Обложка
пщется

Обложка
ищется

XLIX Сем. № 2.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 578.

О природѣ тепла.

Проф. Г. Л. Каллендара.

Во всякомъ отдѣлѣ физики представляется полезнымъ время отъ времени подвергать основы его болѣе глубокой провѣркѣ, съ тѣмъ чтобы установить, насколько онѣ воздвигнуты на непосредственныхъ данныхъ опыта и насколько онѣ были развиты изъ динамическихъ аналогій. Эти послѣднія могутъ до извѣстнаго предѣла представлять результаты экспериментальныхъ изслѣдованій, но, если держаться ихъ и за этимъ предѣломъ, онѣ могутъ вести къ ложнымъ заключеніямъ.

Я собираюсь въ настоящей статьѣ разсмотрѣть нѣкоторыя изъ нашихъ основныхъ идей, касающихся теоріи тепла, и въ особенности показать, что имѣетъ смыслъ ввести въ нашу современную теорію нѣкоторыя идеи старой калорической теоріи, или теоріи теплорода (caloric theory), которая такъ долго была забыта и дискредитирована. Многимъ можетъ показаться, что этимъ самымъ я дѣлаю шагъ назадъ, такъ какъ калорическую теорію обыкновенно представляютъ себѣ, какъ существенно противоположную кинетической теоріи и закону сохраненія энергіи. Поэтому я хотѣлъ бы съ самаго начала указать на то, что такое представленіе вовсе не является необходимымъ, при томъ условіи, конечно, что теорія правильно толкуется и примѣняется въ согласіи съ опытомъ. Ошибки случались на почвѣ и той и другой теоріи, но установившееся обыкновеніе подчеркивать всѣ неудачи, происшедшія при примѣненіи калорической теоріи, и противоставлять ихъ правильнымъ выводамъ изъ кинетической теоріи породило совершенно неправильное впечатлѣніе, будто въ самой основѣ калорической теоріи лежитъ какая-то ошибка и будто она по самой природѣ своей неспособна дать правильный отчетъ о фактахъ. Я попытаюсь показать, что этотъ мнимый антагонизмъ между двумя теоріями не имѣетъ въ дѣйствительности реальнаго основанія. Ихъ слѣдуетъ разсматривать скорѣе, какъ различные способы описанія однихъ и тѣхъ же явленій. Ни одна изъ нихъ не является законченной безъ другой. Кинетическая теорія вообще удобнѣе для элементарнаго изложенія, и въ этомъ отношеніи она и примѣняется почти исключительно; но во многихъ случаяхъ калорическая теорія имѣла бы то преимущество, что она съ самаго начала выдвинула бы важность основныхъ фактовъ, которые очень часто затемняются господствующимъ методомъ изложенія.

Объясненіе образованія тепла при треніи было однимъ изъ первыхъ затрудненій, съ которыми встрѣтилась калорическая теорія. Одно изъ объясненій, котораго держались Кавендишъ (Cavendisch) и другіе, состояло просто въ томъ, что при треніи теплородъ возникаетъ заново приблизительно такъ же, какъ и электричество. Согласно другому, болѣе распространенному взгляду обломки твердаго тѣла, срѣзанные при такихъ процессахъ, какъ, напримѣръ, сверленіе пушекъ, имѣютъ меньшую теплоемкость, чѣмъ первоначальное вещество. Предполагалось, что при этомъ уже существующій въ тѣлѣ теплородъ какъ бы вытѣсняется или выдавливается изъ него, и никакого вполнѣ новаго теплорода въ дѣйствительности не возникаетъ. Возможность второго объясненія была опровергнута знаменитыми опытами Румфорда (Rumford) и Деви (Davy), которые привели къ заключенію, что треніе не уменьшаетъ теплоемкости тѣлъ, и что тепло не можетъ быть матеріальной субстанціей, такъ какъ при помощи тренія оно можетъ быть получено въ количествѣ, повидимому, неограниченномъ. Румфордъ показалъ также, что при помощи самыхъ чувствительныхъ приборовъ, какіе только существовали въ его время, не удается замѣтить ни малѣйшаго увеличенія въ вѣсѣ нагрѣтаго тѣла. Теплородъ очевидно, не могъ, обладать въ сколько-нибудь замѣтной степени свойствами обыкновенной вѣсомой жидкости; и если его дѣйствительно слѣдовало считать чѣмъ-то реально существующимъ, а не только удобной математической фикціей, то онъ долженъ былъ быть чѣмъ-то въ родѣ электрическихъ жидкостей, которыя тогда уже играли важную роль въ описаніи явленій, хотя ихъ дѣйствительное существованіе, какъ физическихъ субстанцій, и не было доказано. Теплота, какъ утверждали Румфордъ и Деви, можетъ быть просто особымъ видомъ движенія или колебанія мельчайшихъ частицъ вещества; но въ такой формѣ эта мысль была еще слишкомъ неопредѣленна для того, чтобы послужить основой для измѣреній или вычисленій. Простое представленіе о теплородѣ, какъ о нѣкоторомъ доступномъ измѣренію количествѣ „чего-то", было достаточно для многихъ цѣлей и въ рукахъ Лапласа (Laplace) и другихъ привело къ правильнымъ результатамъ въ опредѣленіи отношенія удѣльныхъ теплотъ газовъ, адіабатическаго уравненія и другихъ основныхъ теоретическихъ вопросовъ, хотя многія проблемы, связанныя съ отношеніемъ между теплотой и работой, оставались еще невыясненными.

Самое важное, что дала калорическая теорія въ области термодинамики, это — безсмертныя „Размышленія о движущей силѣ огня" Карно (Carnot, — „Sur la puissance motrice du feu", Paris 1824). То незаслуженное недовѣріе, съ которымъ относятся теперь къ калорической теоріи, лучше всего иллюстрируется именно тѣмъ, что это произведеніе, являющееся основой современной термодинамики, все еще неправильно толкуется, и его способы доказательства оспариваются только на томъ основаніи, что большинство ихъ изложены на языкѣ калорической теоріи. Чтобы воздать должное Карно, я напомню въ существенныхъ чертахъ ходъ мыслей въ его разсужденіи, хотя бы это повтореніе всѣмъ извѣстнаго и показалось даже утомительнымъ; это послужитъ кстати лучшимъ введеніемъ къ уясненію понятія о теплородѣ и покажетъ, какимъ образомъ количество теплорода можетъ быть измѣряемо.

Въ тѣ времена, когда писалъ Карно, роль паровой машины въ промышленности уже вполнѣ опредѣлилась, и экономичность „работы расширенія" была всѣми признана*). Воздушная машина**) и примитивная форма двигателя внутренняго сгоранія были недавно изобрѣтены. Принимая во вниманіе большую скрытую теплоту водяного пара, предполагали, что, можетъ быть, удастся получить бо́льшую работу изъ того же количества тепла или, что все равно, топлива, если примѣнить вмѣсто пара какое-нибудь другое рабочее вещество, напримѣръ, спиртъ или эѳиръ. Карно поставилъ себѣ задачей изслѣдовать, при какихъ условіяхъ изъ тепла можетъ быть получена „движущая сила", чѣмъ ограничено полезное дѣйствіе тепловой машины, и можно ли ожидать, что другія вещества окажутся выгоднѣе водяного пара. Все это были вопросы, имѣющіе непосредственное практическое значеніе лишь для инженера; но отвѣтъ на нихъ, найденный Карно, захватываетъ всю теоретическую науку въ ея стремленіи къ вѣчному расширенію.

---

*) „Работу расширенія" слѣдуетъ отличать отъ „работы впуска". Дѣло въ томъ, что оказывается выгоднымъ прекращать доступъ пара въ цилиндръ, прежде чѣмъ поршень сдѣлаетъ полный ходъ; такимъ образомъ, первая половина хода совершается давленіемъ свѣжаго пара, все время подходящаго изъ котла („работа впуска"), вторая половина — давленіемъ пара, оказавшагося въ цилиндрѣ послѣ прекращенія впуска и продолжающаго расширяться („работа расширенія"). Экономія состоитъ въ томъ, что при такомъ устройствѣ можно полнѣе использовать энергію пара (выпускаемый паръ имѣетъ въ этомъ случаѣ болѣе низкую температуру и меньшую упругость), для выполненія той же работы требуется меньшее количество пара, а, слѣдовательно, и меньшее количество топлива.

Прим. пер.

**) Машина, работающая вмѣсто пара нагрѣтымъ воздухомъ.

Прим. пер.

Разсматривая образованіе работы изъ тепла, необходимо, какъ указалъ Карно, изучать полные ряды, или циклы процессовъ, при которыхъ рабочее вещество и всѣ части машины по завершеніи цикла возвращаются къ своему первоначальному состоянію. При этомъ предполагается, что мы не доставляемъ машинѣ ничего, кромѣ теплоты или ея эквивалента — топлива, ибо въ противномъ случаѣ часть движущей силы могла бы возникнуть не изъ теплоты, а благодаря какому-нибудь измѣненію рабочаго вещества или расположенія частей машины. Карно слѣдующимъ образомъ формулируетъ основную аксіому циклическаго процесса: Если какое-нибудь тѣло подвергается нѣкоторымъ измѣненіямъ и послѣ опредѣленнаго ряда превращеній возвращается вполнѣ къ своему первоначальному виду въ смыслѣ плотности, температуры и аггрегатнаго состоянія, то оно должно содержать такое же количество тепла, какое оно содержало первоначально". Это положеніе нисколько не ограничиваетъ примѣненія теоріи на практикѣ, такъ какъ во всѣхъ машинахъ повторяются правильные ряды процессовъ, теоретически могущіе быть сведенными къ одному эквивалентному циклу, въ теченіе котораго все возвращается къ своему первоначальному состоянію.

