Обложка
ищется

Обложка
ищется

XLVIII Сем. № 8—9.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

И

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 572—573.

О максимальныхъ и минимальныхъ свойствахъ плоскихъ фигуръ.

Д. Крыжановскаго.

(Продолженіе).*

Въ разсмотрѣнныхъ нами задачахъ о кругѣ, равностороннемъ треугольникѣ и квадратѣ периметръ считается даннымъ, а искомой является фигура съ наибольшей площадью. Каждой такой задачѣ соотвѣтствуетъ обратная задача, въ которой задана площадь, а искомой является фигура съ наименьшимъ периметромъ. Подобная задача приведена въ началѣ этой статьи: какую форму надо придать плоской фигурѣ съ данной площадью, чтобы ея периметръ былъ какъ можно меньше? Отвѣтомъ на этотъ вопросъ служитъ кругъ. Это утвержденіе доказывается очень просто, если считать доказанной прямую теорему: кругъ больше всякой другой изопериметрической фигуры. Разсмотримъ кругъ V и какую либо другую фигуру W (напримѣръ, эллипсъ) съ равными площадями. Новый кругъ V', имѣющій одинаковый периметръ съ фигурой W, будетъ больше ея, согласно прямой теоремѣ, и, слѣдовательно, больше круга V. Но большему кругу принадлежитъ и большій периметръ; поэтому, периметръ V' или равный ему периметръ W больше периметра V, что и требовалось доказать.

Аналогично этому, равносторонній треугольникъ имѣетъ наименьшій периметръ по сравненію со всѣми другими равновеликими треугольниками; у квадрата периметръ меньше, чѣмъ у всѣхъ прочихъ равновеликихъ четырехугольниковъ. Эти и подобныя имъ обратныя теоремы доказываются по только что указанному способу, если считать вѣрными прямыя теоремы. Чтобы дать общую схему этихъ доказательствъ, я долженъ сперва условиться относительно нѣкоторыхъ терминовъ.

Во всякой фигурѣ я различаю „форму" и размѣры. Одной и той же „формѣ" соотвѣтствуетъ безчисленное множество фигуръ разной величины; всѣ онѣ подобны между собой. Въ интересующихъ насъ задачахъ мы разсматриваемъ фигуры, принадлежащія опредѣленному „классу формъ". Такимъ „классомъ формъ" являются въ одномъ случаѣ всѣ формы плоскихъ фигуръ, въ другомъ случаѣ — формы всѣхъ треугольниковъ, въ третьемъ — формы всѣхъ четырехугольниковъ, и т. д. Отвѣтомъ на разсматриваемыя задачи служитъ та или иная форма, напримѣръ, кругъ, квадратъ и т. д. Предположимъ, что доказана такая прямая тоорема: среди всѣхъ изопериметрическихъ фигуръ, принадлежащихъ классу формъ C, наименьшій периметръ имѣетъ фигура съ формой F. Въ такомъ случаѣ, можно доказать такую обратную теорему: „среди всѣхъ фигуръ съ равными площадями, принадлежащихъ классу формъ C, наименьшій периметръ имѣетъ фигура съ формой F". Для доказательства, обозначимъ черезъ P эту фигуру съ формой F и возьмемъ для сравненія любую другую фигуру Q изъ числа разсматриваемыхъ фигуръ съ равной площадью. Построимъ фигуру P', подобную фигурѣ P и, слѣдовательно, принадлежащую къ той же формѣ F, но съ периметромъ, равнымъ периметру фигуры Q. По прямой теоремѣ, площадь $P' >$ площади Q или равной ей площади P. Но фигуры P' и P подобны; слѣдовательно, и периметръ P' или равный ему периметръ фигуры Q больше периметра фигуры P, ч. и т. д.

Въ виду большого значенія разсматриваемаго соотношенія между прямыми и обратными теоремами, я позволю себѣ привести еще одно доказательство его справедливости.

Какъ, извѣстно, площади подобныхъ фигуръ относятся, какъ квадраты ихъ периметровъ; поэтому, всякой „формѣ" принадлежитъ опредѣленное значеніе коэффиціента k, связывающаго площадь фигуры S съ ея периметромъ p по формулѣ:

$$S = k \cdot p^2 \text{*)}.$$

Если среди коэффиціентовъ k, принадлежащихъ различнымъ формамъ разсматриваемаго класса, есть хоть одинъ наибольшій k_M то приведенная формула показываетъ, что при заданномъ периметрѣ p_0

*) Если за единицу площади брать площадь квадрата, сторона котораго равна принятой единицѣ длины, то величина коэффиціента k не зависитъ отъ выбора линейной единицы мѣры.

фигура, формѣ которой принадлежитъ этимъ коэффиціентъ, имѣетъ наибольшую площадь $S_M = k_M \cdot p_0^2$, а при заданной площади S_0 фигура съ той же формой имѣетъ наименьшій периметръ p_m, опредѣляемый изъ формулы: $S_0 = k_M \cdot p_m^2$. Итакъ, одна и та же форма служитъ отвѣтомъ для прямой и для обратной задачи. Весь вопросъ сводится къ доказательству существованія наибольшаго изъ разсматриваемыхъ коэффиціентовъ k и къ нахожденію соотвѣтствующей ему формы.

Въ дальнѣйшемъ я буду проводить только содержаніе тѣхъ обратныхъ теоремъ, которыя доказываются по указанной здѣсь схемѣ.

* *
*

Теорема. „Изъ всѣхъ фигуръ, ограниченныхъ произвольной по формѣ линіей L длины l и прямолинейнымъ отрѣзкомъ G произвольной длины, наибольшую площадь имѣетъ полукругъ, дуга котораго имѣетъ длину l“.

Обратно: „изъ всѣхъ равновеликихъ фигуръ, ограниченныхъ прямолинейнымъ отрѣзкомъ G произвольной длины и произвольной линіей L, наименьшую длину линія L имѣетъ у полукруга съ данной площадью“.

Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 10) представляютъ полукругъ и какую нибудь другую фигуру, удовлетворяющіе условіямъ прямой теоремы

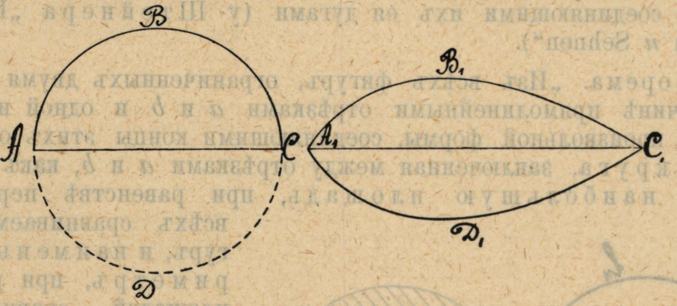


Рис. 10.

Перегибая эти фигуры около прямыхъ AC и A_1C_1, составимъ двѣ новыя фигуры: кругъ $ABCD$ и отличную отъ круга фигуру $A_1B_1C_1D_1$, периметры которыхъ равны $2l$. По теоремѣ о кругѣ, кругъ $ABCD$ больше фигуры $A_1B_1C_1D_1$; поэтому, полукругъ ABC больше фигуры $A_1B_1C_1$, равной половинѣ фигуры $A_1B_1C_1D_1$.

Теорема. „Изъ всѣхъ фигуръ, ограниченныхъ даннымъ прямолинейнымъ отрѣзкомъ a и произвольной по формѣ линіей L, наибольшую площадь, при данной длинѣ линіи L, имѣетъ сегментъ круга, ограниченный хордой a и дугой L; при равенствѣ же площадей всѣхъ сравниваемыхъ фигуръ, сегменту круга принадлежитъ самая короткая линія L“.

Доказательство. Разсмотримъ сегментъ круга $a\alpha$ (рис. 11) и какую либо другую фигуру aL, пря чемъ длина линіи L равна длинѣ дуги круга α. Дополнимъ дугу α дугой β до полной окружности; по теоремѣ о кругѣ, кругъ $\alpha\beta$ больше изопериметрической фигуры $L\beta$. Слѣдовательно, сегментъ $a\alpha$ больше фигуры aL.

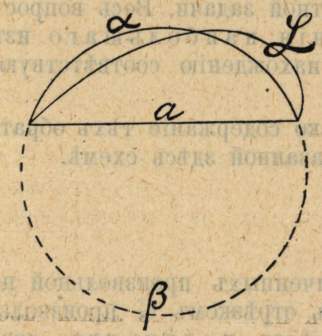


Рис. 11.

Для доказательства второй части теоремы предположимъ, что сегментъ круга $a\alpha$ и фигура aL (рис. 11) равновелики. Дополняя сегментъ до полнаго круга $\alpha\beta$, найдемъ, что этотъ кругъ равновеликъ фигурѣ $L\beta$ и потому периметръ круга меньше периметра $L\beta$. Слѣдовательно, дуга α короче линіи L.

Изъ этой теоремы непосредственно вытекаетъ такое интересное слѣдствіе:

„Если нѣкоторая фигура при какихъ либо условіяхъ имѣетъ наибольшую площадь, то всякая часть ея границы, которая по условію задачи соединяетъ какія нибудь двѣ неподвижныя точки и можетъ имѣть любую форму, сохраняя опредѣленную длину, должна представлять дугу круга“.

Въ дальнѣйшемъ я буду называть „частью круга, заключенною между n хордами“ фигуру, ограниченную n хордами нѣкоторой окружности и соединяющими ихъ ея дугами (у Штейнера „Kreisstück zwischen n Sehnen“).

Теорема. „Изъ всѣхъ фигуръ, ограниченныхъ двумя данными по величинѣ прямолинейными отрѣзками a и b и одной или двумя линіями произвольной формы, соединяюшими концы этихъ отрѣзковъ, часть круга, заключенная между отрѣзками a и b, какъ хордами, имѣетъ наибольшую площадь, при равенствѣ периметровъ всѣхъ сравниваемыхъ фигуръ, и наименьшій периметръ, при равенствѣ площадей сравниваемыхъ фигуръ“.

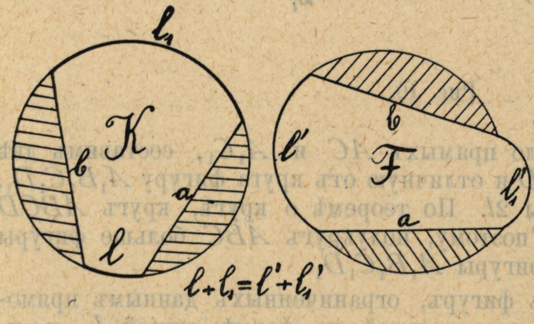


Рис. 12.

