}{25+25+25+25+25+25=150}=\frac{11}{30}=\frac{1}{3}+\frac{1}{30},$$

$$\frac{0+1+4+9+16+25+36=91}{36+36+36+36+36+36+36=252}=\frac{13}{36}=\frac{1}{3}+\frac{1}{36}\text{ и т. д.}$$

Полученныя отношенія вездѣ больше $\frac{1}{3}$, избытокъ же постоянно убываетъ съ возрастаніемъ числа членовъ, а именно избытокъ этотъ равенъ:

$$\frac{1}{6},\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{18},\ \frac{1}{24},\ \frac{1}{30},\ \frac{1}{36}\text{ и т. д.}$$

Этотъ избытокъ есть отношеніе единицы къ ушестеренному числу членовъ, слѣдующихъ за 0 въ предложенномъ ряду. Отсюда вытекаетъ:

Предложеніе XX. Теорема.

Пусть предложенъ рядъ количествъ ариѳметически-пропорціональныхъ въ двойномъ отношеніи (или такъ, какъ въ рядѣ квадратныхъ чиселъ), непрерывно возрастающихъ, начиная отъ точки или 0; отношенія этого ряда къ ряду столькихъ же количествъ, равныхъ наибольшимъ изъ предложенныхъ, превосходитъ отношеніе 1 къ 3; избытокъ равенъ тому отношенію, которое имѣетъ единица къ ушестеренному числу членовъ, слѣдующихъ за 0; или тому отношенію, которое имѣетъ квадратный корень изъ перваго члена, слѣдующаго за 0, къ ушестеренному квадратному корню изъ наибольшаго члена.

. . . . . .

Если же число членовъ будетъ возрастать, упомянутый избытокъ сверхъ $\frac{1}{3}$ будетъ непрерывно уменьшаться, такъ что, наконецъ, станетъ, очевидно, меньше всякаго, какой только можно назначить; если рядъ продолжить до безконечности, то избытокъ совсѣмъ исчезнетъ. Отсюда слѣдуетъ:

Предложеніе XXI. Теорема.

Пусть предложенъ безконечный рядъ количествъ ариѳметически-пропорціональныхъ въ двойномъ отношеніи (или такъ, какъ въ рядѣ

квадратныхъ чиселъ), непрерывно возрастающихъ, начиная отъ точки или 0; рядъ этотъ относится къ ряду столькихъ же количествъ, равныхъ наибольшему изъ предложенныхъ, какъ 1 къ 3.

Предложеніе XXII. Корольларій.

Конусъ или пирамида относится къ равно-высокому цилиндру или призмѣ, построенному на томъ же или на равномъ основаніи, какъ 1 къ 3, ибо мы предполагаемъ, что какъ конусъ, такъ и пирамида состоятъ изъ безконечнаго числа плоскихъ фигуръ подобныхъ и параллельныхъ, составляющихъ рядъ количествъ ариѳметически-пропорціональныхъ въ двойномъ отношеніи, наименьшее изъ которыхъ—точка, наибольшее же—основаніе; цилиндръ же или призма состоятъ изъ столькихъ же количествъ, очевидно, равныхъ наибольшему. Такимъ образомъ, отношеніе равно 1 къ 3, согласно предыдущей теоремѣ. (Arithmetica Infinitorum, pp. 15—17).

Приведенныя выше теоремы Валлиса съ ихъ замѣчательно простыми и изящными доказательствами не только показываютъ, какимъ образомъ Демокритъ могъ дѣйствительно придти къ выводу предложеній о конусѣ и пирамидѣ, пользуясь совершенно элементарными ариѳметическими соображеніями; они обнаруживаютъ еще болѣе интересный фактъ, относящійся къ исторіи идей самого Архимеда, показывая, какимъ путемъ могъ великій сиракузянинъ придти къ открытію своей знаменитой теоремы о квадратурѣ параболы, которой онъ придавалъ столь большое значеніе, считая ее главной базой всѣхъ своихъ изысканій о размѣрахъ фигуръ и тѣлъ, связанныхъ съ коническими сѣченіями. Какъ только Архимедъ понялъ суть того метода недѣлимыхъ, которымъ пользовался Демокритъ для вывода предложеній о конусѣ и пирамидѣ, для его генія должно было стать яснымъ, что тотъ же методъ безъ всякаго измѣненія можетъ быть распространенъ и на другія предложенія; въ томъ числѣ открылась ему истина объ отношеніи сегмента параболы къ соотвѣтствующему параллелограмму, которая является съ такой точки зрѣнія простымъ корольларіемъ теоремы Демокрита. У геометровъ XVI вѣка, возстановившихъ методъ недѣлимыхъ, такое заключеніе должно было появиться безъ всякаго труда. Въ предложеніи XXIII Валлисовой ариѳметики безконечныхъ теорема Архимеда приведена, какъ корольларій XXI-й теоремы (Arithmetica Infinitorum, pp. 17—18).

Изложенныя выше соображенія приводятъ насъ также и къ тому выводу, что методъ, изложенный Архимедомъ, въ его новооткрытомъ сочиненіи отнюдь нельзя считать элементарнымъ или основнымъ, подобно методу интегральнаго исчисленія. Это—продуктъ сложной творческой работы великаго геометра, представляющій очень остроумную, но трудную искусственную комбинацію древняго метода недѣлимыхъ съ извѣстными раньше и разработанными самимъ Архимедомъ положеніями статики—теоріей рычага и центра тяжести. Основной методъ недѣлимыхъ былъ возстановленъ или снова открытъ только математиками XVI вѣка—ближайшими предшественниками и учителями великихъ творцовъ анализа безконечно малыхъ.

О конкурсныхъ экзаменахъ.

(Къ двадцатипятилѣтію ихъ существованія).

Проф. Д. Синцова.

Въ настоящемъ юбилейномъ номерѣ „Вѣстника Опытной Физики“ мнѣ хотѣлось бы посвятить нѣсколько строкъ другому юбиляру — конкурснымъ экзаменамъ при поступленіи въ высшія техническія учебныя заведенія. Но я дѣлаю это съ тѣмъ глубокимъ различіемъ, что, желая отъ всей души дальнѣйшаго процвѣтанія первому юбиляру — „Вѣстнику Опытной Физики“, я бы очень хотѣлъ, чтобы второй возможно скорѣе закончилъ свои дни, разъ уже онъ дожилъ до такого юбилея.

Вопросъ о конкурсныхъ экзаменахъ очень оживленно дебатировался въ концѣ 90-хъ годовъ прошлаго вѣка и первыхъ лѣтъ нынѣшняго. Теперь всѣ разговоры о конкурсныхъ экзаменахъ какъ-то замолкли. Жизнь выдвинула столько разнообразныхъ больныхъ вопросовъ, что этотъ вопросъ какъ-то потускнѣлъ и затихъ. Но если вопросъ сошелъ съ авансцены, то значитъ ли, что онъ потерялъ свое значеніе? Мнѣ кажется, что это далеко не такъ, и я думаю, что не лишнее высказать кое-какія соображенія по этому поводу.

Необходимость въ установленіи конкурсныхъ экзаменовъ возникла тогда, когда число желающихъ поступить въ техническія заведенія стало превышать число вакансій. Довольно естественно, что невозможность идти, на манеръ Германіи, навстрѣчу этому явленію увеличеніемъ числа вакансій путемъ учрежденія новыхъ политехникумовъ и расширенія существующихъ привела къ мысли ввести, подобно Франціи, систему конкурсовъ.

Естественно было бы поставить цѣлью конкурсовъ обезпеченіе даннаго заведенія наилучшимъ контингентомъ учащихся. Спрашивается, однако, достигается ли это введеніемъ конкурсныхъ экзаменовъ? Мнѣ кажется, въ очень слабой степени. Происходитъ это, во-первыхъ, потому, что овладѣвающее экзаменующимся волненіе понижаетъ у многихъ сообразительность, мѣшаетъ сообразить самыя простыя, казалось бы, вещи. Изъ личнаго опыта*) я могу привести кое-какіе примѣры. Такъ, я помню, — это было, кажется, въ первый годъ, — какъ бывшій студентъ 3-го курса Рижскаго Политехникума не могъ ничего сказать ни изъ теоріи логариѳмовъ ни изъ теоріи комплексныхъ; или человѣкъ, окончившій учительскій институтъ, не могъ сообразить, что значитъ 0,563, написанное по семиричной системѣ. Удачный отвѣтъ

*) Въ 1899 — 1903 гг. я преподавалъ въ Екатеринославскомъ Высшемъ горномъ училищѣ, нынѣ преобразованномъ въ Горный Институтъ, и тогда за 4 срока черезъ мои руки прошло около 600 человѣкъ.

на экзаменѣ часто является дѣломъ случая и въ значительной мѣрѣ зависитъ отъ особенностей нервной организаціи.

Много разъ приходилось слышать отъ лица, давшаго слабый отвѣтъ изъ теоріи: „Я всего Шмулевича прошелъ“. Здѣсь мы подходимъ къ другой сторонѣ конкурсныхъ экзаменовъ.

Обиліе конкуррентовъ въ столичныхъ заведеніяхъ, особенно въ Институтѣ путей сообщенія и въ Горномъ Институтѣ, когда на сотню вакансій являлось тысячи двѣ аспирантовъ, ставило въ такое затруднительное положеніе экзаменаторовъ, что послѣдніе пришли къ мысли составлять и предлагать на экзаменахъ особенно замысловатыя задачи, которыя, хотя и допускаютъ рѣшеніе съ тѣми знаніями, которыя предполагаются на конкурсѣ, но требуютъ со стороны рѣшающаго особой изобрѣтательности. На первыхъ порахъ средство это, конечно, оказалось дѣйствительнымъ: процентъ проваливавшихся долженъ былъ оказаться большимъ, а выдерживать должны были особенно остроумныя головы. Но съ теченіемъ времени изъ этого положенія нашелся выходъ. Казусныя и замысловатыя задачи скоро стали извѣстны, и появились сборники такихъ задачъ съ рѣшеніями. И вотъ началась своего рода скачка: съ одной стороны, экзаменаторы должны были придумывать все новыя и новыя задачи, а экзаменующіеся должны были заучивать все большее количество задачъ съ рѣшеніями. Въ результатѣ выигрывали только составители сборниковъ, наживавшіе на нихъ чуть ли не цѣлыя состоянія, если вѣрить молвѣ. Какъ бы то ни было, но, если вы зайдете къ букинисту въ любомъ городѣ, гдѣ имѣется высшее техническое заведеніе, то вы увидите, что этими произведеніями заставлена цѣлая полка. Мнѣ пришлось констатировать фактъ чрезвычайнаго развитія этого рода литературы при выборкѣ заглавій для „Библіографіи“ изъ „Книжной Лѣтописи“. И несомнѣнно, что это не все сплошь макулатура: такія изданія должны достигать своей цѣли — помочь сдать экзаменъ, иначе никто не станетъ ихъ покупать. И мнѣ приходилось слышать даже отъ преподавателей похвалы нѣкоторымъ изъ подобныхъ сборниковъ *).

И тѣмъ не менѣе это, безусловно, явленіе вредное, прежде всего потому, что оно совершенно извращаетъ самую цѣль конкурснаго экзамена, давая вмѣсто аспиранта, свободно владѣющаго элементарною математикою, того, кто заучилъ искусственные пріемы рѣшеній сотни-другой замысловатыхъ задачъ, а при 201-ой станетъ, вѣроятно, втупикъ. Но вредное вліяніе подобныхъ задачниковъ, да и самыхъ конкурсныхъ экзаменовъ, конечно, этимъ не ограничивается: оно проникаетъ и въ среднюю школу.

Учитель 7-го класса реальнаго училища долженъ считаться съ тѣмъ, что его ученики по окончаніи поѣдутъ держать вступительные экзамены. Они сами обращаются къ нему съ просьбами помочь или

*) Было бы, можетъ быть, полезно заняться болѣе подробнымъ пересмотромъ всей этой литературы.

подготовить ихъ къ конкурсу, и онъ волей-неволей берется за того же „Шмулевича“ и продѣлываетъ съ учениками казусныя задачи, даетъ имъ знанія, которыя нужны только для конкурснаго экзамена и затѣмъ могутъ быть и даже неизбѣжно будутъ забыты.

И вѣдь это еще, такъ сказать, нормальный порядокъ. А мы знаемъ и такіе случаи, когда экзаменаторъ въ погонѣ за особенно трудными задачами попадаетъ впросакъ, задавая задачу невозможную, т. е. неразрѣшимую тѣми средствами, которыя онъ въ правѣ требовать отъ экзаменующагося.

Еще этою осенью въ одномъ изъ спеціальныхъ заведеній — у насъ въ Харьковѣ — была предложена задача:

„Рѣшить уравненіе $\frac{x^4+5}{x+1}+\sqrt{\frac{2x^3}{x^2+1}}=4x$“.

Уравненіе, очевидно, удовлетворяется при $x=1$. Освобождаясь отъ радикаловъ и выдѣляя корень 1 дѣленіемъ на $x-1$, приходимъ къ уравненію:

$$x^9+x^8-6x^7-14x^6+4x^5+26x^4+24x^3+14x^2+15x-25=0,$$

которое цѣлыхъ корней не имѣетъ. Оно не имѣетъ отрицательныхъ вещественныхъ корней. Его положительные вещественные корни заключены въ предѣлахъ: $0<x_1<1$, $1<x_2<2$, $2<x_3<3$. Остальные корни мнимые. Тѣ и другіе можно, конечно, вычислить, и высшая алгебра этому учитъ, но ни отдѣленіе корней ни даже нахожденіе цѣлыхъ корней уравненій не входитъ въ элементарный курсъ средняго учебнаго заведенія. Можно было бы предположить, что уравненіе разбивается на неприводимые множители, но и это разложеніе, если бы даже оно удалось*), выходитъ за предѣлы элементарнаго курса. Такая задача, конечно, могла быть предложена лишь по недоразумѣнію.

Долгій опытъ съ замысловатыми задачами привелъ, въ концѣ концовъ, нѣкоторыхъ экзаменаторовъ къ убѣжденію, что отъ нихъ надо отказаться, и мнѣ говорили еще въ прошломъ году нѣкоторые изъ петербургскихъ экзаменаторовъ, что они отказались отъ трудныхъ задачъ и экзаменуютъ по теоріи. Я самъ за время моего личнаго экзаменаціоннаго опыта въ Екатеринославѣ поступалъ такъ же. Съ самаго начала я поставилъ себѣ за правило экзаменовать по теоретическому курсу. Примѣръ у меня всегда служилъ лишь иллюстраціей усвоенія курса, а не замысловатыми ловушками. Изъ среды экзаменующихся, не пріученныхъ къ этому, раздавались даже протесты, подобные вышеприведенному. Но постепенно публика примирилась съ неизбѣжнымъ, къ нему приспособилась, и подобные отвѣты стали рѣже.

*) Я его не нашелъ.

Конечно, моя задача была несравненно болѣе проста: мнѣ нужно было проэкзаменовать всего человѣкъ полтораста, а принимали мы человѣкъ 80. Я разсуждалъ такъ: наши аспиранты всѣ прошли курсъ средняго учебнаго заведенія, и, слѣдовательно, въ соотвѣтствующемъ объемѣ они элементарную математику должны знать хотя бы удовлетворительно. Моя задача лишь расположить ихъ въ извѣстномъ порядкѣ. Это, конечно, не то, что изъ 1000 выбрать 100 или 150. Съ другой стороны, и матеріалъ, съ которымъ приходилось имѣть дѣло, былъ нѣсколько иной, чѣмъ въ столицахъ. Наши конкурсные экзамены происходили обычно позже, когда въ другихъ учебныхъ заведеніяхъ экзамены были уже закончены. Поэтому нашими аспирантами были, во-первыхъ, лица, уже побывавшія въ другихъ техническихъ учебныхъ заведеніяхъ и не удержавшіяся тамъ или же, во-вторыхъ, уже державшія гдѣ-либо экзамены и оставшіяся за флагомъ. Можно поэтому сказать, что составъ экзаменовавшихся былъ средній, сливки были уже сняты: это были средніе ученики реальныхъ и иныхъ училищъ. Благодаря небольшому количеству экзаменующихся я могъ давшаго слабые отвѣты на первые вопросы держать дольше у доски, считая нѣсколько смѣлымъ ставить 2 за одинъ-два вопроса человѣку, только-что удовлетворительно сдавшему выпускные экзамены въ учебномъ заведеніи, гдѣ его знали, и ставилъ 2 лишь въ самыхъ крайнихъ случаяхъ. Поэтому я имѣлъ возможность ближе присмотрѣться къ экзаменующимся и судить болѣе или менѣе правильно объ ихъ познаніяхъ. Я полагаю, что мои наблюденія могли представить нѣкоторый интересъ, въ настоящее время въ значительной степени уже историческій*).

Наибольшія затрудненія доставляла ариѳметика. Болѣе всего затрудняли вопросы, касающіеся нумераціи. Еще на вопросы: „написать число 131 по девятиричной системѣ“, или, обратно, „131, написанное по девятиричной системѣ, написать по десятиричной“, или „опредѣлить, по какой системѣ надо написать число 141, чтобы оно изобразилось цифрами 119“ получались отвѣты, болѣе или менѣе правильные, хотя и послѣ размышленія; но вышеприведенный вопросъ,— что значитъ 0,165 въ семиричной системѣ, — былъ камнемъ преткновенія для многихъ. Плохо было дѣло и съ десятичными дробями. Обращеніе періодическихъ десятичныхъ дробей въ простыя или обратно затрудняло сравнительно въ рѣдкихъ случаяхъ (обыкновенно въ такихъ случаяхъ обратить умѣли, но не могли обосновать правило). Но сложеніе періодическихъ десятичныхъ дробей непосредственно, безъ предварительнаго обращенія въ простую, было также камнемъ преткновенія. Возможно ли сложить почленно, сколько получится цифръ въ періодѣ, какъ быть, если одна изъ дробей смѣшанная періодическая, — все это было или неизвѣстно, или слишкомъ хорошо забыто. Надо прибавить, что изъ программы

*) Въ свое время я собирался дать объ этомъ замѣтку въ „Вѣстникѣ“, но по недостатку времени не успѣлъ это сдѣлать. Кое-какія сохранившіяся отъ того времени замѣтки я теперь и использовалъ

были совершенно исключены всѣ пресловутыя тройныя и иныя правила. Замѣчалось и недостаточное знакомство съ метрическою системой.

Въ алгебрѣ встрѣчалась путаница уже въ отношеніи умноженія показателей. Попадалось заявленіе, что $e^{x^{e^x}} = (e^x)^{e^x}$. Недоставало свѣдѣній о приближенныхъ рѣшеніяхъ и о вліяніи ошибокъ въ коэффиціентахъ на значеніе искомой величины. Непрерывныя дроби, въ общемъ, знали, но, конечно, не имѣли понятія, когда непрерывная дробь бываетъ періодическая. Но главныя затрудненія представляла теорія логариѳмовъ. Очень многіе могли вычислять только по таблицамъ Лаланда и ни по какимъ инымъ. Конечно, логариѳмовъ отрицательныхъ чиселъ не существуетъ (т. е., собственно, въ алгебрѣ; въ тригонометріи логариѳмировать отрицательныя величины уже можно).