Наиболѣе существенная черта въ работѣ всѣхъ тепловыхъ машинъ, оставляя въ сторонѣ всякія детали въ ихъ устройствѣ, состоитъ въ томъ, что источникомъ движущей силы служитъ въ нихъ попеременное расширеніе и сжатіе или соотвѣтствующее нагрѣваніе и охлажденіе рабочаго вещества. Отсюда вытекаетъ необходимость существованія разности температуръ (обусловловленной горѣніемъ топлива или какъ-нибудь иначе) между двумя тѣлами — нагрѣвателемъ и охладителемъ, — въ частности, котломъ и холодильникомъ паровой машины, — изъ которыхъ первое отдаетъ, а второе получаетъ тепло. Гдѣ бы ни существовала разность температуръ, она можетъ стать источникомъ движущей силы (работы) и наоборотъ; безъ разности температуръ никакая движущая сила (работа) не можетъ быть получена изъ тепла путемъ циклическаго или непрерывнаго процесса. Изъ этихъ соображеній Карно выводитъ простое, но достаточное правило для полученія максимальной производительности машины: „Для того, чтобы получить максимальную производительность, необходимо, чтобы въ употребляемомъ процессѣ не было непосредственнаго теплового обмѣна между двумя тѣлами съ замѣтно различной температурой". Прямой обмѣнъ тепла между двумя тѣлами съ замѣтно различной температурой соотвѣтствовалъ бы потерѣ нѣкоторой разности температуръ, которая могла бы быть использована для полученія движущей силы. Равенство температуръ предполагается здѣсь, какъ предѣльное условіе термическаго равновѣсія, такъ что даже безконечно малая разность температуръ достаточна для того, чтобы обусловить переходъ тепла въ нѣкоторомъ направленіи. Машина, удовлетворяющая правилу Карно, была бы обратимой, поскольку рѣчь идетъ о термическихъ процессахъ. Карно пользуется этимъ свойствомъ обратимости въ своемъ формальномъ доказательствѣ того, что такая машина обладаетъ максимальной производительностью. Положимъ, что при обыкновенномъ или прямомъ способѣ работы такая машина получаетъ изъ нагрѣвателя количество тепла Q, отдаетъ его охладителю и даетъ при каждомъ циклѣ количество полезной работы W; если эту машину обратить и сообщить ей въ теченіе одного цикла движущую силу W, то она возьметъ въ предѣлѣ то же самое количество тепла изъ охладителя, какое она раньше отдала ему и возвратитъ нагрѣвателю то же самое количество тепла Q, какое она получила изъ него при прямой работѣ. Всѣ такія (обратимыя) машины должны давать и одно и то же полезное дѣйствіе, измѣряемое отношеніемъ W/Q произведенной работы къ количеству тепла, полученному изъ нагрѣвателя, каково бы ни было рабочее вещество, предполагая лишь, что онѣ работаютъ въ однихъ и тѣхъ же предѣлахъ темепратуры. Ибо въ противномъ случаѣ теоретически было бы возможно при помощи болѣе производительной машины привести въ обратное дѣйствіе другую, менѣе производительную обратимую машину, вернуть въ нагрѣватель все количество тепла, полученное изъ него, и произвести нѣкоторое количество полезной работы безъ затраты топлива — результатъ, достаточно невѣроятный для того, чтобы его можно было принять за основаніе для формальнаго доказательства. Карно выводитъ такимъ образомъ свой знаменитый принципъ, который онъ формулируетъ слѣдующимъ образомъ: „Движущая сила, которую можно получить изъ тепла, не зависитъ отъ того, какимъ способомъ она получается. Количество ея опредѣляется только предѣлами температуръ, между которыми происходитъ переносъ тепла“.

Противъ доказательства Карно обычно выдвигается возраженіе на томъ основаніи, что разсматриваемая имъ комбинація можетъ произвести полезную работу, не нарушая принципа сохраненія энергіи, или образуя то, что мы понимаемъ теперь въ механикѣ, какъ „perpetuum-mobile“ перваго рода. Теперь стало обычнымъ явленіемъ вводить сохраненіе энергіи въ ходъ доказательства, а въ концѣ-концовъ ссылаться на какую-нибудь добавочную аксіому. Всякое доказательство такого рода всегда будетъ до извѣстной степени дѣломъ вкуса; но такъ какъ принципъ Карно не можетъ быть выведенъ изъ одного только принципа сохраненія энергіи, то, повидимому, не слѣдуетъ и усложнять доказательства ссылкой на него. Въ данномъ же частномъ случаѣ абсурдность тепловой машины, работающей безъ топлива, представляетъ, повидимому, наиболѣе подходящую несообразность, на какую можно сослаться. Во всякомъ случаѣ, окончательное рѣшеніе принадлежитъ опыту. Въ настоящее время экспериментальное подтвержденіе принципа Карно въ его самомъ широкомъ приложеніи настолько перевѣшиваетъ значеніе любого дедуктивнаго доказательства, что мы можемъ удовлетвориться той логикой, которая удовлетворяла Карно, вмѣсто того, чтобы затемнять значеніе вывода, оспаривая его доказательство.

Самъ Карно пытался всѣми возможными способами экспериментально провѣрить свой принципъ, поскольку это позволяли скудныя данныя, имѣвшіяся въ его время. Онъ сдѣлалъ также нѣсколько важныхъ выводовъ, которые противорѣчили общепринятымъ въ то время взглядамъ, но впослѣдствіи были вполнѣ точно провѣрены. Повидимому, онъ пришелъ къ этимъ результатамъ аналитически, какъ это видно изъ его примѣчаній, въ текстѣ же онъ перевелъ свои уравненія на языкъ словъ, имѣя въ виду читателей-нематематиковъ. Поэтому нѣкоторые изъ его очень важныхъ выводовъ прошли, повидимому, незамѣченными или были приписаны другимъ. Благодаря недостатку точныхъ свѣдѣній о свойствахъ тѣлъ въ широкихъ предѣлахъ температуры онъ не могъ прямо примѣнить свой принципъ въ его общей формѣ къ любымъ предѣламъ температуры. Это затрудненіе, правда, въ меньшей степени существуетъ еще и теперь. Карно показалъ, во всякомъ случаѣ, что примѣненіе его теоріи значительно упрощается, если разсматривать циклическій процессъ въ безконечно малыхъ предѣлахъ при любой температурѣ t. Въ этомъ простомъ случаѣ принципъ эквивалентенъ утвержденію, что работа, получаемая изъ единицы тепла при паденіи на одинъ градусъ (или при ширинѣ цикла въ одинъ градусъ) при температурѣ t, есть нѣкоторая функція $F'(t)$ отъ температуры (извѣстная подъ названіемъ функціи Карно), которая при одной и той же температурѣ должна имѣть одно и то же значеніе для всѣхъ веществъ. Изъ тѣхъ неточныхъ данныхъ, которыми онъ располагалъ относительно свойствъ водяного пара, спирта и воздуха, онъ имѣлъ возможность опредѣлить численныя значенія этой функціи въ килограмметрахъ работы на большую калорію теплоты при различныхъ температурахъ между 0^0 и 100^0 Ц. и п оказать, что эти значенія въ предѣлахъ ошибокъ наблюденія были почти одинаковы для различныхъ веществъ при той же температурѣ. Для паровъ спирта при температурѣ кипѣнія ($78^0,7$ Ц.) онъ получилъ значеніе $F'(t) = 1{,}230$ *кгм.* на килокалорію при одномъ градусѣ паденія температуры. Для водяного пара при той же температурѣ онъ получилъ почти то же самое значеніе, а именно $F'(t) = 1{,}212$. Такимъ образомъ, употребляя пары спирта вмѣсто водяного пара, мы ничего не выиграли бы въ коэффиціентѣ полезнаго дѣйствія. Онъ показалъ также, что работа, которую можно получить изъ одной килокалоріи при паденіи температуры на одинъ градусъ, повидимому, уменьшается съ повышеніемъ температуры, но его данныя не были достаточно точны, чтобы вывести изъ нихъ законъ измѣненія.

Уравненіе, которымъ пользовался Карно для нахожденія численныхъ значеній своей функціи по экспериментальнымъ даннымъ для спирта и водяного пара, является просто прямымъ выраженіемъ его принципа въ примѣненіи къ насыщающему пару. Теперь оно извѣстно всѣмъ подъ именемъ уравненія Клапейрона, такъ какъ Карно не придалъ самому уравненію алгебраической формы, хотя принципъ и детали вычисленій описаны у него самымъ точнымъ и подробнымъ образомъ. Вычисляя значеніе своей функціи для воздуха, Карно пользовался извѣстнымъ значеніемъ разности удѣльной теплоемкости при постоянномъ давленіи и при постоянномъ объемѣ. Онъ показалъ, что эта разность должна имѣть то же самое значеніе для одинаковыхъ объемовъ всѣхъ газовъ, взятыхъ при одинаковомъ давленіи и одинаковой температурѣ, между тѣмъ какъ до него всѣми принималось, что отношеніе (а не разность) удѣльныхъ теплоемкостей одинаково для различныхъ газовъ. Онъ далъ также общее выраженіе для теплоты, поглощаемой газомъ, расширяющимся при постоянной температурѣ, и показалъ, что она должна находиться въ постоянномъ отношеніи къ работѣ расширенія. Эти результаты были экспериментально установлены спустя нѣсколько лѣтъ отчасти Дюлонгомъ (Dulong) и въ болѣе полномъ видѣ Джаулемъ (Joule), теоретическое же предсказаніе Карно прошло незамѣченнымъ, несмотря на его величайшій интересъ и важность. Основаніе для такого отношенія заключается, повидимому, въ томъ фактѣ, что выраженія Карно заключали въ себѣ неизвѣстную функцію $F'(t)$ отъ температуры, при чемъ форма этой функціи не могла быть опредѣлена безъ нѣкоторыхъ предположеній относительно природы тепла и шкалы для измѣренія температуры.