Доказательство. Сравнимъ часть круга K и какую нибудь другую фигуру F, удовлетворяющія условіямъ первой части теоремы (рис. 12). Дополнимъ фигуру K до полнаго круга K_1, прибавляя къ ней сегменты $a\alpha$, $a\beta$. Такіе же сегменты приложимъ къ отрѣзкамъ a и b периметра фигуры F, что даетъ новую фигуру F_1. Периметры круга K_1 и фигуры F_1 равны, такъ что $K_1 > F_1$. Отнимая же сегменты, найдемъ, что $K > F$.

Если же фигуры K и F равновелики, то и фигуры K_1 и F_1 будутъ равновелики, такъ что, согласно обратной теоремѣ о кругѣ, периметръ K_1 меньше периметра F_1; слѣдовательно, $l + l_1 < l' + l'_1$ (см. рис. 12).

Для полной строгости слѣдовало бы еще показать, что всегда существуетъ одна и только одна окружность, въ которой хорды a и b данной длины заключаютъ между собой одну или двѣ дуги данной длины s (или суммы длинъ s), — если только $s > |a - b|$, ибо иначе невозможно построить фигуру съ двумя прямолинейными отрѣзками a и b и одной или двумя линіями, длина которыхъ равна s. Но читатель самъ легко убѣдится въ справедливости этого утвержденія, если станетъ разсматривать окружность, діаметръ которой измѣняется отъ ∞ до бо́льшаго изъ отрѣзковъ a и b.

Послѣднюю теорему легко обобщить на случай сколькихъ угодно прямолинейныхъ отрѣзковъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и нѣсколькихъ линій произвольной формы $l_1, l_2, \ldots, l_k$ ($k \leqq n$), соединяющихъ ихъ концы. Такъ какъ доказательство не зависитъ отъ длины отдѣльныхъ линій $l_1, l_2, \ldots, l_k$, то можно положить ихъ равными нулю (если только $n > 2$), что даетъ такую теорему:

„Изъ всѣхъ многоугольниковъ съ данными сторонами $a, b, c, \ldots$, наибольшую площадь имѣетъ тотъ, около котораго можно описать кругъ“ *).

Лемма. „Если у двухъ треугольниковъ основанія и периметры соотвѣтственно равны между собой, то разность боковыхъ сторонъ больше у того треугольника, у котораго больше разность угловъ при основаніи“.

Если одинъ изъ треугольниковъ равнобедренный, то у послѣдняго разности боковыхъ сторонъ и угловъ при основаніи равны нулю и справедливость леммы очевидна. Докажемъ ее для двухъ неравнобедренныхъ треугольниковъ ACB и ADB. Расположимъ ихъ на общемъ основаніи такимъ образомъ, чтобы вершины ихъ лежали по одну сторону отъ перпендикуляра къ основанію въ его срединѣ (рис. 13). Такъ какъ $AC + CB = AD + DB$, то точка D должна лежать внѣ треугольника ACB. Поэтому, если $\alpha > \beta$,

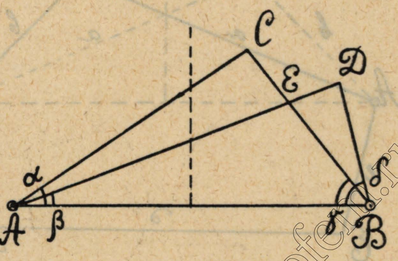


Рис. 13.

---

*) Не трудно видѣть, что существуетъ только одинъ кругъ, въ который можно вписать многоугольникъ съ данными сторонами. При этомъ порядокъ сторонъ безразличенъ, такъ какъ вмѣстѣ съ нимъ измѣняется лишь форма многоугольника, а его площадь и радіусъ описаннаго круга остаются одни и тѣ же.

то $\delta > \gamma$, такъ что $\delta - \beta > \gamma - \alpha$. Съ другой стороны,

$$AD + BC = (AE + EC) + (BE + ED) > AC + BD,$$

такъ что

$$AD - BD > AC - BC.$$

Итакъ, у одного и того же треугольника ADB разность угловъ при основанiи и разность боковыхъ сторонъ больше соотвѣтственныхъ разностей у другого треугольника ACB.

Слѣдствiе. Какъ видно изъ чертежа, наибольшiй уголъ δ и наименьшiй уголъ β изъ 4-хъ угловъ при общемъ основанiи принадлежатъ треугольнику ADB; а у такого треугольника, согласно второй основной теоремѣ (стр. 184), площадь меньше. Итакъ, при равныхъ основанiяхъ и периметрахъ площадь меньше у того треугольника, у котораго больше разность боковыхъ сторонъ.

Теорема. „Изъ всѣхъ изопериметрическихъ n-угольниковъ наибольшую площадь имѣетъ правильный n-угольникъ“.

Раньше были доказаны частные случаи этой теоремы для $n = 3$ и $n = 4$ (см. теоремы о равностороннемъ треугольникѣ и квадратѣ). Теперь мы можемъ доказать ее во всей ея общности. Для этого достаточно показать, что любой n-угольникъ меньше нѣкотораго изопериметрическаго съ нимъ n-угольника съ равными сторонами, такъ какъ послѣднiй, въ силу извѣстной намъ теоремы (стр. 213), меньше n-угольника съ такими же сторонами, вписаннаго въ кругъ, т. е. правильнаго.

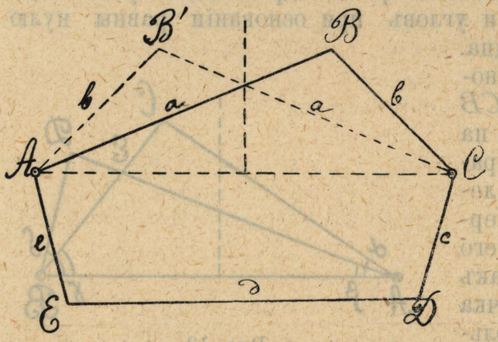


Рис. 14.

Итакъ, пусть данъ какой нибудь n-угольникъ $ABCDE$ со сторонами a, b, c, d, e (рис. 14). Надо доказать, что онъ меньше нѣкотораго изопериметрическаго n-угольника съ равными сторонами α, гдѣ

$$\alpha = \frac{a + b + c + d + e}{n}.$$

Замѣтимъ прежде всего, что всякiя двѣ сосѣднiя стороны выпуклаго многоугольника можно обмѣнять мѣстами, не измѣняя ни периметра, ни площади многоугольника. Дѣйствительно, если треугольникъ ABC (рис. 14) перевернуть около перпендикуляра въ срединѣ стороны AC, то стороны a и b обмѣняются мѣстами, а площадь треугольника и, слѣдовательно, всего многоугольника останется прежней.

Пользуясь этимъ свойствомъ, можно расположить стороны многоугольника въ любомъ порядкѣ, сохраняя его площадь и периметръ.

Если не всѣ стороны нашего многоугольника $ABCDE$ равны между собой, то среди нихъ должна быть хоть одна сторона, бо́льшая ариѳметической средней всѣхъ сторонъ a, и хоть одна сторона, меньшая a. Эти стороны можно расположить рядомъ; пусть это будутъ стороны $\mathfrak{a}$ и b (рис. 15):

$$\mathfrak{a} > a > b.$$

Треугольникъ ABC, содержащій эти стороны, замѣнимъ треугольникомъ $AB'C$, у котораго сумма сторонъ прежняя, но сторона AB' равна a. Такъ какъ

$$AB' + B'C = AB + BC$$

и

$$AB > AB' > BC,$$

то

$$B'C > BC = b,$$

$$B'C < AB = \mathfrak{a},$$

т. е.

$$\mathfrak{a} > B'C > b.$$

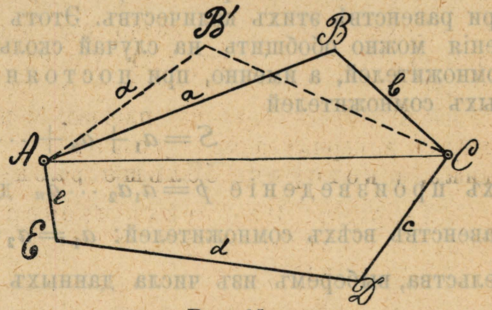


Рис. 15.

Итакъ, длины сторонъ AB' и $B'C$ заключаются между $\mathfrak{a}$ и b; поэтому

$$|AB' - B'C| < \mathfrak{a} - b.$$

Отсюда заключаемъ, на основаніи слѣдствія изъ послѣдней леммы, что $\triangle AB'C > \triangle ABC$. Итакъ, многоугольникъ $AB'CDE$, при одинаковомъ периметрѣ, имѣетъ бо́льшую площадь, чѣмъ $ABCDE$, при чемъ одна изъ его сторонъ AB' равна a. Можетъ случиться, что и $B'C = a$. Если же это не имѣетъ мѣста, то сторону $B'C$, если она $\gtreqless a$, можно расположить рядомъ со стороной, которая $\lesseqgtr a$, и по указанному способу замѣнить по крайней мѣрѣ одну изъ нихъ стороной, равной a, при чемъ периметръ многоугольника останется прежній, а площадь увеличится. Продолжая поступать такимъ образомъ, мы получимъ многоугольникъ, у котораго всѣ стороны равны a. Этотъ многоугольникъ съ равными сторонами будетъ, при одинаковомъ периметрѣ, имѣетъ бо́льшую площадь, чѣмъ многоугольникъ $ABCDE$, что и требовалось.

Основную идею этого доказательства, состоящую въ томъ, что стороны даннаго многоугольника замѣняютъ одну за другой сторонами равными ариѳметической средней первоначальныхъ сторонъ, я заимствовалъ изъ появившейся въ 1910 году книги Р. Штурма: „Наибольшія и наименьшія величины въ элементарной геометріи“ *). Этотъ любопытный способъ, повидимому, оставался до сихъ поръ неиспользованнымъ въ изслѣдованіяхъ о maxima и minima, хотя Штурмъ еще раньше сообщилъ о немъ въ 97 томѣ „Journal für Mathematik“.

*) R. Sturn, „Maxima und minima in der elementaren Geometrie“, Teubner, 1910.

Въ виду этого обстоятельства я позволю себѣ сдѣлать небольшое отступленіе въ область алгебры, чтобы дать еще одинъ примѣръ примѣненія этого метода.