Планиметрію, какъ приходилось замѣчать, знали, въ общемъ, удовлетворительно, но стереометрическія представленія были развиты слабо (напримѣръ, затруднялъ вопросъ: когда черезъ данную прямую можно провести плоскость, перпендикулярную къ другой данной прямой).

Всѣ подобные недостатки, конечно, не конкурсными экзаменами устраняются. На нихъ надо обращать вниманіе въ средней школѣ, и мнѣ кажется, что преподаватели высшей школы (и экзаменаторы при поступленіи) сдѣлали бы очень полезное дѣло, если бы дѣлились вынесенными впечатлѣніями въ печати.

Вернемся, однако, къ вопросу о конкурсныхъ экзаменахъ. Оказывая неблагопріятное вліяніе на среднюю школу и не гарантируя наиболѣе цѣлесообразнаго отбора поступающихъ, система конкурсовъ имѣетъ еще другія дурныя послѣдствія, на которыя обращается сравнительно мало вниманія.

Прежде всего необходимость чрезвычайнаго напряженія силъ для подготовки къ этимъ экзаменамъ поглощаетъ массу энергіи, затрачиваемой, въ сущности, совершенно непроизводительно. Сравните положеніе дѣлъ въ университетѣ, куда принимаются безъ конкурса, или въ извѣстныхъ случаяхъ — на медицинскій, напримѣръ, факультетъ — по конкурсу аттестатовъ. Какъ много могъ бы я указать моихъ товарищей, которые очень посредственно проходили среднюю школу и оказались на медицинскомъ факультетѣ прекрасными работниками. Новое интересное дѣло пробудило въ нихъ дремавшую энергію, которой не давало выхода томительное однообразіе средней школы, и они оказались въ состояніи справиться съ тѣмъ колоссальнымъ количествомъ труда, который требуетъ медицинскій факультетъ. Сравните съ этимъ техническое заведеніе. Какъ много изъ числа прошедшихъ сквозь строй конкурснаго экзамена оказываются въ концѣ года не успѣвшими выполнить самыхъ минимальныхъ требованій. И здѣсь виною не только недостаточное знакомство реалиста или классика, рѣшившаго идти въ технологическій институтъ, съ тѣмъ, что его тамъ ожидаетъ (однако, такіе отдѣльные случаи нерасположенія къ техническимъ наукамъ, встрѣчаются, пожалуй, чаще, чѣмъ это думаютъ).

Нѣтъ, причина лежитъ прежде всего въ томъ, что послѣ затраты энергіи организмъ требуетъ извѣстнаго времени для ея возстановленія. И, пройдя черезъ періодъ напряженной работы передъ и во время пріемныхъ экзаменовъ, студентъ идетъ на занятія, требующія отъ него новаго напряженія силъ, уже утомленнымъ, съ ослабленнымъ интересомъ. Можно, конечно, сказать даже, что фактъ выдержанія конкурсныхъ экзаменовъ создаетъ извѣстную иллюзію пріобрѣтенныхъ правъ, — которыя между тѣмъ заключаются лишь въ пріобрѣтеніи права затратъ новыхъ силъ на новую работу. Но главное, конечно, заключается именно въ томъ, что въ первый моментъ, когда всего важнѣе сразу взять себя въ руки для работы, энергія оказывается ослабленной, а затѣмъ многое оказывается уже запущеннымъ, и къ концу года человѣку приходится констатировать, что ему снова приходится держать конкурсный экзаменъ. Я, помню, поражался, сколько встрѣчается лицъ, потерявшихъ такимъ образомъ не одинъ и не два года, а больше.

И напрашивается сравненіе съ Франціей, гдѣ къ труднѣйшимъ конкурснымъ испытаніямъ для поступленія въ „Ecole Polytechnique“ допускаются не всѣ безъ исключенія, а лишь четыре возраста каждый разъ: тамъ предполагается, что, если человѣкъ за четыре года не оказался въ состояніи надлежащимъ образомъ подготовиться, нечего ему больше тратить силы и лучше направить свою энергію на что-нибудь другое.

Въ виду всего изложеннаго мнѣ казалось бы, что вмѣсто конкурсныхъ истязаній по математикѣ было бы гораздо цѣлесообразнѣе установить совершенно иной порядокъ для допущенія въ спеціальныя заведенія.

Можно признать, что средняя школа даетъ для прохожденія высшей совершенно достаточный запасъ знаній, и потому пріемный экзаменъ могъ бы заключаться лишь въ констатированіи умѣнія грамотно писать и связно излагать свои мысли*), умѣть достаточно быстро и вѣрно вычислять при помощи логариѳмическихъ таблицъ и умѣть достаточно хорошо чертить. Послѣднее умѣніе особенно важно въ нашей высшей технической школѣ, заваливающей студентовъ массою чертежной работы.

Для дальнѣйшаго отбора наиболѣе подходящихъ для даннаго учебнаго заведенія изъ всей массы лицъ, удовлетворившихъ первымъ требованіямъ, было бы, конечно, цѣлесообразнѣе примѣнять тѣ методы, которые начинаетъ вырабатывать для обнаруженія пригодности лицъ къ опредѣленной профессіи современная экспериментальная психологія; эти методы, въ сущности, напоминаютъ тѣ пріемы, которые примѣнялъ для выбора своихъ воиновъ библейскій судія Гедеонъ.

---

*) И при этомъ могутъ быть, конечно, такіе курьезы, какъ наивное заявленіе одного аспиранта, ученика мѣстнаго реальнаго училища, что „на сѣверномъ полюсѣ очень холодно, а на южномъ — очень жарко“.

Пусть это даже не будутъ лица съ особенно высокими отмѣтками; мнѣ приходилось наблюдать, что экстерны — лица, затратившія массу энергіи для домашняго прохожденія курса средней школы, — въ высшей оказывались стоящими даже ниже тѣхъ изъ своихъ товарищей, которые оказывали въ средней школѣ хотя бы средніе успѣхи, — какъ будто вся ихъ нервная энергія ушла на это первое дѣло и для работы въ высшей школѣ осталось уже мало.

Но это, конечно, подлежитъ обсужденію; мнѣ же хотѣлось только привлечь вновь вниманіе къ забытому вопросу.

Изъ записной книжки преподавателя.

О перемѣстительномъ свойствѣ произведенія нѣсколькихъ сомножителей.

Проф. В. А. Циммермана.

1. Перемѣстительное свойство произведенія нѣсколькихъ чиселъ можно вывести при помощи слѣдующаго предложенія.

Если равный единицѣ множитель произведенія нѣсколькихъ сомножителей замѣнимъ какимъ-либо другимъ числомъ, то произведеніе умножится на это число.

Доказательство. Если множитель, равный единицѣ и замѣняемый другимъ числомъ, является послѣднимъ множителемъ произведенія, то справедливость предложенія очевидна. Въ самомъ дѣлѣ, сравнивая произведенія 7.12.3.8.5.1 и 7.12.3.8.5.9 и замѣчая, что первое равно произведенію пяти множителей 7.12.3.8.5 [ибо произведеніе на единицу какого-либо числа равно, по опредѣленію, множимому *)], а второе равно тому же произведенію пяти множителей 7.12.3.8.5, умноженному на 9, — приходимъ къ заключенію, что второе произведеніе [7.12.3.8.5.9] равно первому [7.12.3.8.5.1], умноженному на 9.

Если, далѣе, предположимъ, что равный единицѣ множитель, замѣняемый другимъ числомъ, занимаетъ въ данномъ ряду сомножителей первое мѣсто, то также легко убѣдимся въ справедливости предложенія для указаннаго случая, принявши во вниманіе извѣстное свойство

---

*) Замѣтимъ, кстати, что случай, когда множитель равенъ единицѣ, долженъ быть выдѣленъ при опредѣленіи умноженія (или произведенія, — если опредѣленіе произведенія двухъ чиселъ предпосылается опредѣленію умноженія), и для этого случая должно быть дано особое опредѣленіе. Въ нѣкоторыхъ руководствахъ (напримѣръ, въ „Систематическомъ курсѣ ариѳметики“ А. Киселева, 1913) упомянутый частный случай, указывается, правда, — однако, не при опредѣленіи умноженія.

произведенія двухъ сомножителей, состоящее въ томъ, что, если мы, оставляя множителя безъ измѣненія, умножимъ на какое-нибудь число множимое, то произведеніе умножится на то же число. Сравнивая, напримѣръ, ряды сомножителей:

$$1.8.23.5.11 \qquad (1)$$

и

$$6.8.23.5.11, \qquad (2)$$

приходимъ къ заключенію, что произведеніе первыхъ двухъ сомножителей [6.8] второго ряда въ 6 разъ больше произведенія двухъ первыхъ сомножителей [1.8] перваго ряда, ибо множимое въ первомъ случаѣ въ 6 разъ больше множимаго во второмъ. Такимъ образомъ, произведеніе первыхъ трехъ сомножителей [6.8.23] второго ряда, равное (6.8).23, будетъ въ 6 разъ больше произведенія [равнаго (1.8).23] первыхъ трехъ сомножителей [1.8.23] перваго ряда, ибо множители въ обоихъ случаяхъ равны, а множимое [(6.8)] въ первомъ случаѣ въ 6 разъ больше, чѣмъ множимое [(1.8)] во второмъ; точно такъ же убѣждаемся, что произведеніе четырехъ первыхъ сомножителей ряда (2) равно ушестеренному произведенію первыхъ четырехъ сомножителей ряда (1), и что произведеніе всѣхъ сомножителей ряда (2) равно произведенію всѣхъ сомножителей ряда (1), умноженному на 6.

Возьмемъ, наконецъ, случай, когда равный единицѣ и замѣняемый другимъ числомъ сомножитель произведенія не стоитъ въ данномъ ряду сомножителей на первомъ или на послѣднемъ мѣстѣ, и разсмотримъ, напримѣръ, произведенія:

$$16.7.10.1.3.8.14 \qquad (3)$$

и

$$16.7.10.5.3.8.14. \qquad (4)$$

Сравнивая произведенія первыхъ четырехъ сомножителей обоихъ рядовъ и замѣчая, что эти произведенія [16.7.10.1] и [16.7.10.5] отличаются лишь тѣмъ, что, вмѣсто множителя 1, занимающаго послѣднее мѣсто въ ряду сомножителей перваго произведенія, въ ряду сомножителей второго стоитъ множитель 5, — приходимъ къ заключенію, что второе изъ двухъ упомянутыхъ произведеній четырехъ сомножителей въ 5 разъ больше перваго. Отсюда слѣдуетъ, что произведеніе первыхъ пяти сомножителей [16.7.10.5.3] ряда (2), равное (16.7.10.5).3, будетъ въ 5 разъ больше, чѣмъ равное (16.7.10.1).3 произведеніе первыхъ пяти сомножителей [16.7.10.1.3] ряда (1); что, слѣдовательно, произведеніе первыхъ шести сомножителей ряда (2), равное (16.7.10.5.3).8, будетъ въ 5 разъ больше, чѣмъ равное (16.7.10.1.3).8 произведеніе первыхъ шести сомножителей ряда (1), и, наконецъ, что произведеніе всѣхъ сомножителей ряда (2) равно произведенію всѣхъ сомножителей ряда (1), умноженному на 5.

2. Покажемъ теперь, какъ, опираясь на вышеприведенное предложеніе, можно убѣдиться, что любое данное произведеніе нѣсколькихъ (въ частности, двухъ) сомножителей не измѣняется при измѣненіи порядка сомножителей. Возьмемъ произведеніе

$$7.8.3.12.5.3 \qquad (5)$$

и расположимъ сомножителей этого произведенія въ какомъ-нибудь иномъ порядкѣ, — поставивши, напримѣръ, первый изъ сомножителей ряда (5) на пятомъ мѣстѣ, второй сомножитель — на третьемъ мѣстѣ, третій сомножитель — на первомъ, четвертый — на второмъ, пятый — на шестомъ и послѣдній — на четвертомъ; покажемъ, что полученное такимъ образомъ произведеніе

$$3.12.8.3.7.5 \qquad (6)$$

должно быть равно произведенію (5).

Замѣнимъ въ ряду (6) единицею сомножитель, стоящій на томъ мѣстѣ, на которое мы поставили послѣдній изъ сомножителей даннаго ряда (5), т. е. на четвертомъ мѣстѣ [такимъ сомножителемъ, замѣняемымъ единицею, будетъ сомножитель, равный послѣднему сомножителю даннаго ряда (5), т. е. 3]. Въ силу доказаннаго выше предложенія будемъ имѣть:

$$3.12.8.3.7.5 = (3.12.8.1.7.5).3. \qquad (7)$$

Замѣнивъ единицею въ произведеніи

$$3.12.8.1.7.5 \qquad (8)$$

сомножитель, стоящій на томъ мѣстѣ, на которое мы поставили, составляя рядъ (6) сомножителей, предпослѣдній изъ сомножителей даннаго ряда, т. е. на шестомъ мѣстѣ [такимъ сомножителемъ — какъ въ ряду (6), такъ и въ ряду (8), — будетъ служить число, равное упомянутому предпослѣднему сомножителю ряда (5)], найдемъ, что произведеніе (8) равно

$$(3.12.8.1.7.1).5,$$

откуда слѣдуетъ, въ силу равенства (7), что

$$3.12.8.3.7.5 = (3.12.8.1.7.1).5.3.$$

Путемъ подобныхъ разсужденій придемъ послѣдовательно къ ряду равенствъ:

$$3.12.8.3.7.5 = (3.12.8.1.7.5).3 = (3.12.8.1.7.1).5.3 = (3.1.8.1.7.1).12.5.3 =$$

$$= (1.1.8.1.7.1).3.12.5.3 = (1.1.1.1.7.1).8.3.12.5.3 =$$

$$= (1.1.1.1.1.1).7.8.3.12.5.3,$$

откуда — въ виду того, что $1.1.1.1.1.1 = 1$, — слѣдуетъ, что

$$3.12.8.3.7.5 = 1.7.8.3.12.5.3 = 7.8.3.12.5.3.$$

http://vofem.ru

3. Равенство произведеній (5) и (6) можетъ быть доказано также слѣдующимъ образомъ. Замѣнивши въ ряду (6) каждый изъ сомножителей единицею, пишемъ послѣдовательно, опираясь на доказанное въ n^0 1 предложеніе, рядъ равенствъ:

$$1.\ 1.1.1.1.1 = 1,$$

$$1.\ 1.1.1.7.1 = 7,$$

$$1.\ 1.8.1.7.1 = 7.8,$$

$$3.\ 1.8.1.7.1 = 7.8.3,$$

$$3.12.8.1.7.1 = 7.8.3.12,$$

$$3.12.8.1.7.5 = 7.8.3.12.5,$$

$$3.12.8.3.7.5 = 7.8.3.12.\ 5.3.$$

Рядъ сомножителей, стоящій во второй строчкѣ, мы получаемъ изъ ряда [1.1.1.1.1.1], стоящаго въ первой строчкѣ, замѣнивши равный единицѣ сомножитель этого послѣдняго ряда, — стоящій на мѣстѣ, соотвѣтствующемъ тому, на которое мы поставили, составляя рядъ (6), первый изъ сомножителей ряда (5), — стоящимъ на упомянутомъ мѣстѣ сомножителемъ ряда (6), т. е. первымъ сомножителемъ ряда (5); рядъ, стоящій въ лѣвой части 3-го изъ написанныхъ равенствъ, получается изъ ряда, написаннаго въ предшествующей строчкѣ, путемъ замѣны въ этомъ послѣднемъ ряду равнаго единицѣ сомножителя, — стоящаго на мѣстѣ, соотвѣтствующемъ тому, на которое мы поставили, составляя рядъ (6), второй изъ сомножителей ряда (5), — стоящимъ на упомянутомъ мѣстѣ сомножителемъ ряда (6), т. е. вторымъ сомножителемъ ряда (5) и т. д.

4. Свойство произведенія, на которое намъ пришлось сослаться въ n^0 1, состоящее въ томъ, что, если, не измѣняя множителя, мы увеличимъ въ нѣсколько разъ множимое, то тѣмъ самымъ увеличимъ во столько же разъ произведеніе, можно, какъ извѣстно, вывести весьма просто, опираясь на опредѣленіе умноженія и на свойство суммы (которымъ приходится, между прочимъ, пользоваться при выводѣ правила сложенія какихъ угодно цѣлыхъ чиселъ), состоящее въ томъ, что сумму нѣсколькихъ данныхъ чиселъ можно получить, разложивши данныя числа на какія угодно части (слагаемыя) и найдя сумму этихъ частей, расположенныхъ въ какомъ угодно порядкѣ и соединенныхъ въ какія угодно группы.

Замѣтимъ при этомъ, что въ томъ частномъ случаѣ, когда множитель равенъ единицѣ, справедливость утвержденія, что при умноженіи на какое-нибудь число множимаго произведеніе умножается на то же число, очевидна (ибо произведеніе въ упомянутомъ случаѣ равно множимому). Если затѣмъ обратимся къ случаю, когда множитель не равенъ единицѣ, и возьмемъ, напримѣръ, произведенія 48×5 и 192×5 [т. е. $(48.4).5$], то, замѣчая, что первое произведеніе представляетъ

сумму пяти слагаемыхъ, каждое изъ которыхъ равно 48, а второе произведеніе представляетъ сумму пяти слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое равно $192 = 48 . 4$ и, слѣдовательно, можетъ быть разложено на четыре части (слагаемыя), равныя 48, и сведя такимъ образомъ вычисленіе второго произведенія [192×5] къ нахожденію суммы слагаемыхъ

48, 48, 48, 48,

48, 48, 48, 48,

48, 48, 48, 48,

48, 48, 48, 48,

48, 48, 48, 48,

— приходимъ къ заключенію, что второе изъ разсматриваемыхъ произведеній, которое можно вычислить, сложивши числа каждаго столбца написанной таблицы въ отдѣльности и найдя сумму полученныхъ результатовъ, будетъ равно первому произведенію, умноженному на 4.

5. Доказательство перемѣстительнаго свойства произведенія нѣсколькихъ сомножителей можно изложить, пользуясь буквенными обозначеніями чиселъ, слѣдующимъ образомъ.

