Обложка
ищется

Обложка
ищется

XLIX Сем. № 5.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 581.

Содержаніе: Этюды по элементарной алгебрѣ. *Н. Ниноса.* — Основы математики и элементарное образованіе. *А. Н. Уайтегида.* — Научная хроника: Говорящая лампа накаливанія. — Библіографія: II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ. В. В. Добровольскій. „Техническая механика въ элементарномъ изложеніи“. А. Киселевъ. „Элементарная физика для среднихъ учебныхъ заведеній“. — Задачи №№ 90 — 93 (6 сер.). — Рѣшенія задачъ: №№ 53, 64, 68 и 72 (6 сер.). — Книги и брошюры, поступившія въ редакцію. — Объявленія.

Этюды по элементарной алгебрѣ.

Н. Ниноса).*

I. Алгориѳмъ для вычисленія ирраціональныхъ корней изъ положительныхъ чиселъ.

Пусть x, a представляютъ неравныя между собою раціональныя числа, n — натуральное число. Имѣемъ:

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \frac{x^n - ax^{n-1} + ax^{n-1} - a^n}{x - a} = \frac{x^{n-1}(x - a) + a\,(x^{n-1} - a^{n-1})}{x - a},$$

откуда получаемъ:

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + a\,\frac{x^{n-1} - a^{n-1}}{x - a}. \qquad (1)$$

Посредствомъ этой формулы приведенія изъ выраженія, стоящаго въ первой части, выдѣленъ членъ x^{n-1}, при чемъ во второй

*) Уступая желанію уважаемаго автора не оглашать своего имени, мы сохранили за собою право указать, что это псевдонимъ.

Ред.

части получилось выраженіе, отличающееся отъ выраженія первой части только тѣмъ, что въ немъ вмѣсто n стоитъ $n-1$. Произведя подобное же выдѣленіе члена во второй части формулы, получимъ:

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2\frac{x^{n-2}-a^{n-2}}{x-a}$$

и т. д. Такимъ путемъ найдемъ:

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}. \qquad (2)$$

Можно также написать:

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=\frac{x^n-a^{n-1}x+a^{n-1}x-a^n}{x-a}=\frac{x(x^{n-1}-a^{n-1})+a^{n-1}(x-a)}{x-a},$$

откуда получаемъ формулу приведенія въ иномъ видѣ:

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x\frac{x^{n-1}-a^{n-1}}{x-a}+a^{n-1}=x^2\frac{x^{n-2}-a^{n-2}}{x-a}+a^{n-2}x+a^{n-1}, \qquad (3)$$

изъ которой также приходимъ къ равенству (2).

На основаніи того обстоятельства, что обѣ формулы приведенія доставляютъ одно и то же равенство (2), можно сдѣлать догадку, что обѣ эти формулы по существу не различаются между собою. И дѣйствительно, если обѣ части формулы (1) раздѣлимъ на x^{n-1} и положимъ $\frac{a}{x}=y$, то формула (1) приведется къ такой:

$$\frac{1-y^n}{1-y}=1+y\frac{1-y^{n-1}}{1-y},$$

изъ которой получается и формула (3), когда вмѣсто y вставимъ $\frac{x}{a}$.

Во всемъ послѣдующемъ изложеніи мы будемъ считать числа x, a положительными и примемъ $x \geqq a$.

Во вторую часть равенства (2) входятъ только положительные члены; поэтому оно показываетъ, что если $x>a$, то $x^n>a^n$ и, наоборотъ, если $x^n>a^n$, то $x>a$.

Изъ равенства (2) мы получимъ двойное неравенство, когда во второй части вставимъ вмѣсто степеней x соотвѣтствующія степени a или вмѣсто степеней a соотвѣтствующія степени x. Это неравенство будетъ такое:

$$na^{n-1}<\frac{x^n-a^n}{x-a}<nx^{n-1}. \qquad (4)$$

Когда число x дано, x^n вычисляется путемъ послѣдовательнаго умноженія. Положимъ теперь, что дано $x^n=A$ и нужно найти x. Этой цѣли мы достигнемъ путемъ послѣдовательнаго примѣненія неравенства (4).

Подберемъ прежде всего такое число a, чтобы было $a^n < A$; напримѣръ, при $A > 1$ достаточно взять $a = 1$, а въ изысканіяхъ общаго характера, когда A остается неопредѣленнымъ, и необходимо принять $a = 1$.

Написавъ, на основаніи равенствъ (1) и (3):

$$x^n + a\frac{x^n - a^n}{x - a} = \frac{x^{n+1} - a^{n+1}}{x - a} = a^n + x\frac{x^n - a^n}{x - a},$$

мы воспользуемся неравенствами (4) и получимъ:

$$x^n + na^n < \frac{x^{n+1} - a^{n+1}}{x - a} < a^n + nx^n,$$

откуда, вставляя A вмѣсто x^n, замѣняя x^{n+1} выраженіемъ

$$Ax = A(x - a) + Aa$$

и умножая двойное неравенство на $x - a$, найдемъ:

$$(A + na^n)(x - a) < A(x - a) + (A - a^n)a < (a^n + nA)(x - a).$$

Отсюда получается двойное неравенство для $x - a$, именно:

$$\frac{A - a^n}{nA - A + a^n}a < x - a < \frac{A - a^n}{na^n}a \text{ *)}. \tag{5}$$

Введемъ обозначенія:

$$a + \frac{A - a^n}{nA - A + a^n}a = \frac{nAa}{nA - A + a^n} = a_1,$$

$$a + \frac{A - a^n}{na^n}a = \frac{na^n + A - a^n}{na^n}a = b_1;$$

двойное неравенство (5) обратится въ слѣдующее:

$$a_1 < x < b_1; \tag{6}$$

при этомъ будемъ имѣть:

$$b_1 - a_1 = \frac{n-1}{n}\,\frac{(A - a^n)^2}{a^n(nA - A + a^n)}a.$$

Исходя отъ этого точнаго выраженія разности $b_1 - a_1$, получимъ для нея двойное неравенство, откидывая въ знаменателѣ сначала по-

---

*) Этотъ результатъ можетъ быть полученъ непосредственно изъ неравенства (4), когда вставимъ въ немъ A вмѣсто x^n, но не такъ просто.

ложительное слагаемое a^n, потомъ отрицательное число $-A+a^n$; такимъ образомъ найдемъ:

$$\frac{n-1}{n}\left(\frac{A-a^n}{A}\right)^2\frac{A}{na^{n-1}}<b_1-a_1<\left(\frac{A-a^n}{A}\right)^2\frac{A}{na^{n-1}}. \qquad (7)$$

Точно такъ же получимъ:

$$\frac{A-a^n}{A}\frac{a}{n}<a_1-a<\frac{A-a^n}{A}\frac{a}{n-1}. \qquad (8)$$

Такъ какъ $a_1>a$, то изъ перваго неравенства (4) получается, въ предположенiи $x=a_1$,

$$a_1^n-a^n>na^{n-1}(a_1-a),$$

а потому, примѣняя первое неравенство (8), найдемъ, что и подавно

$$a_1^n-a^n>\frac{A-a^n}{A}a^n.$$

Отсюда вытекаетъ, что

$$A-a_1^n=A-a^n-(a_1^n-a^n)<A-a^n-\frac{A-a^n}{A}a^n,$$

что окончательно представимъ въ видѣ:

$$A-a_1^n<\left(\frac{A-a^n}{A}\right)^2\cdot A. \qquad (9)$$

Такъ какъ, съ одной стороны, изъ второго неравенства (4) слѣдуетъ

$$b_1^n-a_1^n<nb_1^{n-1}(b_1-a_1),$$

а съ другой стороны, какъ это видно изъ неравенства (6), $A>a_1^n$, то и подавно, въ силу второго неравенства (7), будемъ имѣть:

$$b_1^n-A<b_1^n-a_1^n<nb_1^{n-1}\left(\frac{A-a^n}{A}\right)^2\frac{A}{na^{n-1}},$$

т. е.

$$b_1^n-A<\left(\frac{b_1}{a}\right)^{n-1}\left(\frac{A-a^n}{A}\right)^2\cdot A. \qquad (10)$$

Итакъ, исходя отъ числа a, подобраннаго подъ единственнымъ условiемъ $a^n<A$, мы получили два числа b_1 и a_1, между которыми заключается x.

Будемъ теперь исходить не отъ числа a, а отъ числа a_1, которое больше a. Всѣ предыдущiя формулы сохранятъ свое значенiе, но только въ нихъ число a замѣнится числомъ a_1 и соотвѣтственно этому обстоятельству мы введемъ обозначенія:

$$a_1 + \frac{A - a_1^n}{nA - A + a_1^n} a_1 = \frac{nAa_1}{nA - A + a_1^n} = a_2,$$

$$a_1 + \frac{A - a_1^n}{na_1^n} a_1 = \frac{na_1^n + A - a_1^n}{na_1^n} a_1 = b_2.$$

Разность $b_1 - b_2$ легко приводится къ виду:

$$b_1 - b_2 = \frac{a_1^{n-1} - a^{n-1}}{a^{n-1}\,a_1^{n-1}} \frac{A}{n} - \frac{n-1}{n}(a_1 - a);$$

а такъ какъ въ силу перваго неравенства (4), въ которомъ вмѣсто n вставимъ $n-1$, а вмѣсто x вставимъ a_1, имѣемъ:

$$a_1^{n-1} - a^{n-1} > (n-1)\, a^{n-2}(a_1 - a),$$

то получимъ:

$$b_1 - b_2 > \frac{(n-1)\,a^{n-2}(a_1 - a)}{a^{n-1}\,a_1^{n-1}} \frac{A}{n} - \frac{n-1}{n}(a_1 - a),$$

и подавно

$$b_1 - b_2 > \frac{n-1}{n}\left(\frac{A}{a_1^n} - 1\right)(a_1 - a) > \frac{n-1}{n}\,\frac{A - a_1^n}{A}(a_1 - a) > 0.$$

Такимъ образомъ получаемъ:

$$a < a_1 < a_2 < x < b_2 < b_1;$$

при этомъ, замѣчая, что въ силу неравенства 9,

$$\frac{A - a_1^n}{A} < \left(\frac{A - a^n}{A}\right)^2,$$

найдемъ изъ неравенствъ (7), (9) и (10), замѣщая въ нихъ a черезъ a_1, a_1 черезъ a_2 и b_1 черезъ b_2:

$$b_2 - a_2 < \left(\frac{A - a_1^n}{A}\right)^2 \frac{A}{na_1^{n-1}} < \left(\frac{A - a^n}{A}\right)^{2.2} \frac{A}{na^{n-1}}; \tag{7'}$$

$$A - a_2^n < \left(\frac{A - a_1^n}{A}\right)^2 A < \left(\frac{A - a^n}{A}\right)^{2.2} A, \tag{9'}$$

$$b_2^n - A < \left(\frac{A - a_1^n}{A}\right)^2 \left(\frac{b_2}{a_1}\right)^{n-1} A < \left(\frac{A - a^n}{A}\right)^{2.2} \left(\frac{b_1}{a}\right)^{n-1} A. \tag{10'}$$