Мнѣ удалось показать нѣсколько лѣтъ тому назадъ, что самъ Карно въ дѣйствительности далъ правильное рѣшеніе этой основной проблемы въ одномъ изъ своихъ наиболѣе важныхъ примѣчаній, гдѣ оно лежало погребеннымъ и незамѣченнымъ въ теченіе больше, чѣмъ восьмидесяти лѣтъ. Онъ показалъ, примѣняя самымъ непосредственнымъ образомъ калорическую теорію, что если измѣрять температуру по шкалѣ совершеннаго газа (теперь это является уже общепринятымъ), то значеніе его функціи $F'(t)$ по калорической теоріи будетъ одно и то же при всѣхъ температурахъ и можетъ быть представлено просто числовой постоянной A (нашъ „механическій эквивалентъ"), зависящей отъ единицъ, принятыхъ для измѣренія работы и теплоты. Другими словами, работа W, произведенная количествомъ теплорода Q въ циклѣ Карно въ температурныхъ предѣлахъ отъ T до T_0 по газовой шкалѣ, выражается простымъ уравненіемъ:

$$W = AQ(T - T_0).$$

Очевидно, что это рѣшеніе, полученное Карно изъ калорической теоріи, не только не оказывается несовмѣстимымъ съ механической теоріей тепла, но является какъ разъ прямымъ выраженіемъ закона сохраненія энергіи въ примѣненіи къ циклу Карно. Если взять за нижній предѣлъ T_0 цикла Карно абсолютный нуль газоваго термометра, то мы получаемъ, что максимальное количество работы, могущее быть полученнымъ изъ количества теплорода Q при температурѣ T, равно просто AQT; это выраженіе представляетъ абсолютное значеніе энергіи, заключающейся въ теплородѣ, взятомъ изъ нагрѣвателя при температурѣ T. Энергія теплорода, уходящаго (изъ машины) при температурѣ T_0, равна AQT. Полученная внѣшняя работа равна разности между количествами тепловой энергіи, введенной въ машину и ушедшей изъ нея въ данномъ циклѣ.

При истолкованіи этого уравненія самъ Карно употребилъ ставшее съ тѣхъ поръ обычнымъ сравненіе съ водопадомъ. Мы можемъ сказать, что теплородъ получаетъ движущую силу или энергію благогодаря повышенію температуры совершенно такъ же, какъ вода получаетъ свою движущую силу благодаря увеличенію высоты паденія или давленія. Предѣлъ движущей силы, могущей быть полученной при помощи обратимаго мотора, въ обоихъ случаяхъ является прямо пропорціональнымъ высотѣ „паденія“, измѣренной по какой нибудь подходящей шкалѣ. Самъ теплородъ не есть движущая сила, на него слѣдуетъ смотрѣть просто, какъ на носителя энергіи, при чемъ полученіе движущей силы изъ теплорода существенно зависитъ (какъ выражается Карно) не отъ дѣйствительнаго поглощенія теплорода, а отъ паденія температуры, которое можно произвести. Мѣрой количества теплорода является работа, произведенная при паденіи температуры на одинъ градусъ; соотвѣтственно съ этимъ можно было бы измѣрять количество воды вѣсомъ, т. е. килограмметрами на метръ паденія.

Правда, Карно не прослѣдилъ этой аналогіи дальше и не вывелъ всей механической теоріи тепла изъ калорической теоріи; но это не покажется намъ удивительнымъ, если мы вспомнимъ, что въ то время не было еще примѣненія принципа сохраненія энергіи ни въ одномъ отдѣлѣ физики. Но позднѣе онъ, повидимому, подходилъ къ общему принципу; такъ, онъ утверждаетъ, напримѣръ, что „движущая сила (выраженіе, соотвѣтствующее нашимъ терминамъ—работа или энергія) измѣняетъ свою форму, но никогда не уничтожается“. Изъ его посмертныхъ замѣтокъ, содержащихъ проекты экспериментальныхъ работъ, ясно, что онъ вполнѣ понималъ, какъ много еще оставалось сдѣлать въ области эксперимента, особенно относительно полученія теплорода при треніи и потери движущей силы черезъ теплопроводность, которая казалась ему (1824) „почти необъяснимой при современномъ состояніи теоріи тепла“.

Слѣдующее обстоятельство больше всего смущало Карно: теоретическій результатъ, что работа, получаемая изъ нѣкотораго количества теплорода, прямо пропорціональна паденію температуры, необходимо приводитъ къ тому, что удѣльная теплоемкость совершеннаго газа должна быть независимой отъ давленія. Это не согласовалось съ общепринятымъ въ то время, мнѣніемъ и съ единственнымъ произведеннымъ до того времени опытомъ Делароша (Delaroche) и Берара (Bérard), согласно которому удѣльная теплоемкость газа должна была уменьшаться съ возрастаніемъ давленія и который былъ объясненъ Лапласомъ, какъ естественное слѣдствіе калорической теоріи. Карно показалъ, что этотъ результатъ не вытекаетъ необходимо изъ калорической теоріи, но вопросъ былъ окончательно рѣшенъ въ его пользу лишь опытами Реньо (Regnault), опубликованными впервые въ 1852 г., которые установили точныя значенія удѣльной теплоемкости газовъ и доказали, что онѣ практически не зависятъ отъ давленія.

Другой пунктъ, смущавшій Карно, состоялъ въ томъ, что согласно его вычисленіямъ движущая сила, могущая быть полученной изъ одной большой калоріи тепла при паденіи температуры на одинъ градусъ, повидимому, уменьшалась съ повышеніемъ температуры, вмѣсто того, чтобы оставаться постоянной. Это могло зависѣть отъ ошибокъ наблюденія, такъ какъ данныя были очень ненадежны. Но если бы преждевременная смерть не помѣшала ему выполнить проектированные имъ эксперименты относительно количества движущей силы, требуемой для производства одной единицы тепла, и если бы онъ получилъ результатъ, найденный впослѣдствіи Джаулемъ, а именно, 424 килограмметра на большую калорію, то онъ не могъ бы не замѣтить, что это было то же самое (въ предѣлахъ ошибокъ наблюденія), что и максимальная работа AQT, которую можно получить изъ одной большой калоріи согласно его уравненію. (Это станетъ очевиднымъ, если значенія, вычисленныя Карно для паденія на одинъ градусъ при различныхъ температурахъ, помножить на соотвѣтствующія абсолютныя температуры. Напримѣръ, паръ при 79° Ц. или 352° абсолютной температуры даетъ 1,212 килограмметровъ на паденіе въ одинъ градусъ; $1{,}212 \times 352 = 426$ килограмметровъ). Причина видимаго разногласія между теоріей и опытомъ заключалась въ молчаливомъ предположеніи, что количество теплорода въ одной большой калоріи остается одинаковымъ при различныхъ температурахъ. Въ то время не было еще произведено опытовъ, которые могли показать, что калорическая мѣра тепла, какъ работы на одинъ градусъ паденія, заключенная въ принципѣ Карно и болѣе ясно установленная въ его уравненіи, — не то же самое, что калориметрическая мѣра, получаемая смѣшеніемъ веществъ, имѣющихъ различныя температуры. Даже тогда, когда принципъ сохраненія энергіи былъ установленъ, авторы его не понимали вполнѣ ясно, въ чемъ заключается различіе между обѣими теоріями. Въ дѣйствительности, при надлежащемъ толкованіи въ согласіи съ опытными данными обѣ теоріи одинаково правильны, но онѣ основаны на различныхъ методахъ измѣренія количества тепла, которые не только не противорѣчатъ, но взаимно дополняютъ другъ друга.