I. Если первый изъ двухъ сомножителей (множимое) умножимъ на какое-нибудь число, то произведеніе умножится на это число.

Это вытекаетъ изъ распредѣлительнаго свойства произведенія (которое, въ свою очередь, является слѣдствіемъ перемѣстительнаго и сочетательнаго свойствъ суммы). Въ самомъ дѣлѣ, въ силу распредѣлительнаго свойства произведенія,

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_m) . b = a_1 . b + a_2 . b + \cdots + a_m . b.$$

При $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = a$ имѣемъ:

$$(a . m) . b = (a . b) . m \text{ *).}$$

II. Если въ ряду сомножителей

$$a_1 . a_2 \ldots a_n \qquad (9)$$

замѣнимъ одинъ сомножитель a_i единицею, обозначимъ черезъ P произведеніе ряда (9) сомножителей и черезъ $P_{|i|}$ — произведеніе n со-

*) Замѣтимъ, что равенство это выражаетъ свойство произведенія трехъ сомножителей, состоящее въ томъ, что всякое такое произведеніе не измѣнится, если переставить второй и третій его сомножители. Въ самомъ дѣлѣ, произведенія $(a . m) . b$ и $a . m . b$ [такъ же, какъ и произведенія $(a . b) . m$ и $a . b . m$] представляютъ одно и то же число, ибо тѣ же дѣйствія, которыя должны быть выполнены для полученія одного произведенія, должны быть произведены надъ тѣми же числами и при вычисленіи второго произведенія; такимъ образомъ, написанное равенство можетъ быть представлено въ видѣ:

$$a . m . b = a . b . m.$$

множителей ряда, который получится послѣ упомянутой замѣны въ ряду (9) сомножителя a_i единицею, то будетъ имѣть мѣсто равенство

$$P = P_{|i|} \times a_i. \qquad (10)$$

Въ справедливости этого утвержденія убѣждаемся, разсмотрѣвши три случая, которые могутъ представиться: 1) случай, когда $i = n$ [въ этомъ случаѣ справедливость равенства (10) очевидна], 2) случай, когда $i = 1$ [въ этомъ случаѣ справедливость равенства (10) нетрудно обнаружить, принимая во вниманіе доказанное выше свойство произведенія двухъ смножителей], и 3) случай, когда $1 < i < n$ [справедливость равенства (10) въ этомъ случаѣ можетъ быть доказана слѣдующимъ образомъ: обозначивъ черезъ $P^{(i)}$ произведеніе первыхъ i сомножителей ряда (9), и черезъ $P^{(i)}_{|i|}$ произведеніе первыхъ i сомножителей ряда, который получается изъ ряда (9) послѣ замѣны единицею сомножителя a_i, имѣемъ, съ одной стороны, $P = P^{(i)} \cdot a_{i+1} \ldots a_n$, $P_{|i|} = P^{(i)}_{|i|} \cdot a_{i+1} \ldots a_n$; съ другой же стороны (см. 1-ый случай) $P^{(i)} = P^{(i)}_{|i|} \cdot a_i$, и такимъ образомъ $P = P^{(i)}_{|i|} \cdot a_i \cdot a_{i+1} \ldots a_n$; сопоставляя это равенство съ написаннымъ выше равенствомъ

$$P_{|i|} = P^{(i)}_{|i|} \cdot a_{i+1} \ldots a_n,$$

принимая во вниманіе вышеуказанное свойство произведенія двухъ сомножителей и сравнивая послѣдовательно произведенія:

$$P^{(i)}_{|i|} \cdot a_{i+1} \text{ и } \left(P^{(i)}_{|i|} \cdot a_i\right) \cdot a_{i+1} = P^{(i)}_{|i|} \cdot a_i \cdot a_{i+1},$$

$$\left(P^{(i)}_{|i|} \cdot a_{i+1}\right) \cdot a_{i+2} \text{ и } \left(P^{(i)}_{|i|} \cdot a_i \cdot a_{i+1}\right) \cdot a_{i+2} \text{ и т. д.,}$$

приходимъ къ равенству (10)] *).

III. Обозначимъ черезъ P_n произведеніе n сомножителей

$$a \cdot b \cdot c \ldots k \cdot l, \qquad (11)$$

---

*) Доказательство съ примѣненіемъ метода полной индукціи можетъ быть въ случаяхъ 2-мъ и 3-мъ изложено слѣдующимъ образомъ.

Взявши произведеніе k первыхъ сомножителей ряда (9) и произведеніе k первыхъ сомножителей ряда, который полученъ нами изъ ряда (9) путемъ замѣны единицею i'аго сомножителя a_i (при $k = 1$ оба эти произведенія сведутся къ a_1 въ случаѣ 3-мъ и къ a_1 и 1 въ случаѣ 2-мъ) и назвавши ихъ соотвѣтственно первымъ и вторымъ произведеніями, отвѣчающими числу k, найдемъ, что каждому числу ряда натуральныхъ чиселъ $1, 2, 3, \ldots, n$ будутъ отвѣчать два произведенія, первое и второе, при чемъ первое произведеніе, отвѣчающее числу i, будетъ равно умноженному на a_i второму произведенію, отвѣчающему i [числу 1 будутъ отвѣчать въ случаѣ 3-мъ равныя произведенія]; кромѣ того, если какому-нибудь числу m, не меньшему, чѣмъ i, и меньшему n, будетъ отвѣчать первое произведеніе, въ a_i разъ превосходящее второе произведеніе, то въ силу того, что $(m+1)$'ые сомножители въ ряду (9) и въ ряду, который полученъ изъ ряда (9) путемъ замѣны единицею сомножи-

черезъ P — произведеніе n сомножителей

$$a' \,.\, b' \,.\, c' \,.\, \ldots k' \,.\, l' \qquad (12)$$

ряда, который получится изъ ряда (11), если послѣдній сомножитель (l) поставимъ на ν_1'ое мѣсто, предпослѣдній (k) — на ν_2'ое мѣсто, ..., первый (a) — на ν_n'ое мѣсто (числа $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ всѣ различны; каждое изъ нихъ равно одному изъ первыхъ n чиселъ $1, 2, \ldots, n$ натуральнаго ряда), и черезъ $P_{|\nu_1|}$, $P_{|\nu_1, \nu_2|}, \ldots, P_{|\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n|}$ произведенія n сомножителей, образующихъ ряды сомножителей, которые получаются изъ ряда (12) соотвѣтственно послѣ замѣны въ этомъ ряду единицею сомножителя, занимающаго ν_1'ое мѣсто [этотъ сомножитель равенъ послѣднему множителю l ряда (11)], послѣ замѣны единицею сомножителя, занимающаго ν_1'ое мѣсто, и послѣ замѣны единицею сомножителя, занимающаго ν_2'ое мѣсто [эти два множителя равны l и k], и т. д. Въ силу вышеприведеннаго предложенія можемъ написать слѣдующій рядъ равенствъ:

$$a' \,.\, b' \,.\, c' \,.\, \ldots k' \,.\, l' = P = P_{|\nu_1|} \,.\, l = P_{|\nu_1, \nu_2|} \,.\, k \,.\, l = \cdots = P_{|\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n|} \,.\, a \,.\, b \,.\, c \,.\, \ldots \,.\, k \,.\, l,$$

или, — такъ какъ

$$P_{|\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n|} = 1 \,.\, 1 \ldots 1 = 1, —$$

$$a' \,.\, b' \,.\, c' \,.\, \ldots k' \,.\, l' = a \,.\, b \,.\, c \ldots k \,.\, l \text{*}).$$

теля a_i, равны, — и числу $m+1$ будетъ отвѣчать первое произведеніе, въ a_i разъ превосходящее второе произведеніе, отвѣчающее числу $m+1$. Въ ряду $1, 2, \ldots, n$ чиселъ могутъ оказаться числа, которымъ отвѣчаютъ равныя первое и второе произведенія [такимъ числомъ въ 3-мъ случаѣ будетъ, напримѣръ, 1], будутъ и такія числа, которымъ отвѣчаетъ первое произведеніе, въ a_i разъ превосходящее второе произведеніе. [Замѣтимъ, что какъ числа n и i, такъ и сомножители $a_1, a_2, \ldots, a_n$ мы разсматриваемъ, какъ данныя, вполнѣ опредѣленныя числа]. Такъ какъ вторая группа чиселъ ограничена (ибо всѣ числа этой группы принадлежатъ ряду $1, 2, \ldots, n$), то одно изъ чиселъ этой группы будетъ наибольшимъ. Этимъ наибольшимъ числомъ должно быть число n, ибо всякое число ряда $1, 2, \ldots, n$, неравное n, либо будетъ числомъ, не принадлежащимъ къ разсматриваемой группѣ чиселъ, — чиселъ, каждому изъ которыхъ отвѣчаетъ первое произведеніе, въ a_i разъ превосходящее второе, — либо будетъ такимъ числомъ указанной группы, за которымъ будетъ слѣдовать число (число, превосходящее его на 1), которое, какъ было показано выше, также будетъ обладать упомянутымъ только-что свойствомъ (свойствомъ, состоящимъ въ томъ, что первое, отвѣчающее числу, произведеніе превосходитъ въ a_i разъ второе, отвѣчающее тому же числу произведеніе). Такимъ образомъ, n будетъ числомъ, обладающимъ указаннымъ свойствомъ, т. е., иначе говоря, произведеніе (9) будетъ равно умноженному на a_i произведенію сомножителей ряда, который мы получили изъ ряда (9), замѣнивъ единицею сомножитель a_i.

*) Къ равенству

$$P = P_{|\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n|} \,.\, a \,.\, b \,.\, c \ldots k \,.\, l$$

мы приходимъ, примѣняя методъ полной индукціи. Дѣйствительно, если возь-

Графическій пріемъ при изученіи системы линзъ.

Проф. А. Л. Королькова.

Изъ числа полезныхъ руководствъ по физикѣ на англійскомъ языкѣ, изъ которыхъ можно многое заимствовать для практическихъ работъ какъ въ начальныхъ, такъ и въ среднихъ школахъ (а иногда и высшихъ), слѣдуетъ обратить вниманіе на маленькую книжку подъ заглавіемъ „Practical Exercises in Light being a laboratory course for schools of science and colleges“ by Reginald S. Clay; Macmillan and C°; London, 1910; стр. XI + 187.

Книга эта заслуживаетъ быть изданной на русскомъ языкѣ по богатству, разнообразію, научности, иногда новизнѣ описанныхъ упра-

---

мемъ рядъ $h \ldots k \,.\, l$ послѣднихъ m $[m < n]$ сомножителей ряда (11) и допустимъ, что справедливо равенство

$$P = P_{|\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m|} \,.\, h \ldots k \,.\, l,$$

то, замѣтивши, что

$$P_{|\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m|} = P_{|\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m, \nu_{m+1}|} \,.\, g,$$

гдѣ g — сомножитель ряда (11), предшествующій сомножителю h, придемъ къ заключенію, что

$$P = P_{|\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m, \nu_{m+1}|} \,.\, g \,.\, h \ldots k \,.\, l,$$

гдѣ $g \,.\, h \ldots k \,.\, l$ есть рядъ $m + 1$ послѣднихъ сомножителей произведенія (11). Такимъ образомъ, если какое-либо изъ $n - 1$ первыхъ произведеній въ ряду

$$P_{|\nu_1|} \,.\, l, \quad P_{|\nu_1, \nu_2|} \,.\, k \,.\, l, \ldots, P_{|\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n|} \,.\, a \,.\, b \,.\, c \ldots k \,.\, l \qquad (13)$$

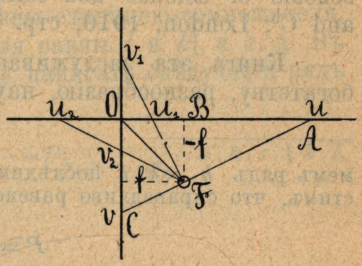
равно P, то и слѣдующее за нимъ также равно P. Съ другой стороны, первыя два произведенія въ ряду (13), какъ мы видѣли, равны P, и такимъ образомъ въ ряду n первыхъ чиселъ $1, 2, \ldots, n$ натуральнаго ряда, опредѣляющихъ мѣста произведеній (13), есть числа, которымъ отвѣчаютъ произведенія ряда (13), равныя P, при чемъ число такихъ чиселъ ограничено (не превосходитъ n), и, слѣдовательно, одно изъ этихъ чиселъ будетъ наибольшимъ. [Замѣтимъ, что число n сомножителей $a, b, c, \ldots, k, l$ мы считаемъ даннымъ, равно какъ разсматриваемъ, какъ числа данныя, опредѣленныя, и самые множители $a, b, c, \ldots, k, l$, а также числа $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$]. Такимъ наибольшимъ числомъ группы чиселъ, принадлежащихъ ряду $1, 2, \ldots, n$, которымъ отвѣчаютъ произведенія ряда (13), равныя P, должно быть число n, такъ какъ никакое другое число не можетъ быть наибольшимъ числомъ упомянутой группы, ибо, если какое-либо число μ этой группы меньше n, то число $\mu + 1$ также принадлежитъ къ группѣ. Такимъ образомъ, n принадлежитъ къ группѣ чиселъ, опредѣляющихъ мѣста тѣхъ произведеній ряда (13), которыя равны P; иными словами, n'ое произведеніе въ ряду (13), т. е. $P_{|\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n|} \,.\, a \,.\, b \,.\, c \ldots k \,.\, l$, равно P.

женій и изъ-за простоты и наглядности примѣняемыхъ приборовъ и средствъ.

Зависимость между разстояніями точки и ея изображенія отъ линзы или зеркала и фокуснымъ разстояніемъ Клей выражаетъ, между прочимъ, указаннымъ ниже старымъ, но не всѣмъ извѣстнымъ графическимъ пріемомъ. Я воспользовался тѣмъ же пріемомъ для рѣшенія болѣе сложныхъ задачъ о комбинаціяхъ линзъ, объ ахроматизаціи ихъ и т. п.

Примѣненіе такого пріема для названныхъ мною задачъ мнѣ не встрѣчалось въ литературѣ и, быть можетъ, кому-нибудь оно покажется интереснымъ или даже полезнымъ.

Условимся откладывать по оси абсциссъ (фиг. 1) разстояніе u отъ линзы или зеркала до свѣтящейся точки (+ вправо, — влѣво), по оси ординатъ — разстояніе v отъ линзы или зеркала до изображенія (+ вверхъ, — внизъ). Кромѣ того, будемъ строить для каждаго изъ этихъ случаевъ соотвѣтствующую точку F съ абсциссой $+f$ или $-f$ въ зависимости отъ дѣйствительности или мнимости изображенія, и съ ординатой $+f$ или $-f$ въ зависимости отъ того, лежатъ ли свѣтящаяся точка и главный фокусъ по одну и ту же или по разныя стороны отъ линзы или зеркала.



Фиг. 1.

Собирательная линза.

Отложимъ, согласно сдѣланному выше общему указанію, по оси абсциссъ разстояніе u отъ собирательной линзы до свѣтящейся точки, по оси ординатъ — разстояніе v отъ линзы до изображенія. Построимъ точку F съ абсциссой f, ибо изображеніе дѣйствительное, и ординатою $-f$, гдѣ f есть главное фокусное разстояніе линзы; для собирательной линзы оно отрицательно. Пусть $OA = u$; $OB = f$. Проведемъ прямую линію черезъ A и F до встрѣчи съ осью ординатъ въ точкѣ C. Тогда $OC = v$ есть разстояніе отъ линзы до изображенія. Въ самомъ дѣлѣ, изъ подобія треугольниковъ BAF и OAC имѣемъ:

$$\frac{u-f}{f} = \frac{u}{OC}; \quad u \cdot OC - f \cdot OC = uf.$$

Дѣля обѣ части равенства на $u \cdot f \cdot OC$, получимъ:

$$\frac{1}{OC} + \frac{1}{u} = \frac{1}{f}.$$

Сравнивая эту формулу съ извѣстной формулой для линзъ

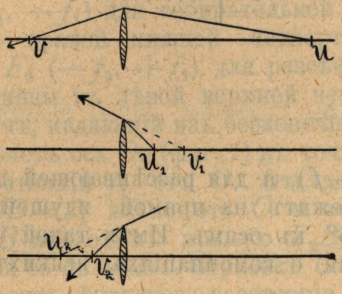
$$\frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f},$$

найдемъ, что $OC=v$.

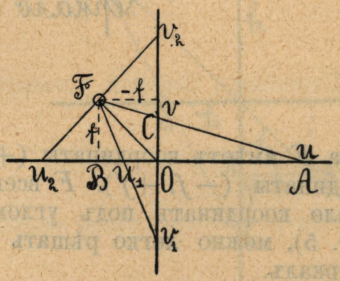
На фиг. 2 начерчены 3 положенія предмета и изображенія (uv, u_1v_1, u_2v_2), для которыхъ u и v найдены на фиг. 1.

Разсѣивающая линза.

Для нея фокусъ мнимый и лежитъ по той же сторонѣ, что и свѣтящаяся точка. Поэтому точка F имѣетъ для этого случая координаты $(-f, +f)$, такъ что она займетъ положеніе въ лѣвой верхней четверти.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Пересѣченіе линіи AF съ осью ординатъ въ точкѣ C опредѣлитъ отрѣзокъ $OC=v$, равный разстоянію отъ линзы до изображенія; въ этомъ убѣдимся изъ подобія треугольниковъ ACO и AFB:

$$\frac{u}{OC}=\frac{u+f}{f};\quad uf=u\,.\,OC+f\,.\,OC.$$

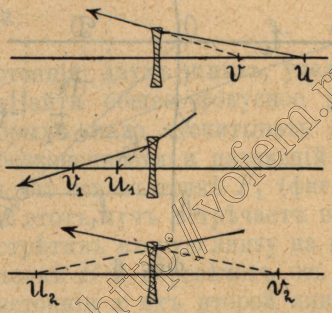
Дѣля обѣ части равенства на $u\,.\,f\,.\,OC$, получимъ:

$$\frac{1}{OC}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f}.$$

Сравнивая съ формулою для разсѣивающихъ линзъ

$$\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=-\frac{1}{f},$$

найдемъ, что $OC=v$.

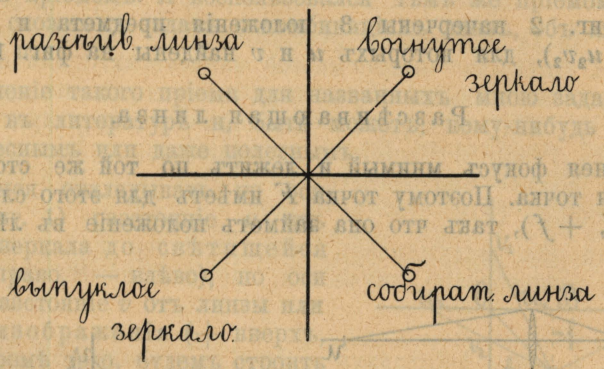


Фиг. 4.

Фиг. 4 поясняетъ значеніе построенія на фиг. 3.

http://vofem.ru

Подобнымъ же образомъ можно строить изображенія въ вогнутыхъ и выпуклыхъ зеркалахъ, нанося для вогнутаго зеркала точку F съ координатами $(+f, +f)$, для выпуклаго зеркала — съ координатами $(-f, -f)$. Для собирательной линзы, какъ мы видѣли выше,

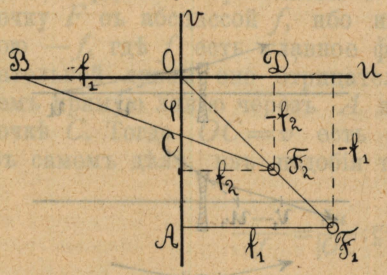


Фиг. 5.

точка F имѣетъ координаты $(+f, -f)$, а для разсѣивающей линзы — координаты $(-f, +f)$. F всегда лежитъ на прямой, идущей черезъ начало координатъ подъ угломъ 45° къ осямъ. Имѣя такой чертежъ (фиг. 5), можно легко рѣшать задачи о комбинаціяхъ всякихъ линзъ и зеркалъ.

Фокусное разстояніе двухъ собирательныхъ соприкасающихся линзъ.