Изъ тожества

$$4ab=(a+b)^2-(a-b)^2$$

видно, что произведеніе ab двухъ положительныхъ количествъ, при постоянствѣ нхъ суммы $a+b$, тѣмъ больше, чѣмъ меньше абсолютная величина ихъ разностн, т. е. $|a-b|$, и достигаетъ максимума при равенствѣ этихъ количествъ. Этотъ признакъ максимума произведенія можно обобщить на случай скольких угодно положительныхъ сомножителей, а именно, при постоянствѣ суммы n положительныхъ сомножителей

$$S=a_1+a_2+\cdots+a_n,$$

ихъ произведеніе $p=a_1a_2\cdots a_n$ достигаетъ максимума при равенствѣ всѣхъ сомножителей: $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{S}{n}\cdot$ Для доказательства, выберемъ изъ числа данныхъ сомножителей $a_1, a_2, \ldots, a_n$ два такихъ, чтобы одинъ былъ $>\alpha$, другой $<\alpha$, гдѣ $\alpha=\frac{S}{n}\cdot$ Если не всѣ a_i равны между собой, то это всегда возможно. Итакъ, пусть

$$a_1>\alpha>a_2.$$

Замѣнимъ a_1 черезъ α, a_2 черезъ такое число a_2', чтобы

$$a_1+a_2=\alpha+a_2',$$

т. е. чтобы величина суммы всѣхъ n сомножителей не измѣнилась. Легко видѣть, что $a_1>a_2'$, $a_2<a_2'$, такъ что α и a_2' заключаются между a_1 и a_2. Поэтому

$$|\alpha-a_2'|<a_1-a_2,$$

откуда слѣдуетъ, какъ мы видѣли, что

$$a_1a_2<\alpha a_2'.$$

Помножая обѣ части этого неравенства на произведеніе $(a_3a_4\ldots a_n)$ найдемъ, что $a_1a_2a_3\ldots a_n<\alpha a_2'a_3\ldots a_n$, при равной суммѣ сомножителей. Продолжая поступать такимъ образомъ, замѣнимъ поочередно всѣхъ множителей числомъ α, при чемъ величина произведенія всякій разъ будетъ увеличиваться, такъ что въ результатѣ окажется, что

$$a_1a_2\ldots a_n<\alpha^n,$$

что и требовалось доказать*).

* * *

*) Ср. Sturm, „Maxima und Minima“, S. 3.

Возвратимся къ многоугольникамъ. Мы видѣли, что при данномъ периметрѣ и данномъ числѣ сторонъ наибольшую площадь имѣетъ правильный многоугольникъ. Если же число сторонъ можетъ принимать различныя значенія, то для нахожденія наибольшаго многоугольника достаточно сравнить между собой правильные изопериметрическіе многоугольники съ различнымъ числомъ сторонъ, ибо каждый такой многоугольникъ является, какъ сказано, наибольшимъ представителемъ всѣхъ изопериметрическихъ одноименныхъ (т. е. съ одинаковымъ числомъ сторонъ) многоугольниковъ. Для сравненія же правильныхъ многоугольниковъ съ n и съ $n+k$ сторонами служитъ слѣдующая теорема:

„При равныхъ периметрахъ правильный многоугольникъ съ n сторонами меньше правильнаго многоугольника съ $n+1$ сторонами“.

Для доказательства возьмемъ на сторонѣ BC правильнаго n-угольника $ABCDEF$ (рис. 16) какую нибудь точку O и соединимъ ее съ одной изъ ближайшихъ не смежныхъ вершинъ A. Такъ какъ $AB=BC$, то $AB>BO$. Поэтому треугольникъ ABO меньше равнобедреннаго треугольника $AB'O$ съ тѣми же основаніемъ AO и периметромъ, такъ что правильный n-угольникъ $ABCDEF$ меньше неправильнаго изопериметрическаго $(n+1)$-угольника $AB'OCDEF$. Такъ какъ послѣдній въ свою очередь меньше правильнаго изопериметрическаго $(n+1)$-угольника, то этотъ послѣдній подавно больше правильнаго n-угольника $ABCDEF$.

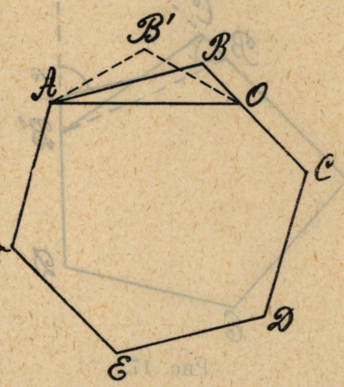


Рис. 16.

Итакъ, при равныхъ периметрахъ, равносторонній треугольникъ меньше квадрата, послѣдній меньше правильнаго пятиугольника, который меньше правильнаго шестиугольника и т. д. Разсматривая кругъ, какъ правильный многоугольникъ съ безконечно большимъ числомъ сторонъ, находимъ, что кругъ больше всякаго правильнаго многоугольника, периметръ котораго равенъ длинѣ его окружности.

Но въ сущности это не новый для насъ результатъ, такъ какъ при доказательствѣ одной изъ теоремъ (стр. 213), приведшихъ насъ къ нему, мы пользовались теоремой о кругѣ, представляющей обобщеніе этого результата. Впрочемъ, къ этому результату можно придти и независимо отъ теоремы о кругѣ, если предположить, что среди всѣхъ n-угольниковъ съ даннымъ периметромъ существуетъ наибольшій. А именно, при этомъ предположеніи легко доказать теорему о томъ, что правильный n-угольникъ больше всякаго неправильнаго n-угольника съ тѣмъ же периметромъ (стр. 214). Возьмемъ для доказательства какой нибудь *неправильный* n-угольникъ $ABCDE$ и покажемъ, что онъ не можетъ быть наибольшимъ по сравненію съ другими n-угольниками того же периметра. Если у многоугольника $ABCDE$ есть неравныя между собой стороны, то, какъ выше (стр. 215) было доказано, независимо отъ теоремы о кругѣ, такой n-угольникъ *меньше* нѣкотораго другого изопериметрическаго n-угольника съ равными между собой сторонами. Слѣдовательно, нашъ n-угольникъ $ABCDE$ не можетъ быть наибольшимъ.

Разсмотримъ теперь неправильный n-угольникъ $ABCDE$ съ *равными* сторонами. У него должны быть *неравные углы*, иначе онъ былъ бы правильнымъ. Пусть $\angle ABC > \angle BCD$ (рис. 17). Если продолжить стороны AB и DC до пересѣченія въ точкѣ O, то въ треугольникѣ OBC окажется $\angle OBC < \angle OCB$, поэтому $OC < OB$. Наложимъ треугольникъ OBC на самого себя обратной стороной такъ, чтобы уголъ при O остался на мѣстѣ, а стороны OB н OC помѣнялись мѣстами. Треугольникъ займетъ положеніе $OB'C'$, при чемъ $BC' = CB'$, $BC = B'C'$, такъ что треугольники BCB' и $BC'B'$ равны между собой. Слѣдовательно, n-угольникъ $AC'B'DE$ имѣетъ такіе же периметръ и площадь, что и n-угольникъ $ABCDE$. Но теперь стороны AC' и $C'B'$ не равны между собой, такъ что, замѣнивъ треугольникъ $AC'B'$ новымъ, равнобедреннымъ, треугольникомъ съ тѣмъ же основаніемъ AB' и периметромъ, мы увеличимъ площадь n-угольника $AC'B'DE$, не измѣняя его периметра. Итакъ, неправильный n-угольникъ не можетъ быть наибольшимъ даже въ томъ случаѣ, когда всѣ его стороны равны между собой.

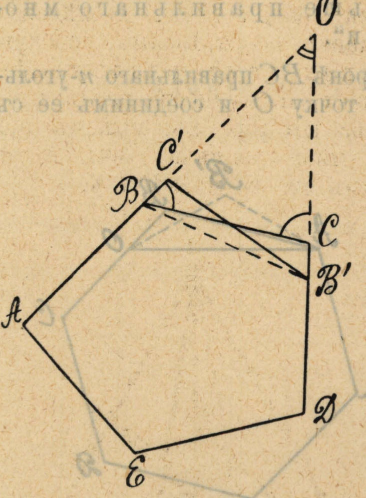


Рис. 17.

Обратимъ наше вниманіе на то, какъ просто доказывается и теорема о кругѣ, и эта теорема объ одноименныхъ изопериметрическихъ многоугольникахъ, если только *постулировать существованіе искомой наибольшей фигуры*.

Ограничиваясь тѣми примѣненіями перваго метода *Штейнера*, которыя даны на предыдущихъ страницахъ, я сдѣлаю теперь небольшую экскурсію въ область *физики*, представляющей любопытнѣйшіе примѣры примѣненія максимальныхъ свойствъ изопериметрическихъ фигуръ.

* *
*

(Окончаніе слѣдуетъ).

О преобразованіи многогранниковъ.

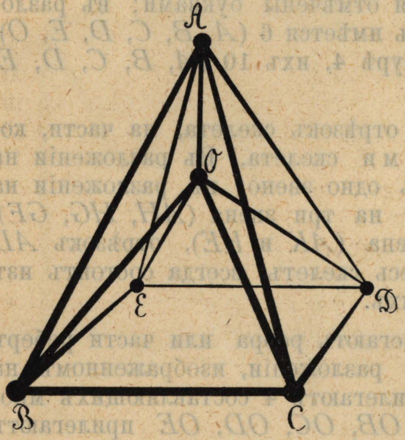
Прив. доц. В. Кагана.

Докладъ, прочитанный въ Общемъ Собраніи Перваго Всероссійскаго Съѣзда Преподавателей Математики.

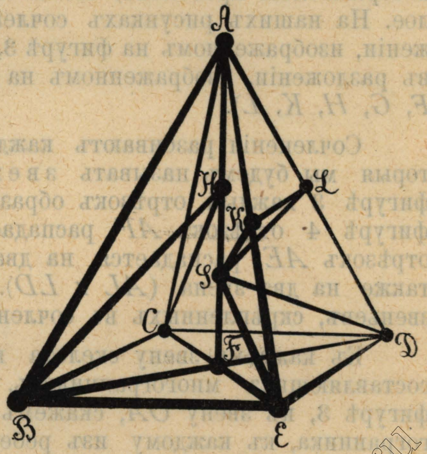
*(Окончаніе *).*

§ 3. О скелетѣ разложенія.