Исходя отъ числа a_2, получимъ два числа $a_3 > a_2$ и $b_3 < b_2$; именно:

$$a_3 = a_2 + \frac{A - a_2^n}{nA - A + a_2^n} a_2, \quad b_3 = a_2 + \frac{A - a_2^n}{na_2^n} a_2, \tag{7''}$$

между которыми лежитъ x и для которыхъ будемъ имѣть:

$$A - a_3{}^n < \left(\frac{A - a_2{}^n}{A}\right)^2 A < \left(\frac{A - a^n}{A}\right)^{2.2.2} A, \qquad (9'')$$

$$b_3{}^n - A < \left(\frac{A - a_2{}^n}{A}\right)^2 \left(\frac{b_3}{a_2}\right)^{n-1} A < \left(\frac{A - a^n}{A}\right)^{2.2.2} \left(\frac{b_1}{a}\right)^{n-1} A, \qquad (10'')$$

$$b_3 - a_3 < \left(\frac{A - a_2{}^n}{A}\right)^2 \frac{A}{na_2^{n-1}} < \left(\frac{A - a^n}{A}\right)^{2.2.2} \frac{A}{na^{n-1}}. \qquad (7'')$$

Продолжая такой процессъ составленія чиселъ a и b съ цѣлыми значками, мы придемъ къ числамъ a_s и $b_s > a_s$, между которыми лежитъ x и которыя удовлетворяютъ условіямъ:

$$\left.\begin{aligned} &0 < b_s - a_s < \left(\frac{A - a^n}{A}\right)^{2^s} \frac{A}{na^{n-1}}, \\ &0 < A - a_s^n < \left(\frac{A - a^n}{A}\right)^{2^s} A, \\ &0 < b_s^n - A < \left(\frac{A - a^n}{A}\right)^{2^s} \left(\frac{b_1}{a}\right)^{n-1} A, \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

гдѣ $\dfrac{b_1}{a} = 1 + \dfrac{A - a^n}{na^n}$.

Воспользуемся теперь неравенствами (4) для слѣдующихъ двухъ замѣчаній.

Во-первыхъ, при $x > 1$ и $a = 1$ получимъ изъ перваго неравенства

$$x^n > 1 + n(x - 1),$$

гдѣ вторая часть, а потому и первая, можетъ быть сдѣлана болѣе произвольно большого числа K, если натуральное число n возьмемъ больше, чѣмъ $\dfrac{K - 1}{x - 1}$. Такое свойство степени x^n выражаютъ словами: с т е п е н ь x^n, гдѣ $x > 1$, б е з г р а н и ч н о в о з р а с т а е т ъ (или с т р е м и т с я къ б е з к о н е ч н о с т и) п р и б е з г р а н и ч н о м ъ в о з р а с т а н і и п о к а з а т е л я n (или вмѣстѣ съ п о к а з а т е л е м ъ n). Въ силу этого 2^s безгранично возрастаетъ вмѣстѣ съ s.

Во-вторыхъ, при $x = 1$, $a < 1$ первое неравенство (4) доставитъ:

$$na^{n-1} = \frac{na^n}{a} < \frac{1 - a^n}{1 - a},$$

откуда, умножая на $1 - a$, найдемъ:

$$\left(n\frac{1-a}{a} + 1\right)a^n < 1, \text{ т. е. } a^n < \frac{1}{n\dfrac{1-a}{a} + 1} < \frac{1}{n\dfrac{1-a}{a}}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что послѣднее выраженіе, а потому и a^n можетъ быть сдѣлано меньше произвольно малаго числа ε, если натуральное число n возьмемъ больше, чѣмъ $\frac{a}{1-a}\frac{1}{\varepsilon}$. О степени x^n при $x<1$ говорятъ, что значеніе ея безгранично убываетъ (или стремится къ нулю) при безграничномъ возрастаніи показателя n.

Такъ какъ $\frac{A-a^n}{A}<1$, то мы можемъ утверждать, что $\left(\frac{A-a^n}{A}\right)^{2^s}$, а также произведеніе этой степени на какое угодно число стремится къ нулю при безграничномъ возрастаніи s.

Итакъ, исходя изъ предположенія, что A есть n-ая степень раціональнаго числа x, и выбравъ число a подъ условіемъ $a^n<A$, мы составили: 1) послѣдовательность (suite) возрастающихъ раціональныхъ чиселъ $a_1, a_2, \ldots, a_s, \ldots$, остающихся меньше x, и 2) послѣдовательность убывающихъ раціональныхъ чиселъ, остающихся больше x; эти числа удовлетворяютъ неравенствамъ (11), въ силу которыхъ при нѣкоторомъ значеніи s разности b_s-a_s, $A-a_s^n$, b_s^n-A становятся менѣе произвольно малаго числа и стремятся къ нулю при безграничномъ возрастаніи s.

Мы не нашли, такимъ образомъ, точнаго выраженія раціональнаго числа x, а только указали процессъ, помощью котораго x можетъ быть вычислено съ неограниченною степенью приближенія. Это значитъ, что если мы обратимъ a_s и b_s въ десятичныя дроби, то эти дроби при надлежащемъ выборѣ s будутъ имѣть сколько угодно (десятки, тысячи, милліоны и т. д.) общихъ послѣдовательныхъ десятичныхъ знаковъ, которые будутъ принадлежать и содержащемуся между a_s и b_s числу x, если мы и это число обратимъ въ десятичную дробь. При такихъ условіяхъ раціональное число x называютъ общимъ предѣломъ послѣдовательностей чиселъ $a_1, a_2, \ldots, a_s, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots, b_s, \ldots$

Пересматривая теперь всѣ предыдущіе выводы, т. е. процессъ составленія изъ чиселъ a и A двухъ послѣдовательностей

$$a_1, a_2, \ldots, a_s, \ldots \text{ и } b_1, b_2, \ldots, b_s, \ldots,$$

мы замѣчаемъ, что намъ вовсе не приходилось вспоминать первоначальное предположеніе, что A есть n-ая степень раціональнаго числа x. Поэтому, когда завѣдомо извѣстно, что A не есть n-ая степень раціональнаго числа, принимаютъ, что эти двѣ послѣдовательности опредѣляютъ нѣкоторое число, которое называютъ ирраціональнымъ n-ымъ корнемъ изъ A и обозначаютъ символомъ $\sqrt[n]{A}$; какъ указано выше, это число можетъ быть вычислено съ какой угодно степенью точности, и такимъ образомъ можетъ быть опредѣлено мѣсто его при сравненіи съ числами раціональными. Въ этомъ случаѣ $\sqrt[n]{A}$ называется также общимъ предѣломъ послѣдовательностей.

Изъ общихъ неравенствъ (11) видно, что для вычисленія $\sqrt[n]{A}$ съ извѣстною степенью точности нужно составить тѣмъ менѣе членовъ послѣдовательностей a_s, b_s (выражаясь иначе, тѣмъ быстрѣе эти послѣдовательности будутъ сходиться), чѣмъ удачнѣе мы подобрали число a въ смыслѣ большей близости a^n къ A.

Мы уже упомянули, что для изысканій общаго характера необходимо принять $a = 1$. Неравенство (5) приметъ въ этомъ случаѣ видъ:

$$\frac{A-1}{nA-A+1} < x - 1 < \frac{A-1}{n},$$

гдѣ $x = \sqrt[n]{A}$. Будемъ давать здѣсь n рядъ возрастающихъ значеній: 2, 3, 4, ..., $k-1$, k, ... Замѣтимъ, что при $A > 1$ будетъ $\sqrt[k-1]{A} > \sqrt[k]{A}$, ибо, возвышая оба эти выраженія въ $(k-1)k$-ую степень, будемъ имѣть:

$$\left(\sqrt[k-1]{A}\right)^{(k-1)k} = \left[\left(\sqrt[k-1]{A}\right)^{k-1}\right]^k = A^k > \left(\sqrt[k]{A}\right)^{k(k-1)} = \left[\left(\sqrt[k]{A}\right)^k\right]^{k-1} = A^{k-1}.$$

Поэтому изъ разсматриваемаго неравенства получимъ послѣдовательность убывающихъ ирраціональныхъ чиселъ

$$\sqrt[2]{A}-1,\quad \sqrt[3]{A}-1, \ldots,\quad \sqrt[k-1]{A}-1,\quad \sqrt[k]{A}-1, \ldots$$

и двѣ послѣдовательности также убывающихъ раціональныхъ чиселъ:

$$\frac{A-1}{A+1},\quad \frac{A-1}{2A+1}, \ldots \quad \frac{A-1}{kA-2A+1},\quad \frac{A-1}{kA-A+1}, \ldots$$

$$\frac{A-1}{2},\quad \frac{A-1}{3}, \ldots \quad \frac{A-1}{k-1},\quad \frac{A-1}{k}, \ldots$$

Числа раціональныхъ послѣдовательностей при безграничномъ возрастаніи n, очевидно, имѣютъ предѣломъ нуль; поэтому, въ силу неравенства, и числа ирраціональной послѣдовательности имѣютъ предѣломъ также нуль, откуда слѣдуетъ, что при безграничномъ возрастаніи n число $\sqrt[n]{A}$ имѣетъ предѣломъ 1, каково бы ни было число A, принятое > 1.

Если умножимъ разсматриваемое неравенство на n и приведемъ его къ виду:

$$\frac{A-1}{A-\frac{A-1}{n}} < n\left(\sqrt[n]{A}-1\right) < A-1,$$

то отсюда заключимъ, что $n\left(\sqrt[n]{A}-1\right)$ при всѣхъ значеніяхъ n и при безграничномъ возрастаніи n содержится между $\frac{A-1}{A}$ и $A-1$.

Но отсюда не видно, стремится ли $n\left(\sqrt[n]{A}-1\right)$ къ опредѣленному предѣлу при безграничномъ возрастанiи n, о чемъ рѣчь будетъ ниже.

Если примемъ $A=\frac{1}{B}$, то будетъ $B<1$, x замѣнится дробью $\frac{1}{\sqrt[n]{B}}$, и двойное неравенство для $x-1$ приведется къ двойному неравенству:

$$1+\frac{1-B}{n-1+B}<\frac{1}{\sqrt[n]{B}}<1+\frac{1-B}{nB},$$

откуда легко получимъ:

$$\frac{nB}{nB+1-B}<\sqrt[n]{B}<\frac{n-1+B}{n},$$

или, вычитая 1:

$$\frac{B-1}{nB-B+1}<\sqrt[n]{B}-1<\frac{B-1}{n}.$$

По внѣшнему виду это неравенство для $\sqrt[n]{B}$ не отличается отъ неравенства для $\sqrt[n]{A}$, только всѣ части его отрицательны. Поэтому можемъ сказать, что неравенство для A сохраняетъ силу и при $1>A>0$.