Пусть двѣ тонкія собирательныя линзы съ фокусными разстояніями f_1 и f_2 сложены вмѣстѣ. Найти общее фокусное разстояніе φ этихъ линзъ. Строимъ точки F_1 и F_2 (фиг. 6) на прямой, дѣлящей пополамъ уголъ между осями во 2-ой и 4-ой четвертяхъ. Для первой линзы лучи, идущіе изъ безконечности, соберутся на разстояніи $OA = f_1$ за линзой. На вторую линзу будетъ падать пучекъ сходящихся лучей. Поэтому для второй линзы $u = -f_1$*). Откладываемъ $OB = f_1$ влѣво отъ O, соединяемъ B съ F_2. Отрѣзокъ OC укажетъ, на какомъ разстояніи φ соберутся лучи, идущіе изъ безконечности,



Фиг. 6.

*) Если на линзу падаетъ пучекъ сходящихся лучей, то за свѣтящуюся точку слѣдуетъ, конечно, считать ту, въ которой эти лучи сходятся.

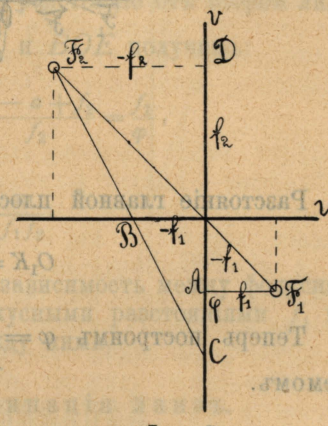
за обѣими линзами, т. е. φ есть фокусное разстояніе обѣихъ сложенныхъ линзъ. Изъ подобія треугольниковъ BOC и BDF_2 получимъ:

$$\frac{f_1}{\varphi} = \frac{f_1 + f_2}{f_2}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}.$$

Оптическая сила $\frac{1}{\varphi}$ двухъ соприкасающихся линзъ, измѣряемая въ діоптріяхъ, равна суммѣ оптическихъ силъ каждой изъ линзъ.

Собирательная и разсѣивающая линзы, сложенныя вмѣстѣ.

Абсолютныя величины фокусныхъ разстояній суть f_1 и f_2. Найти общее фокусное разстояніе. Строимъ точку F_1 $(f_1, -f_1)$ для собирательной линзы въ правой нижней четверти и точку F_2 $(-f_2, +f_2)$ для разсѣивающей линзы въ лѣвой верхней четверти. Лучъ, падающій изъ безконечности, пересѣчетъ ось Ov (фиг. 7) въ точкѣ A на разстояніи f_1 отъ O. Откладываемъ $OB = f_1$ влѣво отъ O и черезъ F_2 и B проводимъ прямую F_2BC до встрѣчи ея съ осью v. Отрѣзокъ $OC = \varphi$ опредѣлитъ фокусное разстояніе сложенныхъ чечевицъ. Изъ подобія треугольниковъ CF_2D и CBO получаемъ:



Фиг. 7.

$$\frac{f_1}{\varphi} = \frac{f_2}{\varphi + f_2}, \quad \text{или} \quad f_1\varphi + f_1f_2 = \varphi f_2, \quad \text{откуда} \quad \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2}.$$

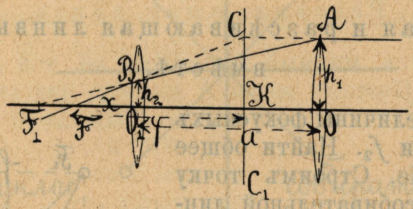
Двѣ собирательныя линзы, удаленныя одна отъ другой.

Пусть f_1 и f_2 суть фокусныя разстоянія двухъ линзъ, удаленныхъ одна отъ другой на разстояніе a. Найти общее фокусное разстояніе φ и главныя плоскости, отъ которыхъ надо отсчитывать эти фокусныя разстоянія. Лучъ, идущій изъ безконечности и падающій на первую линзу, послѣ преломленія пересѣкъ бы ось въ точкѣ F_1 (фиг. 8) на разстояніи f_1 отъ первой линзы. Пусть этотъ лучъ встрѣчаетъ первую линзу на высотѣ h_1 отъ оси линзъ. Встрѣтивъ вторую линзу на высотѣ h_2, лучъ еще разъ преломится въ точкѣ B и пересѣчетъ ось въ точкѣ F (фокусъ комбинаціи линзъ) на разстояніи x отъ второй линзы. Продолженіе линіи FB до встрѣчи въ C съ прямою AC, параллельною оси, опредѣлитъ точку C главной плоскости CC_1, гдѣ надо было

бы помѣстить линзу, замѣняющую двѣ линзы, и отъ которой надо отсчитывать фокусное разстояніе комбинаціи.

Обозначая FO_1 черезъ x, а FK — черезъ φ, изъ подобныхъ треугольниковъ FBO_1 и FCK получимъ: $x:\varphi = h_2:h_1$; изъ треугольниковъ же F_1BO_1 и F_1AO получимъ:

$$\frac{h_2}{h_1}=\frac{f_1-a}{f_1},\quad \text{откуда}\quad x=\varphi\cdot\frac{f_1-a}{f_1},\quad \varphi=x\cdot\frac{f_1}{f_1-a}.$$

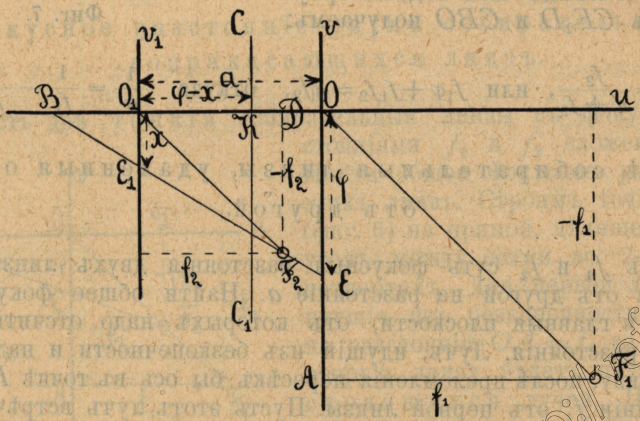


Фиг 8.

Разстояніе главной плоскости отъ передней линзы будетъ

$$O_1K=\varphi-x=\varphi\cdot\frac{a}{f_1}.$$

Теперь построимъ $\varphi=\frac{xf_1}{f_1-a}$ вышеуказаннымъ графическимъ пріемомъ.



Фиг. 9.

Построимъ оси v и v_1 (фиг. 9), отстоящія на разстояніи a одна отъ другой. F_1 и F_2 суть точки съ координатами $(+f_1, -f_1)$ и $(+f_2, -f_2)$, изображающія фокусы линзъ. Ось абсциссъ есть O_1Ou. Проведя черезъ F_1

http://rofem.ru

прямую F_1A до встрѣчи съ осью v, опредѣлимъ разстояніе $OA=f_1$, на которомъ пересѣклись бы лучи, идущіе изъ безконечности, за первой линзой. Отложимъ $OB=f_1$. Изъ B проведемъ прямую черезъ F_2, которая пересѣчетъ ось O_1v_1 въ точкѣ E_1 на разстояніи $O_1E_1=x$, указывающемъ, гдѣ лучи соберутся по выходѣ изъ второй линзы (на разстояніи x за нею). Ось Ov пересѣчется продолженіемъ прямой BF_2 въ точкѣ E на разстояніи $OE=\varphi$ отъ начала O. OE и есть фокусное разстояніе обѣихъ линзъ, ибо изъ подобія треугольниковъ BO_1E_1 и BOE имѣемъ:

$$\frac{f_1-a}{x}=\frac{f_1}{OE};\quad OE=x\cdot\frac{f_1}{f_1-a}=\varphi.$$

Отложивъ $O_1K=\varphi-x$, опредѣлимъ разстояніе отъ второй линзы.

Изъ подобія треугольниковъ BDF_2 и BOE получимъ:

$$\frac{BD}{DF_2}=\frac{BO}{OE},\quad \text{или}\quad \frac{f_1-a+f_2}{f_2}=\frac{f_1}{\varphi},$$

откуда

$$\frac{1}{\varphi}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{a}{f_1f_2}.$$

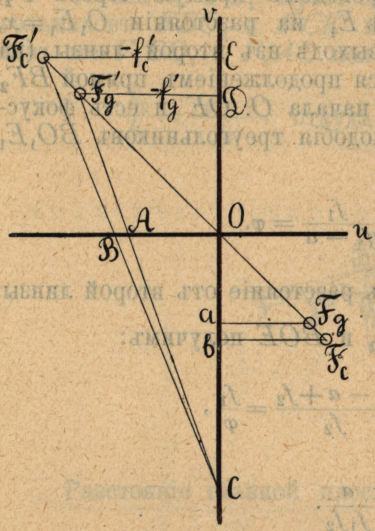
Это — извѣстная формула, дающая зависимость между фокуснымъ разстояніемъ φ комбинаціи линзъ, фокусными разстояніями f_1 и f_2 отдѣльныхъ линзъ и разстояніемъ a между ними.

Ахроматическая комбинація линзъ.

Имѣется собирательная линза съ фокуснымъ разстояніемъ f_D для среднихъ лучей; пусть f_C и f_G будутъ фокусныя разстоянія для красныхъ лучей C и синихъ G; тогда отношеніе $\frac{n_G-n_C}{n_D-1}$, гдѣ n есть показатель преломленія соотвѣтствующихъ лучей, есть относительное свѣторазсѣяніе матеріала линзы. Такъ какъ $f=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$, то $\frac{n_G-n_C}{n_D-1}=\frac{f_G-f_C}{f_D}$ равно относительной дисперсіи стекла линзы. Требуется приложить къ этой линзѣ вторую разсѣивающую линзу такого фокуснаго разстоянія и такого матеріала, чтобы лучи C и G собрались въ одной точкѣ, и чтобы общее фокусное разстояніе линзы для лучей C и G было φ ($\varphi_C=\varphi_G=\varphi$).

Пусть F_G и F_C (фиг. 10) суть фокусы собирательной линзы, лежащіе на прямой OF_GF_C, дѣлящей пополамъ правый нижній уголъ между осями. Проводимъ прямыя F_Cb и F_Ga; отрѣзки Oa и Ob укажутъ, что параллельныя оси лучи пересѣкутъ ось Ov на фокусныхъ разстояніяхъ Oa и Ob за стекломъ. Отложимъ $OA=f_G$ и $OB=f_C$ влѣво отъ O

по оси Ou. По оси Ov отложимъ отрѣзокъ $OC = \varphi$, указывающій, на какомъ разстояніи φ лучи C и G должны пересѣчь ось линзъ за второй линзой. Черезъ точку C и точки A и B проведемъ прямыя CA и CB, продолженія которыхъ пересѣкутъ прямую OM (равнодѣлящую угла между осями) въ точкахъ F'_G и F'_C, координаты которыхъ f'_G и f'_C суть искомыя фокусныя разстоянія разсѣивающей линзы, ахроматизирующей первую собирательную линзу. Среднее фокусное разстояніе f'_D можно принять за полусумму f'_G и f'_C. По этимъ даннымъ мы найдемъ отношеніе



Фиг. 10.

$$\frac{f'_G - f'_C}{f'_D} = \frac{n'_G - n'_C}{n'_D - 1},$$

т. е. относительную дисперсію стекла, изъ котораго нужно сдѣлать разсѣивающую линзу. Зная f' и n', найдемъ и радіусы кривизны для второй линзы.

Капиллярный анализъ.

В. А. Гернета.

Физическое состояніе веществъ при обыкновенной температурѣ, ихъ удѣльный вѣсъ, опредѣляемый самыми приближенными способами, цвѣтъ ихъ, плавкость, запахъ и летучесть являлись такими рѣзкими и характерными признаками, что самые первые, — намъ неизвѣстные, — изслѣдователи въ области химіи не могли, конечно, не обращать на нихъ вниманія при изученіи веществъ. Чѣмъ полнѣе и точнѣе становились химическія изслѣдованія, тѣмъ болѣе увеличивался, — если можно такъ выразиться, — спросъ на физическіе пріемы анализа. Шагъ за шагомъ химики использовали свѣторазсѣяніе, преломленіе и поляризацію свѣта, термическія особенности веществъ и измѣненія теплового состоянія при ихъ взаимодѣйствіяхъ, электропроводность и рядъ другихъ физическихъ свойствъ.

Физическіе методы изслѣдованія являются весьма цѣнными для каждаго химика. При пользованіи ими нѣтъ надобности, какъ это неизбѣжно бываетъ нужно при каждомъ чисто химическомъ способѣ изслѣдованія, въ разрушеніи или измѣненіи подлежащаго изслѣдованію

вещества: свѣтовая волна или туча электроновъ, пробѣжавъ сквозь изслѣдуемое вещество, оставляютъ его изслѣдователю въ томъ же видѣ, въ какомъ оно было до начала работы. А такъ какъ, сверхъ того, эти методы обыкновенно требуютъ весьма небольшого количества вещества, отличаются значительной точностью и берутъ у изслѣдователя мало времени, то во многихъ случаяхъ они являются незамѣнимыми.

Въ настоящей замѣткѣ описывается одинъ изъ физическихъ методовъ изслѣдованія, весьма мало извѣстный даже среди химиковъ-спеціалистовъ, вѣроятно, потому, что авторъ его проф. Фридрихъ Гоппельсрёдеръ (F. Goppelsroeder), занимающійся этимъ вопросомъ съ 1861 года, публиковалъ свои работы въ такихъ малораспространенныхъ изданіяхъ, какъ труды Базельскаго Общества естествоиспытателей, программа Базельской промышленной школы, бюллетени Мюльгаузенскаго техническаго общества и сообщенія технологическаго промышленнаго музея въ Вѣнѣ. Между тѣмъ по своей простотѣ, общедоступности и точности методъ этотъ заслуживаетъ совершенно иного къ себѣ отношенія.

Сущность способа заключается въ слѣдующемъ. Если укрѣпить полоску изъ тѣла съ капиллярными порами и ходами — напримѣръ, полоску обыкновенной фильтровальной бумаги — вертикально и погрузить ее нижнимъ концомъ въ жидкость, то эта послѣдняя станетъ подниматься по полоскѣ подъ вліяніемъ капиллярныхъ силъ и достигнетъ нѣкоторой высоты, зависящей, главнымъ образомъ, отъ природы жидкости и пористаго тѣла. Если жидкость содержитъ въ растворѣ какое-нибудь вещество, то это послѣднее также поднимается по пористой полоскѣ, но на нѣкоторой высотѣ, по мѣрѣ замедленія движенія, вызваннаго капиллярными силами, подчиняясь силѣ адсорпціи, дѣйствующей между молекулами пористаго тѣла и движущимися въ порахъ молекулами растворенаго вещества, начинаетъ отлагаться въ пористой полоскѣ. Какъ высота, на которой начинается отложеніе растворенаго вещества, такъ и ширина той зоны, въ которой происходитъ отложеніе, чрезвычайно различны для разныхъ веществъ и въ сильной мѣрѣ зависятъ отъ особенностей пористаго тѣла, — напримѣръ, отъ сорта взятой для опыта фильтровальной бумаги. Вещества, обладающія малой адсорпціонной способностью, поднимаются на значительную высоту, иногда до того предѣла, до котораго достигаетъ и растворитель, другія вещества начинаютъ отлагаться на небольшой высотѣ надъ уровнемъ жидкости. Если пористое тѣло (бумага, ткань изъ шелка, шерсти, льна, хлопка) влажно, то высота поднятія больше; въ разрѣженномъ пространствѣ при прочихъ равныхъ условіяхъ высота поднятія больше, чѣмъ при атмосферномъ давленіи. Если въ растворѣ находится нѣсколько веществъ, то каждое изъ нихъ поднимается до нѣкоторой, ему при данныхъ условіяхъ свойственной высоты, при чемъ тѣ зоны, въ которыхъ отлагаются разныя вещества, могутъ или отчасти налегать другъ на друга, или быть совершенно отдѣльными.

Такимъ образомъ, способъ даетъ возможность: 1) концентрировать вещества, находящіяся въ растворахъ, на небольшихъ участкахъ бумаги или ткани и 2) во многихъ случаяхъ отдѣлять другъ отъ

друга растворенныя вещества. Если растворенныя вещества окрашены, то ихъ можно непосредственно наблюдать на бумагѣ; если же они безцвѣтны, то ихъ присутствіе легко обнаружить при помощи химическихъ реакцій, либо прямо нанося реактивы на бумажную полоску, либо предварительно приготовивъ вытяжку изъ соотвѣтствующаго участка бумаги.

Методика опытовъ крайне проста: изъ хорошей возможно чистой фильтровальной бумаги вырѣзаютъ длинную полоску, шириной въ 2 *см.* или уже — даже въ 2-3 *мм.* — въ зависимости отъ количества изслѣдуемой жидкости, которымъ располагаютъ, и прикрѣпляютъ одинъ ея конецъ къ горизонтально укрѣпленной стеклянной палочкѣ или трубкѣ; для прикрѣпленія удобно брать деревянные зажимы, которыми пользуются прачки; по совѣту автора, легко приготовить штативъ, взявъ длинную стеклянную палочку и отогнувъ одинъ ея конецъ подъ прямымъ угломъ; длинный конецъ втыкаютъ въ бунзеновскую горѣлку, служащую подставкой. Для предохраненія бумажной полоски отъ движеній воздуха, испаренія жидкости и загрязненія пылью весь приборъ помѣщаютъ подъ закрытый стеклянный ящикъ или подъ стеклянный колпакъ. Нижній конецъ полоски погружаютъ въ изслѣдуемую жидкость такъ, чтобы подъ уровнемъ жидкости находилось 3-5 *см.* полоски. Еще удобнѣе зажать бумажную полоску между двумя стеклянными, болѣе широкими; на одной изъ этихъ стеклянныхъ полосокъ можно нанести дѣленія для непосредственнаго отсчета высоты поднятія жидкости; проще всего взять вмѣсто одной изъ стеклянныхъ полосокъ чертежную линейку изъ стекла съ дѣленіями; стеклянныя полоски не должны погружаться въ жидкость: ихъ нижніе концы помѣщаютъ на разстояніи 1 *см.* надъ уровнемъ жидкости.

Нѣсколько примѣровъ покажутъ, какихъ результатовъ можно достичь при помощи этихъ нехитрыхъ приспособленій.

Способъ прежде всего отличается во многихъ случаяхъ крайней чувствительностью, граничащей съ чувствительностью спектральнаго анализа.