То же самое непониманіе, правда, въ болѣе тонкой и опасной формѣ, все еще проявляется въ такихъ обычныхъ фразахъ, какъ, напримѣръ, слѣдующая: „Мы знаемъ теперь, что теплота есть форма энергіи, а не матеріальная жидкость“. Экспериментальный фактъ, лежащій въ основѣ этого утвержденія, состоитъ въ томъ, что наши обыкновенные способы измѣренія количествъ тепла измѣряютъ въ дѣйствительности количества тепловой энергіи. Когда мы смѣшиваемъ два вещества, имѣющія различную температуру, то количество, остающееся постояннымъ (предполагая, что принята во вниманіе произведенная внѣшняя работа и внѣшняя потеря тепла), есть полное количество энергіи. Теплота есть форма энергіи только потому, что та вещь, которую мы измѣряемъ и называемъ теплотой, есть въ дѣйствительности количество энергіи. Если оставить въ сторонѣ соображенія практическаго удобства, мы могли бы съ такимъ же правомъ согласиться измѣрять количество тепла, согласно принципу Карно, внѣшней работой, совершенной въ циклѣ съ паденіемъ въ одинъ градусъ. Въ такомъ случаѣ теплота не была бы уже формой энергіи, а обладала бы всѣми свойствами, которыя мы постулируемъ для теплорода. Калорическая мѣра тепла такъ же непосредственно вытекаетъ изъ принципа Карно, какъ энергетическая мѣра вытекаетъ изъ закона сохраненія энергіи. Но терминъ теплота такъ тѣсно ассоціированъ уже съ энергетической мѣрой, что необходимо употреблять другой терминъ теплородъ (caloric), чтобы обозначить простую мѣру количества тепла въ противоположность количеству тепловой энергіи. Измѣреніе теплоты, какъ теплорода, вполнѣ аналогично измѣренію электричества, какъ количества электрической жидкости. Въ случаѣ электричества мѣра количества является болѣе распространенной, чѣмъ энергетическая мѣра, такъ какъ вообще проще измѣрять электричество по его химическимъ и магнитнымъ дѣйствіямъ, какъ количество жидкости, чѣмъ какъ количество энергіи. Правда, единицы, за которыя мы платимъ по электрическому счетчику, суть единицы энергіи, такъ какъ расходы производства опредѣляются, главнымъ образомъ, количествомъ доставляемой энергіи, хотя, съ другой стороны, расходы распредѣленія опредѣляются преимущественно дѣйствительнымъ количествомъ доставляемой жидкости. Оба метода измѣренія одинаково важны въ теріи тепла, и очень жаль, что естественная мѣра количества тепла затемняется въ элементарномъ изложеніи взглядомъ на тепло, просто какъ на нѣкоторое количество энергіи. Недостаточность такого способа изложенія сильно отзывается на его дальнѣйшихъ ступеняхъ.

Такъ какъ принципъ Карно былъ принятъ безъ существенныхъ измѣненій въ механической тоoріи тепла, то теплородъ Карно и его вычисленіе работы, произведенной въ конечномъ циклѣ, рано или поздно неизбѣжно должны были быть вторично открыты. Теплородъ появился снова прежде всего, какъ термо-динамическая функція Ранкина (Rankine) и какъ „эквивалентъ превращенія“ (equivalence value of a transformation) въ уравненіяхъ Клаузіуса (Clausius); но на него смотрѣли скорѣе, какъ на отношеніе тепловой энергіи къ температурѣ, чѣмъ какъ на величину, имѣющую особое физическое значеніе. Впослѣдствіи, когда важность его была полнѣе оцѣнена, Клазіусъ далъ ему имя энтропіи и установилъ то важное свойство ея, что ея полное количество остается постояннымъ въ обратимыхъ процессахъ теплового обмѣна, но всегда возрастаетъ во всякомъ необратимомъ процессѣ. Никакой процессъ, заключающій въ себѣ уменьшеніе полнаго количества энтропіи, невозможенъ. Соотвѣтствующія положенія относительно возможности или невозможности превращеній были еще раньше установлены лордомъ Кельвиномъ (Lord Kelvin) въ терминахъ разсѣянія цѣнной (available) энергіи. Но такъ какъ рѣшеніе Карно прошло незамѣченнымъ, то никто, повидимому, не понималъ въ то время, что энтропія — это тотъ же теплородъ Карно, только подъ другимъ названіемъ, что теплоту можно измѣрять не только, какъ энергію, и что возрастаніе энтропіи въ любомъ необратимомъ процессѣ является самой подходящей мѣрой для количества порождаемаго тепла. Энергія, насколько это намъ извѣстно, всегда должна быть соединена съ какимъ-нибудь матеріальнымъ носителемъ, и нѣтъ никакихъ основаній полагать, что тепловая энергія представляетъ исключеніе изъ этого правила. Тенденція кинетической теоріи всегда состояла въ томъ, чтобы разсматривать энтропію, какъ чисто абстрактную математическую функцію, относящуюся къ распредѣленію энергіи, но не имѣющую никакого физическаго существованія. Такимъ образомъ, въ кинетической теоріи газовъ энтропія не есть количество чего-нибудь, а просто логариѳмъ вѣроятности нѣкотораго распредѣленія. Совершенно такъ же около двадцати лѣтъ тому назадъ считалось общепризнаннымъ, что электрическія явленія сводятся исключительно къ натяженіямъ въ эѳирѣ, и что электрическія жидкости существуютъ лишь, какъ удобныя средства математическаго выраженія. Новыя открытія дали намъ возможность составить болѣе конкретное представленіе объ электрическомъ зарядѣ, которое оказалось неоцѣнимымъ средствомъ изслѣдованія. Быть можетъ, не слишкомъ смѣло будетъ высказать надежду, что возможно будетъ соединить подобное представленіе и съ понятіемъ о теплородѣ, какъ мѣрѣ количества тепла.

(Продолженіе слѣдуетъ),

По поводу парадоксовъ г. Аменицкаго и г. Видемана.

I.

Нѣсколько соображеній о парадоксахъ вообще и о perpetuum-mobile г. Аменицкаго въ частности.

По поводу статей г. Видемана и г. Кагана.

Прив.-доц. Д. Крыжановскаго.

Чтеніе названныхъ статей вызвало у меня нѣкоторыя мысли, которыми я хотѣлъ бы подѣлиться съ читателями «Вѣстника».

Предполагая, что читатель уже знакомъ съ этими статьями, я начну съ такого расчлененія предмета спора:

1°. Въ чемъ заключается абсурдность (по г. Видеману) или парадоксальность (по г. Кагану) разсужденій г. Аменицкаго?

2°. Если таковая парадоксальность дѣйствительно имѣется, то чѣмъ она вызвана и какимъ образомъ она можетъ быть устранена?

Но, прежде чѣмъ переходить къ разсмотрѣнію этихъ вопросовъ, намъ надо столковаться относительно условій того опыта, къ которому относятся разсужденія г. Аменицкаго и его комментаторовъ. Всѣ три автора сходятся, очевидно, на томъ, что дно ящика горизонтально, самъ шаръ — однородный и начальная скорость его равна нулю. Но далѣе начинается разногласіе. Г. Видеманъ говоритъ въ одномъ мѣстѣ о деформаціи шара и дна, а г. Каганъ считаетъ дно, стѣнку и шаръ абсолютно твердыми (и гладкими) тѣлами. Въ виду того, что это двѣ совершенно разныя точки зрѣнія, одна — реальная, а другая — идеальная, а парадоксъ г. Аменицкаго имѣетъ, конечно, идеально-гипотетическій характеръ, я стану исключительно на точку зрѣнія г. Кагана.

Итакъ, въ чемъ заключается абсурдность или парадоксальность того утвержденія, что абсолютно твердый и гладкій однородный шаръ, который положенъ безъ начальной скорости на горизонтальное дно абсолютно твердаго и гладкаго «корыта» г. Аменицкаго такъ, что касается въ то же время одной изъ боковыхъ стѣнокъ ящика, -- что этотъ шаръ станетъ вѣчно кататься по дну отъ одной стѣнки къ другой?

Судя по заглавію статьи г. Видемана («Новое перпетуумъ-мобиле»), можно думать, что онъ склоненъ видѣть абсурдность именно въ самомъ фактѣ вѣчнаго движенія, въ томъ, что корыто г. Аменицкаго разрѣшаетъ задачу о perpetuum-mobile.

Perpetuum-mobile можетъ быть двоякаго рода. Въ однихъ случаяхъ вѣчное движеніе части нѣкоторой изолированной системы или всей системы не сопровождается измѣненіемъ количества полной энергіи этой системы. Такое perpetuum-mobile не представляетъ ничего еретическаго или парадоксальнаго; напротивъ, въ идеальныхъ условіяхъ, подобныхъ тѣмъ, о которыхъ мы только-что говорили, оно должно имѣть мѣсто сплошь и рядомъ. Примѣромъ можетъ служить вѣчное качаніе идеальнаго маятника (безъ тренія); сюда же относится движеніе въ пустотѣ двухъ абсолютно твердыхъ тѣлъ другъ около друга подъ дѣйствіемъ силы всемірнаго тяготѣнія.

Иначе обстоитъ съ perpetuum-mobile второго рода, когда общее количество энергіи системы претерпѣваетъ измѣненіе — безразлично, въ какомъ смыслѣ. Такой процессъ несовмѣстимъ съ принципомъ сохраненія энергіи. Здѣсь ужъ возможно только одно изъ двухъ — или предполагаемый процессъ неосуществимъ даже гипотетически, или названный принципъ долженъ быть отброшенъ.

Итакъ, «абсурднымъ» можно назвать только вѣчное движеніе второго рода. Къ какому же роду относится perpetuum-mobile г. Аменицкаго? Если повѣрить г. Аменицкому, что шаръ будетъ вѣчно прогуливаться взадъ и впередъ*), и предположить, что онъ будетъ сохранять при этомъ постоянную по величинѣ скорость, кромѣ моментовъ поворота, то энергія системы не будетъ испытывать измѣненія, такъ что мы имѣемъ дѣло съ perpetuum-mobile перваго рода. Только въ первый моментъ, когда шаръ, будучи положенъ безъ начальной скорости (мы могли бы, напримѣръ, удержать его нѣкоторое время въ покоѣ и затѣмъ предоставить его самому себѣ), приходитъ въ движеніе, нарушается законъ сохраненія энергіи, ибо потенціальная энергія шара сохраняется при движеніи по горизонтальному дну (чего нельзя сказать, когда шаръ катится по наклонной плоскости). Къ этому надо прибавить еще то соображеніе, что, съ точки зрѣнія г. Аменицкаго, давленіе шара на стѣнку также должно имѣть механическій эффектъ (напримѣръ, привести въ движеніе все корыто, если оно можетъ безъ тренія двигаться по горизонтальной поверхности, на которой лежитъ, либо сообщить нѣкоторое движеніе всему земному шару, если онъ абсолютно твердъ и корыто неподвижно скрѣплено съ нимъ). Но это означаетъ еще большее возрастаніе энергіи всей системы.