Положимъ, что нѣкоторый многогранникъ какимъ либо образомъ разбитъ на составляющіе многогранники; ребра этихъ послѣднихъ располагаются въ исходномъ многогранникѣ по отрѣзкамъ, совокупность которыхъ мы будемъ называть скелетомъ разложенія. Мы представляемъ себѣ этотъ скелетъ, какъ совокупность натянутыхъ и скрѣпленныхъ между собою проволокъ, которыя мы можемъ при желаніи отдѣлить какъ отъ исходнаго многогранника, такъ и отъ составляющихъ многогранниковъ. Пояснимъ это на примѣрахъ.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

На фиг. 3 изображена четырехгранная пирамида $ABCDE$, которая разложена на четыре трехгранныя пирамиды ($OABC$, $OACD$, $OADE$, $OAEB$) и одну четырехгранную пирамиду ($OBCDE$), которыя имѣютъ общую вершину въ точкѣ O. Ребра составляющихъ пирамидъ располагаются по 13 отрѣзкамъ, изъ которыхъ 8 совпадаютъ съ ребрами исходной пирамиды, а остальные 5 сходятся въ точкѣ O и расположены внутри исходной пирамиды. Эти 13 отрѣзковъ изображены на чертежѣ; если себѣ представить, что нанесенныя на чертежѣ

*) См. „Вѣстникъ“, № 570.

линіи реализованы въ видѣ безконечно тонкихъ, скрѣпленныхъ проволокъ, то скелетъ будетъ реализованъ: его можно будетъ отдѣлить отъ многогранниковъ, въ него можно вложить составляющіе многогранники, которые въ совокупности составятъ исходный многогранникъ.

На фигурѣ 4 изображена четырехгранная пирамида $ABCDE$. Она разложена на четыре трехгранныя пирамиды: $ABCF$, $ACDF$, $ADEF$, $AEBF$; изъ нихъ первая, въ свою очередь, разложена на двѣ трехгранныя пирамиды ($BACH$ и $BCHF$), а третья на три пирамиды, сходящіяся въ вершинѣ G ($GFED$, $GEKLD$, $GAKL$). Такимъ образомъ получается 7 пирамидъ, на которыя разбивается наша исходная пирамида. Глядя на этотъ рисунокъ, мы представляемъ себѣ исходную и составляющія пирамиды. Но если мы отрѣшимся отъ тѣлесныхъ представленій и вообразимъ себѣ просто проволоки, натянутыя по всѣмъ линіямъ рисунка, то онѣ образуютъ скелетъ разложенія.

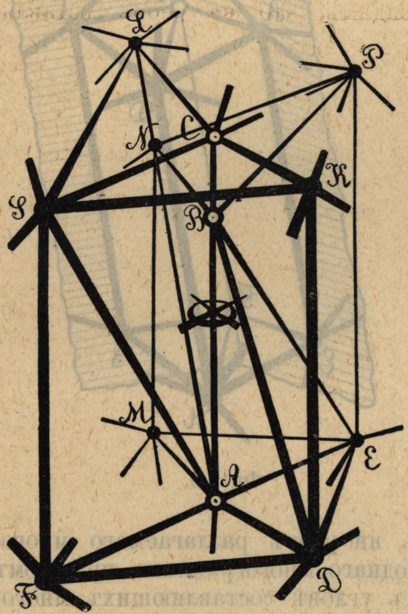
Разсматривая эти скелеты, мы видимъ, что на ребрѣ составляющаго многогранника могутъ находиться вершины и другихъ составляющихъ многогранниковъ. Всѣ точки, въ которыхъ находятся вершины составляющихъ многогранниковъ, мы будемъ называть сочлененіями скелета: въ этихъ точкахъ должны быть скрѣплены наши воображаемыя проволоки, чтобы скелетъ представлялъ собою одно цѣлое. На нашихъ рисункахъ сочлененія отмѣчены буквами; въ разложеніи, изображенномъ на фигурѣ 3, ихъ имѣется 6 (A, B, C, D, E, O), въ разложеніи, изображенномъ на фигурѣ 4, ихъ 10 (A, B, C, D, E, F, G, H, K, L).

Сочлененія разбиваютъ каждый отрѣзокъ скелета, на части, которыя мы будемъ называть звеньями скелета. Въ разложеніи на фигурѣ 3 каждый отрѣзокъ образуетъ одно звено; въ разложеніи на фигурѣ 4 отрѣзокъ AF распадается на три звена (AH, HG, GF), отрѣзокъ AE распадается на два звена (AK и KE), отрѣзокъ AD также на два звена (AL и LD). Весь скелетъ всегда состоитъ изъ звеньевъ, скрѣпленныхъ въ сочлененіяхъ.

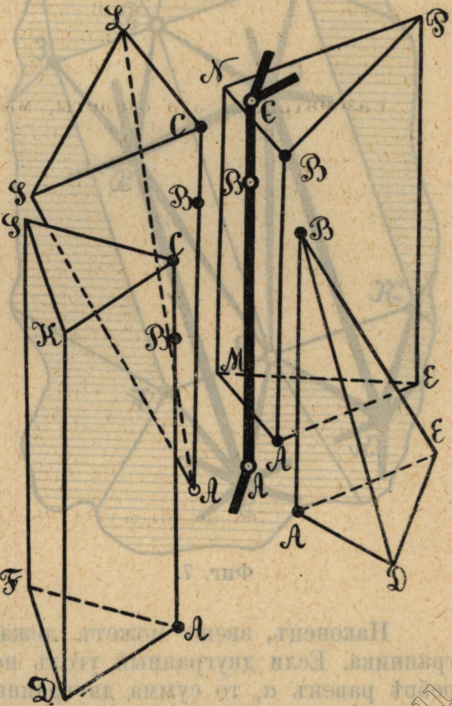
Къ каждому звену скелета прилегаютъ ребра или части реберъ составляющихъ многогранниковъ. Въ разложеніи, изображенномъ на фигурѣ 3, къ звену OA, скажемъ, прилегаютъ 4 составляющихъ многогранника, къ каждому изъ реберъ OB, OC, OD, OE прилегаютъ по 3 составляющихъ многогранника, къ каждому изъ нижнихъ звеньевъ BC, CD, DE, EB и боковыхъ звеньевъ AB, AC, AD, AE, прилегаютъ по 2 многогранника. Въ разложеніи, изображаемомъ на фигурѣ 4, звено GH окружено 4 многогранниками; къ звену CH прилегаютъ ребра двухъ многогранниковъ, въ то же время оно само лежитъ на грани (ACF) одного изъ составляющихъ многогранниковъ. Изъ этихъ примѣровъ мы видимъ, что звенья могутъ быть различно расположены относительно составляющихъ многогранниковъ; сообразно этому мы ихъ разобьемъ на 3 типа.

Мы будемъ относить звено къ первому типу, если многогранники, ребра котораго къ нему прилегаютъ, окружаютъ это звено со всѣхъ сторонъ, такъ что прилегающіе къ нему двугранные углы составляютъ въ суммѣ $4d$. Таковы внутреннія звенья (OA, OB, OC, OD) въ разложеніи 3; таковы звенья AH, HG и GF въ разложеніи 4.

Фигуры 5 и 6 предназначены для лучшаго выясненія условій, при которыхъ мы относимъ звено къ первому типу. Фигура 5 изображаетъ часть разложенія нѣкотораго многогранника на составляющіе многогранники, именно, ту часть, которая прилегаетъ къ звену AB. Къ этому звену прилегаютъ своими ребрами 4 составляющихъ многогранника: передняя трехгранная призма $ADFCKG$, задняя трехгранная призма $AEMBPN$, съ правой стороны трехгранная пирамида $BADE$, съ лѣвой стороны трехгранная же пирамида $ACGL$. Чтобы это можно было отчетливѣе различить, на фигурѣ 6-ой изображено



Фиг. 5.



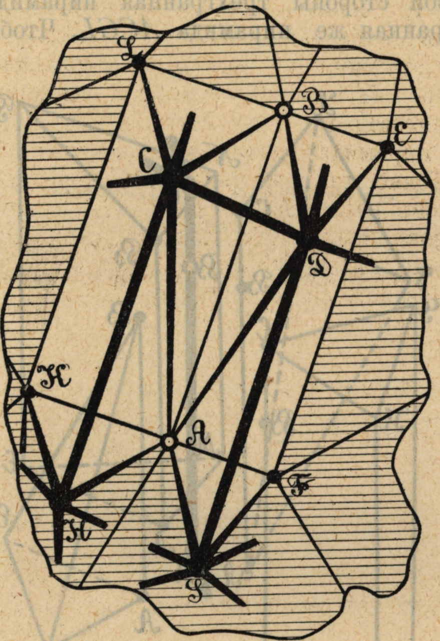
Фиг. 6.

то же разложеніе, при чемъ составляющіе многогранники раздвинуты. Внутри жирнымъ штрихомъ отмѣчена часть скелета и на немъ звено AB. Здѣсь отчетливо видны двугранные углы, прилегающіе къ этому звену и образующіе въ совокупности $4d$, какъ отмѣчено кружкомъ на фигурѣ 5-ой.

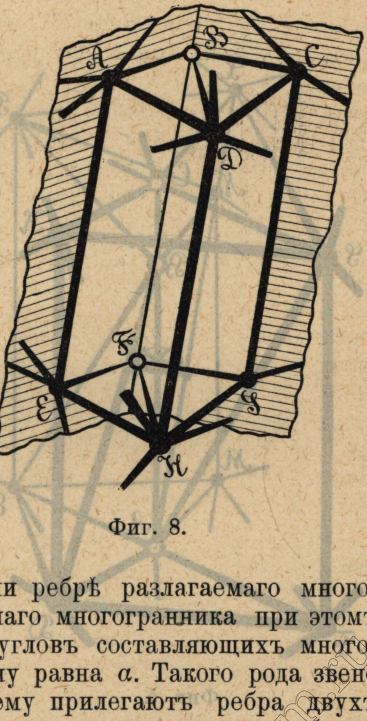
Относительно каждаго ребра перваго типа мы будемъ говорить, что оно имѣетъ аргументъ въ $4d$; это есть лишь иное выраженіе того факта, что облегающіе звено двугранные углы составляющихъ многогранниковъ образуютъ въ суммѣ $4d$.