II. Особыя формулы для квадратныхъ корней.

Само собой разумѣется, предыдущiя формулы примутъ простѣйшiй видъ при $n=2$. Но для этого простѣйшаго случая полезно вывести и другiя формулы, получающiяся при помощи очень простыхъ соображенiй, развитыхъ впервые, въ иной формѣ, еще въ 1613 г. итальянскимъ математикомъ Pietro Antonio Cataldi.

Пусть $x^2=C$, $c^2<C$. Имѣемъ:

$$(x-c)(x+c)=x^2-c^2=C-c^2,$$

а отсюда

$$x-c=\frac{x^2-c^2}{2c+(x-c)}.$$

Если въ знаменателѣ вмѣсто положительнаго числа $x-c$ вставимъ меньшее число, то дробь увеличится и знакъ равенства нужно будетъ замѣнить знакомъ $<$; при подстановкѣ же большаго числа знакъ равенства нужно замѣнить знакомъ $>$.

Вставляя въ знаменателѣ нуль вмѣсто $x-c$, получимъ:

$$x-c<\frac{x^2-c^2}{2c}=r_1$$

$\left(\text{мы обозначаемъ черезъ } r_1 \text{ дробь } \frac{x^2-c^2}{2c}\right)$. Вставляя же r_1 вмѣсто $x-c$, будемъ имѣть:

$$x-c > \frac{x^2-c^2}{2c+r_1} = r_2.$$

Вставляя r_2 вмѣсто $x-c$, заключимъ, что

$$x-c < \frac{x^2-c^2}{2c+r_2} = r_3,$$

затѣмъ

$$x-c > \frac{x^2-c^2}{2c+r_3} = r_4$$

и т. д. Мы получаемъ такимъ образомъ послѣдовательность убывающихъ чиселъ $r_1, r_3, r_5, \ldots$, которыя остаются больше, чѣмъ $x-c$, и послѣдовательность возрастающихъ чиселъ $r_2, r_4, r_6, \ldots$, которыя остаются меньше, чѣмъ $x-c$.

Всѣ эти числа получаются послѣдовательно изъ общей формулы

$$r_{s+1} = \frac{x^2-c^2}{2c+r_s}, \quad \text{или} \quad r_{s+1}(2c+r_s) = x^2-c^2,$$

когда будемъ давать s значенія 1, 2, 3, ... и примемъ, что $r_1 = \frac{x^2-c^2}{2c}$; но можно и это значеніе r_1 получить изъ той же формулы при $s=0$, если условиться, что $r_0 = 0$, при чемъ рядъ предыдущихъ неравенствъ для $x-c$ можно начать неравенствомъ $x-c > r_0$.

Но, кромѣ послѣдовательнаго вычисленія чиселъ r_s, можно легко найти такъ называемое независимое выраженіе для r_s при посредствѣ $x^2 = C$, c и s.

Именно, нетрудно убѣдиться непосредственнымъ перемноженіемъ, что при всякихъ y и z

$$y^{s+2} - z^{s+2} = (y+z)(y^{s+1} - z^{s+1}) - yz(y^s - z^s),$$

откуда, дѣлая $y^{s+1} - z^{s+1}$ общимъ множителемъ во второй части и дѣля все равенство на первую часть, получимъ:

$$1 = \frac{y^{s+1} - z^{s+1}}{y^{s+2} - z^{s+2}}\left(y + z - yz\,\frac{y^s - z^s}{y^{s+1} - z^{s+1}}\right).$$

Полагая здѣсь $y = c + x$, $z = c - x$ и умножая равенство на $x^2 - c^2$, будемъ имѣть:

$$x^2 - c^2 = (x^2 - c^2)\,\frac{(c+x)^{s+1} - (c-x)^{s+1}}{(c+x)^{s+2} - (c-x)^{s+2}}\left[2c + (x^2 - c^2)\,\frac{(c+x)^s - (c-x)}{(c+x)^{s+1} - (c-x)^{s+1}}\right];$$

если здѣсь введемъ обозначеніе

$$r_s = (x^2 - c^2)\,\frac{(c+x)^s - (c-x)^s}{(c+x)^{s+1} - (c-x)^{s+1}},$$

изъ котораго слѣдуетъ $r_0 = 0$, то послѣднее равенство приметъ видъ:

$$x^2 - c^2 = r_{s+1}\,(2c + r_s),$$

т. е. совпадаетъ съ формулой, служившей для послѣдовательнаго вычисленія чиселъ r_s. Въ силу этого мы должны считать только-что написанное выраженіе r_s искомымъ независимымъ выраженіемъ числа r_s.

Итакъ, можемъ теперь написать:

$$x - c > r_{2s} = (x^2 - c^2)\,\frac{(x+c)^{2s} - (x-c)^{2s}}{(x+c)^{2s+1} + (x-c)^{2s+1}},$$

$$x - c < r_{2s+1} = (x^2 - c^2)\,\frac{(x+c)^{2s+1} + (x-c)^{2s+1}}{(x+c)^{2s+2} - (x-c)^{2s+2}}.$$

Числители и знаменатели въ этихъ выраженіяхъ представляются, когда произведемъ возвышеніе въ степени, многочленами, содержащими только нечетныя степени x, какъ это можно видѣть изъ того, что при перемѣнѣ x на $-x$ числители и знаменатели перемѣняютъ свой знакъ*). Поэтому по сокращеніи дробей на x, мы оставимъ въ нихъ только четныя степени x, которыя выражаются степенями числа C.

Разность $r_{2s+1} - r_{2s}$ будетъ:

$$r_{2s+1} - r_{2s} = \frac{4x^2(x^2 - c^2)^{2s+1}}{(x+c)^{4s+3} - (x-c)^{4s+3} + 2c\,(x^2 - c^2)^{2s+1}};$$

здѣсь знаменатель можетъ быть представленъ въ видѣ суммы трехъ положительныхъ чиселъ, именно:

$$[(x+c)^{4s+3} - x^{4s+3}] + [x^{4s+3} - (x-c)^{4s+3}] + 2c\,(x^2 - c^2)^{2s+1},$$

гдѣ первая разность, въ силу перваго неравенства (4), больше, чѣмъ $(4s+3)\,x^{4s+2}c$, и подавно больше, чѣмъ $4scx^{4s+2}$. Если этимъ послѣднимъ выраженіемъ замѣнимъ весь знаменатель въ выраженіи разности $r_{2s+1} - r_{2s}$, то получимъ:

$$r_{2s+1} - r_{2s} < \frac{4x^2(x^2 - c^2)^{2s+1}}{4scx^{4s+2}} = \left(\frac{C - c^2}{C}\right)^{2s+1}\frac{C}{sc}.$$

---

*) Нетрудно найти, что

$$(c+x)^s - (c-x)^s = 2x\sum_{k=0}\binom{s-k-1}{k}(2c)^{s-2k-1}(x^2 - c^2)^k.$$

Изъ этого неравенства видно, что разность $r_{2s+1}-r_{2s}$ стремится къ нулю, когда s безгранично возрастаетъ; поэтому обѣ послѣдовательности r_{2s} и r_{2s+1} имѣютъ общій предѣлъ $x-c=\sqrt{C}-c$, такъ какъ это число всегда содержится между r_{2s+1} и r_s; къ этому предѣлу послѣдовательности тѣмъ быстрѣе приближаются, чѣмъ ближе c^2 къ C.

При $s=1$ и $s=2$ будемъ имѣть:

$$\frac{2c(C-c^2)}{C+3c^2}<x-c<\frac{(C+3c^2)(C-c^2)}{4c(C+c^2)},$$

$$\frac{4c(C+c^2)(C-c^2)}{C^2+10Cc^2+5c^4}<x-c<\frac{(C^2+10Cc^2+5c^4)(C-c^2)}{6C^2c+20Cc^3+6c^5}.$$

Отсюда

$$x>\frac{3C+c^2}{C+3c^2}c,\quad x>\frac{5C^2+10Cc^2+c^4}{C^2+10Cc^2+5c^4}c \text{ *)}.$$

При примѣненіи этихъ формулъ, подобравъ значеніе c, вычисляютъ одно изъ чиселъ $c+r_{2s}=c_1$ и, вставивъ значеніе c_1 вмѣсто c въ предыдущія неравенства, получаютъ неравенства для разности $x-c_1$; пусть при этомъ r_{2s} обращается въ r'_{2s}; взявъ число $c_1+r'_{2m}=c_2$, гдѣ $m=s$ или m отлично отъ s, и вставляя c_2 вмѣсто c въ неравенства, получаютъ неравенства для $x-c_2$ и т. д.

Формула, изъ которой мы извлекли результаты этого параграфа, представляется частнымъ случаемъ, при $n=2$, общей формулы, получающейся изъ формулы (2), именно:

$$x-a=\frac{x^n-a^n}{x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}}. \tag{2'}$$

Естественно возникаетъ мысль примѣнить къ вычисленію $\sqrt[n]{A}$ тотъ же пріемъ, при посредствѣ формулы (2′), какой оказался удобнымъ для вычисленія $\sqrt{C}$. Схему такого вычисленія составить нетрудно. Замѣняя въ знаменателѣ x меньшимъ числомъ a, получимъ, вставляя въ числителѣ A вмѣсто x^n:

$$x<a+\frac{A-a^n}{na^{n-1}}=x_1.$$

Если теперь въ знаменатель формулы (2′) вмѣсто x вставимъ только-что найденное большее число x_1, то будемъ имѣть:

$$x>a+\frac{A-a^n}{x_1^{n-1}+ax_1^{n-2}+\cdots+a^{n-1}}=x_2.$$

*) Эти неравенства находятся въ статьѣ г. Я. Успенскаго въ № 557—558 „Вѣстника".

Вставляя затѣмъ въ знаменатель формулы (2′) вмѣсто x меньшее число x_2, получимъ:

$$x < a + \frac{A - a^n}{x_2^{n-1} + ax_2^{n-2} + \cdots + a^{n-1}} = x_3,$$

затѣмъ

$$x > a + \frac{A - a^n}{x_3^{n-1} + ax_3^{n-2} + \cdots + a^{n-1}} = x_4$$

и т. д. Очевидно, что здѣсь будетъ $x_2 > a$, $x_3 < x_1$, $x_4 > x_2$ и т. д., такъ что получатся двѣ послѣдовательности чиселъ: возрастающихъ a, x_2, x_4, ... и убывающихъ x_1,, x_3, ..., между которыми будетъ лежать $x = \sqrt[n]{A}$; но независимое выраженіе чиселъ x_1, x_2, x_3, ... найти не удастся.

III. Обобщеніе неравенствъ, установленныхъ въ параграфѣ I.

Двойное неравенство

$$na^{n-1} < \frac{x^n - a^n}{x - a} < nx^{n-1} \tag{4}$$

можно замѣнить простымъ подобно тому, какъ двѣ формулы приведенія были замѣнены одной.