*) Я не касаюсь здѣсь того обстоятельства, что шаръ, докатившись до второй стѣнки, будетъ здѣсь находиться въ иныхъ условіяхъ, чѣмъ въ началѣ опыта, ибо теперь его скорость не будетъ равна нулю. Толчекъ о вторую стѣнку можетъ значительно усложнить движеніе.

Итакъ, парадоксальность результата г. Аменицкаго заключается не въ вѣчномъ движенiи шара самомъ по себѣ, а въ томъ, что шаръ перейдетъ изъ покоя въ движенiе, такъ какъ это обстоятельство противорѣчитъ принципу сохраненiя энергiи.

Но въ этомъ же обстоятельствѣ можно видѣть противорѣчiе и съ нашимъ чувственнымъ опытомъ. Всякiй убѣжденъ, что шаръ при заданныхъ условiяхъ не можетъ самопроизвольно придти въ движенiе. Правда, наши «убѣжденiя» такого рода покоятся на дѣйствительныхъ, реальныхъ опытахъ, въ которыхъ никогда не бываютъ осуществлены тѣ идеальныя условiя твердости и гладкости, которыя мы приняли. Но такъ какъ результатъ опыта остается одинъ и тотъ же, какъ бы онъ ни былъ близокъ къ идеальнымъ условiямъ, то мы считаемъ себя вправѣ утверждать, что и идеальный опытъ далъ бы тотъ же результатъ.

Такимъ образомъ, мы обнаружили въ результатѣ г. Аменицкаго два противорѣчiя: одно — съ принципомъ сохраненiя энергiи, другое — съ указаннымъ простымъ реальнымъ (хотя и идеализированнымъ) опытомъ. По этому поводу я позволю себѣ сказать нѣсколько словъ о парадоксахъ вообще.

Въ наукахъ абстрактныхъ или умозрительныхъ (какова математика), которыя умъ человѣческiй возводитъ на основѣ произвольно имъ самимъ заложенныхъ принциповъ (аксiомъ, постулатовъ, опредѣленiй), всякiй парадоксъ представляетъ логическое противорѣчiе двухъ сужденiй, полученныхъ различными логическими путями изъ одной и той же совокупности принциповъ; въ частномъ случаѣ, въ противорѣчiи могутъ находиться выводъ и одинъ изъ принциповъ. Парадоксъ будетъ мнимымъ, если причина его заключается въ неправильномъ примѣненiи принциповъ при полученiи одного изъ выводовъ. Въ такомъ случаѣ его называютъ софизмомъ. Если же парадоксъ получается при безупречномъ примѣненiи принциповъ, то онъ указываетъ на противорѣчивость или несовмѣстимость принятой системы принциповъ

Во избѣжанiе обнаруженiя парадоксовъ ко всякой системѣ принциповъ, принимаемыхъ за основу какой-либо умозрительной дисциплины, предъявляютъ требованiе совмѣстимости этихъ принциповъ. Это — одно изъ наиболѣе грозныхъ требованiй, удовлетворить которому крайне трудно, такъ что многiя научныя построенiя, не сумѣвшiя доказать a priori совмѣстимость своихъ принциповъ, вѣчно находятся подъ дамокловымъ мечомъ парадокса, который можетъ обнаружиться въ любой моментъ и разрушить все зданiе.

Въ видѣ примѣра такого рода парадоксовъ можно указать, пожалуй, на извѣстный парадоксъ о множествѣ всѣхъ множествъ въ теорiи совокупностей (ср. Пуанкаре, «Наука и Методъ»).

Иначе обстоитъ дѣло съ науками реальными. Цѣлью этихъ наукъ является такого рода приспособленiе нашихъ идей къ фактамъ внѣшняго опыта или такое отображенiе этихъ фактовъ въ идеяхъ и сужденiяхъ, чтобы логическiя послѣдствiя послѣднихъ всегда отображали реальныя послѣдствiя первыхъ (т. е. фактовъ). Если же мы наталкиваемся на противорѣчiе между логическимъ выводомъ и реальнымъ фактомъ, то говоримъ, что имѣемъ дѣло съ парадоксомъ. И здѣсь онъ можетъ быть кажущимся, если допущена логическая ошибка либо использовано сужденіе, не входящее въ систему основныхъ положеній. Такими обычно бываютъ разсужденія изобрѣтателей perpetuum-mobile (второго рода). Если же парадоксъ дѣйствителенъ, то онъ указываетъ на необходимость перестройки принятаго нами отображенія фактовъ (или, какъ говорятъ обычно, нашего «истолкованія» фактовъ). Примѣромъ можетъ служить знаменитое противорѣчіе между старой эфирной теоріей свѣта и опытомъ Майкельсона, послужившее однимъ изъ поводовъ къ происходящему теперь перевороту въ основныхъ теоріяхъ физики и механики (принципъ относительности).

Конечно, и въ наукахъ реальныхъ возможны парадоксы перваго рода, указывающіе на несовмѣстимость принятыхъ принциповъ.

Раціональная механика представляетъ, съ одной стороны, умозрительную дисциплину, разматывающую свое содержаніе путемъ дедукціи изъ немногихъ основныхъ принциповъ. Но, съ другой стороны, она имѣетъ цѣлью дать идейное отображеніе чисто-механическихъ процессовъ дѣйствительной природы.

Выше мы нашли, что результатъ г. Аменицкаго противорѣчитъ какъ принципу сохраненія энергіи, такъ и реальному опыту, такъ что онъ является одновременно парадоксомъ перваго и второго рода.

Теперь мы можемъ перейти къ разсмотрѣнію второго основного вопроса, указаннаго въ началѣ статьи.

Примѣняетъ ли г. Аменицкій въ своемъ разсужденіи только принципы и методы, положенные въ основу раціональной механики, или же пользуется еще какими-либо посторонними сужденіями?

Среди немногихъ моментовъ разсужденія г. Аменицкаго подозрѣніе г. Видемана возбуждаетъ 1) разложеніе вѣса шара на двѣ составляющія и 2) утвержденіе, что одна изъ послѣднихъ уничтожится вслѣдствіе сопротивленія стѣнки.

Но отказаться отъ мысленнаго разложенія приложенныхъ къ тѣлу силъ на составляющія значитъ, какъ указываетъ г. Каганъ, отказаться отъ ряда выводовъ, принятыхъ въ классической механикѣ.

Остается объявить неправильнымъ второе утвержденіе. Оно могло быть получено г. Аменицкимъ только путемъ такого разсужденія: изъ двухъ силъ, замѣняющихъ вѣсъ шара, сила *my*, будучи нормальна къ стѣнкѣ и прижимая шаръ къ ней, должна, по III закону Ньютона, вызвать равную и противоположную силу, приложенную къ шару; вторая же сила *mr*, не оказывая давленія на стѣнку, не вызываетъ никакого противодѣйствія. Стало быть, реакція стѣнки равна и противоположна силѣ *my*, т. е. уничтожаетъ дѣйствіе ея на тѣло.

Законность такого способа разсужденія не можетъ быть, правда, обоснована ни на какомъ принципѣ элементарной механики, но поводъ къ нему могъ дать хотя бы выводъ, относящійся къ наклонной плоскости. Тамъ вѣдь тоже разсматривается эффектъ каждой слагающей силы порознь, и этотъ пріемъ не оправдывается никакимъ «принципомъ». Но, можетъ быть, то, что допустимо, когда слагающія взаимно-перпендикулярны и когда имѣется только одна неподвижная плоскость, можетъ быть, это недопустимо при несоблюденіи этихъ условій? Но почему же, въ такомъ случаѣ, авторы учебниковъ не говорятъ этого явно? И какъ надо поступать въ такихъ «нехорошихъ» случаяхъ, чтобы получались толковые результаты, а не парадоксы?

Парадоксъ, подобный настоящему, тѣмъ и цѣненъ, по нашему мнѣнію, что возбуждаетъ подобные вопросы и вскрываетъ несовершенства нашихъ дидактическихъ системъ.

На послѣдній вопросъ даетъ обстоятельный отвѣтъ г *Каганъ* въ своей статьѣ. Отвѣтъ этотъ долженъ зависѣть отъ того, на какіе случаи онъ долженъ распространяться.

Г. *Каганъ* даетъ правила, представляющія примѣненіе принципа *Даламберта* къ двумъ частнымъ случаямъ, когда связь осуществляется одной или двумя плоскостями. Но я долженъ обратить вниманіе уважаемаго автора на допущенную имъ существенную неправильность въ формулировкѣ этихъ правилъ. А именно, обобщая ихъ на случай *любыхъ* поверхностей и на случай не только покоящейся, но и движущейся точки, г. *Каганъ* упускаетъ изъ виду вліяніе центростремительной силы на реакцію связей.

Итакъ, парадоксальный результатъ получился у г. *Аменицкаго* по той причинѣ, что онъ вычислялъ реакціи по собственному усмотрѣнію, не руководствуясь тѣмъ, что̀ механика принимаетъ и допускаетъ. Если же примѣнить слѣдствія принципа *Даламберта*, то, какъ указываетъ г. *Каганъ*, парадокса не получается *).