Но иногда двугранные углы составляющихъ многогранниковъ, прилегая къ звену, образуютъ въ совокупности не $4d$, а только $2d$. Это имѣетъ мѣсто въ томъ случаѣ, когда звено лежитъ на грани составляющаго или исходнаго многогранника. Таковы на фигурѣ 4-ой звенья FB, FC, FD, FE, GE, GD и др. Такого рода звено AB изображено отдѣльно на фигурѣ 7-ой; къ нему прилегаетъ трехгранная пирамида $ABCD$ и двѣ трехгранныя призмы $AHKBCL$ и $AGFBDE$. Ихъ двугранные углы, прилегающіе къ звену AB, составляютъ въ суммѣ $2d$.

Въ этомъ случаѣ мы будемъ говорить, что звено принадлежитъ ко второму типу и имѣетъ аргументъ $2d$.



Фиг. 7.



Фиг. 8.

Наконецъ, звено можетъ лежать ни ребрѣ разлагаемаго многогранника. Если двугранный уголъ исходнаго многогранника при этомъ ребрѣ равенъ a, то сумма двугранныхъ угловъ составляющихъ многогранниковъ, прилегающихъ къ этому звену равна a. Такого рода звено BF изображено на фигурѣ 8-ой; къ нему прилегаютъ ребра двухъ составляющихъ призмъ и сумма двугранныхъ угловъ при этихъ ребрахъ равна двугранному углу a, образуемому заштрихованными гранями исходнаго многогранника.

Такого рода звенья мы будемъ относить къ третьему типу и каждому такому звену отнесемъ аргументъ, равный двугранному углу a исходнаго многогранника, на которомъ оно лежитъ.

Итакъ, звенья скелета разлагаются на три типа; звенья перваго типа имѣютъ аргументъ $4d$, звенья второго типа имѣютъ аргументъ $2d$, звенья третьяго типа имѣютъ аргументы, равные двуграннымъ угламъ исходнаго многогранника.

§ 4. Объ отрѣзкахъ разложенія.

Ребра составляющихъ многогранниковъ прилегаютъ къ звеньямъ скелета. Иногда ребро цѣликомъ прилегаетъ къ одному звену, иногда же ребро разбивается сочлененіями на нѣсколько частей. Эти части мы будемъ называть отрѣзками разложенія. Нужно отчетливо уяснить себѣ разницу между звеньями и отрѣзками разложенія; звенья принадлежатъ скелету; каждый же отрѣзокъ разложенія лежитъ на одномъ изъ реберъ составляющаго многогранника. Если мы раздвинемъ составляющіе многогранники, то звенья останутся на скелетѣ, а отрѣзки разложенія отойдутъ вмѣстѣ съ ребрами. Это отчетливо видно на фигурѣ 6-ой. На скелетѣ ABC, отмѣченномъ жирнымъ штрихомъ, мы видимъ звенья AB и BC. Ребро AB правой пирамиды цѣликомъ примыкаетъ къ звену AB; оно содержитъ поэтому только одинъ отрѣзокъ разложенія. Ребро AC лѣвой пирамиды разлагается звеньями на 2 отрѣзка разложенія AB и BC. Точно такъ же ребро AC передней призмы состоитъ изъ двухъ отрѣзковъ разложенія, а ребро AB задней призмы имѣетъ только одинъ отрѣзокъ разложенія. Если мы сдвинемъ снова составляющіе многогранники, то къ звену AB на скелетѣ примкнутъ 4 равныхъ ему отрѣзка разложенія на четырехъ прилегающихъ къ этому звену многогранникахъ.

§ 5. О двухъ разложеніяхъ.

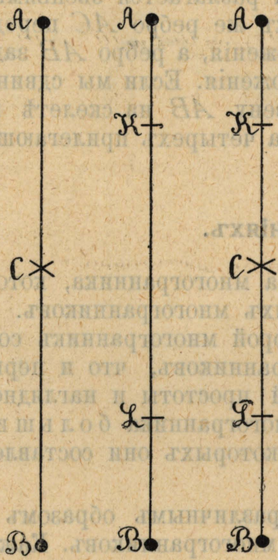
Положимъ теперь, что мы имѣемъ два многогранника, которые составлены изъ соотвѣтственно конгруэнтныхъ многогранниковъ. Выражаясь нагляднѣе, можно сказать, что второй многогранникъ составленъ изъ тѣхъ же составляющихъ многогранниковъ, что и первый, только иначе расположенныхъ. Для большей простоты и наглядности мы будемъ называть наши два исходныхъ многогранника большими многогранниками, а тѣ многогранники, изъ которыхъ они составлены, малыми многогранниками.

Итакъ, оба большихъ многогранника различнымъ образомъ составлены изъ однихъ и тѣхъ же малыхъ многогранниковъ. Каждый изъ малыхъ многогранниковъ фигурируетъ, слѣдовательно, въ одномъ и въ другомъ разложеніи.

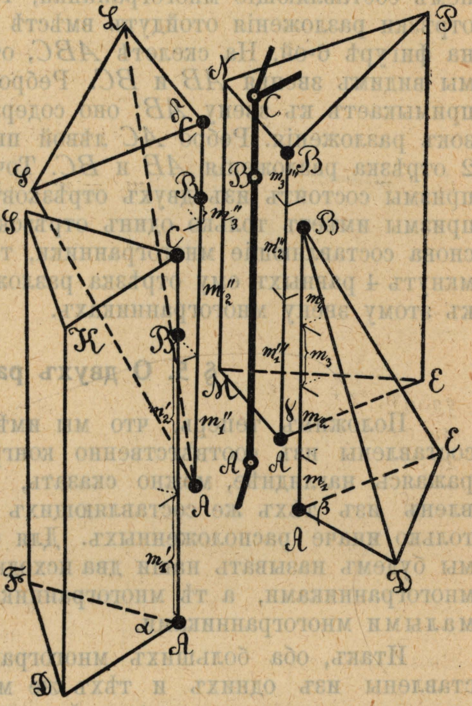
Каждому разложенію соотвѣтствуетъ свой скелетъ; звенья этого скелета раздѣляютъ ребра малыхъ многогранниковъ на отрѣзки разложенія. Возьмемъ какое либо ребро AB одного изъ малыхъ многогранниковъ; оно фигурируетъ въ одномъ и въ другомъ разложеніи. Въ первомъ разложеніи это ребро раздѣляется звеньями, скажемъ, на два отрѣзка AC и CB (фиг. 9); въ другомъ разложеніи то же самое ребро раздѣляется на иное число частей, скажемъ, на три (AK, KL и LB на фиг. 9). Нанесемъ теперь на ребрѣ точки дѣленія, соотвѣтствующія одному и другому разложенію, какъ это показано на 3-мъ отрѣзкѣ AB на фиг. 9. Отрѣзки разобьются теперь на болѣе мелкіе отрѣзки, которые мы будемъ называть элементарными отрѣзками. Эти элементарные отрѣзки опредѣляются уже не однимъ, а обоими разложеніями.

Мы представимъ себѣ теперь, что на каждомъ ребрѣ каждаго изъ малыхъ многогранниковъ насѣчены элементарные отрѣзки, опредѣляемые на этомъ ребрѣ обоими разложеніями. Эти элементарные отрѣзки располагаются на ребрахъ малыхъ многогранниковъ въ одномъ и другомъ разложеніи и въ обоихъ разложеніяхъ мы имѣемъ тѣ же элементарные отрѣзки.

Фигура 10 воспроизводитъ фигуру 6 съ тѣмъ различіемъ, что на отрѣзкахъ разложенія AB на каждомъ ребрѣ малаго многогранника нанесены элементарные отрѣзки. На ребрѣ AB правой пирамиды мы видимъ на передней призмѣ четыре элементарныхъ



Фиг. 9.



Фиг. 10.

отрѣзка. На передней призмѣ отрѣзокъ AB имѣетъ два элементарныхъ отрѣзка, а на каждомъ изъ остальныхъ многогранниковъ отрѣзокъ AB разбитъ по 3 элементарныхъ отрѣзка.

Каждому элементарному отрѣзку мы вновь припишемъ *аргументъ*; именно, подъ аргументомъ каждаго элементарнаго отрѣзка мы будемъ разумѣть двугранный уголъ при томъ ребрѣ, на которомъ онъ лежитъ. Всѣ элементарные отрѣзки, лежащіе на одномъ и томъ же ребрѣ, имѣютъ одинъ и тотъ же аргументъ, именно двугранный уголъ при этомъ ребрѣ.

Но мы пойдемъ дальше и каждому элементарному отрѣзку отнесемъ нѣкоторое положительное число, которое будемъ называть *массой* этого элементарнаго отрѣзка. Эти положительныя числа мы выберемъ совершенно произвольно съ однимъ только условіемъ: если къ одному и тому же звену, въ томъ или другомъ разложеніи прилегаютъ на одномъ ребрѣ элементарные отрѣзки съ массами m_1, m_2, m_3, ... m_i, — на другомъ ребрѣ элементарные отрѣзки съ массами m_1', m_2', ... m_j', наконецъ, на третьемъ ребрѣ элементарные отрѣзки съ массами m_1'', m_2'', m_3'', ... m_k'' и т. д., то наше единственное требованіе будетъ заключаться въ томъ, чтобы были равны ихъ суммы:

$$m_1 + m_2 + m_3 \cdots m_i = m_1' + m_2' \cdots m_j' = m_1'' + m_2'' + \cdots + m_k''. \qquad (7)$$

Этой группѣ уравненій должны удовлетворять массы элементарныхъ отрѣзковъ, прилежащихъ къ одному звену; общее значеніе M этихъ суммъ мы примемъ за массу самого звена. Звено AB на фигурѣ 10 потребуетъ, такимъ образомъ, слѣдующихъ уравненій:

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = m_1' + m_2' = m_1'' + m_2'' + m_3'' = m_1''' + m_2''' + m_3'''; \qquad (8)$$

общее же значеніе каждой изъ этихъ суммъ представитъ массу звена AB.

Каждому звену соотвѣтствуетъ, такимъ образомъ, группа уравненій вида (7). Такихъ группъ получится, слѣдовательно, столько, сколько есть звеньевъ въ обоихъ разложеніяхъ.