Дѣля первое неравенство $\left(na^{n-1} < \frac{x^n - a^n}{x - a}\right)$ на a^{n-1} и полагая $\frac{x}{a} = y$, получимъ:

$$n < \frac{y^n - 1}{y - 1},$$

откуда слѣдуетъ по умноженіи на $y - 1$:

$$n(y-1) < y^n - 1.$$

Если раздѣлимъ второе неравенство $\left(\frac{x^n - a^n}{x - a} < nx^{n-1}\right)$ на x^{n-1} и положимъ $\frac{a}{x} = y_1$, гдѣ $y_1 < 1$, то получимъ:

$$\frac{1 - y_1^n}{1 - y_1} < n,$$

откуда, по умноженіи на $1 - y_1$, найдемъ:

$$1 - y_1^n < n(1 - y_1),$$

или, перенося вторую часть въ первую, а первую — во вторую:

$$n(y_1 - 1) < y_1^n - 1.$$

По внѣшнему виду это неравенство не отличается отъ найденнаго выше неравенства $n(y-1) < y^n - 1$, но только обѣ части его отрицательны. Это даетъ намъ право написать при условіи $y > 0$:

$$y^n - 1 > n(y-1),$$

или, по раздѣленіи на n,

$$\frac{y^n - 1}{n} > y - 1.$$

Это неравенство показываетъ, что выраженіе $\frac{y^n-1}{n}$ при всѣхъ значеніяхъ n остается больше своего значенія при $n = 1$. Но когда мы пришли къ такому истолкованію неравенства, то естественно возникаетъ мысль сравнить между собою значенія выраженія $\frac{y^n-1}{n}$ при двухъ различныхъ значеніяхъ n. Разсмотримъ для этой цѣли разность двухъ значеній $\frac{y^n-1}{n}$ при двухъ смежныхъ значеніяхъ n, т. е. разность

$$\frac{y^n-1}{n} - \frac{y^{n-1}-1}{n-1},$$

которая приводится къ виду:

$$\frac{1}{n(n-1)}\left[ny^{n-1}(y-1) - (y^n - 1)\right] = \frac{y-1}{n(n-1)}\left(ny^{n-1} - \frac{y^n-1}{y-1}\right).$$

Членъ ny^{n-1} представимъ въ видѣ суммы n членовъ y^{n-1}, а вмѣсто $\frac{y^n-1}{y-1}$ вставимъ его значеніе $y^{n-1} + y^{n-2} + \cdots + y + 1$ и расположимъ члены такъ, чтобы изъ каждаго члена y^{n-1} вычитался одинъ изъ членовъ послѣдней суммы; такимъ образомъ получимъ:

$$\frac{y^n-1}{n} - \frac{y^{n-1}-1}{n-1} =$$

$$= \frac{y-1}{n(n-1)}\left[(y^{n-1} - y^{n-2}) + (y^{n-1} - y^{n-3}) + \cdots + (y^{n-1} - y) + (y^{n-1} - 1)\right]$$

$$= \frac{y-1}{n(n-1)}\left[y^{n-2}(y-1) + y^{n-3}(y^2-1) + \cdots + y(y^{n-2}-1) + (y^{n-1}-1)\right]$$

$$= \frac{(y-1)^2}{n(n-1)}\left[y^{n-2} + y^{n-3}\frac{y^2-1}{y-1} + \cdots + y\frac{y^{n-2}-1}{y-1} + \frac{y^{n-1}-1}{y-1}\right].$$

Если, наконецъ, здѣсь замѣнимъ всѣ выраженія вида $\frac{y^k-1}{y-1}$ ихъ значеніями и сдѣлаемъ приведеніе, то найдемъ:

$$\frac{y^n-1}{n}-\frac{y^{n-1}-1}{n-1}=$$

$$=\frac{(y-1)^2}{n(n-1)}\left[(n-1)y^{n-2}+(n-2)y^{n-3}+\cdots+3y^2+2y+1\right]. \tag{12}$$

Такъ какъ квадратъ $(y-1)^2$ положителенъ, а многочленъ въ скобкахъ состоитъ также изъ положительныхъ членовъ, то отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{y^n-1}{n}>\frac{y^{n-1}-1}{n-1}.$$

Это неравенство можно выразить словами, сказавъ, что значеніе выраженія $\frac{y^n-1}{n}$ возрастаетъ при возрастаніи n Слѣдовательно, если примемъ $r<n$, то будемъ имѣть:

$$\frac{y^n-1}{n}>\frac{y^r-1}{r}.$$

Возвратимся къ числамъ x и a, гдѣ попрежнему $x>a$. Полагая въ послѣднемъ неравенствѣ $y=\frac{x}{a}$ и умножая неравенство на a^n, получимъ:

$$\frac{x^n-a^n}{n}>a^{n-r}\,\frac{x^r-a^r}{r},$$

откуда слѣдуетъ:

$$\frac{x^n-a^n}{x^r-a^r}>\frac{n}{r}a^{n-r};$$

полагая же $y=\frac{a}{x}$ и умножая неравенство на x^n, найдемъ:

$$\frac{a^n-x^n}{n}>x^{n-r}\,\frac{a^r-x^r}{r},$$

откуда заключимъ, переходя къ положительнымъ числамъ:

$$\frac{x^n-a^n}{n}<x^{n-r}\,\frac{x^r-a^r}{r},$$

или

$$\frac{x^n-a^n}{x^r-a^r}<\frac{n}{r}\,x^{n-r}.$$

Такимъ образомъ получается двойное неравенство:

$$\frac{n}{r}a^{n-r} < \frac{x^n - a^n}{x^r - a^r} < \frac{n}{r}x^{n-r}, \quad n > r, \tag{4'}$$

представляющее существенное обобщеніе неравенства (4). Изъ этого неравенства представляется возможность вычислять непосредствено x^r по данному значенію $x^n = A$ такимъ же процессомъ, какой былъ развитъ для вычисленія x, при чемъ неравенство (4′) придется примѣнять въ обращенномъ видѣ:

$$\frac{r}{n}x^{r-n} < \frac{x^r - a^r}{x^n - a^n} < \frac{r}{n}a^{r-n}, \quad r < n.$$

Для выраженія $\dfrac{x^n - a_n}{x^r - a^r}$, къ разсмотрѣнію котораго мы такимъ образомъ приведены, нетрудно установить формулы приведенія, подобныя формуламъ (1) и (3). Оперируя надъ болѣе простымъ выраженіемъ $\dfrac{y^n - 1}{y^r - 1}$ и полагая, что при дѣленіи n на r получается въ частномъ d и въ остаткѣ r_1, такъ что $n = dr + r_1$ и $r_1 < r$, будемъ имѣть:

$$\frac{y^n - 1}{y^r - 1} = \frac{y^{n-r}(y^r - 1) + y^{n-r} - 1}{y^r - 1} = y^{n-r} + \frac{y^{n-r} - 1}{y^r - 1}.$$

Вставляя здѣсь вмѣсто n послѣдовательно $n - r$, $n - 2r, \ldots$, $n - (d-1)r$ и складывая результаты, получимъ:

$$\frac{y^n - 1}{y^r - 1} = y^{n-r} + y^{n-2r} + \cdots + y^{n-dr} + \frac{y^{r_1} - 1}{y^r - 1}.$$

Если числитель и знаменатель послѣдней дроби раздѣлимъ на $y^{r_1} - 1$, то въ числителѣ получимъ 1, а въ знаменателѣ дробь $\dfrac{y^r - 1}{y^{r_1} - 1}$, у которой $r > r_1$; принимая поэтому, что при дѣленія r на r_1 получается въ частномъ d_1, а въ остаткѣ $r_2 < r_1$ (слѣдовательно, $r = d_1 r_1 + r_2$), будемъ имѣть:

$$\frac{y^r - 1}{y^{r_1} - 1} = y^{r-r_1} + y^{r-2r_1} + \cdots + y^{r-d_1 r_1} + \frac{y^{r_2} - 1}{y^{r_1} - 1}.$$

Съ новою дробью во второй части поступаемъ такъ же, какъ и въ предшествующемъ равенствѣ и т. д. Мы отмѣчаемъ въ этомъ примѣрѣ простѣйшее примѣненіе въ алгебрѣ ариѳметическаго алгориѳма нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ n и r.

Изъ полученнаго нами выше равенства

$$\frac{y^n-1}{n}-\frac{y^{n-1}-1}{n-1}=$$

$$=\frac{(y-1)^2}{n(n-1)}\left[(n-1)y^{n-2}+(n-2)y^{n-3}+\cdots+3y^2+2y+1\right]$$

можно сдѣлать не только заключеніе, что первая часть положительна, но и установить для нея двойное неравенство. Если $y>1$, то выраженіе въ скобкахъ во второй части будетъ болѣе своего значенія при $y=1$, т. е. $\frac{n(n-1)}{2}$, но меньше того числа, которое получится, когда во всѣхъ членахъ степени y замѣнимъ наивысшею степенью y^{n-2}. На этомъ основаніи будемъ имѣть:

$$\frac{(y-1)^2}{2}<\frac{y^n-1}{n}-\frac{y^{n-1}-1}{n-1}<y^{n-2}\,\frac{(y-1)^2}{2}.$$

При $y<1$ знаки неравенствъ нужно измѣнить на обратные. Мы вставимъ теперь въ разсматриваемомъ равенствѣ $\frac{1}{y}$ вмѣсто y, умножимъ равенство на y^n и перемѣнимъ знаки у всѣхъ членовъ. Такимъ образомъ получимъ:

$$\frac{y^n-1}{n}-y\,\frac{y^{n-1}-1}{n-1}=$$

$$=-\frac{(y-1)^2}{n(n-1)}\left[n-1+(n-2)y+(n-3)y^2+\cdots+2y^{n-3}+y^{n-2}\right].$$

Складывая это равенство съ исходнымъ, мы замѣтимъ, что, когда во второй части сдѣлаемъ приведеніе, то получимъ попарно члены съ равными по абсолютной величинѣ, но противоположными по знаку коэффиціентами, именно $(n-2)y^{n-2}$ и $-(n-2)$, $(n-4)y^{n-3}$ и $-(n-4)y$, $(n-6)y^{n-4}$ и $-(n-6)y^2$ и т. д., такъ что, соединяя члены съ одинаковыми коэффиціентами, найдемъ:

$$2\,\frac{y^n-1}{n}-(y+1)\,\frac{y^{n-1}-1}{n-1}=$$

$$=\frac{(y-1)^2}{n(n-1)}\left[(n-2)(y^{n-2}-1)+(n-4)y\,(y^{n-4}-1)+\cdots\right]$$

$$=\frac{(y-1)^3}{n(n-1)}\left[(n-2)\,\frac{y^{n-2}-1}{y-1}+(n-4)\,y\,\frac{y^{n-4}-1}{y-1}+(n-6)\,y^2\,\frac{y^{n-6}-1}{y-1}+\cdots\right]. \quad (1$$