Но и вычисленіе реакціи, производимое г. *Каганомъ*, меня не вполнѣ удовлетворяетъ. Вѣдь онъ вычисляетъ, въ дѣйствительности, реакціи фиктивныхъ плоскостей, проходящихъ черезъ центръ шара параллельно плоскостямъ дна и стѣнки, и не показываетъ, какъ должны эти давленія передаться матеріальнымъ плоскостямъ — дну и стѣнкѣ.

Въ заключеніе будетъ, можетъ быть, нелишнимъ напомнить читателю, что во многихъ случаяхъ вопросъ о вычисленіи реакцій теоретически является *неопредѣленной задачей*. Только разсмотрѣніе упругихъ деформацій можетъ указать въ подобныхъ случаяхъ, какое изъ безчисленнаго числа теоретически равновозможныхъ рѣшеній имѣетъ мѣсто въ дѣйствительности.

Простѣйшій примѣръ этого представляетъ твердое тѣло, имѣющее двѣ точки опоры, напримѣръ, зажатое межъ двухъ остріевъ. Здѣсь къ реакціямъ каждаго изъ остріевъ можно прибавить по равной силѣ, дѣйствующей вдоль прямой, соединяющей точки опоры, сообщивъ этимъ силамъ противоположныя направленія, и тѣло останется въ покоѣ.

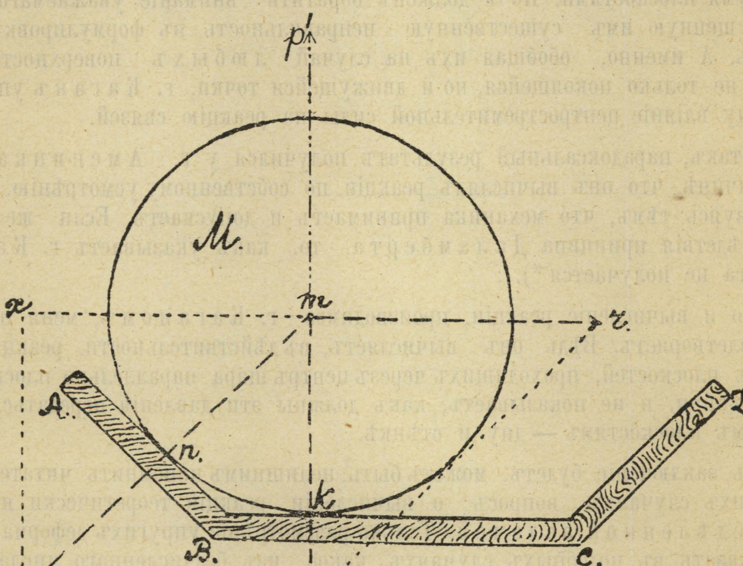
*) Указанная выше погрѣшность въ примѣненіи къ парадоксу г. *Аменицкаго* не играетъ роли.

II.

Къ парадоксу, заимствованному г. Видеманомъ изъ учебника г. Аменицкаго.

А. Киселева.

Мнѣ кажется, что этотъ парадоксъ (обстоятельно разсмотрѣнный г. Каганомъ въ № 576 «Вѣстника»), самъ собою уяснится, если мы разсужденіе о шарѣ, лежащемъ на горизонтальномъ днѣ ящика (фиг. 1), и о шарѣ положенномъ на наклонную плоскость (фиг. 2), изложить слѣдующимъ образомъ.



Фиг. 1.

Силу p (внѣ шара) разложимъ на 2 составляющія силы: силу y, перпендикулярную къ стѣнкѣ сосуда (фиг. 1) или къ наклонной плоскости (фиг. 2), и силу r, параллельную плоскости дна сосуда (фиг. 1) или параллельную наклонной плоскости (фиг. 2).

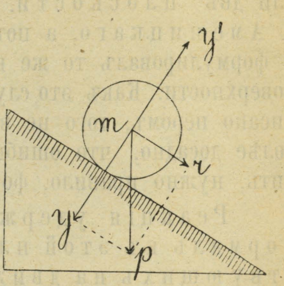
Сила y стремится придавить шаръ *) къ стѣнкѣ сосуда (фиг. 1) или къ наклонной плоскости (фиг. 2) и, слѣдовательно, стремится вызвать въ той и въ другой реакцію, равную и противоположную силѣ y и способную уничтожить эту силу.

---

*) Другими словами: если бы силѣ y не противодѣйствовали другія силы то она придавливала бы шаръ и пр.

Сила r стремится катить шаръ *) по дну сосуда (фиг. 1) или по наклонной плоскости (фиг. 2).

Въ первомъ случаѣ (ящикъ) указанныя стремленія силъ y и r не могутъ полностью осуществиться одновременно, такъ какъ ясно, что, если бы осуществилось движеніе подъ вліяніемъ силы r (движеніе, удаляющее шаръ отъ боковой стѣнки), то не могло бы осуществиться давленіе силы y на стѣнку, и наоборотъ. Значитъ, въ результатѣ одновременнаго существованія двухъ указанныхъ стремленій должно получиться нѣчто такое, что не есть ни движеніе по дну сосуда, ни давленіе на боковую стѣнку. Что же получится? Чтобы рѣшить это, остается единственный способъ — замѣнить двѣ силы y и r одною силою p и задаться вопросомъ, что выйдетъ въ результатѣ дѣйствія одной этой силы p. Выйдетъ, конечно, слѣдующее: шаръ останется въ покоѣ, при чемъ онъ будетъ производить давленіе на дно (и вызывать реакцію дна), измѣряемое силою p. Такимъ образомъ, въ разсматриваемомъ случаѣ разложеніе силы p на 2 силы y и r (вполнѣ, конечно, возможное) оказалось для насъ безполезнымъ (какъ оно безполезно и въ томъ «дешевомъ аэропланѣ», о которомъ упоминается въ статьѣ г. В. Кагана).



Фиг. 2.

Во второмъ случаѣ (наклонная плоскость) стремленія силъ y и r могутъ полностью осуществиться, такъ какъ ясно, что движеніе шара по наклонной плоскости (не удаляющее шаръ отъ этой плоскости) не измѣняетъ давленія силы y на плоскость и обратно. Значитъ, въ результатѣ одновременнаго существованія стремленій силъ y и r получится, съ одной стороны, движеніе шара по наклонной плоскости, съ другой — давленіе шара на эту плоскость, равное силѣ y. Такимъ образомъ, въ этомъ случаѣ разложеніе одной силы p на двѣ слагающія силы y и r оказалось для насъ полезнымъ.

III.

О реакціяхъ связей.

Прив.-доц. В. Кагана.

Какъ указано въ предыдущей статьѣ г. Крыжановскимъ, въ моей статьѣ «О разложеніи силъ и реакціяхъ связей», помѣщенной въ № 576-мъ «Вѣстника», сдѣлана ошибка въ формулировкѣ правила для вычисленія реакціи поверхности. Дѣло заключается въ слѣдующемъ. Какъ я указывалъ въ своей статьѣ, ключемъ къ раскрытію парадокса г. Аменицкаго долженъ служить

*) Другими словами: если бы силѣ r не мѣшали другія силы, то она заставила бы шаръ катиться и пр.

тотъ принципъ, которымъ фактически устанавливается, какъ будетъ происходить движенiе при заданныхъ условiяхъ, т. е. принципъ Даламберта. Однако, принципъ этотъ во всей своей общности, несмотря на кажущуюся простоту формальнаго его выраженiя, въ дѣйствительности очень сложенъ. Онъ опредѣляетъ движенiе какой угодно системы матерiальныхъ точекъ при какихъ угодно связяхъ. Я естественно поставилъ себѣ задачу выдѣлить тотъ частный случай, когда реакцiя связей можетъ быть непосредственно опредѣлена по заданнымъ силамъ. Это всегда имѣетъ мѣсто, когда связью служитъ одна или двѣ плоскости. Этотъ именно случай имѣетъ мѣсто въ парадоксѣ г. Аменицкаго, а потому имъ и слѣдовало ограничиться; но вмѣсто этого я формулировалъ то же правило вычисленiя реакцiи въ примѣненiи ко всякой поверхности. Какъ это случилось, ужъ, право, не могу сказать; но, что написано перомъ, того не вырубишь топоромъ, и въ данномъ случаѣ это тѣмъ болѣе досадно, что ошибка необычайно элементарна. Итакъ, чтобы ее исправить, нужно правило, формулированное на стр. 320-ой, выразить такъ:

Реакцiя удерживающей плоскости равна проекцiи на нормаль къ этой плоскости равнодѣйствующей всѣхъ дѣйствующихъ на движущуюся точку силъ, но имѣетъ противоположное этой проекцiи направленiе.

Точно такъ же на стр. 321-ой и 322-ой, гдѣ это правило распространяется на неудерживающую поверхность и на связь, состоящую изъ двухъ удерживающихъ поверхностей, нужно слово «поверхность» вездѣ замѣнить словомъ «плоскость». Такъ какъ именно съ этимъ случаемъ, какъ уже сказано выше, мы имѣемъ дѣло въ перпетуумъ-мобиле г. Аменицкаго и въ аэропланѣ г. Видемана, то всѣ примѣненiя этого правила, которыя были сдѣланы къ разрѣшенiю этихъ парадоксовъ, совершенно правильны, и, по существу, дѣло этимъ можно было бы считать ликвидированнымъ. Но разъ уже объ этомъ зашла рѣчь, я хотѣлъ бы, въ искупленiе своей вины, со всею возможною отчетливостью выяснить, въ чемъ заключается разница между удерживающей плоскостью и удерживающей кривой поверхностью и почему въ иныхъ случаяхъ мы имѣемъ возможность вычислить реакцiю связей непосредственно по даннымъ связямъ и силамъ, тогда какъ въ другихъ случаяхъ реакцiя вычисляется уже по самому движенiю. Мы полагаемъ, что это прольетъ нѣкоторый свѣтъ и на тѣ случаи, въ которыхъ въ элементарной физикѣ и механикѣ непосредственно устанавливается движенiе при данной связи, и лучше выяснитъ источникъ какъ парадокса г. Аменицкаго, такъ и другихъ логическихъ затрудненiй этого рода.