Растворъ фуксина въ водѣ, содержащій 0.0054 *мг.* краски въ литрѣ, т. е. 1 ч. фуксина на 185 000 000 ч. воды, совершенно безцвѣтный, не далъ никакой окраски на полоскахъ изъ фильтровальной бумаги, пергаментной бумаги, хлопчатобумажной, льняной и шерстяной ткани, но нижняя часть шелковой полоски окрасилась въ блѣдный розовый цвѣтъ на протяженіи 3.5 *см.*, тогда какъ вода поднялась на 11 *см.*; при содержаніи 0.018 *мг.* фуксина въ литрѣ, т. е. 1 ч. на 55 000 000 ч. воды, не только удалось обнаружить его на всѣхъ примѣненныхъ полоскахъ (на льняной вверху, на остальныхъ внизу), но подмѣтить содержавшіеся въ немъ слѣды пикриновой кислоты по желтизнѣ верхняго края, до котораго поднялась жидкость. Растворы хлористаго стрихнина, содержавшіе 1 ч. въ 96 000 000 — 6 400 000 ч. воды, не давали реакціи съ сѣрной кислотой и двухромовокислымъ кали (фіолетовое окрашиваніе), но стрихнинъ удалось обнаружить при помощи этой реакціи на полоскахъ изъ фильтровальной бумаги. Весьма чувствительнымъ оказался капиллярный методъ для обнаруженія азотистой кислоты, алюминія и ряда другихъ веществъ.

Въ примѣненіи къ цѣлому ряду веществъ капиллярный методъ далъ уже много цѣнныхъ результатовъ: обнаруженіе въ водѣ органическихъ веществъ, загрязняющихъ ее, а также солей желѣза, обнаруженіе постороннихъ красящихъ веществъ, а также и другихъ примѣсей въ винѣ, пивѣ, фруктовыхъ сокахъ, консервахъ, уксусѣ, кофе, маслѣ и др. продуктахъ во многихъ случаяхъ удаются по этому способу очень легко. Наблюдая скорость поднятія жидкости, или, что то же, измѣряя высоту поднятія за одно и то же время, Гоппельсредеру легко удавалось отличать цѣльное молоко отъ разбавленнаго водой и устанавливать % разбавленія.

По методу Гоппельсредера можетъ работать каждый, ибо для этого не требуется ни лабораторной обстановки, ни дорогихъ приборовъ. Требуются, главнымъ образомъ, аккуратность и наблюдательность, — качества, которыми должны обладать всѣ изслѣдователи-любители, а результатовъ можно достичь очень интересныхъ. Этими соображеніями и объясняется появленіе настоящей замѣтки.

Къ теоріи maximum'а и minimum'а функціи одного перемѣннаго.

I-ая часть.

Прив.-доц. Е. Л. Буницкаго.

§ 1. Въ настоящей статьѣ предполагаются извѣстными такіе элементы высшей математики, какъ, напримѣръ, понятіе о непрерывной функціи или теорема о томъ, что функція, монотонная и непрерывная въ нѣкоторомъ промежуткѣ, имѣетъ обратную функцію, также монотонную и непрерывную въ надлежащемъ промежуткѣ. Предполагается также извѣстнымъ точное опредѣленіе maximum'а и minimum'а, и вообще предположено знаніе элементовъ дифференціальнаго исчисленія.

Совокупность вещественныхъ чиселъ, удовлетворяющихъ неравенствамъ $a \leqq x \leqq b$, гдѣ a и b — данныя неравныя числа, мы будемъ называть замкнутымъ промежуткомъ, обозначая его черезъ $\langle a, b \rangle$, числа же a и b мы будемъ называть концами промежутка. Совокупности же чиселъ, получаемыя изъ замкнутаго промежутка путемъ исключенія конца a или b или обоихъ концовъ, мы будемъ называть разомкнутыми промежутками, обозначая ихъ соотвѣтственно черезъ $(a, b\rangle$, $\langle a, b)$ и (a, b). Если функція $f(x)$ обладаетъ нѣкоторымъ свойствомъ для всякаго x, лежащаго въ данномъ замкнутомъ или разомкнутомъ промежуткѣ отъ a до b, то мы будемъ коротко говорить, что функція $f(x)$ имѣетъ это свойство въ данномъ промежуткѣ, или, еще короче, что функція $f(x)$ имѣетъ это свойство въ $\langle a, b \rangle$, въ $\langle a, b)$ и т. п. Если функція

$f(x)$ достигаетъ при $x = c$ maximum'а или minimum'а и если нѣтъ указанія, какой именно случай имѣетъ мѣсто, то мы условимся говорить, что функція $f(x)$ имѣетъ при $x = c$ extremum.

§ 2. Пусть функція $f(x)$, заданная въ нѣкоторомъ конечномъ или безконечномъ промежуткѣ, обладаетъ слѣдующими свойствами: 1) она имѣетъ производную $f'(x)$ во всемъ промежуткѣ; 2) производная $f'(x)$ имѣетъ конечное число вещественныхъ корней; 3) внутри промежутка между двумя любыми своими послѣдовательными вещественными корнями (а также въ промежуткахъ отъ $-\infty$ до наименьшаго или отъ наибольшаго корня до $+\infty$, если функція $f(x)$ задана въ одномъ изъ этихъ промежутковъ) функція $f'(x)$ сохраняетъ постоянный знакъ.

Эти свойства, какъ извѣстно, даютъ возможность найти всѣ maxima и minima функціи $f(x)$. Дѣйствительно, по извѣстной теоремѣ дифференціальнаго исчисленія, функція $f(x)$ въ каждомъ изъ послѣдовательныхъ указанныхъ выше промежутковъ монотонно возрастаетъ или монотонно убываетъ съ возрастаніемъ x, смотря по тому, сохраняетъ ли производная $f'(x)$ знакъ $+$ или $-$ внутри промежутка. Поэтому, соединивъ въ одинъ общій промежутокъ каждую группу смежныхъ промежутковъ (если такіе есть), внутри которыхъ $f'(x)$ сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ, мы либо убѣдимся, что функція $f(x)$ монотонна во всей области ея опредѣленія и потому не имѣетъ extremum'а, либо разобьемъ область опредѣленія функціи $f(x)$ на послѣдовательно чередующіеся съ возрастаніемъ x промежутки возрастанія и убыванія (или убыванія и возрастанія) функціи; каждая точка раздѣла предшествующаго промежутка возрастанія и послѣдующаго промежутка убыванія даетъ maximum, а точка раздѣла предшествующаго промежутка убыванія и послѣдующаго промежутка возрастанія даетъ minimum функціи $f(x)$.

§ 3. Приведенный выше обычный методъ изслѣдованія хода функціи $f(x)$ можетъ быть связанъ съ рѣшеніемъ поучительной задачи выдѣленія (если это возможно) всѣхъ тѣхъ различныхъ промежутковъ, въ которыхъ функція $f(x)$ принимаетъ совокупность однихъ и тѣхъ же значеній. Эта задача приводится къ рѣшенію неопредѣленнаго уравненія

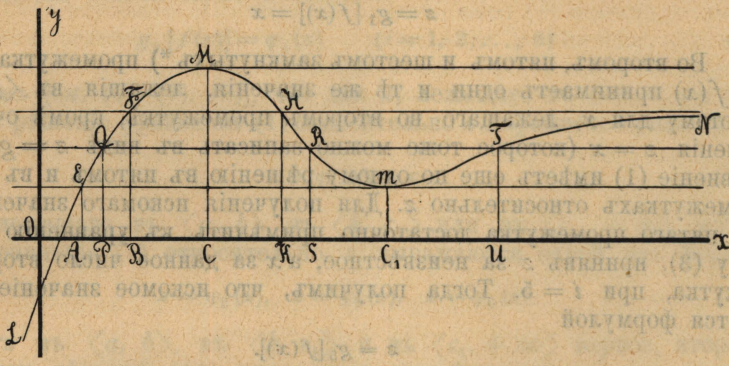
$$f(z) = f(x) \qquad (1)$$

съ двумя неизвѣстными, а именно—къ явному выраженію z одной или нѣсколькими функціями отъ x. Разъяснимъ методъ рѣшенія намѣченной задачи на слѣдующемъ схематическомъ примѣрѣ.

Пусть функція $y = f(x)$, удовлетворяющая предположеніямъ § 2-го, изображается графически (черт. 1) кривой $LMmN$. Пусть производная $f'(x)$ обращается въ нуль для абсциссъ c и c_1 точекъ M и m, сохраняя положительный знакъ въ $(-\infty, c)$ и $(c_1, +\infty)$ и отрицательный въ (c, c_1). Тогда въ точкахъ M и m ордината кривой достигаетъ соотвѣтственно maximum'а $f(c)$ и minimum'а $f(c_1)$. Пусть, кромѣ того, функція $f(x)$ стремится, по условію, къ $(-\infty)$, когда x стремится къ $(-\infty)$, и пусть $f(x)$ стремится къ конечному предѣлу l, лежащему, по условію, между числами $f(c)$ и $f(c_1)$,

когда x стремится къ $(+\infty)$; такимъ образомъ, кривая имѣетъ асимптоту $y = l$, параллельную оси x. Проведемъ къ кривой касательныя въ точкахъ M и m; онѣ параллельны оси x въ силу равенствъ $f'(c) = 0$ и $f'(c_1) = 0$. Проведемъ также указанную выше асимптоту. Касательная къ кривой въ точкѣ M имѣетъ лишь одну общую съ нею точку, касательная же въ точкѣ m встрѣтитъ кривую еще въ одной точкѣ E; наконецъ, асимптота къ кривой встрѣтитъ ее въ двухъ точкахъ F и H; называя абсциссы точекъ E, F, H черезъ a, b, k, мы видимъ, что $a < b < c < k < c_1$.

Всѣ эти утвержденія можно оправдать аналитически, принимая во вниманіе непрерывность функціи $f(x)$, имѣющей, по условію, производную, а также ея монотонность въ промежуткахъ $(-\infty, c)$,



Черт. 1.

(c, c_1), $(c_1, +\infty)$. Разобьемъ всю ось x-овъ на шесть промежутковъ $\langle -\infty, a\rangle$, $\langle a, b\rangle$, $\langle b, c\rangle$, $\langle c, k\rangle$, $\langle k, c_1\rangle$, $\langle c_1, +\infty\rangle$, которые мы будемъ называть коротко 1-ый, 2-ой, 3-ій, . . . , 6-ой промежутокъ. Функція $f(x)$ монотонна и непрерывна въ каждомъ изъ шести разсматриваемыхъ промежутковъ, а потому въ каждомъ изъ нихъ она имѣетъ обратную функцію, также монотонную и непрерывную; эти шесть обратныхъ функцій мы обозначимъ соотвѣтственно черезъ $g_1(y)$, $g_2(y), \ldots, g_6(y)$. Функціи $g_1(y)$, $g_2(y), \ldots, g_6(y)$ опредѣлены соотвѣтственно въ промежуткахъ $(-\infty, f(c_1))$, $\langle f(c_1), l\rangle$, $\langle l, f(c)\rangle$, $\langle f(c), l\rangle$, $\langle l, f(c_1)\rangle$, $\langle f(c_1), l\rangle$, а значенія этихъ функцій лежатъ соотвѣтственно въ промежуткахъ $(-\infty, a)$, $\langle a, b\rangle$, $\langle b, c\rangle$, $\langle c, k\rangle$, $\langle k, c_1\rangle$, $\langle c_1, +\infty\rangle$, т. е. соотвѣтственно въ первомъ, второмъ, . . . шестомъ промежуткахъ. Согласно съ опредѣленіемъ обратной функціи, для значеній x, лежащихъ въ одномъ изъ шести разсматриваемыхъ промежутковъ, и для соотвѣтствующихъ значеній y изъ равенства

$$y = f(x) \qquad (2)$$

вытекаетъ равенство

$$x = g_i(y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6) \qquad (3),$$

и наоборотъ; поэтому каждая изъ обратныхъ функцій $g_1(y)$, $g_2(y), \ldots,$

$g_6(y)$ для указанныхъ выше соотвѣтствующихъ значеній x и y удовлетворяетъ тожествамъ

$$g_i[f(x)] = x \quad (4), \qquad f[g_i(y)] = y \quad (i = 1, 2, \ldots, 6) \quad (5).$$

Теперь ясно, какъ можно воспользоваться построенными нами обратными функціями для нахожденія всѣхъ вещественныхъ рѣшеній уравненія (1) относительно z. Въ промежуткѣ $(-\infty, a)$, получаемомъ изъ перваго промежутка исключеніемъ конца a, функція $f(x)$ принимаетъ значенія, лежащія въ $(-\infty, f(c_1))$, ни одно изъ которыхъ не повторяется ни въ одномъ изъ остальныхъ пяти промежутковъ. Поэтому для x, лежащаго въ $(-\infty, a)$, существуетъ лишь одно вещественное рѣшеніе уравненія (1), а именно $z = x$, которое [см. (4)] можно записать также въ видѣ

$$z = g_1[f(x)] = x \quad (6).$$

Во второмъ, пятомъ и шестомъ замкнутыхъ *) промежуткахъ функція $f(x)$ принимаетъ одни и тѣ же значенія, лежащія въ $\langle f(c_1), l\rangle$, а потому для x, лежащаго во второмъ промежуткѣ, кромѣ очевиднаго рѣшенія $z = x$ (которое тоже можно записать въ видѣ $z = g_2[f(x)]$), уравненіе (1) имѣетъ еще по одному рѣшенію въ пятомъ и въ шестомъ промежуткахъ относительно z. Для полученія искомаго значенія для z изъ пятаго промежутка достаточно примѣнить къ уравненію (1) формулу (3), принявъ z за неизвѣстное, а x за данное число второго промежутка, при $i = 5$. Тогда получимъ, что искомое значеніе z выражается формулой

$$z = g_5[f(x)].$$

Точно такъ же для x изъ второго промежутка вещественный корень уравненія (1), рѣшеннаго относительно z при условіи, чтобы z было числомъ шестого промежутка, выражается формулой

$$z = g_6[f(x)].$$

Итакъ, для x, лежащаго во второмъ промежуткѣ, вещественныя рѣшенія уравненія (1) относительно z выражаются формулами

$$z = g_2[f(x)], \quad z = g_5[f(x)], \quad z = g_6[f(x)] \quad (7),$$

при чемъ первое изъ этихъ рѣшеній, конечно, приводится тожественно къ x.

Не мѣшаетъ замѣтить, что формулы (7) можно истолковать геометрически: пусть $x = OP$ есть число, взятое внутри второго промежутка, а $PQ = f(x)$ — ордината кривой, отвѣчающая абсциссѣ x. Проводя черезъ Q прямую, параллельную оси x, находимъ точки пересѣченія R и T этой прямой съ кривой и строимъ координаты этихъ точекъ; тогда $SR = UT = PQ = f(x)$, $OP = x = g_2[f(x)]$, $OS = g_5[f(x)]$, $OU = g_6[f(x)]$.

*) Для упрощенія дальнѣйшаго изложенія мы, полагая условно $f(+\infty) = l$, введемъ понятіе о замкнутомъ промежуткѣ $\langle c_1, +\infty\rangle$.

Повторяя аналогичныя разсужденія, мы видимъ, что при x, лежащемъ въ пятомъ или въ шестомъ промежуткѣ, вещественныя рѣшенія уравненія (1) относительно z выражаются тѣми же формулами (7), при чемъ вторая и третья изъ этихъ формулъ переходятъ соотвѣтственно въ равенство $z = x$. Наконецъ, если x есть число третьяго или четвертаго промежутка, то уравненіе (1) разрѣшается относительно z формулами:

$$z = g_3[f(x)], \quad z = g_4[f(x)] \tag{8},$$

при чемъ для x изъ третьяго и изъ четвертаго промежутковъ первая и вторая изъ формулъ (8) переходятъ соотвѣтственно въ равенство $z = x$.

Итакъ, формулы (6), (7), (8) даютъ полную таблицу вещественныхъ рѣшеній относительно z. Полагая

$$g_i[f(x)] = \varphi_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6) \tag{9},$$

мы видимъ [см. (6), (7), (8)], что для x, лежащаго въ $(-\infty, a)$, единственное рѣшеніе уравненія (1) относительно z выражается равенствомъ

$$z = \varphi_1(x) = x \tag{10};$$

для x, лежащаго въ $\langle a, b\rangle$, въ $\langle k, c_1\rangle$ или въ $\langle c_1, +\infty)$, всѣ рѣшенія уравненія (1) относительно z выражаются одной изъ формулъ

$$z = \varphi_2(x), \quad z = \varphi_5(x), \quad z = \varphi_6(x) \tag{11},$$

при чемъ въ $\langle a, b\rangle$, въ $\langle k, c_1\rangle$ и въ $\langle c_1, +\infty\rangle$ первое, второе и третье изъ рѣшеній (11) приводятся соотвѣтственно къ $z = x$; наконецъ, для x въ $\langle b, c\rangle$ или въ $\langle c, k\rangle$ всѣ рѣшенія уравненія (1) относительно z выражаются формулами

$$z = \varphi_3(x), \quad z = \varphi_4(x) \tag{12},$$

при чемъ въ $\langle b, c\rangle$ и въ $\langle c, k\rangle$ первое и второе изъ рѣшеній (12) приводятся соотвѣтственно къ $z = x$. Вообще каждая изъ функцій $\varphi_i(x)$ тожественно обращается въ x въ i-омъ промежуткѣ.

§ 4. Функціи $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_6(x)$ имѣютъ слѣдующія свойства.

1) Каждая изъ функцій $\varphi_i(x)$ опредѣлена въ i-омъ промежуткѣ, обращаясь притомъ въ немъ тожественно въ функцію $z = x$. Функція $\varphi_1(x)$ опредѣлена только въ первомъ промежуткѣ. Каждая изъ функцій $\varphi_2(x)$, $\varphi_5(x)$, $\varphi_6(x)$ опредѣлена и во второмъ, и въ пятомъ, и въ шестомъ промежуткахъ. Каждая изъ функцій $\varphi_3(x)$ и $\varphi_4(x)$ опредѣлена и въ третьемъ и въ четвертомъ промежуткахъ.

2) Значенія функціи $\varphi_i(x)$ съ опредѣленнымъ указателемъ i лежатъ въ i-омъ промежуткѣ. Это слѣдуетъ изъ формулы (9) и изъ того, что значенія функціи $g_i(y)$, по самому ея опредѣленію, лежатъ въ i-омъ промежуткѣ.

3) Пусть $\varphi_i(x)$ есть та изъ шести разсматриваемыхъ функцій, которая опредѣлена и въ i-омъ и въ нѣкоторомъ другомъ — k-омъ про-

межуткѣ [такою функціей, какъ это указано выше, оказывается въ нашемъ примѣрѣ любая изъ шести функцій, кромѣ $\varphi_1(x)$]. Разсматриваемая функція $\varphi_i(x)$ не обращается въ k-омъ промежуткѣ тожественно въ функцію $z=x$. Дѣйствительно, если бы эта функція $\varphi_i(x)$ обращалась въ k-омъ промежуткѣ въ функцію $z=x$, то ея значенія для k-го промежутка лежали бы тоже въ k-мъ промежуткѣ, а это невозможно, такъ какъ [см. 2)] всѣ значенія функціи $\varphi_i(x)$ лежатъ въ i-омъ промежуткѣ.

4) Каждая изъ функцій $\varphi_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, 6)$ въ соотвѣтствующихъ промежуткахъ удовлетворяетъ тожеству

$$f[\varphi_i(x)]=f(x) \qquad (13).$$

Это слѣдуетъ изъ того, что каждая изъ функцій $\varphi_i(x)$ даетъ рѣшенія уравненія (1) относительно z. Конечно, тожества (13) выполняются для значеній x, лежащихъ въ тѣхъ промежуткахъ, въ которыхъ опредѣлены соотвѣтствующія функціи $\varphi_i(x)$. Если $i=1$, то тожество (13) выполняется лишь въ первомъ промежуткѣ; если $i=2$, 5 или 6, то каждое изъ соотвѣтствующихъ тожествъ вида (13) выполняется и во второмъ, и въ пятомъ, и въ шестомъ промежуткахъ; если $i=3$, или 4, то соотвѣтствующія тожества выполняются и въ третьемъ и въ четвертомъ промежуткахъ.