Уравненій получится много; можно ли всѣмъ этимъ уравненіямъ удовлетворить? Очевидно, возможно: для этого достаточно принять за массу каждаго элементарнаго отрѣзка его длину. Мы сдѣлаемъ, однако, другой выборъ. Согласно нашему требованію, массы должны удовлетворять только системамъ уравненій вида (7). Но это суть однородныя линейныя уравненія съ цѣлыми коэффиціентами; и разъ они удовлетворяются одной системой положительныхъ значеній, то имъ можно удовлетворить также цѣлыми положительными значеніями для неизвѣстныхъ (§ 2). Вотъ такую систему цѣлыхъ положительныхъ значеній мы примемъ за массы элементарныхъ отрѣзковъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ массы звеньевъ также выразятся цѣлыми числами.

Прежде чѣмъ перейти къ послѣдней и важнѣйшей части этихъ разсужденій резюмируемъ установленные термины и положенія.

Мы имѣемъ два большихъ многогранника, составленныхъ изъ однихъ и тѣхъ же малыхъ многогранниковъ. Каждому разложенію соотвѣтствуетъ свой скелетъ, составленный изъ звеньевъ. Каждому звену приписанъ аргументъ, равный $4d$, $2d$ или одному изъ двугранныхъ угловъ большого многогранника.

Звенья раздѣляютъ ребра малыхъ многогранниковъ на отрѣзки разложенія; соединяя дѣленія одного и того же ребра въ обоихъ разложеніяхъ, мы разбили эти отрѣзки на меньшіе элементарные отрѣзки. Каждому элементарному отрѣзку мы приписали аргументъ; это есть двугранный уголъ при томъ ребрѣ, на которомъ этотъ элементарный отрѣзокъ лежитъ. Элементарные отрѣзки, лежащіе на одномъ и томъ же ребрѣ, имѣютъ одинъ и тотъ же аргументъ.

Каждому элементарному отрѣзку мы также отнесли цѣлое положительное число, которое мы назвали его массой. Эти числа удовлетворяютъ слѣдующему условію: если къ одному и тому же звену прилегаютъ нѣсколько реберъ, то массы элементарныхъ отрѣзковъ, прилегающихъ къ этому звену, имѣютъ на одномъ ребрѣ такую же сумму, какъ на другомъ, третьемъ и т. д. Эту общую сумму, выражающуюся, конечно, также цѣлымъ положительнымъ числомъ, мы назвали *массой звена*.

Итакъ, каждое звено скелета имѣетъ массу и аргументъ.

§ 6. Основная теорема.

Мы введемъ еще одно — уже послѣднее новое понятіе.

Подъ *вѣсомъ* элементарнаго отрѣзка или звена мы будемъ разумѣть произведеніе изъ его массы на аргументъ. Подъ вѣсомъ нѣсколькихъ отрѣзковъ или звеньевъ мы будемъ разумѣть сумму вѣсовъ этихъ отрѣзковъ или этихъ звеньевъ. Подъ вѣсомъ скелета мы будемъ разумѣть сумму вѣсовъ всѣхъ его звеньевъ.

Мы имѣемъ два большихъ многогранника, составленныхъ изъ однихъ и тѣхъ же малыхъ многогранниковъ. Моя основная теорема заключается въ томъ, что оба скелета имѣютъ одинъ и тотъ же вѣсъ.

Основная теорема. Если два многогранника составлены изъ однихъ и тѣхъ же составляющихъ многогранниковъ, то скелеты обоихъ разложеній имѣютъ одинъ и тотъ же вѣсъ.

Доказательство. Чтобы доказать эту теорему, мы покажемъ предварительно, что вѣсъ каждаго звена въ скелетѣ равенъ суммѣ вѣсовъ всѣхъ прилегающихъ къ нему элементарныхъ отрѣзковъ.

Возьмемъ звено AB на фигурѣ 10-й; къ нему прилегаютъ 4 отрѣзка AB на ребрахъ четырехъ составляющихъ многогранниковъ. На ребрѣ правой пирамиды отрѣзокъ AB состоитъ изъ четырехъ элементарныхъ отрѣзковъ съ массами m_1, m_2, m_3, m_4 и общимъ аргументомъ β. Поэтому сумма вѣсовъ этихъ элементарныхъ отрѣзковъ равна:

$$m_1\beta + m_2\beta + m_3\beta + m_4\beta = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)\,\beta = M\beta,$$

гдѣ M есть масса звена AB. Точно такъ же сумма вѣсовъ всѣхъ элементарныхъ отрѣзковъ, прилегающихъ къ звену AB, на грани передней призмы равна:

$$m_1'\alpha + m_2'\alpha = (m_1' + m_2')\,\alpha = M\alpha.$$

Сумма вѣсовъ элементарныхъ отрѣзковъ, прилегающихъ къ тому же звену со стороны лѣвой пирамиды, равна $M\delta$, а сумма вѣсовъ элементарныхъ отрѣзковъ, прилегающихъ къ звену AB со стороны задней призмы равна $M\gamma$.

Такимъ образомъ сумма вѣсовъ всѣхъ элементарныхъ отрѣзковъ, прилегающихъ къ звену AB, равна:

$$M\alpha + M\beta + M\gamma + M\delta = M\,(\alpha + \beta + \gamma + \delta).$$

Здѣсь M есть масса звена, а $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ равно $4d$, т. е. аргументу звена. Правая часть послѣдняго равенства представляетъ, такимъ образомъ, вѣсъ звена.

Совершенно ясно, что это разсужденіе носитъ общій характеръ и можетъ быть примѣнено ко всякому звену. Но если вѣсъ звена равняется суммѣ вѣсовъ всѣхъ прилегающихъ къ нему элементарныхъ отрѣзковъ, то вѣсъ всего скелета равенъ суммѣ вѣсовъ всѣхъ элементарныхъ отрѣзковъ этого разложенія.

Съ другой стороны, какъ мы видѣли выше, элементарные отрѣзки въ обоихъ разложеніяхъ одни и тѣ же, такъ какъ они опредѣляются совокупностью двухъ разложеній; при этомъ каждый элементарный отрѣзокъ имѣетъ въ обоихъ разложеніяхъ одну и ту же массу, одинъ и тотъ же аргументъ, а слѣдовательно, одинъ и тотъ же вѣсъ. Отсюда слѣдуетъ, что вѣса обоихъ скелетовъ могутъ быть представлены въ видѣ суммъ одинаковыхъ слагаемыхъ, а потому равны между собой.

§ 7. Теорема Дена.

Теперь нетрудно видѣть, что теорема Дена, формулированная въ § 1-мъ, представляетъ собой прямое слѣдствіе доказаннаго предложенія; въ самомъ дѣлѣ, пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ будутъ двугранные углы перваго большого многогранника. Въ такомъ случаѣ, какъ мы видѣли въ § 3, звенья его скелета имѣютъ аргументами эти двугранные углы, а также $2d$ и $4d$. Пусть M_1 будетъ сумма всѣхъ тѣхъ звеньевъ, которые имѣютъ аргументы a_1; пусть M_2 будетъ сумма массъ всѣхъ звеньевъ съ аргументомъ a_2 и т. д.; пусть наконецъ M_k будетъ суммой массъ тѣхъ звеньевъ, которыя имѣютъ аргументъ a_k. Далѣе черезъ M' обозначимъ сумму массъ тѣхъ звеньевъ, которыя имѣютъ аргументъ $2d$, а черезъ M'' сумму масъ тѣхъ звеньевъ, которыя имѣютъ аргументъ $4d$. Въ такомъ случаѣ вѣсъ скелета въ разложеніи этого многогранника равенъ:

$$M_1a_1+M_2a_2+\cdots+M_ka_k+2M'd+4M''d=M_1a_1+M_2a_2+\cdots+M_ka_k+2Md,$$

гдѣ $M=M'+2M''$. Здѣсь $M_1, M_2, \ldots M_k$ суть цѣлыя положительныя числа. Что касается числа M, то оно можетъ иногда обратиться и въ нуль, такъ какъ звеньевъ съ аргументами $2d$ и $4d$ иногда можетъ и не быть; напримѣръ, если мы разложимъ октаэдръ на 2 четырехугольныя пирамиды, то такихъ звеньевъ не будетъ.

Такимъ же образомъ вѣсъ скелета въ разложеніи второго многогранника выражается черезъ:

$$N_1\beta_1+N_2\beta_2+N_3\beta_3+\cdots+N_l\beta_l+2Nd,$$

гдѣ коэффиціенты $N_1, N_2, \ldots, N_e$, суть цѣлыя положительныя числа а N есть цѣлое положительное число или нуль. Въ силу нашей основной теоремы отсюда слѣдуетъ, что

$$M_1a_1+M_2a_2+\cdots+M_ka_k+2Md=N_1\beta_1+N_2\beta_2+\cdots+N_l\beta_l+2Nd. \qquad (9)$$

Это и есть теорема Дена.

Итакъ, если два многогранника съ двугранными углами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ могутъ быть составлены изъ однихъ и тѣхъ же многогранниковъ, т. е. могутъ быть преобразованы одинъ въ другой путемъ разрѣзанія и иного расположенія частей, то существуютъ цѣлыя положительныя числа $M_1, M_2, \ldots, M_k$ и $N_1, N_2, \ldots, N_l$, и цѣлыя неотрицательныя числа M и N, при которыхъ имѣетъ мѣсто равенство (3). Если поэтому мы обнаружимъ, что двугранные углы нѣкоторыхъ двухъ многогранниковъ не могутъ быть связаны соотношеніемъ (9), то они не могутъ быть составлены изъ одинаковыхъ многогранниковъ, хотя бы они и были равновелики.

§ 8. Преобразованіе тетраэдровъ методомъ разложенія.

Воспользуемся теперь доказанной теоремой для рѣшенія слѣдующаго вопроса. Можно ли правильный тетраэдръ и равновеликую ему прямоугольную призму составить изъ одинаковыхъ многогранниковъ? Иначе, можно ли правильный тетраэдръ разрѣзать на такія части, изъ которыхъ въ иномъ расположеніи получится равновеликая прямоугольная призма? Еще иначе, можно ли правильный тетраэдръ преобразовать въ прямоугольную призму методомъ разложенія?

Въ правильномъ тетраэдрѣ всѣ двугранные углы равны, а въ прямоугольной призмѣ они прямые. Поэтому уравненіе (9), выражающее необходимое условіе преобразованія, приметъ видъ:

$$ma + 2m'd = nd + 2n'd,$$

гдѣ a двугранный уголъ тетраэдра, m и n цѣлыя положительныя числа, m' и n' цѣлыя неотрицательныя числа. Это уравненіе можно привести къ виду:

$$ma = ld \quad \text{и} \quad a = \frac{l}{m}d. \qquad (10)$$

Такъ какъ здѣсь m есть положительное число, то и l есть положительное число. Этотъ результатъ можно формулировать слѣдующимъ образомъ:

Если правильный тетраэдръ можно преобразовать въ прямоугольную призму, то двугранный уголъ a правильнаго тетраэдра соизмѣримъ съ d.