Если въ скобкахъ вставимъ вмѣсто выраженій $\frac{y^k-1}{y-1}$ ихъ значенія $y^{k-1}+y^{k-2}+\cdots+1$, то легко замѣтимъ, что коэффиціентомъ при y^{n-2-k} будетъ сумма k чиселъ $(n-2)+(n-4)+\cdots+(n-2k)$, равная $nk-k(k+1)=k(n-k-1)$, такъ что выраженіе въ скобкахъ приметъ видъ:

$$1\,.\,(n-2)\,y^{n-3}+2\,.\,(n-3)\,y^{n-4}+3\,.\,(n-4)\,y^{n-5}+\cdots+(n-3)\,.\,2y+(n-2)\,.\,1.$$

Вторая часть равенства (13) будетъ положительна при $y>1$ и отрицательна при $y<1$. Ограничимся разсмотрѣніемъ перваго предположенія, т. е. что $y>1$. Въ этомъ случаѣ получаемъ неравенство:

$$2\,\frac{y^n-1}{n}-(y+1)\,\frac{y^{n-1}-1}{n-1}>0,$$

которое приведемъ къ двумъ различнымъ по внѣшности формамъ. Замѣчая, что $(y+1)(y^{n-1}-1)=y^n-1+y\,(y^{n-2}-1)$, подставимъ это выраженіе въ первую часть и послѣ приведенія и умноженія неравенства на $\dfrac{n-1}{n-2}$, получимъ:

$$\frac{y^n-1}{n}-y\,\frac{y^{n-2}-1}{n-2}>0,$$

или, вставляя $n+1$ вмѣсто n:

$$\frac{y^{n+1}-1}{n+1}-y\,\frac{y^{n-1}-1}{n-1}>0.$$

Этому неравенству можно дать видъ:

$$\frac{y^n(y-1)+y^n-1}{n+1}-\frac{y^n-1-(y-1)}{n-1}>0,$$

откуда получаемъ:

$$\left(\frac{y^n}{n+1}+\frac{1}{n-1}\right)(y-1)=$$

$$=\frac{(n-1)\,y^n+(n+1)}{(n+1)(n-1)}\,(y-1)>\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)(y^n-1)=2\,\frac{y^n-1}{(n+1)(n-1)}$$

и находимъ:

$$y-1>2\,\frac{y^n-1}{(n-1)\,y^n+(n+1)},$$

или, вставляя $\dfrac{x}{a}$ вмѣсто y:

$$x-a>2a\,\frac{x^n-a^n}{(n-1)\,x^n+(n+1)\,a^n}\ {}^{*)}.$$

*) Это неравенство находится въ цитированной статьѣ г. Успенскаго.

Полагая здѣсь $x^n = A$, $a = 1$ и умножая на n, будемъ имѣть:

$$n(\sqrt[n]{A}-1) > 2\frac{A-1}{A+1-\frac{A-1}{n}},$$

откуда слѣдуетъ, что предѣлъ $n(\sqrt[n]{A}-1)$ при безгранично возрастающемъ n, если только онъ существуетъ, будетъ не меньше $2\frac{A-1}{A+1}$.

Другую форму неравенству

$$2\frac{y^n-1}{n}-(y+1)\frac{y^{n-1}-1}{n-1} > 0$$

дадимъ дѣленіемъ его на $\frac{(y+1)^n}{2^{n-1}}$, послѣ чего оно приметъ видъ:

$$\frac{1}{n}\left[\left(\frac{2y}{1+y}\right)^n-\left(\frac{2}{1+y}\right)^n\right] > \frac{1}{n-1}\left[\left(\frac{2y}{1+y}\right)^{n-1}-\left(\frac{2}{1+y}\right)^{n-1}\right],$$

выражающій, что $\frac{1}{n}\left[\left(\frac{2y}{1+y}\right)^n-\left(\frac{2}{1+y}\right)^n\right]$ возрастаетъ при возрастаніи n. Замѣчая, что $\frac{2y}{1+y}=1+\frac{y-1}{1+y}$, $\frac{2}{1+y}=1-\frac{y-1}{1+y}$ и полагая $\frac{y-1}{1+y}=u$, гдѣ, очевидно, $0<u<1$, приведемъ неравенство къ слѣдующему виду:

$$\frac{(1+u)^n-(1-u)^n}{n} > \frac{(1+u)^{n-1}-(1-u)^{n-1}}{n-1} > \cdots > \frac{(1+u)^r-(1-u)^r}{r},\ r<n.$$

Изъ равенства $\frac{y-1}{y+1}=u$ легко получается $y=\frac{1+u}{1-u}$, такъ что для каждаго значенія u находится соотвѣтствующее значеніе y.

Послѣднему неравенству можно придать видъ:

$$\frac{(1-u)^{n-1}}{n-1}-\frac{(1-u)^n}{n}=(1-u)^{n-1}\frac{1+(n-1)u}{n(n-1)} > \frac{(1+u)^{n-1}}{n-1}-\frac{(1+u)^n}{n}=$$

$$=(1+u)^{n-1}\frac{1-(n-1)u}{n(n-1)}.$$

Замѣняя n на $n+1$, найдемъ отсюда:

$$\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n < \frac{1+nu}{1-nu},$$

при условіи, что $nu<1$.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Основы математики и элементарное образованіе.

Проф. А. Н. Уайтегида.

Докладъ въ IV секціи (философія и образованіе) 5-го Международнаго Конгресса математиковъ въ Кэмбриджѣ въ августѣ 1912 г.

Я буду говорить здѣсь не о спеціальномъ обученіи студентовъ-математиковъ, но о математическомъ образованіи большинства учащихся въ нашихъ мужскихъ среднихъ школахъ. Учащіеся должны быть раздѣлены, въ свою очередь, на двѣ категоріи: къ первой категоріи я отношу желающихъ сократить свое математическое образованіе, ко второй — желающихъ пріобрѣсти для своей будущей профессіи извѣстную математическую подготовку либо въ видѣ запаса опредѣленныхъ математическихъ свѣдѣній либо въ видѣ математически тренированнаго ума.

Я буду называть послѣднюю категорію математической, а первую — нематематической. Но я долженъ повторить еще разъ, что подъ математической категоріей я разумѣю ту большую группу учащихся, которые желаютъ получить больше, чѣмъ минимумъ математическаго образованія. Помимо этого, большинство моихъ замѣчаній относительно этихъ категорій учащихся примѣнимо также къ начальнымъ курсамъ нашихъ университетовъ.

Предметомъ настоящаго доклада является обсужденіе вопроса о томъ, какое мѣсто должны занимать современныя изслѣдованія, касающіяся основъ математики, въ образованіи, получаемомъ молодыми людьми обѣихъ указанныхъ группъ.

Чтобы найти точку отправленія для разбора этого вопроса, мы прежде всего спросимъ себя: для чего нематематической группѣ должна вообще преподаваться какая бы то ни было математика, кромѣ простѣйшихъ элементовъ ариѳметики? Каковы тѣ качества ума, которыя должна развить математическая тренировка, примѣняемая, какъ элементъ общаго образованія?

Мой отвѣтъ, примѣнимый, впрочемъ, одинаково къ обѣимъ группамъ учащихся, состоитъ въ томъ, что существуютъ двѣ тѣсно связанныя формы умственной дисциплины, которыя должны быть развиты правильно поставленнымъ курсомъ математики. Хотя эти двѣ формы и тѣсно связаны между собой, онѣ все-таки вполнѣ различны.

Первая форма умственной дисциплины, по существу своему, вовсе не является логической. Это — способность ясно схватывать отвлеченныя идеи и относить ихъ къ опредѣленнымъ частнымъ обстоятельствамъ. Другими словами, первое назначеніе математики — развить способность къ отвлеченному мышленію. Я повторяю еще разъ, что, по существу, это не имѣетъ никакого отношенія къ логикѣ, хотя логическая дисциплина и является фактически лучшимъ способомъ получить желаемый результатъ. Здѣсь идетъ рѣчь не объ усвоеніи философской теоріи отвлеченныхъ понятій, но лишь о развитіи привычки и умѣнія пользоваться ими. Но существуетъ одинъ и только одинъ способъ пріобрѣсти привычку и умѣніе пользоваться какимъ бы то ни было пріемомъ, и этотъ простой и общеизвѣстный способъ состоитъ въ постоянномъ примѣненіи этого пріема. Другого, болѣе короткаго пути нѣтъ. Если мы при воспитаніи желаемъ развить извѣстную форму ума, мы должны изо дня въ день и изъ года въ годъ пріучать умъ нашихъ учениковъ развиваться въ желаемомъ направленіи. Такимъ образомъ, чтобы привить способность схватывать отвлеченныя идеи и умѣніе пользоваться ими, мы должны выбрать комплексъ такихъ идей, которыя и достаточно важны и въ то же время достаточно удобны для обсужденія благодаря своей ясности и опредѣленности.

Основныя математическія истины, касающіяся геометріи, отношенія, количества и числа, удовлетворяютъ этимъ требованіямъ, какъ никакія другія. Отсюда вытекаетъ то универсальное и основное положеніе, которое занимаетъ математика, какъ составная часть общаго образованія.

Но въ чемъ же состоятъ основныя математическія истины, относящіяся къ геометріи, количеству и числу? Здѣсь мы подходимъ къ важному вопросу объ отношеніи между современной наукой объ основахъ математики и математическимъ образованіемъ.

Мой отвѣтъ на вопросъ объ этихъ основныхъ математическихъ истинахъ сводится къ тому, что въ какомъ бы то ни было абсолютномъ смыслѣ таковыхъ не существуетъ. Не существуетъ ни одной, даже самой малой группы независимыхъ основныхъ недоказуемыхъ предложеній, которыя служили бы необходимыми исходными точками для всякаго математическаго разсужденія объ этихъ предметахъ. Въ математическомъ разсужденіи единственными абсолютно необходимыми являются лишь тѣ предпосылки, которыя дѣлаютъ возможной логическую дедукцію. Между этими абсолютными истинами чистой логики и такъ называемыми основными истинами, относящимися къ геометріи, количеству и числу, существуетъ цѣлый новый міръ своеобразныхъ математическихъ истинъ, касающихся логики предложеній, классовъ и отношеній. Но эта область ужъ слишкомъ абстрактна для того, чтобы служить элементарной основой для тренировки ума въ трудномъ искусствѣ отвлеченнаго мышленія.

Именно поэтому намъ приходится пойти на компромиссъ и начать съ такихъ очевидныхъ общихъ идей, которыя естественно являются каждому человѣку, когда онъ воспринимаетъ предметы при помощи своихъ чувствъ.

Въ геометріи идеи, разработанныя греками и изложенныя Евклидомъ, являются въ общемъ подходящими для нашей цѣли; сюда относятся понятія объ объемахъ, поверхностяхъ, линіяхъ, о прямизнѣ и кривизнѣ, о пересѣченіи и совпаденіи, о большемъ и меньшемъ, о подобіи, формѣ и размѣрѣ. И дѣйствительно, мы пользуемся при начальномъ обученіи этими общими понятіями пространственныхъ свойствъ, которыя всегда должны утвердиться въ умѣ у всякаго, кто хочетъ сознательно наблюдать міръ явленій.