5) Функціи $\varphi_i(x)$ непрерывны. Это вытекаетъ изъ формулъ (9) и изъ непрерывности функцій $f(x)$ и $g_i(y)$.

6) Каждая изъ функцій $\varphi_i(x)$ монотонна въ каждомъ изъ тѣхъ шести разсматриваемыхъ нами промежутковъ, въ которыхъ она опредѣлена. Это вытекаетъ изъ формулъ (9) и изъ монотонности функціи $f(x)$ въ каждомъ изъ тѣхъ шести промежутковъ, на которые разбита ось x-овъ, а также изъ монотонности функцій $g_i(y)$ въ соотвѣтствующихъ промежуткахъ. Каждая изъ функцій $\varphi_i(x)$ монотонно возрастаетъ въ томъ изъ шести промежутковъ, въ которомъ она опредѣлена, если функція $f(x)$ одновременно монотонно возрастаетъ или убываетъ и въ этомъ и въ i-омъ промежуткѣ; наоборотъ, если въ одномъ изъ этихъ промежутковъ функція $f(x)$ монотонно возрастаетъ, а въ другомъ убываетъ съ возрастаніемъ x, то функція $\varphi_i(x)$ монотонно убываетъ въ разсматриваемомъ промежуткѣ. Такъ, напримѣръ, функція $\varphi_2(x)$ монотонно возрастаетъ въ $\langle c_1, +\infty)$ и монотонно убываетъ съ возрастаніемъ x въ $\langle k, c_1\rangle$; каждая изъ функцій $\varphi_i(x)$ опредѣлена въ i-омъ промежуткѣ и монотонно возрастаетъ въ немъ, приводясь тожественно въ этомъ промежуткѣ къ функціи $z=x$.

7) Функціи $\varphi_2(x)$, $\varphi_5(x)$, $\varphi_6(x)$ образуютъ группу функцій; это значитъ, что сложная функція, составленная изъ любыхъ двухъ изъ этихъ функцій, даетъ опять одну изъ этихъ функцій. Функціи $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$ тоже образуютъ группу, и отдѣльная функція $\varphi_1(x)$ также даетъ группу.

Дѣйствительно, изъ формулъ (9) и (5) при n и p, равныхъ любому изъ чиселъ 2, 5 или 6, имѣемъ:

$$\varphi_n[\varphi_p(x)]=g_n(f[g_p(f(x))]=g_n[f(x)]=\varphi_n(x) \qquad (14).$$

Напримѣръ, $\varphi_2[\varphi_5(x)] = \varphi_2(x)$, $\varphi_5[\varphi_6(x)] = \varphi_5(x)$. Функціи $\varphi_3(x)$ и $\varphi_4(x)$ тоже образуютъ группу, въ чемъ можно убѣдиться, примѣнивъ формулу (14) въ томъ случаѣ, когда n и p равны одному изъ чиселъ 3 или 4. Наконецъ, для функціи $\varphi_1(x)$ имѣемъ: $\varphi_1[\varphi_1(x)] = x = \varphi_1(x)$.

8) Абсциссы c и c_1 точекъ M и m, въ которыхъ функція $f(x)$ достигаетъ extrema, суть соотвѣтственно корни уравненій:

$$\varphi_3(x) = x \quad (15), \qquad \varphi_4(x) = x \quad (16)$$

и

$$\varphi_5(x) = x \quad (17), \qquad \varphi_6(x) = x \quad (18),$$

при чемъ x въ уравненіяхъ (15), (16), (17) и (18) предполагается соотвѣтственно любымъ числомъ изъ замкнутаго четвертаго, третьяго шестого и пятаго промежутковъ; такимъ образомъ, ни одно изъ этихъ уравненій [см. (3)] не приводится къ тожеству $x = x$.

Дѣйствительно, изъ формулъ (9) и (4), имѣя въ виду, что c лежитъ одновременно и въ третьемъ и въ четвертомъ промежуткѣ, находимъ: $\varphi_3(c) = g_3[f(c)] = c$. Итакъ, $\varphi_3(c) = c$, и подобнымъ же образомъ получимъ: $\varphi_4(c) = c$, $\varphi_5(c_1) = c_1$, $\varphi_6(c_1) = c_1$.

§ 5. Разсмотрѣнный въ частномъ случаѣ методъ рѣшенія уравненія (1) относительно z можно, конечно, примѣнить къ любой функціи $f(x)$, удовлетворяющей ограниченіямъ § 2-го. Въ самомъ дѣлѣ, для такой функціи всю область измѣненія независимаго перемѣннаго можно разбить на конечное число промежутковъ возрастанія или убыванія функціи $f(x)$ и опредѣлить всѣ ея extrema. Затѣмъ слѣдуетъ построить кривую $y = f(x)$, провести во всѣхъ ея точкахъ, отвѣчающихъ extrema, касательныя, а также провести одну или двѣ параллельныя оси x асимптоты, если онѣ есть. Тогда, опредѣливъ точки встрѣчи (если таковыя окажутся) этихъ касательныхъ и асимптотъ (если онѣ есть) съ кривой, можно, выдѣляя части кривой, заключенныя между этими параллельными, разбить всю область опредѣленія функціи $f(x)$ на такія группы промежутковъ, въ которыхъ значенія функціи измѣняются въ одномъ и томъ же промежуткѣ. Каждой такой группѣ m промежутковъ отвѣчаетъ рядъ выражаемыхъ формулами вида (9) функцій $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$, опредѣленныхъ во всѣхъ промежуткахъ этой группы, при чемъ значенія каждой изъ этихъ функцій лежатъ въ соотвѣтствующемъ промежуткѣ группы, въ которомъ эта функція переходитъ тожественно въ функцію $z = x$. Функціи $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ каждаго такого ряда образуютъ группу, а именно онѣ подчинены соотношеніямъ $\varphi_n[\varphi_p(x)] = \varphi_n(x)$, гдѣ n и p суть любыя изъ чиселъ $1, 2, \ldots, m$. Построенныя такимъ образомъ для всѣхъ группъ промежутковъ функціи $\varphi_i(x)$ непрерывны и монотонны въ соотвѣтствующихъ промежуткахъ. Каждая изъ функцій $\varphi_i(x)$ удовлетворяетъ въ своей группѣ промежутковъ тожеству $f[\varphi_i(x)] = f(x)$, и всевозможныя равенства $z = \varphi_i(x)$ даютъ всѣ вещественныя рѣшенія уравненія (1) относительно z. Каждая изъ абсциссъ c, для которой ордината $f(x)$ достигаетъ extremum, есть корень двухъ уравненій вида $\varphi_i(x) = x$, навѣрно не приводящихся къ тожествамъ. Слѣдуетъ замѣтить, что изложенная теорія рѣшенія урав-

ненія (1) относительно z въ связи съ теоріей extrema остается въ силѣ, если функція $f(x)$ въ нѣкоторомъ конечномъ числѣ точекъ, сохраняя непрерывность, не имѣетъ производной. Эти точки надо также принять за концы промежутковъ возрастанія или убыванія функціи, и, если въ такой точкѣ функція $f(x)$ достигаетъ extremum'a, то въ ней при выдѣленіи окончательныхъ группъ промежутковъ слѣдуетъ также провести вмѣсто касательной прямую, параллельную оси x. Наконецъ, вся предыдущая теорія можетъ быть распространена и на тотъ случай, когда вся область опредѣленія функціи $f(x)$ распадается на исчислимо-безконечное множество отдѣльныхъ промежутковъ, въ которыхъ она удовлетворяетъ условіямъ § 2-го или только-что указаннымъ обобщеннымъ условіямъ. Это вытекаетъ изъ возможности приложить всѣ высказанныя выше соображенія ко всякому отдѣльному изъ упомянутаго безконечнаго множества промежутковъ; конечно, число всѣхъ различныхъ функцій $\varphi_i(x)$, а также и число всѣхъ различныхъ группъ этихъ функцій можетъ оказаться безконечнымъ.

§ 6. Прежде чѣмъ иллюстрировать изложенную теорію примѣрами, укажемъ еще на одно весьма любопытное обстоятельство. Мы видѣли, что нахожденіе всѣхъ вещественныхъ рѣшеній уравненія (1) относительно z зависитъ отъ опредѣленія всѣхъ extrema функціи $f(x)$. Но и наоборотъ, если функція $f(x)$ удовлетворяетъ нѣкоторымъ надлежащимъ ограниченіямъ, то для опредѣленія ея extrema достаточно найти всѣ непрерывныя рѣшенія уравненія (1) относительно z, выражаемыя равенствами $z = \varphi_i(x)$, и рѣшить всѣ уравненія типа $\varphi_i(x) = x$. Дѣйствительно, пусть въ нѣкоторомъ конечномъ или безконечномъ промежуткѣ дана непрерывная функція $f(x)$, которая обладаетъ, кромѣ того, слѣдующими свойствами.

1°. Для всякаго даннаго значенія a независимаго перемѣннаго можно указать положительное число Δ такъ, чтобы функція $f(x)$ была монотонна въ каждомъ изъ промежутковъ $\langle a - \Delta, a\rangle$, $\langle a, a + \Delta\rangle$, если она въ немъ опредѣлена.

2°. Неопредѣленное уравненіе (1) съ двумя неизвѣстными можетъ быть разрѣшено при помощи конечнаго ряда равенствъ:

$$z = \varphi_0(x), \quad z = \varphi_1(x), \ldots, \quad z = \varphi_n(x) \tag{19}$$

гдѣ $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ суть различныя функціи отъ x, непрерывныя въ соотвѣтствующихъ конечныхъ или безконечныхъ промежуткахъ, кромѣ, быть можетъ, нѣкотораго конечнаго числа особыхъ точекъ, при чемъ мы допускаемъ, что рядомъ (19) исчерпывается совокупность функцій, которыя, будучи непрерывны въ нѣкоторыхъ промежуткахъ, даютъ рѣшеніе уравненія (1).

Слѣдуетъ замѣтить, что среди функцій (19) есть навѣрно и функція $z = x$, и мы положимъ разъ навсегда, что

$$\varphi_0(x) = x \tag{20}$$

3°. Каждая изъ функцій $\varphi_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ непрерывна во всякой точкѣ, въ которой она опредѣлена.

4°. Мы предположимъ, что каждое изъ уравненій

$$\varphi_i(x)=x \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{21}$$

имѣетъ конечное число вещественныхъ корней.

Указанныя свойства функціи $f(x)$ даютъ возможность найти всѣ ея extrema, какъ это видно изъ слѣдующихъ предложеній.

Теоремы. 1) Если при $x=c$ функція $f(x)$ достигаетъ extremum, то c есть корень одного изъ уравненій (21).

2) Если c есть вещественный корень одного изъ уравненій (21), то c лежитъ внутри промежутка, въ которомъ опредѣлена функція $f(x)$, при чемъ можно для всякаго напередъ заданнаго положительнаго числа δ опредѣлить числа h и k разныхъ знаковъ такъ, чтобы выполнялось равенство $f(c+h)=f(c+k)$ и неравенства $|h|<\delta$ и $|k|<\delta$.

3) Если каждое изъ двухъ неравныхъ чиселъ c_1 и c_2 есть вещественный корень одного изъ уравненій (21) и если между этими числами не лежитъ ни одинъ изъ вещественныхъ корней ни одного изъ уравненій (21), то функція $f(x)$ монотонна въ $\langle c_1, c_2\rangle$.

4) Если c есть наименьшій (или единственный) изъ всѣхъ вещественныхъ корней всѣхъ уравненій (21), то функція $f(x)$ опредѣлена и монотонна въ нѣкоторомъ конечномъ или безконечномъ промежуткѣ, содержащемъ число c и примыкающемъ къ c слѣва (такимъ образомъ, c есть наибольшее число этого промежутка). Если c — наибольшій (или единственный) изъ всѣхъ вещественныхъ корней всѣхъ уравненій (21), то функція $f(x)$ опредѣлена и монотонна въ нѣкоторомъ конечномъ или безконечномъ промежуткѣ, содержащемъ число c и примыкающемъ къ c справа (такимъ образомъ, c есть наименьшее число этого промежутка).

5) Если c — вещественный корень одного изъ уравненій (21), то функція $f(x)$ достигаетъ при $c=x$ extremum.

Пусть функція $f(x)$ достигаетъ extremum при $x=c$. Пользуясь свойствомъ 1° функціи $f(x)$, выберемъ положительное число Δ такъ, чтобы она въ одномъ изъ двухъ промежутковъ $\langle c-\Delta, c\rangle$ и $\langle c, c+\Delta\rangle$ монотонно возрастала, а въ другомъ — монотонно убывала. Въ силу непрерывности функціи $f(x)$ внутри промежутковъ $\langle c-\Delta, c\rangle$ и $\langle c, c+\Delta\rangle$ можно указать числа α и β такъ, чтобы они удовлетворяли неравенствамъ $\alpha<c<\beta$ и равенству

$$f(\alpha)=f(\beta) \tag{22}$$

Въ $\langle c, \beta\rangle$ функція $f(x)$ монотонна и непрерывна; поэтому въ промежуткѣ $\langle f(c), f(\beta)\rangle$ можно опредѣлить также монотонную и непрерывную функцію $g(y)$, обратную функціи $f(x)$ въ $\langle c, \beta\rangle$. Функція $g(y)$, по опредѣленію обратной функціи, удовлетворяетъ тожеству

$$g[f(x)] = x \tag{23}$$

для всякаго x, лежащаго въ $\langle c, \beta\rangle$, и тожеству

$$f[g(y)] = y \tag{24}$$

для всякаго y, лежащаго въ $\langle f(c), f(\beta)\rangle$, или же, что все равно [см. (22)], въ $\langle f(c), f(a)\rangle$, при чемъ каждое изъ значеній функціи $g(y)$ лежитъ въ $\langle c, \beta\rangle$. Пусть x — нѣкоторое число промежутка $\langle a, c\rangle$; тогда соотвѣтствующее значеніе функціи $f(x)$, вслѣдствіе монотонности ея въ $\langle a, c\rangle$, лежитъ въ промежуткѣ $\langle f(a), f(c)\rangle$, въ которомъ опредѣлена функція $g(y)$, а потому [см. (24)] для всякаго x въ $\langle a, c\rangle$

$$f[g(f(x))] = f(x) \tag{25}$$

при чемъ $g(f(x))$ есть число промежутка $\langle c, \beta\rangle$. Итакъ, полагая

$$\varphi(x) = g[f(x)] \tag{26}$$

мы опредѣляемъ въ $\langle a, c\rangle$ непрерывную [вслѣдствіе непрерывности функцій $g(y)$ и $f(x)$] функцію $\varphi(x)$, которая для всякаго x въ $\langle a, c\rangle$ удовлетворяетъ тожеству [см. (25)] $f[\varphi(x)] = f(x)$. Такимъ образомъ, $z = \varphi(x)$ есть непрерывное въ $\langle a, c\rangle$ рѣшеніе уравненія (1), при чемъ функція $\varphi(x)$ не есть [см. (20)] функція $\varphi_0(x) = x$, такъ какъ она для надлежащаго x въ $\langle a, c\rangle$ можетъ принять любое значеніе въ $\langle c, \beta\rangle$. Слѣдовательно, по свойству 2^0 функціи $f(x)$, справедливо тожество $\varphi(x) = \varphi_\nu(x)$, гдѣ $\varphi_\nu(x)$ есть одна изъ функцій (19) съ указателемъ ν, отличнымъ отъ нуля. Съ другой стороны, полагая въ равенствѣ (26) $x = c$, находимъ [см. (23)] $\varphi(c) = \varphi_\nu(c) = g[f(c)] = c$, откуда $\varphi_\nu(c) = c$, т. е. c есть корень одного изъ уравненій (21). Итакъ, теорема 1) доказана.

Обратимся къ доказательству теоремы 2). Пусть c есть корень одного изъ уравненій (21)

$$\varphi_\nu(x) = x \tag{27}$$

Тогда

$$\varphi_\nu(c) = c \tag{28}$$

и функція $\varphi_\nu(x)$ опредѣлена для $x = c$. Такъ какъ функція $\varphi_\nu(x)$ опредѣлена (см. 2^0) въ одномъ или въ нѣсколькихъ промежуткахъ, то, будучи опредѣлена въ точкѣ c, она опредѣлена и въ промежуткѣ $\langle c, c+\Delta\rangle$, гдѣ Δ — число надлежащаго знака, при чемъ всегда можно выбрать Δ настолько малымъ по абсолютной величинѣ, чтобы (см. 1^0) функція $f(x)$ была монотонна въ $\langle c, c+\Delta\rangle$ и чтобы (см. 4^0) уравненіе (27) не имѣло въ $\langle c, c+\Delta\rangle$ ни одного корня, кромѣ c; наконецъ, не нарушая двухъ указанныхъ условій, можно предположить, что $|\Delta| < \delta$, гдѣ δ —

напередъ заданное положительное число. Въ дальнѣйшемъ мы предположимъ, что Δ подчинено всѣмъ тремъ указаннымъ условіямъ. Возьмемъ внутри промежутка $\langle c,\ c+\Delta\rangle$ нѣкоторое число $c+h$; тогда

$$|h|<|\Delta| \tag{29},$$

Такъ какъ функція $\varphi_\nu(x)$ опредѣлена въ точкѣ c, то она (см. 3^0) и непрерывна въ c; поэтому можно выбрать h настолько малымъ по абсолютной величинѣ, чтобы, полагая

$$\varphi_\nu(c+h)=\varphi_\nu(c)+k \tag{30},$$

мы имѣли (31) $|k|<\Delta$. Функція $\varphi_\nu(x)$ для всякаго x въ $\langle c,\ c+\Delta\rangle$ удовлетворяетъ по условію (см. 2^0) тожеству $f[\varphi(x)]=f(x)$. Поэтому [см. (30), (28)] $f[\varphi_\nu(c+h)]=f[\varphi_\nu(c)+k]=f(c+k)=f(c+h)$. Итакъ, (32) $f(c+h)=f(c+k)$. По монотонности функціи $f(x)$ въ $\langle c,\ c+\Delta\rangle$ $f(c+h)\neq f(c)$, а потому и $f(c+k)\neq f(c)$; значитъ, $k\neq 0$. Но k и h не могутъ быть одного знака; если бы они были одного знака, то [см. (29), (31)] числа $c+h$ и $c+k$ оба лежали бы въ $\langle c,\ c+\Delta\rangle$ и удовлетворяли бы равенству (32), что противорѣчило бы монотонности функціи $f(x)$ въ $\langle c,\ c+\Delta\rangle$. Итакъ, h и k — числа разныхъ знаковъ. Они удовлетворяютъ равенству (32) и неравенствамъ (29) и (31). Слѣдовательно, функція $f(x)$ опредѣлена для двухъ чиселъ $c+h$ и $c+k$, между которыми лежитъ c, но она опредѣлена, по условію, въ промежуткѣ, а потому c лежитъ внутри этого промежутка. Такимъ образомъ, теорема 2) доказана.