Если мы поэтому обнаружимъ, что уголъ a несоизмѣримъ съ прямымъ угломъ, то этимъ будетъ доказано, что правильный тетраэдръ не можетъ быть преобразованъ въ кубъ.

Какъ извѣстно, если a есть двугранный уголъ правильнаго тетраэдра, то

$$\cos a = \frac{1}{3}, \quad \sin a = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Если бы имѣло мѣсто соотношеніе (10), то мы бы получили:

$$\cos a \pm i \sin a = \frac{1 \pm i 2\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{ld}{m} \pm i \sin\frac{ld}{m}.$$

Возвышая всѣ части этого равенства въ степень $2m$, и примѣняя къ послѣдней части формулу Муавра, получимъ:

$$(\cos\alpha \pm i\sin\alpha)^{2m} = \left(\frac{1 \pm i2\sqrt{2}}{3}\right)^{2m} = \left(\cos\frac{ld}{m} \pm i\sin\frac{ld}{m}\right)^{2m} = \cos 2ld \pm i\sin 2ld = 1.$$

Иными словами, каждое изъ чиселъ

$$\frac{1 + i2\sqrt{2}}{3} \text{ и } \frac{1 - i2\sqrt{2}}{3}$$

есть корень m-ой степени изъ единицы, т. е. есть корень двучлена $x^{2m} - 1$. Но въ такомъ случаѣ двучленъ $x^{2m} - 1$ долженъ дѣлиться нацѣло на

$$\left(x - \frac{1 + i2\sqrt{2}}{3}\right)\left(x - \frac{1 - i2\sqrt{2}}{3}\right) = x^2 - \frac{2}{3}x + 1 \qquad (11)$$

Это есть такъ называемый приведенный раціональный дѣлитель двучлена $x^{2m} - 1$, т. е. дѣлитель съ раціональными коэффиціентами, въ которомъ старшій коэффиціентъ равенъ 1. Но хорошо извѣстно, что всякій приведенный дѣлитель двучлена $x^{2m} - 1$ имѣетъ исключительно цѣлые коэффиціенты. Поэтому трехчленъ (11) не можетъ быть дѣлителемъ двучлена $x^{2m} - 1$, а двугранный уголъ правильнаго тетраэдра несоизмѣримъ съ прямымъ угломъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ доказано, что **правильный тетраэдръ не можетъ быть преобразованъ въ равновеликую ему прямоугольную призму методомъ разложенія.**

Теперь нетрудно обнаружить, что двѣ равновеликія трехгранныя пирамиды не всегда могутъ быть преобразованы одна въ другую методомъ разложенія даже и въ томъ случаѣ, если онѣ имѣютъ равныя высоты и равновеликія основанія. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что всякая трехгранная пирамида можетъ быть преобразована въ любую другую трехгранную пирамиду, имѣющую съ ней равновеликія основанія и равныя высоты. Возьмемъ правильный тетраэдръ $ABCD$ и равновеликую ему прямоугольную призму, имѣющую ту же высоту. Для этого достаточно за основаніе призмы взять третью часть основанія тетраэдра. Теперь изъ вершины A тетраэдра проведемъ его высоту AE. Тогда тетраэдръ разобьется на три равновеликія пирамиды $AEBC$, $AECD$, $AEDB$. Раздѣливъ сторону BC пополамъ въ точкѣ G, мы раздѣлимъ пирамиду $AEBC$ на двѣ трехгранныя пирамиды $AEBG$ и $AEGC$. Такимъ же образомъ и каждую изъ двухъ другихъ пирамидъ $AECD$ и $AEDB$ мы также можемъ разбить на двѣ равновеликія пирамиды. Такимъ образомъ правильный тетраэдръ можетъ быть разложенъ на шесть равновеликихъ трехгранныхъ пирамидъ $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$, $\triangle_5$, $\triangle_6$, изъ которыхъ каждая имѣетъ ту же высоту, что и тетраэдръ, а основаніемъ шестую часть площади основанія тетраэдра.

Съ другой стороны, прямоугольная призма, какъ извѣстно, можетъ быть раздѣлена діагональной плоскостью на двѣ равновеликія трехгранныя призмы, а трехгранная призма можетъ быть разложена на три равновеликія трехгранныя призмы, имѣющія ту же высоту и то же основаніе*). Такимъ образомъ вся прямоугольная призма разобьется на шесть равновеликихъ трехгранныхъ пирамидъ $\bigtriangledown_1$, $\bigtriangledown_2$, $\bigtriangledown_3$, $\bigtriangledown_4$, $\bigtriangledown_5$, $\bigtriangledown_6$, имѣющихъ съ пирамидами $\triangle_1 \ldots \triangle_6$ одинаковыя высоты и равновеликія основанія. Если бы поэтому каждая пирамида $\triangle$ могла быть преобразована въ пирамиду $\bigtriangledown$, то правильный тетраэдръ могъ бы быть преобразованъ въ прямоугольную призму. А такъ какъ это невозможно, то не всякая трехгранная призма можетъ быть преобразована въ равновеликую ей трехгранную пирамиду, имѣющую ту же высоту.

§ 9. Методъ дополненія.

Изъ предыдущаго разсужденія вытекаетъ, что равновеликость трехгранныхъ пирамидъ, имѣющихъ равныя высоты и равновеликія основанія, не можетъ быть доказана методомъ разложенія. Но нельзя ли будетъ этого доказать методомъ дополненія?

Замѣтимъ, что невозможность осуществить требуемое доказательство методомъ разложенія имѣетъ своимъ источникомъ то обстоятельство, что двугранные углы двухъ многогранниковъ, которые могутъ быть другъ въ друга преобразованы, связаны соотношеніемъ (9). Поэтому если мы докажемъ, что это соотношеніе остается въ силѣ и въ томъ случаѣ, когда два многогранника могутъ быть дополнены до двухъ конгруэнтныхъ многогранниковъ, или до двухъ равносоставленныхъ многогранниковъ, то вопросъ будетъ исчерпанъ. Это доказать нетрудно.

Положимъ, что мы имѣемъ двѣ системы многогранниковъ P_1, P_2, P_3, $\ldots$, P_k и P_1', P_2', P_3', $\ldots$, P_l' и что совокупность первыхъ многогранниковъ можетъ быть составлена изъ такихъ же составляющихъ многогранниковъ, какъ и совокупность вторыхъ, т. е. что существуетъ рядъ малыхъ многогранниковъ p_1, p_2, $\ldots$, p_m, изъ которыхъ въ одномъ расположеніи можно составить всю совокупность многогранниковъ P, а въ другомъ расположеніи — всю совокупность многогранниковъ P'.

Ничего не измѣняя въ разсужденіяхъ §§ 3 — 6, примѣняя ихъ только не къ двумъ многогранникамъ, а къ двумъ системамъ многогранниковъ, мы докажемъ, что скелетъ разложенія первой системы имѣетъ тотъ же вѣсъ, что и скелетъ разложенія второй системы. Отсюда же вытекаетъ, что равенство (3) остается въ силѣ, если подъ a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_m будемъ разумѣть двугранные углы всѣхъ много-

*) Трехгранная призма разлагается, впрочемъ, на три пирамиды $\bigtriangledown_1$, $\bigtriangledown_2$, $\bigtriangledown_3$, изъ которыхъ только первыя двѣ имѣютъ съ призмой общія основанія и высоту; третья же призма $\bigtriangledown_3$ лишь равновелика трехгранной пирамидѣ $\bigtriangledown_3'$, имѣющей съ призмой одинаковыя основанія и высоты. Однако, какъ извѣстно изъ доказательства этой теоремы, пирамиды $\triangle_3$ и $\bigtriangledown_3'$ также имѣютъ при иномъ выборѣ вершины общую высоту и равновеликія основанія. Согласно сдѣланному допущенію пирамида $\bigtriangledown_3$ можетъ быть преобразована въ пирамиду $\bigtriangledown_3'$, и въ предыдущемъ разсужденіи ничто, по существу, не мѣняется.

гранниковъ P, а подъ $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ будемъ разумѣть двугранные углы всѣхъ многогранниковъ P'.

Теперь сдѣлаемъ еще одно дополненіе къ тѣмъ соглашеніямъ, которыми устанавливается масса элементарныхъ отрѣзковъ. Мы подчинили эти массы только тому требованію, чтобы это были цѣлыя положительныя числа, удовлетворяющія уравненіямъ (7) для всякаго отрѣзка разложенія. Это условіе мы теперь усилимъ еще однимъ требованіемъ, которое заключается въ слѣдующемъ: если какой либо многранникъ P имѣетъ ребро AB равное по длинѣ и по прилежащему къ нему двугранному углу (AB) ребру $A'B'$ нѣкотораго многогранника P', то мы требуемъ, чтобы массы этихъ частей скелета AB и $A'B'$ были равны. Это требованіе сводится только къ усиленію системы уравненія (7) еще рядомъ уравненій того же самаго вида. А такъ этой обогащенной системѣ уравненій также можно удовлетворить, принимая массы равными длинамъ отрѣзковъ, то уравненія системы (7) остаются совмѣстными, и имъ можно удовлетворить цѣлыми положительными значеніями массъ.

Но если ребро AB входитъ какъ въ одно, такъ и въ другое разложеніе съ одинаковымъ двуграннымъ угломъ и съ одинаковой массой, то и вѣсъ этой части скелета будетъ одинъ и тотъ же въ обоихъ разложеніяхъ. А въ такомъ случаѣ въ равенствѣ (9) можно съ одной и съ другой стороны опустить часть суммы, соотвѣтствующую этому ребру.

Этотъ результатъ можно формулировать слѣдующимъ образомъ: если въ двухъ разложеніяхъ разлагаемыхъ многогранниковъ имѣются ребра, равныя какъ по длинѣ, такъ и по двугранному углу, то прилегающія къ нимъ части скелета можно опустить въ обоихъ разложеніяхъ и оставшіяся части все таки будутъ имѣть одинаковый вѣсъ.