Такимъ образомъ, мы возвращаемся къ мнѣнію Платона, что для общаго образованія геометрія въ томъ видѣ, какъ онъ ее зналъ, является царицей наукъ.

Въ дополненіе къ геометріи у насъ остаются еще понятія о количествѣ, отношеніи и числѣ. На практикѣ это называется элементарной алгеброй. Важнѣйшими здѣсь являются понятіе о «произвольномъ числѣ», или, другими словами, употребленіе всѣмъ извѣстныхъ буквъ x, y, z, и понятіе о зависимости перемѣнныхъ другъ отъ друга или, иначе, о функціональной, зависимости. Все это должно быть усвоено постепенно путемъ постояннаго примѣненія простѣйшихъ функцій, какія мы можемъ мыслить: а именно линейныхъ функцій, которыя изображаются графически прямыми линіями, квадратичныхъ функцій, которыя изображаются графически параболами, и тѣхъ простыхъ неявныхъ функцій, которыя графически изображаются коническими сѣченіями. Такимъ путемъ, при удачѣ и при охотно работающемъ классѣ мы можемъ дойти до понятія о скорости возрастанія, все время ограничиваясь лишь простѣйшими возможными случаями.

И я настойчиво подчеркиваю, что и въ геометріи и въ алгебрѣ правильное обращеніе съ этими общими понятіями является не началомъ, а лишь цѣлью, которой ученикъ долженъ достигнуть. Прогрессивный методъ есть непрерывное упражненіе въ разсмотрѣніи простѣйшихъ частныхъ случаевъ, и цѣль его — не философскій анализъ, а пріобрѣтеніе навыка.

Но какимъ же образомъ долженъ ученикъ упражняться въ употребленіи этихъ понятій? Онъ не можетъ просто сидѣть и думать о соотношеніи $y = x + 1$, онъ долженъ примѣнять его какимъ-нибудь простымъ и яснымъ способомъ.

Это приводитъ насъ къ второй умственной способности, которая должна быть развита математической тренировкой, а именно къ способности логическаго мышленія. И здѣсь опять-таки существенной цѣлью обученія является не знакомство съ философіей логики, а привычка логически мыслить. Подъ логикой я подразумѣваю дедуктивную логику.

Дедуктивная логика есть наука объ извѣстныхъ отношеніяхъ между общими понятіями, каково, напримѣръ, включеніе, дизъюнкція и др.*). Когда начинается логика, опредѣленныя частныя, единичныя вещи должны быть изгнаны. Я не могу относить логически эту вещь къ той вещи, — напримѣръ, это перо къ тому перу, развѣ только косвеннымъ образомъ, относя нѣкоторое общее понятіе, примѣняемое къ этому перу, къ нѣкоторому общему понятію, примѣняемому къ тому перу. Индивидуальныя черты этихъ двухъ перьевъ совершенно безразличны для логическаго процесса. Этотъ процессъ касается исключительно двухъ общихъ понятій. Такимъ образомъ, логическая практика есть примѣненіе нашего ума къ разсмотрѣнію этихъ понятій; и элементарное математическое обученіе есть, дѣйствительно, не что иное, какъ логическое употребленіе общихъ понятій геометріи и алгебры, перечисленныхъ выше. Въ немъ, слѣдовательно, какъ я уже указалъ вначалѣ, заключается двойное преимущество. Оно развиваетъ способность ума къ математическому мышленію и заканчиваетъ упражненіемъ ума въ наиболѣе важномъ видѣ отвлеченнаго мышленія, а именно въ дедуктивной логикѣ.

Я долженъ указать, что можно было бы сдѣлать и другой выборъ типа отвлеченнаго мышленія. Мы могли бы упражнять дѣтей въ непосредственномъ

---

*) Подъ включеніемъ разумѣютъ такое логическое соотношеніе двухъ предложеній, при которомъ истинность перваго влечетъ за собой истинность второго; подъ дизъюнкціей двухъ предложеній разумѣютъ соотношеніе, при которомъ по крайней мѣрѣ одно изъ нихъ должно быть истиннымъ.

Ред.

созерцанiи красоты отвлеченныхъ моральныхъ идей въ надеждѣ сдѣлать изъ нихъ религiозныхъ мистиковъ. Но всеобщая практика рѣшила дѣло въ пользу логики въ томъ видѣ, какъ она выражается въ элементарной математикѣ.

Теперь мы должны отвѣтить на слѣдующiй вопросъ: какова роль логической точности въ обученiи математикѣ? Нашъ общiй отвѣтъ на этотъ вопросъ очевиденъ: логическая точность есть одна изъ двухъ цѣлей обученiя математикѣ, и она есть единственное орудiе, при помощи котораго обученiе математики можетъ достигнуть другой своей цѣли. Обучать математикѣ — это значитъ обучать логической точности. Учитель математики, который не научилъ этому, не научилъ ничему.

Но установивши этотъ тезисъ въ его общемъ видѣ, мы должны тщательно разъяснить его смыслъ, ибо въ противномъ случаѣ дѣйствительное значенiе проблемы обученiя можетъ быть понято совершенно неправильно.

Логическая точность есть способность, которая должна быть прiобрѣтена. Это — способность ума, развить которую является цѣлью обученiя. Такимъ же образомъ умѣнiе читать всеобщую литературу есть цѣль, къ которой стремится литературное образованiе. Но мы вѣдь не ожидаемъ, что мальчикъ начнетъ свой первый урокъ съ самостоятельнаго чтенiя Шекспира. Мы признаемъ, что чтенiе невозможно, пока ученикъ не выучитъ алфавита и не научится читать по складамъ, и тогда мы даемъ ему книгу лишь съ односложными словами.

Такимъ же точно образомъ и въ математическомъ воспитанiи логическая точность должна возрастать постепенно. Было бы безумiемъ требовать въ началѣ обученiя такого же тщательнаго логическаго анализа, какой возможенъ въ концѣ его. Толковать мой тезисъ въ томъ смыслѣ, что математическое обученiе должно предполагать въ ученикѣ способность сосредоточеннаго логическаго мышленiя, значитъ не понимать его. Мой тезисъ въ дѣйствительности утверждаетъ нѣчто прямо противоположное, а именно, что эту способность нельзя предполагать, что она должна быть прiобрѣтена, и что математическое обученiе есть именно процессъ ея развитiя. Все мое предположенiе сводится къ тому, что эта способность не существуетъ вначалѣ въ вполнѣ развитомъ видѣ. Подобно всякой другой способности, которая прiобрѣтается, она должна развиваться постепенно.

Какъ провести это развитiе въ его различныхъ стадiяхъ, это ужъ дѣло умѣнiя и такта учителя. Существенно только, чтобы онъ все время ясно помнилъ, что вся цѣль его усилiй есть именно способность точнаго логическаго мышленiя. Если его ученики ее прiобрѣли, они прiобрѣли все.

Но мы еще не разсмотрѣли вполнѣ этой части нашей темы. Логическая точность есть полная реализацiя всѣхъ послѣдовательныхъ ступеней разсужденiя. Но что такое ступени разсужденiя? Полное установленiе всѣхъ ступеней есть слишкомъ детальная и слишкомъ трудная операцiя, чтобы ее можно было вводить въ математическiя разсужденiя въ школѣ. Это привело бы къ введенiю отвлеченныхъ логическихъ понятiй, которыя очень трудно усвоить, такъ какъ въ обыкновенномъ мышленiи очень рѣдко встрѣчается потребность явно выражать ихъ. Они не могутъ, слѣдовательно, составить подходящую почву для элементарнаго образованiя.

Я не думаю, чтобы можно было провести какую-нибудь теоретическую границу между тѣми логическими ступенями, которыя образуютъ теоретически полное логическое разсужденіе, и тѣми, которыя достаточны для большинства практическихъ цѣлей, въ томъ числѣ и для цѣлей воспитанія. Вопросъ этотъ относится къ психологіи и долженъ рѣшаться экспериментально. Цѣлью является пріобрѣтеніе достаточной логической сноровки, которая дала бы возможность открывать ошибки и опредѣлять типы здоровой логической дедукціи. Дальнѣйшія цѣли являются отчасти философскими, а отчасти состоятъ въ томъ, чтобы обнаружить тѣ отвлеченныя идеи, изслѣдованіе которыхъ важно само по себѣ. Но ни то ни другое къ элементарному образованію уже не относится.

Мое личное мнѣніе состоитъ въ томъ, что типъ логической точности, представленный греческими математиками, и есть приблизительно то, что намъ нужно. Въ геометріи это та точность, которую мы находимъ у Евклида. Это, впрочемъ, вовсе не значитъ, что мы должны пользоваться его знаменитыми «Началами» въ качествѣ учебника, и что въ нѣкоторыхъ мѣстахъ не является желательнымъ извѣстное сокращеніе его способа изложенія.

Все это лишь детали. По существу же я думаю, что тѣ способы логическаго перехода, которые онъ дѣлаетъ явными, и мы должны дѣлать явными, а тѣ, которые онъ опускаетъ, и мы должны опускать.

Я, впрочемъ, сомнѣваюсь, чтобы было желательно вводить изучающаго во всѣ строгости геометріи Евклида безъ всякихъ ограниченій. Въ этомъ отношеніи заслуживаетъ похвалы современное стремленіе (по крайней мѣрѣ, въ Англіи) обращать большое вниманіе вначалѣ на упражненіе ученика въ простыхъ построеніяхъ по числовымъ даннымъ. Это значитъ, что послѣ короткаго разсужденія съ Евклидовой степенью точности, уму учащагося дается болѣе легкая работа примѣненія общаго вывода къ разнообразнымъ частнымъ случаямъ и провѣрки путемъ приблизительнаго измѣренія правильности полученныхъ результатовъ. Нужно только, чтобы измѣренія не принимались за доказательства. Цѣль ихъ — показать начинающему, какое дѣйствительное значеніе имѣютъ общія отвлеченныя понятія.

Также и въ алгебрѣ способы обозначенія и практическое примѣненіе символовъ должны быть взяты лишь въ простѣйшихъ примѣрахъ, а болѣе теоретическая разработка символизма должна быть оставлена для болѣе подходящей позднѣйшей ступени. Мое правило состоитъ въ томъ, чтобы вначалѣ раскрывать смыслъ понятій посредствомъ грубаго примѣненія ихъ простѣйшими способами и постепенно утончать логическій процессъ, подготовляя приближеніе къ большей степени общности. Иными словами, этотъ тезисъ моего доклада можетъ быть выраженъ такъ, что цѣль математическаго образованія состоитъ въ пріобрѣтеніи способностей къ анализу, обобщенію и разсужденію. Эти двѣ способности анализа и обобщенія въ моемъ предыдущемъ изложеніи были соединены вмѣстѣ въ видѣ способности пониманія отвлеченныхъ понятій.