Итакъ, возвратимся къ опредѣленiю реакцiи связи, которое было уже нами дано (на стр. 319) въ предыдущей статьѣ; мы его, тѣмъ не менѣе, приведемъ вновь, чтобы имѣть твердую точку отправленiя.

На матерiальную точку дѣйствуютъ нѣкоторыя заданныя силы, равнодѣйствующую которыхъ мы будемъ обозначать черезъ P; эту равнодѣйствующую мы будемъ коротко называть заданной силой. Если бы не было связи, т. е. если бы точка была свободной, то движенiе происходило бы непосредственно подъ дѣйствiемъ этой силы; иными словами, ускоренiе было бы въ каждый моментъ равно вектору P, раздѣленному на массу m движущейся точки.

Но подъ дѣйствiемъ связи, не дающей осуществиться свободному движенiю, ускоренiе мѣняется: точка совершаетъ не то движенiе, которое имѣло бы мѣсто, если бы она была свободна. Пусть w будетъ ускореніе, которое точка имѣетъ въ нѣкоторый моментъ при наличности связи; тогда произведеніе вектора w на m представляетъ собой нѣкоторую другую силу, — ту силу, которая вызываетъ это именно ускореніе. Эту силу мы будемъ обозначать черезъ Q и будемъ называть движущей силой; это есть, стало быть, та сила, которая вызвала бы такое движеніе свободной матеріальной точки, какое наша связанная точка совершаетъ подъ дѣйствіемъ заданной силы P и связи. Какъ исключеніе, эти двѣ силы P и Q могутъ совпадать; вообще, онѣ будутъ различны, потому что связь видоизмѣняетъ движеніе точки. Роль связи заключается, слѣдовательно, въ томъ, что она замѣняетъ заданную силу P движущей силой Q; процессъ этого замѣщенія можно себѣ представить такимъ образомъ, что къ заданной силѣ P присоединяется нѣкоторая слагающая R такимъ образомъ, что равнодѣйствующей силъ P и R является движущая сила Q. Эта-то сила R называется реакціей связи; это есть та слагающая, которую связь присоединяетъ къ заданной силѣ: $\overline{Q} = \overline{P} + \overline{R}$. Наша задача заключается въ томъ, чтобы разсчитать эту реакцію въ томъ случаѣ, когда связью служитъ неподвижная, гладкая, удерживающая поверхность.

I. Реакція гладкой поверхности направлена по нормали къ поверхности. Прежде всего установимъ, что означаетъ терминъ «гладкая поверхность». Реакція R можетъ быть разложена на слагающую R_n по нормали къ поверхности и на слагающую R_t, лежащую въ касательной плоскости. Если слагающая R_t, лежащая въ касательной плоскости, не сводится къ нулю, т. е. если связь оказываетъ реакцію, такъ сказать, въ самой поверхности, то эта слагающая называется треніемъ. Если тренія нѣтъ, то поверхность называется гладкой. Такимъ образомъ, въ самомъ опредѣленіи гладкой поверхности скрывается то обстоятельство, что слагающая R_t реакціи, лежащая въ касательной плоскости, равна нулю; иначе говоря, реакція гладкой поверхности всегда направлена по нормали къ послѣдней.

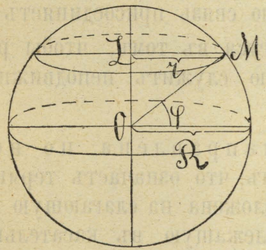
II. Проекція движущей силы на нормаль къ поверхности равна проекціи на ту же нормаль центростремительной слагающей движущей силы.

Ускореніе w движущейся точки, какъ извѣстно, разлагается на касательное ускореніе, направленное по касательной къ траекторіи, и центростремительное ускореніе, направленное по главной нормали къ траекторіи къ ея центру кривизны. Сообразно съ этимъ и движущая сила разлагается на касательную слагающую и центростремительную слагающую: направленіе каждой изъ этихъ слагающихъ совпадаетъ съ направленіемъ соотвѣтствующей слагающей ускоренія, а величина каждой слагающей равна величинѣ соотвѣтствующаго ускоренія, умноженной на массу матеріальной точки. Движущая сила Q есть равнодѣйствующая этихъ двухъ силъ, а потому ея проекція на нормаль къ поверхности равна суммѣ проекцій этихъ слагающихъ. Но проекція касательной слагающей на нормаль къ поверхности равна нулю, такъ какъ эта послѣдняя сила расположена въ касательной плоскости; слѣдовательно, остается только проекція центростремительной слагающей, и теорема, такимъ образомъ, доказана.

III. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что проекцію движущей силы Q на нормаль къ поверхности легко вычислить. Если мы обозначимъ черезъ v скорость матеріальной точки въ разсматриваемый моментъ движенія, черезъ ϱ — радіусъ кривизны траекторіи въ этой точкѣ, то центростремительная сила равна $\frac{mv^2}{\varrho}$, или $mv^2\sigma$, гдѣ σ есть кривизна траекторіи въ той же точкѣ. Если черезъ ϱ мы будемъ обозначать также и направленіе главной нормали къ траекторіи въ сторону центра кривизны, а черезъ n — то направленіе нормали къ поверхности, на которое мы проектируемъ, то проекція движущей силы Q_n опредѣляется формулой

$$Q_n = m v^2 \sigma \cos(\varrho, n).$$

Примѣръ. Если точка движется по удерживающей сферѣ по параллели (см. черт.), то главная нормаль къ траекторіи направлена по радіусу ML, радіусъ кривизны равенъ радіусу r параллели; если нормаль къ сферѣ MO возьмемъ въ направленіи къ центру сферы, то уголъ $(\varrho, n) = LMO$ равенъ широтѣ φ точки M; поэтому



$$Q_n = \frac{m v^2}{r} \cos\varphi .$$

IV. Теперь намъ уже нетрудно вычислить реакцію поверхности. Если бы реакціи не было, т. е. дѣйствовала бы только заданная сила P, то слагающая по нормали была бы P_n. При наличности же реакціи эта слагающая превращается въ $m v^2 \sigma \cos(\varrho, n)$. Итакъ, реакція R есть сила, которая дѣйствуетъ по нормали и, присоединяясь къ проекціи P_n, превращаетъ ее въ $m v^2 \sigma \cos(\varrho, n)$. Ясно, что эта реакція выражается разностью:

$$R = m v^2 \sigma \cos(\varrho, n) - P_n .$$

Это выраженіе состоитъ изъ двухъ членовъ; случай, когда первый членъ обращается въ нуль существенно отличается отъ того случая, когда онъ отличенъ отъ нуля. Въ первомъ случаѣ $R = -P_n$; реакція равна и противоположна проекціи на нормаль къ поверхности равнодѣйствующей заданныхъ силъ. Въ этомъ случаѣ мы имѣемъ, слѣдовательно, возможность непосредственно по заданнымъ силамъ вычислить реакцію поверхности. Разсчитавъ реакцію, мы можемъ присоединить ее къ заданной силѣ, найти движущую силу и этимъ путемъ установить ходъ движенія. Такъ какъ въ этомъ случаѣ реакція уничтожаетъ нормальную слагающую заданной силы, то движущей силой является проекція заданной силы на касательную плоскость.

Во второмъ случаѣ, когда первая слагающая не обращается въ нуль, реакція зависитъ отъ скорости движенія, отъ величины и направленія радіуса кривизны траекторіи. Въ этомъ случаѣ реакція зависитъ уже, такимъ образомъ, отъ движенія: нужно знать движеніе для того, чтобы вычислить реакцію. Чтобы уяснить на примѣрѣ этотъ послѣдній случай, представимъ себѣ шаръ, на которомъ параллельно горизонту нанесенъ экваторъ; по меридіану этого шара, будемъ говорить — съ широты 30°, катится тяжелая матеріальная точка.

Если она начала падать съ указанной широты, т. е. не имѣла въ этотъ моментъ начальной скорости, то первый членъ реакціи въ начальный моментъ движенія былъ равенъ нулю. Если же точка начала катиться съ широты въ 40^c, то, пришедши на параллель въ 30^o широты, она будетъ имѣть уже скорость, отличную отъ нуля, и первый членъ въ выраженіи реакціи будетъ отличенъ отъ нуля, между тѣмъ какъ второй членъ будетъ имѣть то же значеніе, какъ и въ первомъ случаѣ на той же широтѣ. Мы видимъ такимъ образомъ, что въ одной и той же точкѣ поверхности, при той же заданной силѣ, реакція поверхности можетъ быть различная въ зависимости отъ хода движенія.

Итакъ, при движеніи точки по удерживающей поверхности возможны два случая: иногда по заданной силѣ можно непосредственно опредѣлить реакцію поверхности, съ помощью ея вычислить движущую силу и тогда установить ходъ движенія; въ другихъ же случаяхъ нужно заранѣе знать движеніе, чтобы вычислить реакцію связи.