Перейдемъ къ теоремѣ 3). Если бы функція $f(x)$ не была монотонна въ $\langle c_1,\ c_2\rangle$, то она или приводилась бы къ постоянной въ этомъ промежуткѣ или имѣла бы, вслѣдствіе непрерывности, extremum для нѣкотораго значенія $x=c_0$, лежащаго внутри $\langle c_1,\ c_2\rangle$. Но первое предположеніе невозможно въ силу свойства 1^0 функціи $f(x)$, а при второмъ — число c_0 оказалось бы, по теоремѣ 1), корнемъ одного изъ уравненій (21), лежащимъ между корнями c_1 и c_2, что также противно условію. Подобнымъ же образомъ доказывается и теорема 4): примѣняя аналогичное разсужденіе къ промежутку, примыкающему къ наименьшему корню c слѣва, мы нашли бы корень одного изъ уравненій (21), меньшій c, что невозможно; также доказывается и вторая часть теоремы 4)*). Теперь докажемъ теорему 5). По теоремамъ 3) и 4) вещественный корень c нѣкотораго изъ уравненій (21) есть общій конецъ двухъ промежутковъ, въ каждомъ изъ которыхъ функція $f(x)$ монотонна. Но въ обоихъ этихъ промежуткахъ функція $f(x)$ не можетъ оказаться одновременно монотонно возрастающей или монотонно убывающей, такъ какъ по теоремѣ 2) въ сколь угодно малой окрестности корня c и по разныя его стороны можно

*) Элементы подробнаго доказательства предложеній 3) и 4) даны въ первой части § 118-го „Grundzüge“ Kowalewsk'аго. На русскомъ языкѣ эта книга издана т-вомъ „Mathesis“ въ Одессѣ подъ заглавіемъ: Г. Ковалевскій — „Основы дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій“. Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей прив.-доц. С. О. Шатуновскаго. Стр. 503. 1911. Вообще въ настоящей статьѣ данъ лишь эскизъ основной идеи. Мы надѣемся вернуться къ болѣе подробному развитію этой основной идеи при болѣе широкихъ ограниченіяхъ относительно изслѣдуемой функціи $f(x)$.

найти два такихъ значенія x, для которыхъ $f(x)$ получаетъ [см. (32)] равныя значенія. Значитъ въ одномъ изъ указанныхъ выше промежутковъ $f(x)$ монотонно возрастаетъ, а въ другомъ монотонно убываетъ. Поэтому $f(c)$ есть extremum функціи $f(x)$.

Изъ теоремъ 1) и 5) вытекаетъ слѣдующее предложеніе.

Если функція $f(x)$ удовлетворяетъ требованіямъ 1^0, 2^0, 3^0, 4^0, то для нахожденія всѣхъ ея extrema достаточно составить всѣ уравненія вида (21), отвѣчающія этой функціи, и опредѣлить вещественные ихъ корни. Всѣ вещественные корни всѣхъ этихъ уравненій и суть всѣ тѣ значенія x, для которыхъ функція $f(x)$ достигаетъ extremum'а.

Если c есть корень какого-либо изъ уравненій (21), лежащій между двумя другими корнями c_1 и c_2, то $f(c)$ есть maximum или minimum, смотря по тому, будетъ ли $f(c)$ больше или меньше каждаго изъ чиселъ $f(c_1)$ и $f(c_2)$. Если c есть наибольшій или наименьшій изъ корней уравненій (21), то для опредѣленія характера extremum'а достаточно сравнить число $f(c)$ съ значеніемъ функціи $f(x)$ для ближайшаго меньшаго или ближайшаго большаго корня; если c есть единственный корень, то достаточно сравнить $f(c)$ съ $f(c+h)$ при любомъ h, отличномъ отъ нуля. Наконецъ, при отсутствіи вещественныхъ корней уравненій (21) (или самихъ уравненій) функція $f(x)$ не имѣетъ extrema, а потому она, какъ это вытекаетъ изъ ея непрерывности, монотонна во всемъ промежуткѣ, въ которомъ опредѣлена.

Проводя въ точкахъ кривой $y=f(x)$, дающихъ extrema, параллельныя оси x прямыя (и, если нужно, параллельныя оси x асимптоты x), можно показать, что функціи (19), отвѣчающія разсматриваемой функціи $f(x)$, при надлежащихъ обозначеніяхъ въ надлежащихъ промежуткахъ, имѣютъ всѣ свойства, указанныя въ § 5-омъ.

Всю изложенную въ § 6-омъ теорію extrema можно распространить и на такую функцію $f(x)$, область опредѣленія которой распадается на исчислимо-безконечное множество промежутковъ, въ каждомъ изъ которыхъ выполняются условія 1^0, 2^0, 3^0, 4^0.

§ 7. Переходимъ къ примѣрамъ, поясняющимъ изложенное въ § 6-омъ. Условіе 1^0 можно провѣрить въ отдѣльныхъ промежуткахъ и послѣ рѣшенія уравненій вида (21); это обыкновенно удается въ простѣйшихъ примѣрахъ безъ труда (см. рѣшенія задачъ № 2 и № 5 отдѣла II-го въ №№ 588 и 590 „Вѣстника“). Условіе 1^0 навѣрно выполняется для функціи, производная которой непрерывна и имѣетъ конечное число корней; въ частности, это условіе выполняется для функціи аналитической въ окрестности всякой точки a, въ которой она опредѣлена (т. е. для функціи, разлагающейся въ окрестности a въ степенной рядъ по степенямъ $x-a$). Таковы раціональныя и вообще обычныя простыя и сложныя элементарныя функціи. Условія 2^0, 3^0, 4^0 провѣряются въ простѣйшихъ случаяхъ непосредственно. Слѣдуетъ замѣтить, что обозначенія функцій (19) и областей ихъ опредѣленія могутъ и не отвѣчать предположеніямъ §§ 4-го и 5-го, что нисколько не вредитъ примѣненію метода § 6-го для изслѣдованія хода

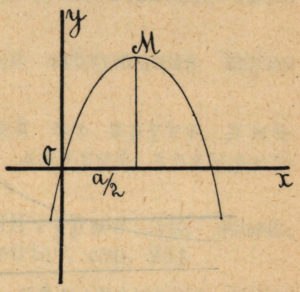
функціи; напримѣръ, функціи $\varphi_2(x)$ и $\varphi_3(x)$ схематическаго примѣра, заданныя соотвѣтственно въ промежуткахъ $\langle k, c_1\rangle$ и $\langle c, k\rangle$, можно слить въ одну функцію, опредѣленную въ $\langle c, c_1\rangle$; можетъ случиться и такъ, что всѣ функціи $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ сливаются въ одну функцію.

Примѣръ I-ый. Пусть $f(x) = ax - x^2$. Кривая $y = f(x)$ есть въ этомъ случаѣ парабола, проходящая черезъ начало координатъ (черт. 2).

Рѣшая въ этомъ случаѣ уравненіе $f(z) = f(x)$, удаляя корень $z = x$, получимъ $z = \varphi(x) = a - x$. Рѣшая уравненіе $\varphi(x) = x$, т. е. $a - x = x$, получимъ: $x = c = \frac{a}{2}$. Сравнивъ $f\left(\frac{a}{2}\right)$ съ $f(0)$ (или съ $f(1)$, если $a = 0$), убѣждаемся, что $f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4}$ есть maximum.

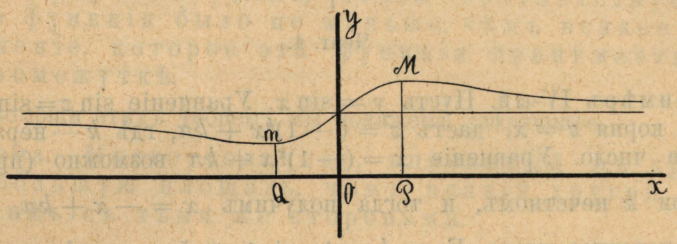
Примѣръ II-й (зад. № 5-ый 6-ой серіи II-го отдѣла). Пусть $f(x) = \frac{1 + x + x^2}{1 + x^2}$, или $f(x) = 1 + \frac{x}{1 + x^2}$. Въ этомъ случаѣ (черт. 3-й) кривая $y = f(x)$ имѣетъ асимптоту $y = 1$. Рѣшая уравненіе

$$1 + \frac{x}{1 + x^2} = 1 + \frac{z}{1 + z^2},$$



Черт. 2.

получимъ послѣ удаленія корня $z = x$ рѣшеніе



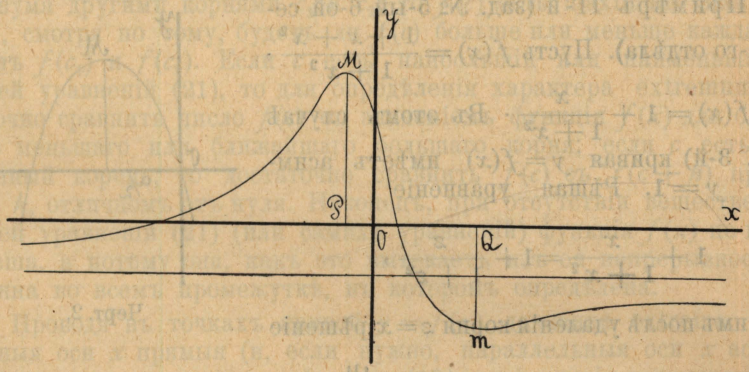
Черт. 3.

$z = \frac{1}{x}$. Рѣшая уравненіе $x = \frac{1}{x}$, или $x^2 = 1$, получимъ корни $x = 1$ и $x = -1$. Сравнивая значенія $f(-1) = \frac{1}{2}$ и $f(1) = \frac{3}{2}$ функціи, мы видимъ, что $f(-1)$ есть minimum, а $f(1) = \frac{3}{2}$ — maximum. Въ $(-\infty, -1\rangle$ и $\langle -1, 0)$ наша функція принимаетъ одни и тѣ же значенія, лежащія въ промежуткѣ $(1, \frac{1}{2}\rangle$, а въ $(0, 1\rangle$ и $\langle 1, +\infty)$ — одни и тѣ же значенія, лежащія въ промежуткѣ $(1, \frac{3}{2}\rangle$.

http://vqlm.ru

Примѣръ III-ій. Пусть $f(x)=\frac{2-4x-x^2}{x^2+1}$. Кривая $y=f(x)$ имѣетъ (черт. 4-ый) асимптоту $y=-1$.

Рѣшая уравненіе $f(z)=f(x)$, находимъ послѣ удаленія корня $z=x$ рѣшеніе $z=\frac{3x+4}{4x-3}$. Уравненіе $x=\frac{3x+4}{4x-3}$ даетъ корни $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=2$. Функція $f(x)$ имѣетъ maximum $f\left(-\frac{1}{2}\right)=3$ и minimum $f(2)=-2$. Въ парахъ промежутковъ $\left\langle -\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle$, $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ и $\left(\frac{3}{4}, 2\right\rangle$, $\langle 2, +\infty)$ повторяются тѣ же значенія функціи.



Черт. 4.

Примѣръ IV-ый. Пусть $y=\sin x$. Уравненіе $\sin z=\sin x$, послѣ удаленія корня $z=x$, даетъ $z=(-1)^k x+k\pi$, гдѣ k — неравное нулю цѣлое число. Уравненіе $x=(-1)^k x+k\pi$ возможно (при $k\neq 0$) лишь при k нечетномъ, и тогда получимъ $x=-x+k\pi$, $x=\frac{k\pi}{2}$, гдѣ k — нечетное число. Если $k=4m+1$, гдѣ m — цѣлое число, то $\sin(4m+1)\frac{\pi}{2}=1$ есть maximum, а если $k=4m-1$, гдѣ m цѣлое, то $\sin(4m-1)\frac{\pi}{2}=-1$ есть minimum.

Во всѣхъ разсмотрѣнныхъ примѣрахъ единственная функція $z=\varphi_1(x)$ даетъ проективное преобразованіе оси x, а именно инволюцію; въ примѣрѣ I-мъ инволюція приводится къ симетріи, во II-мъ — къ инверсіи; въ IV-мъ — къ параллельному перенесенію или симетріи. Функція достигаетъ extrema для двойныхъ точекъ инволюціи.

http://vofem.ru

О наибольшихъ величинахъ въ геометріи.

Прив.-доц. Ю. Рабиновича.

Не такъ давно въ „Вѣстникѣ“ была помѣщена статья Д. Крыжановскаго, посвященная этому вопросу. Въ ней были сообщены два доказательства слѣдующей теоремы.

Кругъ имѣетъ бо́льшую площадь, чѣмъ всѣ другія фигуры съ равнымъ периметромъ.

Въ настоящей замѣткѣ я даю еще одно доказательство этого предложенія.

При этомъ мнѣ приходится пользоваться слѣдующими двумя теоремами.

1. Четырехугольникъ, вписанный въ кругъ, имѣетъ бо́льшую площадь, чѣмъ всякій другой четырехугольникъ съ тѣми же сторонами.

Эта теорема доказана, напримѣръ, у Штурма (R. Sturm, „Maxima und minima in der elementaren Geometrie“, стр. 25).

2. Если функція непрерывна въ нѣкоторомъ промежуткѣ, то въ этомъ промежуткѣ можно выбрать значеніе аргумента такъ, чтобы соотвѣтствующее значеніе функціи было не меньше, чѣмъ всякое другое значеніе, которое эта функція принимаетъ въ этомъ промежуткѣ.

При помощи этихъ теоремъ мы докажемъ слѣдующее.

Теорема. Многоугольникъ, вписанный въ кругъ, имѣетъ бо́льшую площадь, чѣмъ всякій другой многоугольникъ съ тѣми же сторонами.

Доказательство. Предположимъ, что теорема доказана для n-угольника и докажемъ ее для $(n+1)$-угольника. Во всѣхъ возможныхъ многоугольникахъ, имѣющихъ $n+1$ данныхъ сторонъ въ данной послѣдовательности, проведемъ діагонали A_1A_n, соединяющія первую вершину съ n-ой. Эта діагональ разбиваетъ $(n+1)$-угольникъ на двѣ части: на n-угольникъ и на треугольникъ. Этотъ треугольникъ будетъ одинъ и тотъ же для всѣхъ тѣхъ изъ разсматриваемыхъ $(n+1)$-угольниковъ, для которыхъ діагональ A_1A_n имѣетъ данное значеніе, но n-угольники могутъ быть различны. Согласно предположенію, среди этихъ n-угольниковъ существуетъ одинъ, который имѣетъ наибольшую площадь, именно вписанный. Отсюда слѣдуетъ, что изъ всѣхъ тѣхъ изъ нашихъ $(n+1)$-угольниковъ, для которыхъ A_1A_n имѣетъ данное значеніе, тотъ, n-угольникъ котораго есть вписанный, имѣетъ площадь бо́льшую, чѣмъ всѣ осталь-

ные. Назовемъ его относительно наибольшимъ. Такимъ образомъ, всякій изъ разсматриваемыхъ $(n+1)$-угольниковъ не больше нѣкотораго относительно наибольшаго (именно того, который имѣетъ ту же діагональ A_1A_n), и если мы найдемъ такой относительно наибольшій $(n+1)$-угольникъ, который бóльше всѣхъ другихъ относительно наибольшихъ, то онъ будетъ бóльше всѣхъ другихъ вообще.

Но относительно наибольшій $(n+1)$-угольникъ вполнѣ опредѣленъ длиной діагонали A_1A_n; слѣдовательно, площадь его есть функція этой длины. Эта функція есть функція непрерывная, такъ какъ, измѣняя на безконечно-малую величину эту длину, мы измѣнимъ на безконечно-малую величину и радіусъ круга, въ который вписанъ n-угольникъ $A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$, и, слѣдовательно, площадь послѣдняго, а также площадь треугольника $A_1A_nA_{n+1}$. Согласно приведенному въ началѣ предложенію 2, должно существовать такое значеніе діагонали A_1A_n, при которомъ площадь соотвѣтствующаго относительно наибольшаго $(n+1)$-угольника имѣетъ значеніе не меньшее, чѣмъ площади другихъ относительно наибольшихъ $(n+1)$-угольниковъ. Такой многоугольникъ долженъ быть вписаннымъ, такъ какъ онъ долженъ быть относительно наибольшимъ и по отношенію ко всякой другой діагонали, — напримѣръ, A_2A_{n+1}, — такъ что n-угольникъ $A_2A_3\ldots A_nA_{n+1}$ также долженъ быть вписаннымъ, т. е. вершина A_{n+1} должна лежать на той же окружности, на которой лежатъ вершины A_2, A_3, A_4. Такъ какъ существуетъ только одинъ вписанный многоугольникъ съ данными сторонами, то его площадь больше площадей всѣхъ остальныхъ $(n+1)$-угольниковъ съ тѣми же сторонами. Такъ какъ теорема справедлива для $n=4$, то она справедлива для всякаго n.

Теперь мы имѣемъ возможность сравнить площадь, ограниченную любой кривой C, длины l, съ площадью, ограниченной окружностью K той же длины съ центромъ въ точкѣ O.

Впишемъ для этого въ кривую C безконечный рядъ многоугольниковъ P_i съ безгранично убывающими сторонами. Вмѣстѣ съ каждымъ многоугольникомъ P_i будемъ разсматривать многоугольникъ T_i, имѣющій тѣ же стороны и вписанный въ кругъ (центры всѣхъ этихъ круговъ пусть будутъ въ точкѣ O). Такъ какъ предѣлъ периметровъ многоугольниковъ P_i, а, слѣдовательно, и T_i, есть l, то при достаточно большомъ i многоугольникъ T_i долженъ какъ угодно близко подходить къ окружности K. Но площади многоугольниковъ T_i, согласно доказанной теоремѣ, не меньше, чѣмъ площади многоугольниковъ P_i. Слѣдовательно, предѣлъ первыхъ, т. е. площадь круга K не меньше, чѣмъ предѣлъ вторыхъ, т. е. площадь, ограниченная кривой C.

Для того, чтобы доказать, что площадь круга K бóльше площади кривой C, можно воспользоваться слѣдующимъ пріемомъ Штейнера (Jacob Steiner, собраніе сочиненій, т. II, стр. 254). Если кривая C не есть окружность, то не всякія ея четыре точки лежатъ на одной окружности. Принявъ такія четыре точки за вершины четырехугольника и сдвинувъ или раздвинувъ его такъ, чтобы онъ оказался вписаннымъ, мы увеличимъ, согласно теоремѣ 1, его площадь,

а, слѣдовательно, и площадь всей фигуры, такъ какъ сегменты при этомъ преобразованіи не мѣняются. Мы получимъ, слѣдовательно, новую фигуру съ тѣмъ же периметромъ и большей площадью. Такъ какъ, согласно доказанному, эта большая площадь не можетъ быть больше площади круга K, то площадь фигуры C меньше, чѣмъ площадь круга K.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Рѣшеніе задачи о трехъ тѣлахъ. Для «Научной хроники», предназначаемой для юбилейнаго номера, врядъ ли возможно выбрать болѣе подходящій матеріалъ, какъ рефератъ о работахъ финляндскаго математика Карла Зундмана (K. F. Sundmann), относящихся къ задачѣ о трехъ тѣлахъ. Какъ извѣстно, «задача о n тѣлахъ» заключается въ слѣдующемъ.