Но для того, чтобы анализировать и обобщать, мы должны начать съ грубаго матеріала понятій, подлежащихъ анализу и обобщенію. Поэтому существенной ошибкой обученія было бы начать съ послѣднихъ продуктовъ этого процесса, а именно съ понятій въ ихъ утонченной, т. е. анализированной и обобщенной формѣ. Важная часть процесса обученія сводится именно къ тому, чтобы взять эти понятія въ томъ видѣ, какъ они дѣйствительно существуютъ въ умѣ ученика, и заставить его упражняться въ трудномъ искусствѣ ихъ культивированія и разработки.

Учитель является какъ бы миссіонеромъ, дикарями являются понятія въ умѣ ученика, и миссіонеръ не исполнитъ своего главнаго долга, если онъ не рискнетъ пуститься въ страну каннибаловъ.

Теперь обратимся къ тѣмъ ученикамъ, которые образуютъ математическую группу. Существуетъ очень распространенное мнѣніе, что физики и инженеры могутъ изучать сравнительно высокія области математики, — напримѣръ, дифференціальное исчисленіе, — не считаясь съ ихъ логикой или теоріей.

Я считаю это глубокимъ заблужденіемъ. Оно предполагаетъ, что механическое умѣніе безъ пониманія способовъ полученія математическихъ результатовъ, является полезнымъ въ прикладной наукѣ. По моему мнѣнію, оно совершенно безполезно. Сами результаты легко могутъ быть найдены въ соотвѣтствующихъ календаряхъ и элементарныхъ справочныхъ изданіяхъ. Тотъ, кто только принимаетъ результаты, можетъ не заботиться о томъ, почему они вѣрны. Онъ просто принимаетъ и примѣняетъ ихъ. Но что является чрезвычайно важнымъ для физика и инженера, это — математически тренированный умъ, а такой умъ можетъ быть пріобрѣтенъ только путемъ соотвѣтствующаго строгаго дисциплинированія.

Я вполнѣ допускаю, что въ началѣ обученія такому предмету, какъ дифференціальное исчисленіе, лучше всего сразу же перейти къ примѣненію соотвѣтствующаго алгориѳма въ немногочисленныхъ простѣйшихъ случаяхъ, выяснивши лишь приблизительно понятіе о скорости возрастанія. Въ такомъ видѣ преподаватель можетъ уже пользоваться этимъ алгориѳмомъ въ физическихъ и техническихъ лабораторіяхъ. Но математическая тренировка ученаго (физика или инженера) состоитъ въ томъ, чтобы сдѣлать эти понятія ясными и доказательства точными.

Я надѣюсь, что мнѣ удалось выяснить тезисъ моего доклада, касающійся значенія логической точности для преподаванія математики. Привычка къ логической точности и необходимо связанное съ нею умѣніе сосредоточивать мысль на отвлеченныхъ понятіяхъ невозможны на начальныхъ стадіяхъ обученія. Это — идеалъ, къ которому долженъ стремиться преподаватель. Такимъ же образомъ логическая точность, въ смыслѣ явнаго логическаго выдѣленія элементовъ разсужденія, не есть нѣчто абсолютное: она можетъ быть больше и меньше. Степень такого выдѣленія, которое должно быть введено на каждой отдѣльной ступени обученія, зависитъ отъ взгляда преподавателя, основаннаго на его личной практикѣ. Наконецъ, развитой умъ является, въ извѣстномъ смыслѣ, наименѣе выявленнымъ; онъ быстро пробѣгаетъ по хорошо извѣстной ему дорогѣ и можетъ обойтись безъ явнаго словеснаго выраженія полнаго ряда мыслей, которыя для него вполнѣ очевидны. Но, съ другой стороны, ему приходится искупать эту быстроту, а именно сосредоточивать вниманіе на каждомъ сомнительномъ пунктѣ, гдѣ можетъ скрываться ошибка. Привычка къ логической точности есть именно умѣніе инстинктивно чувствовать такія опасныя мѣста.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Говорящая лампа накаливанія. Обыкновенная лампа накаливанія съ металлической нитью можетъ говорить! Если надлежащимъ образомъ пропустить токъ отъ сильнаго микрофона черезъ нить лампы, то, приближая ухо къ шару лампы, можно ясно слышать слова, произносимыя лампой. Слѣдовательно, обыкновенная лампа накаливанія можетъ замѣнять телефонъ. Лучше всего употреблять осрамовую лампу въ 100 свѣчей, которая соединена съ источникомъ постояннаго тока, обладающаго напряженіемъ въ 120 вольтъ. Въ качествѣ микрофона можно употреблять микрофонъ съ сильнымъ токомъ фабрики «Mix und Genest». Этотъ микрофонъ включается въ цѣпь изъ аккумуляторовъ, дающихъ токъ съ напряженіемъ около 10 вольтъ, и изъ первичной обмотки микрофоннаго трансформатора. Токъ въ микрофонѣ долженъ быть силою въ 0,4 ампера. Вторичная обмотка трансформатора соединяется съ проводами лампы накаливанія съ одной стороны непосредственно, а съ другой — черезъ конденсаторъ. Въ освѣтительные провода лампы включается обмотка, чтобы перемѣнный токъ не переходилъ на освѣтительную проводку.

Если теперь громко говорить въ микрофонъ, то, находясь недалеко отъ лампы или, лучше, приложивъ ухо къ самому шару, можно ясно слышать произносимыя слова. Такъ какъ изъ шара выкачанъ почти весь воздухъ, то едва ли можно говорить о явленіи термотелефона, дѣйствіе котораго основано на расширеніи и сжиманіи воздуха подъ вліяніемъ колебаній температуры. Представляется болѣе вѣроятнымъ, что температурныя колебанія накаливаемой нити передаются стеклу шара и возбуждаютъ колебанія послѣдняго. Вслѣдствіе этого для ясности произношенія лучше примѣнять лампы съ особенно тонкими стѣнками. Такъ какъ при многосвѣчныхъ лампахъ колебанія температуры значительнѣе, то, по наблюденіямъ Орта (Ort) и Ригера (Rieger), особенно чувствительнымъ являются лампы въ 500 — 1000 свѣчей.

Говорящая лампа даетъ поэтому пріятную возможность имѣть на письменномъ столѣ тайный телефонъ.

БИБЛІОГРАФІЯ.

II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ.

Авторы, переводчики и редакторы новыхъ сочиненій приглашаются присылать для этого отдѣла, извѣстнаго въ германской литературѣ подъ названіемъ „Selbstanzeigen", краткія сообщенія о выпущенныхъ ими сочиненіяхъ, объ ихъ характерѣ и объ ихъ назначеніи. Къ этимъ сообщеніямъ долженъ быть приложенъ экземпляръ сочиненія. Помѣщая эти сообщенія, редакція сохраняетъ, однако, за собою право помѣстить и независимую рецензію.

В. В. Добровольскій. *Техническая механика въ элементарномъ изложеніи.* Руководство для учащихся и для самообразованія въ 3 частяхъ. Цѣна I части — 2 р., II части — 3 р., III часть печатается.

Вышедшія 2 первыя части курса технической механики заключаютъ всю механику точки, основныя положенія механики системы вообще и механики твердаго тѣла въ частности, а также основы общаго ученія о машинахъ и краткое описаніе двигателей и подъемныхъ машинъ. Третья часть будетъ заключать механику жидкостей, газовъ и паровъ и описаніе важнѣйшихъ типовъ машинъ, для пониманія дѣйствія которыхъ необходимо знакомство съ основными положеніями гидравлики и термодинамики. Существенное отличіе этого курса отъ другихъ подобныхъ курсовъ заключается въ томъ, что въ немъ нѣтъ рѣзкаго отграниченія «теоретической» механики отъ «прикладной». Напротивъ, каждое понятіе и уравненіе пояснено примѣрами, взятыми изъ технической практики, при чемъ рѣшеніе каждой задачи доводится по возможности до конца, и на основаніи полученнаго отвѣта дѣлается часто то или иное заключеніе. Другое отличіе курса состоитъ въ томъ, что матеріалъ распредѣленъ не въ обычномъ систематическомъ порядкѣ: кинематика, статика, динамика, а концентрически: въ первую часть вошли вопросы изъ разныхъ отдѣловъ механики, но такіе, которые требуютъ лишь самаго элементарнаго знакомства съ основными механическими понятіями и допускаютъ полное рѣшеніе безъ обращенія къ общимъ уравненіямъ. Выводу этихъ общихъ уравненій, ихъ разъясненію и толкованію примѣнительно къ техникѣ посвящена 2-ая часть.

Признавая громадное вліяніе техники на современную жизнь, авторъ полагаетъ, что знакомство съ основными законами дѣйствія машинъ полезно не только лицамъ, работающимъ спеціально въ области техники, но и всякому образованному человѣку. Вслѣдствіе этого авторъ при составленіи своего курса имѣлъ въ виду интересы широкаго круга читателей.

А. Киселевъ. *Элементарная физика для среднихъ учебныхъ заведеній;* со многими упражненіями и задачами, въ двухъ выпускахъ. Изданіе 11-ое, 1913 г. Цѣна 1-го выпуска 1 руб., 2-го выпуска 1 руб. 40 к.

Въ одиннадцатомъ изданіи, помимо многихъ редакціонныхъ исправленій и улучшеній, сдѣланы нѣкоторыя добавленія, частью съ цѣлью выполнить требованія учебныхъ программъ (главнымъ образомъ, реальныхъ училищъ), частью съ цѣлью удовлетворить запросы любознательныхъ учениковъ. Укажемъ главнѣйшія изъ этихъ добавленій.

Въ концѣ § 91 — объясненіе формы мениска при смачиваніи и несмачиваніи твердаго тѣла жидкостью. § 94,*a* — поверхностный слой и поверхностное натяженіе. Въ концѣ § 118 — замѣчаніе объ управляемыхъ воздушныхъ шарахъ и аэропланахъ. § 120,*a* — понятіе о кинетической теоріи газовъ. Въ концѣ § 176 — замѣчаніе о гигроскопахъ вообще и гигроскопѣ Соссюра въ частности. Въ концѣ § 201 (фонографъ) — понятіе объ устройствѣ граммофона. Въ § 310 — описаніе элементовъ Грене и Лекланше и понятіе о «сухихъ» элементахъ. § 320,*a* — амперметръ и вольтметръ. Въ концѣ § 335 — замѣчаніе о пламенныхъ дугахъ. § 370,*a* — ускореніе при неравномѣрно-перемѣнномъ движеніи. § 370,*b* — ускореніе при криволинейномъ движеніи. § 386,*a* — выводъ величины центростремительной силы. § 404,*a* — работа равнодѣйствующей.

Указанныя добавленія снабжены новыми чертежами и рисунками.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей приватъ-доцента **Е. Л. Буницкаго.**

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 90 (6 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$x^2 = y(z + a),$$

$$y^2 = z(x + b),$$

$$z^2 = x(y + c)$$

при условіи

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 0.$$

Е. Григорьевъ (Саратовъ).