Когда же имѣетъ мѣсто первый случай? Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ нужно только установить, при какихъ условіяхъ первый членъ въ выраженіи реакціи связи обращается въ нуль. Это имѣетъ мѣсто, если обращается въ нуль одинъ изъ трехъ его множителей.

a) Первый членъ реакціи обращается въ нуль, если $v = 0$, т. е. во всякій моментъ, когда скорость обращается въ нуль и, въ частности, когда точка остается въ покоѣ.

b) То же будетъ имѣть мѣсто, если $\sigma = 0$; иными словами, первый членъ въ выраженіи реакціи обращается въ нуль во всякой точкѣ траекторіи, въ которой кривизна послѣдней равняется нулю. Въ частности онъ равняется, слѣдовательно, нулю во все время движенія, если послѣдняя совершается по прямой линіи.

c) Наконецъ, первый членъ въ выраженіи реакціи исчезаетъ, если $\cos(\varrho, n) = 0$, т. е. если нормаль къ поверхности перпендикулярна къ главной нормали траекторіи; это необходимо всегда имѣетъ мѣсто, если связью служитъ плоскость, такъ какъ главная нормаль къ траекторіи въ этомъ случаѣ лежитъ въ самой плоскости.

Это именно и есть тотъ случай, который намъ былъ нуженъ для разрѣшенія парадокса г. Видемана (аэропланъ) и который формулированъ выше, какъ правило опредѣленія реакціи удерживающей плоскости.

Въ элементарной физикѣ приходится имѣть дѣло почти исключительно съ случаями этого рода; но случаи эти не достаточно характеризованы и правила вычисленія реакціи точно не формулированы. Отсюда и возникаютъ парадоксы въ родѣ тѣхъ, который выдвинутъ г. Аменицкимъ.

Если связь выражается двумя удерживающими гладкими поверхностями, т. е. связью служитъ гладкая линія, то ея реакція лежитъ въ нормальной плоскости. Проекція движущей силы Q_n на нормальную плоскость въ данномъ случаѣ совпадаетъ съ центростремительной силой; если P_n есть проекція на нормальную плоскость заданной силы, то реакція равна геометрической разности $\overline{Q_n} - \overline{P_n}$. Если поверхность представляетъ собою плоскость, т. е. движеніе совершается по прямой линіи, то Q_n (центростремительная сила) равна нулю, и реакція равна $-\overline{P_n}$. Это и формулировано выше, какъ правило опредѣленія реакціи при движеніи точки по пересѣченію двухъ гладкихъ плоскостей. Этотъ случай намъ нуженъ для разрѣшенія парадокса г. Аменицкаго.

Повторяемъ, всѣ случаи, разсматриваемые въ элементарной физикѣ, относятся къ той категоріи, когда движущую силу можно опредѣлить непосредственно по заданнымъ силамъ. Но при разборѣ этихъ случаевъ въ элементарной физикѣ не дается общей характеристики ихъ, т. е. не указывается, чѣмъ эти случаи характеризуются, и не дается общаго правила, по которому въ этихъ случаяхъ опредѣляется реакція и движущая сила. Это и есть источникъ парадоксовъ въ родѣ тѣхъ, которые указаны г. Видеманомъ и г. Аменицкимъ.

Хотѣлось бы думать, что вопросъ можно считать исчерпаннымъ.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей приватъ-доцента **Е. Л. Буницкаго.**

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 78 (6 сер.). Найти остатокъ, происходящій отъ дѣленія 2^p на p^2, если p — простое число вида 2^n-1 или 2^n+1.

Е. Григорьевъ (Саратовъ).

№ 79 (6 сер.). Построить треугольникъ, зная положенія одной изъ его вершинъ A, центра I_a круга внѣвписаннаго относительно противоположной стороны a и центра O описаннаго круга.

Л. Богдановичъ (Н.-Новгородъ).

№ 80 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$2x^4+x^3\sqrt{3}-x^2(3+2\sqrt{3})-3x+3\sqrt{3}=0.$$

Л. Закутинскій (Черкассы).

№ 81 (6 сер.). Предполагая извѣстными тригонометрическія формулы, выражающія соотношенія между элементами треугольника, вывести формулу

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b,$$

пользуясь слѣдующимъ чертежомъ: внутри угла xSy, равнаго суммѣ угловъ $a+b$, проведена прямая SD, образующая съ прямыми xS и yS соотвѣтственно углы a и b, и изъ точки D возставленъ къ прямой SD перпендикуляръ, встрѣчающій прямыя Sx и Sy соотвѣтственно въ точкахъ M и N.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 46 (6 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$x^4 - 8x + 63 = 0.$$

Представивъ данное уравненіе послѣдовательно въ видѣ:

$$x^4 - 8x + 63 = x^4 + 16x^2 + 64 - 16x^2 - 8x - 64 + 63 =$$

$$= (x^2+8)^2 - (16x^2+8x+1) = (x^2+8)^2 - (4x+1)^2 = 0,$$

разлагаемъ его на два уравненія:

$$x^2 + 8 + 4x + 1 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + 8 - 4x - 1 = 0,$$

или

$$x^2 + 4x + 9 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 - 4x + 7 = 0.$$

Рѣшая эти квадратныя уравненія, находимъ четыре корня:

$$x_{1,2} = -2 \pm i\sqrt{5}, \quad x_{3,4} = 2 \pm i\sqrt{3}$$

даннаго уравненія $(i = \sqrt{-1})$; всѣ четыре корня оказываются мнимыми.

Н. Павлова (Петербургъ); *Н. Нейцъ* (Самара); *Б. И.* (Одесса); *Л. Закутинскій* (Черкассы); *Л. Марголисъ* (Петербургъ); *А. Ильинъ* (Астрахань); *В. Комаровъ* (Петербургъ); *Б. Поповъ* (Бѣжица).

№ 49 (6 сер.). *Доказать, что число*

$$3^{2n+2} - 8n - 9$$

при n *цѣломъ и неотрицательномъ кратно* 64.

Представивъ данное выраженіе въ видѣ:

$$3^{2n+2} - 8n - 9 = 3^2(3^2)^n - 8n - 9 = 9(1+8)^n - 8n - 9,$$

замѣтимъ, что выраженіе $(1+8)^n$, согласно съ формулой бинома, можно записать при n цѣломъ и не отрицательномъ въ видѣ:

$$(1+8)^n = 1 + 8n + 8^2t = 1 + 8n + 64t,$$

гдѣ t — цѣлое число. Итакъ, при n цѣломъ и неотрицательномъ имѣемъ:

$$3^{2n+2} - 8n - 9 = 9(1 + 8n + 64t) - 8n - 9 = 64n + 64 . 9t = 64(n + 9t),$$

гдѣ n и t — цѣлыя числа; поэтому разсматриваемое выраженіе кратно 64.

Н. Павлова (С.-Петербургъ); *Б. Посновъ* (Бѣжица); *К. Б.* (Сердобскъ); *Н. Нейцъ* (Самара); *Л. Закутинскій* (Черкассы); *Л. Марголинъ* (Петербургъ) *И. Зюзинъ* (Архангельскъ); *А. Кисловъ* (Москва); *Н. Суворовъ* (Арзамасъ).

№ 54 (6 сер.). *Доказать тожество*

$$\left(\frac{h_1}{h_2}+1\right)\left(\frac{h_2}{h_3}+1\right)\left(\frac{h_3}{h_1}+1\right)=\left(\frac{h_1}{r}-1\right)\left(\frac{h_2}{r}-1\right)\left(\frac{h_3}{r}-1\right),$$

гдѣ h_1, h_2, h_3 *— высоты, а* r *— радіусъ вписаннаго въ нѣкоторый треугольникъ круга.*

Обозначивъ черезъ s площадь, черезъ $2p$ — периметръ, черезъ a, b, c — стороны треугольника, на которыя опущены соотвѣтственно высоты h_1, h_2, h_3 треугольника, имѣемъ:

$$ah_1 = bh_2 = ch_3 = 2s = 2pr.$$

Поэтому

$$(1)\quad \left(\frac{h_1}{h_2}+1\right)\left(\frac{h_2}{h_3}+1\right)\left(\frac{h_3}{h_1}+1\right)=\left(\frac{b}{a}+1\right)\left(\frac{c}{b}+1\right)\left(\frac{a}{c}+1\right)=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}.$$

Съ другой стороны,

$$\frac{h_1}{r}=\frac{ah_1}{ar}=\frac{2s}{ar}=\frac{2pr}{ar}=\frac{a+b+c}{a},$$

откуда

$$\frac{h_1}{r}-1=\frac{b+c}{a};$$

точно такъ же получимъ:

$$\frac{h_2}{r}-1=\frac{c+a}{b},\quad \frac{h_3}{r}-1=\frac{a+b}{c}.$$

Слѣдовательно,

$$(2)\qquad \left(\frac{h_1}{r}-1\right)\left(\frac{h_2}{r}-1\right)\left(\frac{h_3}{r}-1\right)=\frac{b+c}{a}\cdot\frac{c+a}{b}\cdot\frac{a+b}{c}=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc},$$

а потому [см. (1), (2)]:

$$\left(\frac{h_1}{h_2}+1\right)\left(\frac{h_2}{h_3}+1\right)\left(\frac{h_3}{h_1}+1\right)=\left(\frac{h_1}{r}-1\right)\left(\frac{h_2}{r}-1\right)\left(\frac{h_3}{r}-1\right).$$

Н. Нейцъ (Самара); *И. Зюзинъ* (Архангельскъ); *Н. Панафутинъ* (Казань); *С. Посновъ* (Петербургъ); *А. Русецкій* (Кіевъ).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18

Обложка
ищется

Обложка
ищется