Въ опредѣленный начальный моментъ въ данныхъ n точкахъ пространства находится n матеріальныхъ точекъ, притягивающихъ другъ друга по закону Ньютона. Заданы массы этихъ точекъ и ихъ скорости въ начальный моментъ. Требуется опредѣлить ихъ движеніе, т. е. указать положеніе матеріальныхъ точекъ въ любой послѣдующій моментъ.

Первые же шаги въ области интегрированія дифференціальныхъ уравненій привели уже Ньютона къ полному рѣшенію задачи для двухъ тѣлъ. Но уже для случая трехъ тѣлъ задача въ такой мѣрѣ усложняется, что полное ея рѣшеніе оказалось совершенно недоступнымъ. Между тѣмъ задача о n тѣлахъ играетъ основную роль въ небесной механикѣ, такъ какъ къ ней именно сводится опредѣленіе движеній въ планетной системѣ. Недоступность этой задачи привела къ тому, что вопросъ этотъ не только рѣшается лишь приближенно, но даже нѣсколько иначе ставится: опредѣляется движеніе, которое планета совершала бы подъ дѣйствіемъ одного только солнца, и затѣмъ учитывается уклоненія («пертубаціи»), производимыя притяженіемъ другихъ планетъ. Такая постановка вопроса возможна лишь потому, что воздѣйствіе другихъ планетъ незначительно по сравненію съ притяженіемъ солнца.

За невозможностью рѣшить задачу о трехъ тѣлахъ во всемъ ея объемѣ, геометры занимались отдѣльными частными случаями, т. е. изслѣдовали движеніе при тѣхъ или иныхъ особыхъ комбинаціяхъ начальныхъ условій; сюда относятся работы Лагранжа, затѣмъ Линделёфа (Lindelöf), Пуанкаре и др.

Въ 1909 г. финляндскій математикъ К. Зундманъ опубликовалъ въ «Acta Societatis Scientiarum Fennicae» два мемуара, посвященныя задачѣ о трехъ тѣлахъ. Работы эти оставались нѣкоторое время мало извѣстными, но по иниціативѣ Миттагъ-Лефлера (Mittag-Leffler) въ 1912 г. Зундманъ опубликовалъ въ «Acta Mathematica» работу на французскомъ языкѣ *), содержащую сводную обработку результатовъ, опубликованныхъ имъ раньше.

*) K. F. Sundmann—„Mémoire sur le problème des trois corps“. Acta Mathematica, 36, p. 115.

Эта работа обратила на себя вниманіе и нѣкоторыми геометрами, — напримѣръ, Миттагъ-Лефлеромъ и Пикаромъ — признается даже за исчерпывающее рѣшеніе задачи о трехъ тѣлахъ. Возможно, что это будетъ признано далеко не всѣми, такъ какъ въ самомъ вопросѣ о томъ, что нужно считать дѣйствительно исчерпывающимъ рѣшеніемъ задачи о трехъ тѣлахъ, возможно значительное различіе во взглядахъ. Но во всякомъ случаѣ работа Зундмана представляетъ въ этомъ отношеніи крупный вкладъ, и мы хотѣли бы ознакомить читателей съ тѣмъ, что собственно Зундманомъ сдѣлано. За недостаткомъ мѣста мы вынуждены ограничиться здѣсь этимъ сообщеніемъ; въ слѣдующемъ же семестрѣ мы помѣстимъ рефератъ, посвященный возможно болѣе доступному изложенію идей Зундмана.

БИБЛІОГРАФІЯ.

I. Рецензіи.

О. Д. Хвольсонъ. *Курсъ физики. 1-й выпускъ второй половины IV-го тома.* Стр. VIII + 392 съ 114 рис.

Говорить о достоинствахъ фундаментальнаго «Курса физики» профессора О. Д. Хвольсона, конечно, излишне; курсъ этотъ, всѣмъ занимающимся физикой, хорошо извѣстенъ, и не только въ Россіи, но даже за-границей, гдѣ вышли его нѣмецкій и французскій переводы. Укажемъ только, что въ этомъ послѣднемъ выпускѣ «Курса физики» помѣщены: окончаніе второй части (о постоянномъ магнитномъ полѣ) и начало третьей части (о перемѣнномъ магнитномъ полѣ) ученія о магнитныхъ и электрическихъ явленіяхъ; при этомъ § 1 — § 6 главы 11-ой написаны проф. А. Л. Гершуномъ, а главу 2-ю третьей части написалъ А. А. Добіашъ, все же остальное вышло непосредственно изъ подъ пера О. Д. Хвольсона. Между прочимъ, въ третьей части мы находимъ такіе интересные отдѣлы, какъ ученіе о векторномъ полѣ и даже «принципъ относительности». Поэтому, наше нетерпѣніе поскорѣе увидать продолженіе этой третьей части вполнѣ понятно. Пожелаемъ же Оресту Даниловичу бодрости и энергіи для скорѣйшаго окончанія взятаго имъ на себя грандіознаго труда, который уже оцѣненъ по достоинству и которому заранѣе обезпечена благодарность читателя.

А. Эйхенвальдъ.

Николай Ивановичъ Лобачевскій. *Новыя начала геометріи съ полной теоріей параллельныхъ.* Съ приложеніемъ біографическаго очерка автора и примѣчаніями. Харьковская Математическая библіотека, № 2 — 3. Харьковъ, 1913. Стр. XXXIII + 234 Ц. 1 р.

„За первымъ выпускомъ «Харьковской Математической библіотеки» черезъ 2 года слѣдуетъ теперь второй (двойной) выпускъ, представляющій переизданіе главнѣйшаго труда нашего знаменитаго соотечественника проф. Казанскаго Университета Николая Ивановича Лобачевскаго“. Такъ начинается предисловіе редактора этого изданія проф. Д. М. Синцова. Въ свое время мы привѣтствовали прекрасное начинаніе Харьковской университетской

группы преподавателей выпустить подъ общимъ наименованіемъ «Харьковской Математической библіотеки» рядъ классическихъ сочиненій, по возможности болѣе доступныхъ, изданіе которыхъ не можетъ представить интереса для частныхъ издателей. Первымъ выпускомъ библіотеки явилась знаменитая статья Я. Штейнера — «Геометрическія построенія, выполняемыя посредствомъ прямой линіи и неподвижнаго круга». Теперь въ качествѣ второго (двойного № 2—3) выпуска появились «Новыя Начала» Лобачевскаго.

Обидно обстоитъ дѣло съ сочиненіями Н. И. Лобачевскаго на русскомъ языкѣ. Въ 1883 г. Казанскимъ Университетомъ было выпущено «Собраніе геометрическихъ сочиненій Н. И. Лобачевскаго». Изданіе это въ короткое время было распродано,—по крайней мѣрѣ, первый томъ, содержащій сочиненія, которыя были опубликованы на русскомъ языкѣ. Второй томъ, содержащій тѣ же сочиненія, написанныя на нѣмецкомъ и французскомъ языкахъ, еще года три тому назадъ можно было достать; я слышалъ, что теперь и этотъ томъ уже распроданъ. Для русскаго читателя, такимъ образомъ, сочиненія одного изъ величайшихъ русскихъ геометровъ оказываются совершенно недоступными. Между тѣмъ на нѣмецкомъ языкѣ выпущены всѣ важнѣйшіе мемуары Лобачевскаго, одни —проф. Энгелемъ, другіе—Либманомъ*). При этомъ переводы снабжены примѣчаніями, отчасти исправляющими вкравшіяся въ оригинальный текстъ погрѣшности, отчасти поясняющими трудное изложеніе Лобачевскаго.

При этихъ условіяхъ появленіе на русскомъ языкѣ одного изъ важнѣйшихъ сочиненій Лобачевскаго нельзя не привѣтствовать горячо. Что касается самого выбора сочиненія, то объ этомъ нужно сказать слѣдующее.

Когда первые мемуары Лобачевскаго не встрѣтили сочувствія, то онъ пришелъ къ заключенію, что это объясняется сжатостью изложенія. Онъ рѣшилъ поэтому написать обстоятельное сочиненіе, въ которомъ новыя идеи получили бы подробное развитіе. Такъ именно и написаны «Новыя Начала»,— въ этомъ ихъ достоинство, въ этомъ ихъ слабыя стороны. Въ «Новыхъ Началахъ» Лобачевскій начинаетъ изложеніе геометріи ab ovo такъ, какъ она должна была бы излагаться по его воззрѣніямъ. Сочиненіе это имѣетъ цѣлью не только восполнить знаменитый дефектъ въ ученіи о параллельныхъ линіяхъ съ новой точки зрѣнія, но и обосновать съ самаго начала всю геометрію. Само собою разумѣется, что такая обширная задача была не подъ силу и Лобачевскому. Какъ извѣстно, его идеи въ области ученія о параллельныхъ линіяхъ послужили, такъ сказать, поворотнымъ пунктомъ въ исторіи неисчислимыхъ попытокъ дать формальное обоснованіе геометріи и лишь послѣ длительной эволюціи привели къ дѣйствительному разрѣшенію этой задачи.

Насколько идеи Лобачевскаго въ области теоріи параллельныхъ линій глубоко проникаютъ въ корень дѣла, настолько общіе взгляды его на дѣло обоснованія геометріи нужно признать слабыми, несовершенными. Это неудивительно: должно было совершиться глубокое измѣненіе во взглядахъ на

---

*) N. I. Lobatschefskij, „Zwei geometrische Abhandlungen“, aus dem Russischen übersetzt von F. Engel. Leipzig, 1899.

—, „Pangeometrie“, übersetzt und herausgegeben von H. Liebmann Leipzig, 1902.

—, „Imaginäre Geometrie“, übersetzt von H. Liebmann. Leipzig, 1904.

сущность геометрическихъ аксіомъ, чтобы создалась база для научнаго рѣшенія этихъ вопросовъ, лежащихъ на рубежѣ геометріи и логики. И если Лобачевскій проложилъ первый путь къ этому повороту, то это уже огромная, неоцѣнимая заслуга. Итакъ, поставить Лобачевскому въ вину то обстоятельство, что онъ не справился со всей задачей обоснованія геометріи, было бы въ высшей степени легкомысленно. Но общимъ началамъ обоснованія геометріи посвящено 6 первыхъ главъ. Читатель долженъ имѣть въ виду, что научное значеніе этихъ главъ невелико; если затратить на нихъ много труда, то это будетъ непроизводительно. Въ этомъ заключается слабая сторона этого сочиненія. Въ значительной степени это уже предусмотрѣно и редакторомъ настоящаго изданія; именно, главы XII и XIII, посвященныя обыкновенной теоріи рѣшенія прямолинейныхъ и сферическихъ треугольниковъ, вовсе опущены. Опустить вмѣстѣ съ этимъ и первыя 6 главъ было, конечно, невозможно: во-первыхъ, сочиненіе совершенно утратило бы свое единство, во-вторыхъ, въ этихъ главахъ иногда излагаются независимыя доказательства такихъ предложеній, которыя обычно доказываются только при помощи теоріи параллельныхъ линій; для дальнѣйшаго развитія неевклидовой геометріи это часто бываетъ очень важно.

Съ 7-ой главы, какъ мы уже сказали, начинается изложеніе новой геометріи, и здѣсь она изложена обстоятельнѣе, чѣмъ въ какомъ бы то ни было другомъ сочиненіи Лобачевскаго. «Новыя Начала» отличаются также полной элементарностью: авторъ здѣсь оставляетъ въ сторонѣ приложенія неевклидовой геометріи къ вычисленію опредѣленныхъ интеграловъ, которымъ въ другихъ сочиненіяхъ отведено такъ много мѣста.

Появленіе «Новыхъ началъ» въ доступномъ, тщательно проредактированномъ изданіи представляетъ большую научную цѣнность; мы не сомнѣваемся, что второй выпускъ «Харьк. Матем. библіотеки» получитъ большое распространеніе. Редакторъ, проф. Д. М. Синцовъ, снабдилъ переводъ довольно обстоятельной біографической запиской и въ концѣ книги помѣстилъ много примѣчаній. Значительная часть этихъ примѣчаній посвящена возстановленію оригинальнаго текста Лобачевскаго, исправленнаго въ самомъ сочиненіи въ тѣхъ случаяхъ, когда не подлежало сомнѣнію, что въ оригиналѣ была опечатка или недосмотръ. Отдѣльныя примѣчанія посвящены разъясненіямъ или литературнымъ указаніямъ. Эти разъясненія несомнѣнно помогутъ читателю разобраться въ страннныхъ для начинающаго идеяхъ Лобачевскаго. Мы полагаемъ, однако, что нѣкоторыя изъ этихъ примѣчаній нуждались бы въ большемъ развитіи. Въ примѣчаніяхъ, напримѣръ, къ стр. 132, 146, 156 редакторомъ отмѣчены вопросы принципіальной важности; не грѣшно было бы остановиться на нихъ подробнѣе.

Хотя имя Н. И. Лобачевскаго въ настоящее время извѣстно каждому математику, но фактически объ его идеяхъ царятъ еще очень смутныя представленія. Харьковское изданіе «Новыхъ Началъ» несомнѣнно будетъ способствовать ознакомленію русскихъ математиковъ съ неевклидовой геометріей и вызоветъ ихъ искреннюю благодарность харьковскимъ математикамъ и ихъ руководителю которому принадлежитъ иниціатива изданія «Харьковской Математической библіотеки» и при ближайшемъ участіи котораго выпущены въ свѣтъ ея первые выпуски.

В. Каганъ.

III. Новости иностранной литературы.

W. Killing und H. Hovestadt *Handbuch des mathematischen Unterrichts.* Bd. I — S. 456 + VIII, 1910; Bd. II — S. 472 + X, 1913; Leipzig, Teubner.

Хотя настоящее сочиненіе носитъ названіе руководства по преподаванію математики, но въ дѣйствительности сочиненіе посвящено исключительно геометріи, — и именно геометріи, а не преподаванію геометріи. Изъ двухъ авторовъ Киллингъ — извѣстный геометръ, проф. Мюнстерскаго университета, много писавшій по вопросамъ обоснованія геометріи и удостоенный даже преміи имени Лобачевскаго; Говештадтъ — по преимуществу, педагогъ, преподаватель гимназіи и реальнаго училища тамъ же въ Мюнстерѣ.

Авторы стояли на той точкѣ зрѣнія, что задача руководства для преподавателя заключается не въ томъ, чтобы вкривь и вкось обсуждать методическіе вопросы, а въ томъ, чтобы дать преподавателю ясное представленіе о современной научной постановкѣ отдѣльныхъ вопросовъ и всей системы геометріи. Поэтому собственно методическимъ вопросамъ удѣлено очень мало мѣста, — строго говоря, только §§ 11, 12 и часть § 14-го перваго тома. Сочиненіе представляетъ, такимъ образомъ, теоретическую разработку предмета, — своего рода энциклопедію элементарной геометріи. Первый томъ посвященъ планиметріи, второй тригонометріи и стереометріи. Все сочиненіе охватываетъ огромный матеріалъ; и хотя почти весь матеріалъ нужно признать элементарнымъ, но по, нашему убѣжденію, онъ слишкомъ великъ. Съ этимъ обширнымъ матеріаломъ даже на протяженіи такихъ двухъ томовъ нельзя справиться; изложеніе очень часто становится поэтому сжатымъ и недостаточно яснымъ. Такъ, напримѣръ, весь § 8 «О несобственныхъ образахъ плоскости» представляется намъ совершенно недоступнымъ тому кругу читателей, для которыхъ книга предназначена. Слишкомъ рано и слишкомъ сжато, на нашъ взглядъ, разбираются вопросы неевклидовой геометріи, очень поверхностнымъ представляется намъ § 10, посвященный логикѣ въ геометріи. Зато очень хорошо и интересно составлены главы, посвященныя теоріи пропорцій, ученію объ ирраціональныхъ числахъ (геометрическая теорія), ученію о подобіи и т. д.

Второй томъ значительно доступнѣе перваго, — можетъ быть, потому, что онъ посвященъ нѣсколько болѣе конкретнымъ вопросамъ. Главы о правильныхъ многогранникахъ и связанныхъ съ ними вопросахъ о дѣленіи сферы представляются намъ самыми интересными во всемъ сочиненіи; мы предполагаемъ воспроизвести ихъ на страницахъ «Вѣстника».

Книга содержитъ чрезвычайно много интереснаго, — многое, чего читатель не найдетъ нигдѣ, кромѣ оригинальныхъ мемуаровъ. И все же мы затрудняемся съ легкимъ сердцемъ рекомендовать ее преподавателю. Лишь тотъ, кто привыкъ разбираться въ серьезномъ математическомъ сочиненіи (а такія вѣдь всегда приходится брать, можно сказать, съ бою), дѣйствительно не пожалѣетъ о затраченномъ трудѣ и времени. Къ сожалѣнію, въ этомъ повышенномъ, недостаточно доступномъ стилѣ пишутся въ настоящее время многія

сочиненія, трактующія о такихъ именно вопросахъ, которые болѣе всего нуждаются въ кристаллически ясномъ изложеніи и широкомъ распространеніи. При всемъ томъ книги Киллинга и Говештадта представляютъ собою слишкомъ выдающееся явленіе, — мы не могли обойти ихъ молчаніемъ.

В. Каганъ.

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

Проф. А. И. Грузинцевъ. *Термодинамическая теорія химическихъ реакцій.* Харьковъ, 1913. Стр. 122.

И. Горскій, преподаватель Ташкентскаго Наслѣдника Цесаревича Кадетскаго Корпуса. *Начала высшаго анализа.* (Курсъ VII класса кадетскихъ корпусовъ). Изданіе 2-е, исправленное. Ташкентъ, 1913. Стр. 44. Ц. 45 к.

К. Б. Пеніонжкевичъ. *Основанія анализа безконечно-малыхъ.* Съ 795-ю примѣрами для упражненій. Курсъ 7-го класса реальныхъ училищъ. Изданіе С. А. Козловскаго. Бѣлая-Церковь, Кіевской губ., 1913. Стр. 182. Ц. 1 р.

ОТЪ РЕДАКЦІИ.

Къ сожалѣнію, нѣкоторыя статьи, предназначенныя для юбилейнаго номера, были доставлены въ редакцію слишкомъ поздно. Вслѣдствіе этого редакція вынуждена была выпустить 9-ый номеръ раньше, и въ настоящемъ номерѣ не нашли себѣ мѣста статьи: И. И. Александрова — „Геометрія Маскерони", Х. І. Гохмана — „О вычисленіи дня православной Пасхи", В. Ф. Кагана — „О маятникѣ Фуко", С. О. Шатуновскаго — „Объ освобожденіи знаменателя дроби отъ радикаловъ", Я. М. Шатуновскаго — „Къ рѣшенію уравненія 4-ой степени". Всѣ эти работы начнутъ собой первый семестръ второй серіи „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики".

XXV

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

http://vofem.ru

Обложка
ищется

Обложка
ищется