№ 91 (6 сер.). Построить треугольникъ ABC, зная радіусъ описаннаго круга R, внутреннюю биссектрису l угла A и разность $B - C = \delta$ угловъ при основаніи.

Л. Богдановичъ (Н.-Новгородъ).

№ 92 (6 сер). Доказать равенство

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = C_{n+1}^2 + 2\,(C_n^2 + C_{n-1}^2 + \cdots + C_2^2),$$

гдѣ C — символъ числа сочетаній.

А. Кисловъ (Москва).

№ 93 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x - 15 = 0.$$

Л. Закутинскій (Черкассы).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 53 (6 сер.). *Найти предѣлъ выраженія*

$$\frac{\cos(4n+1)x-\sin(4n+1)x}{\cos x-\sin x}$$

при $x=\frac{\pi}{4}$.

(Заимств. изъ *Journal des Mathématiques élémentaires*).

Полагая $(4n+1)x=y$, преобразуемъ данное выраженіе слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{\cos(4n+1)x-\sin(4n+1)x}{\cos x-\sin x}=\frac{\cos y-\sin y}{\cos x-\sin x}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)-\sin y}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin x}=$$

$$=\frac{2\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)}{2\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{\sin\left(-4nx+\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)},$$

Такъ какъ $\sin z$ есть непрерывная функція своего аргумента, то

$$\lim_{x=\frac{\pi}{4}}\sin\left(-4nx+\frac{\pi}{4}-x\right)=\sin\left(-4n\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin n\pi,$$

$$\lim_{x=\frac{\pi}{4}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sin 0=0.$$

Если n не есть цѣлое число, то $\sin n\pi\neq 0$, и числитель даннаго выраженія стремится къ предѣлу, отличному отъ нуля, а знаменатель—къ предѣлу, равному нулю, а потому все выраженіе, при безграничномъ приближеніи x къ $\frac{\pi}{4}$, стремится къ безконечности. Если же n — цѣлое число, то преобразуемъ числителя $\sin\left(-4nx+\frac{\pi}{4}-x\right)$ такъ:

$$-4nx+\frac{\pi}{4}-x=-n\pi+n\pi-4nx+\frac{\pi}{4}-x=-n\pi+4n\cdot\frac{\pi}{4}-4nx+\frac{\pi}{4}-x=$$

$$=-n\pi+\left[4n\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\frac{\pi}{4}-x\right]=-n\pi+(4n+1)\left(\frac{\pi}{4}-x\right),$$

откуда

$$\sin\left(-4nx+\frac{\pi}{4}-x\right)=\sin\left[-n\pi+(4n+1)\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]=$$

$$=(-1)^n\sin\left[(4n+1)\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right].$$

Итакъ, при n цѣломъ имѣемъ, полагая $\frac{\pi}{4} - x = z$:

$$\frac{\cos(4n+1)x - \sin(4n+1)x}{\cos x - \sin x} = (-1)^n \frac{\sin(4n+1)z}{\sin z} =$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{\sin(4n+1)z}{(4n+1)z} \cdot (4n+1) \cdot \frac{z}{\sin z}.$$

Когда x стремится къ предѣлу $\frac{\pi}{4}$, z стремится къ нулю, а потому каждое изъ отношеній $\frac{z}{\sin z}$ и $\frac{\sin(4n+1)z}{(4n+1)z}$ имѣетъ предѣломъ, по извѣстной теоремѣ, единицу. Поэтому

$$\lim_{x=\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(4n+1)x - \sin(4n+1)x}{\cos x - \sin x} =$$

$$= (-1)^n \cdot (4n+1) \lim_{z=0} \frac{z}{\sin z} \cdot \lim_{z=0} \frac{\sin(4n+1)z}{(4n+1)z} = (-1)^n \cdot (4n+1).$$

Н. Нейцъ (Самара); *L. Sivian* (Ithaca); *И. Зюзинъ* (с. Архангельское); *В. Бродисъ* (Псковъ); *Н. Кирьяновъ* (Петербургъ).

№ 64 (6 сер). *Доказать, что число*

$$2^{n+5}\, 3^{4n} + 5^{3n+1}$$

при n *цѣломъ и неотрицательномъ кратно* 37.

Преобразуемъ данное выраженіе слѣдующимъ образомъ:

$$2^{n+5} . 3^{4n} + 5^{3n+1} = 2^5 . 2^n . (3^4)^n + 5 . (5^3)^n = 2^5 . (2 . 3^4)^n + 5 . 125^n =$$

$$= 2^5 . 162^n + 5 . 125^n = 32(162^n - 125^n) + 37 . 125^n.$$

Первый членъ послѣдняго выраженія дѣлится при n цѣломъ и неотрицательномъ на $(162 - 125)$, т. е. на 37, и второй членъ тоже кратенъ 37. Значитъ и данное выраженіе при n цѣломъ и неотрицательномъ дѣлится на n.

Д. Синцовъ (Харьковъ); *Л. Моргулисъ* (Петербургъ); *И. Зюзинъ* (с. Архангельское); *А. Кисловъ* (Москва); *Н. Нейцъ* (Самара); *Н. Кирьяновъ* (Петербургъ); *А Сердобинскій* (Чита).

№ 68 (6 сер). *Доказать равенство*

$$\frac{1^2 . 3^2 . 5^2 \ldots (2n-1)^2}{1 . 2 . 3 \ldots (2n+1)} = \frac{1 . 3 . 5 \ldots (2n-1)}{(1 . 2 . 3 \ldots n) . (2n+1) . 2^n}.$$

(Заимств. изъ *Journal des Mathématiques élémentaires*).

Провѣримъ это равенство, какъ пропорцію, составивъ произведеніе крайнихъ и среднихъ ея членовъ. Тогда, преобразовывая произведеніе крайнихъ, имѣемъ

$$1^2 \,.\, 3^2 \,.\, 5^2 \ldots (2n-1)^2 \,.\, (1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n) \,.\, (2n+1) \,.\, 2^n =$$

$$= 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-1)\,[1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-1)(2n+1)] \,.\, [(1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n) \,.\, 2^n] =$$

$$= 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-1) \,.\, [1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-1)(2n+1)] \,.\, (2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots 2n) =$$

$$= 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-1) \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (2n+1).$$

Послѣднее выраженіе есть произведеніе среднихъ членовъ данной пропорціи, а потому она вѣрна.

Д. Синцовъ (Харьковъ); *И. Зюзинъ* (с. Архангельское); *А. Кисловъ* (Москва); *N. N.*

№ 72 (6 сер.). *Найти цѣлыя значенія числа* p, *при которыхъ уравненіе*

$$x^2 + px - 3p = 0$$

имѣетъ цѣлые корни.

Для того, чтобы корни даннаго уравненія, а именно:

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 12p}}{2},$$

были цѣлыми, необходимо, чтобы цѣлое число $p^2 + 12p$ было точнымъ квадратомъ, т. е. квадратомъ нѣкотораго цѣлаго числа y. Итакъ, необходимо, чтобы число p удовлетворяло при y цѣломъ равенству

$$p^2 + 12p = y^2,$$

которое можно преобразовать къ виду

$$(p+6)^2 - y^2 = 36, \quad \text{или} \quad (p+6+y)(p+6-y) = 36.$$

Изъ послѣдняго равенства слѣдуетъ, что $(p+6+y)$ есть одинъ изъ дѣлителей числа 36, а $(p+6-y)$ — частное, отъ дѣленія 36 на этого дѣлителя.

Итакъ:

$$(1) \qquad p + 6 + y = d, \quad p + 6 - y = \frac{36}{d},$$

гдѣ d — одинъ изъ дѣлителей числа 36. Сложивъ равенства (1) и раздѣливъ результатъ на 2, имѣемъ:

$$(2) \qquad p + 6 = \frac{d + \dfrac{36}{d}}{2}.$$

Такъ какъ p есть число цѣлое, то и правая часть равенства (2) должна быть числомъ цѣлымъ; путемъ испытанія всѣхъ дѣлителей числа 36 приходимъ къ заключенію, что лишь дѣлители 2, (— 2), 6, (— 6) удовлетворяютъ этому требованію. Подставляя этихъ дѣлителей въ равенство (2), находимъ изъ него слѣдующія цѣлыя значенія, которыя можетъ принимать p: $p = 4, -16, 0, -12$. Испытывая эти значенія p, получимъ четыре квадратныхъ уравненія вида $x^2 + px - 3p = 0$, а именно:

$$x^2 + 4x - 12 = 0, \quad x^2 - 16x + 48 = 0, \quad x^2 = 0, \quad x^2 - 12x + 36 = 0,$$

каждое изъ которыхъ имѣетъ дѣйствительно цѣлые корни, какъ это легко провѣрить. Итакъ, числа 4, — 16, 0, — 12 даютъ всѣ искомыя значенія p.

В. Маловичко (Херсонъ); *Н. Кирьяновъ* (Петербургъ); *Р. Витвинскій* (Тирасполь).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

I. Perrin. *Броуновское движеніе и дѣйствительность молекулъ.* Переводъ Я. Безиковича подъ редакціей профессора С.-Петербургскаго Университета Н. А. Булгакова. СПб, 1912. Стр. 102. Ц. 75 к.

А. Киселевъ. *Элементарная геометрія для среднихъ учебныхъ заведеній.* Съ приложеніемъ большого количества упражненій и статьи: „Главнѣйшіе методы рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе". Изданіе 22-ое, В. В. Думнова. Москва, 1913. Стр. XII + 392. Ц. 1 р. 30 к.

Его же. *Элементарная алгебра.* Изданіе 25-ое, В. В. Думнова. Москва, 1913. Стр. X + 437. Ц. 1 р. 30 к.

Д. Селивановъ. *Курсъ введенія въ анализъ.* СПб., 1913. Стр. 272. Ц. 2 р. 50 к.

В. Рамзай, профессоръ. *Элементы и энергія.* Переводъ съ англійскаго С. А. Алексѣева. Изданіе кн-ва „Физикъ". СПб., 1913. Стр. 36. Ц. 25 к.

Р. Я. Вейцманъ, преподаватель коммерческихъ учебныхъ заведеній. *Сокращенные пріемы вычисленій.* Изданіе 2-ое, кн-ва „Библіотека коммерческихъ знаній". Одесса, 1913. Стр. II + 29. Ц. 35 к.

Н. Соколовъ. *Ариѳметика.* Руководство для среднихъ учебныхъ заведеній и самостоятельнаго изученія. Изданіе т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1913. Стр. 232. Ц. 50 к.

Физико-математическій Сборникъ. № 4. Изданіе Кавказскаго Учебнаго Округа. Тифлисъ, 1913. Стр. 170. Ц. 50 к. Приложеніе. *Отдѣлъ для учащихся.* Стр. 13.

Записки Математическаго Кружка при Оренбургскомъ Реальномъ Училищѣ. № 8. Первая половина $19^{12}/_{13}$ учебнаго года. Оренбургъ, 1913. Стр. 58. Ц. 50 к.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
ищется

Обложка
ищется