Пусть теперь P и P' будутъ два равновеликихъ многогранника съ двугранными углами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$. Допустимъ, что, присоединяя къ этимъ многогранникамъ конгруэнтные многогранники $Q_1, Q_2, \ldots, Q_h$, мы получимъ равно составленные многогранники. Это значитъ, система многогранниковъ $(P, Q_1, Q_2, \ldots, Q_h)$ и $(P', Q_1, Q_2, \ldots, Q_h)$ могутъ быть составлены изъ одинаковыхъ частей, и два скелета разложенія имѣютъ одинаковый вѣсъ. Но при этомъ, какъ мы видѣли, части скелета, прилегающія къ ребрамъ многогранниковъ Q могутъ быть изъ обоихъ разложеній опущены. Равенство вѣсовъ выразится поэтому тѣмъ же уравненіемъ (9).

Какъ уже было выяснено, изъ этого вытекаетъ, что правильный тетраэдръ и равновеликая ему прямоугольная призма не могутъ быть дополнены до равносоставленныхъ фигуръ, а потому равновеликость трехгранныхъ пирамидъ не можетъ быть доказана также методомъ дополненія.

Теперь ясно, почему для доказательства равновеликости трехгранныхъ пирамидъ понадобилась чортова лѣстница.

Международная Коммиссія по преподаванію математики.

Интуиція и опытъ при преподаваніи математики въ средней школѣ.

Профессора Д. Е. Смита.

Докладъ, представленный Международной Коммиссіи по преподаванію математики на V-мъ Международномъ Математическомъ Конгрессѣ въ Кэмбриджѣ. (Засѣданіе 27 августа 1912 года).

(Окончаніе).*

6. Измѣреніе и оцѣнка величинъ.

Представитель австрійской школы сообщаетъ, что въ этомъ направленіи дѣлается многое въ низшихъ и среднихъ классахъ, и что это окажетъ вліяніе и на старшіе классы. Нѣкоторое представленіе о характерѣ этой работы можно получить изъ недавно вышедшей книги Фр. Шифнера (Fr. Schiffner) «Praktisch-geometrische Schüllerübungen für die unteren Klassen». Такъ напримѣръ, д-ръ Маттеръ (Stiftsgymnasium въ Зайтенштеттенѣ) сообщаетъ, что дѣти во второмъ классѣ (считая отъ низшаго) измѣряютъ высоту башни при помощи обыкновенной рулетки и большого транспортира. Они измѣряютъ два угла и прилежащую къ нимъ сторону вертикальнаго треугольника и наносятъ его на горизонтальной плоскости, вычерчиваютъ въ опредѣленномъ масштабѣ и измѣряютъ полученную фигуру. Такія же упражненія дѣлаются и на урокахъ географіи. Д-ръ Эрвинъ Динцль изъ Вѣны, докладчикъ отъ Австріи, собралъ свѣдѣнія относительно постановки подобныхъ работъ въ гимназіяхъ, реальныхъ гимназіяхъ и рельныхъ училищахъ. Онъ опросилъ 38 учебныхъ заведеній и пришелъ къ выводу, что въ Вѣнѣ нѣтъ благопріятныхъ условій для тригонометрической работы подъ открытымъ небомъ, во-первыхъ, вслѣдствіе недостатка подходящихъ инструментовъ, во-вторыхъ, вслѣдствіе перегруженности программъ и, наконецъ, въ виду спеціальныхъ условій, которыя требуются для занятій на открытомъ воздухѣ. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ, однако, удавалось организовать эти работы. Референтъ называетъ одинъ удовлетворительный инструментъ для учащихся (Taschen-Universal-Instrument), изготовляемый Neuhöfer'омъ, цѣною въ 170 кронъ. Въ другихъ же городахъ старшіе класы продѣлываютъ достаточное количество геодезическихъ упражненій, чему способствуетъ близость деревни.

Что касается Англіи, то въ 57% «public schools», изслѣдованныхъ г. Гольдфреемъ, геодезическихъ упражненій не производится вовсе, а въ остальныхъ 43% такія упражненія дѣлаются, но обыкновенно лишь спеціальнымъ классомъ учащихся, а именно тѣми, которые готовятъ себя въ инженеры, или въ землемѣры, или въ офицера. Изъ 69 школъ десять имѣютъ теодолитъ, семь имѣютъ мензулу, а другіе инструменты встрѣчаются въ меньшемъ числѣ школъ.

---

*) См. „Вѣстникъ", № 570.

Во Франціи въ лицеяхъ и колледжахъ за рѣдкими исключеніями не дѣлаютъ никакихъ геодезическихъ или астрономическихъ измѣреній. Въ Ecoles des Arts et Métiers, гдѣ обучаются молодые люди въ возрастѣ около 17 лѣтъ, землемѣрныя работы поставлены довольно серьезно, и учащіеся пріобрѣтаютъ навыкъ въ пользованіи такими инструментами, какъ теодолитъ. Эти работы связаны здѣсь съ уроками математики: геометрическое черченіе обыкновенно преподается учителемъ математики, который связываетъ землемѣрныя работы съ черченіемъ (нивеллированіе, планы и т. п.)

Что касается Германіи, то эти занятія поставлены не вездѣ одинаково. Какъ сообщаетъ д-ръ Лицманъ, въ прусскихъ школахъ обыкновенно имѣется теодолитъ, и на ряду съ нимъ встрѣчаются нѣкоторые простые инструменты для измѣренія угловъ, какъ то зеркала и призмы, измѣрительные стержни и т. п. Нерѣдко сами учащіеся изготовляютъ простые инструменты, преимущественно приборы для измѣренія угловъ *).

По геометріи и тригонометріи часто ведутся практическія занятія на открытомъ воздухѣ, при чемъ учащіеся измѣряютъ при помощи инструментовъ высоты и разстоянія **). Въ Мекленбургѣ и Ольденбургѣ систематическія занятія подъ открытымъ небомъ введены почти $^2/_3$ среднихъ учебныхъ заведеній, да и въ остальной трети этимъ занятіямъ удѣляется извѣстное время. По крайней мѣрѣ въ нѣкоторыхъ частяхъ Германіи примѣняются аппараты и модели для преподаванія геометріи; весьма полезный перечень матеріаловъ можно найти въ недавно вышедшей монографіи Тера, Гейтера и Бёттгера ***) и въ монографіи Крамера ****). По отзывамъ нѣмецкихъ учителей, какъ и всѣхъ другихъ, увлеченіе моделями въ преподаваніи геометріи имѣетъ свои отрицательныя стороны, но раціонально поставленныя практическія занятія съ инструментами подъ открытымъ небомъ безусловно желательны.

Относительно практическихъ занятій по математической астрономіи въ германскихъ школахъ приходятъ къ убѣжденію, что таковыя и осуществимы, и желательны. Довольно много школъ въ Пруссіи имѣютъ телескопъ для астрономическихъ наблюденій, но рѣдко гдѣ имѣется телескопъ, приспособленный для измѣреній *****) Вопросъ о постановкѣ подобныхъ занятій разработанъ въ монографіи профессора Гофманна, къ которой мы и отсылаемъ читателя ******).

---

*) О роли интуиціи въ классныхъ урокахъ геометріи и о классномъ преподаваніи ея вообще см. книгу Лицмана: „Die Organisation des mathematischen Unterrichts an den höheren Knabenschulen in Preussen, стр. 65.

**) Ib. стр. 161. См. также Dr. H Wieleitner, „Der mathematische Unterricht... im Königreich Bayern" стр. 42, 62; Dr. E. Geck, „Der mathematische Unterricht ... im Königreich Württemberg", стр. 25; проф. H. Cramer, „Der mathematische Unterricht im Grossherzogtum Baden", стр. 35; профессоръ J. Wirz, „Der mathematische Unterricht... im Elsass-Lothringen, стр. 9.

***) Thaer, Geuther und Böttger, „Der mathematische Unterricht in den Gymnasien ... Mecklenburgs und Oldenburgs", стр. 22, 24, 27, 78.

****) „Der mathematische Unterricht im Grosherzogtum Baden", стр. 30.

*****) Lietzmann, „Die Organisation", стр. 43.

******) Prof. B. Hoffmann „Mathematische Himmelskunde und niedere Geodäsie an den höheren Schulen".

Авторъ въ своей школѣ поставилъ эти занятія необыкновенно широко, что весьма характерно для нѣмецкой Lehrfreiheit (свобода преподаванія), отсутствующей въ свободной Америкѣ и въ большинствѣ другихъ странъ.

Обзоръ практическихъ занятій въ швейцарскихъ гимназіяхъ и реальныхъ училищахъ данъ въ весьма цѣнной таблицѣ, составленной д-ромъ Бранденбергеромъ*). Изъ таблицы видно, что въ гимназіяхъ полевыя занятія по геометріи сравнительно мало распространены, и еще меньше — занятія по астрономіи. Въ Бернскомъ кантонѣ лѣтомъ производятся геодезическія упражненія; въ Унтервальденѣ учащіеся упражняются въ практическомъ измѣреніи площадей и разстояній и работаютъ съ теодолитомъ; въ нѣсколькихъ гимназіяхъ геодезическимъ работамъ удѣляется одинъ недѣльный часъ въ теченіе года, обыкновенно для учащихся въ возрастѣ 16-17 лѣтъ; въ нѣкоторыхъ другихъ гимназіяхъ имѣются обсерваторіи съ удовлетворительными аппаратами для математическихъ работъ. Что касается реальныхъ училищъ, то опредѣленное и узаконенное мѣсто въ учебномъ курсѣ геодезическія упражненія имѣютъ лишь въ 12 такихъ училищахъ изъ числа 25**), въ остальныхъ же эти работы, въ большемъ или меньшемъ размѣрѣ, производятся въ связи съ уроками тригонометріи. Въ рядѣ школъ имѣются такіе инструменты, какъ теодолитъ, алидада (градштокъ), угловое зеркало, призма и мензула. Въ нѣкоторыхъ школахъ, напримѣръ, въ техническихъ классахъ въ Лугано и С.-Галленѣ, преподается весьма серьезный курсъ, въ который входятъ тріангуляція, измѣреніе базъ, съемки профиля и опредѣленіе высоты.

Въ Соединенныхъ Штатахъ, вообще говоря, нѣтъ обязательныхъ курсовъ тригонометріи или геодезіи въ «high scools», т.-е. въ четырехгодичныхъ школахъ, занимающихъ промежуточное положеніе между 8-годичнымъ курсомъ элементарной школы и 4-лѣтнимъ курсомъ колледжа***). Въ наиболѣе хорошо поставленныхъ high scools преподается необязательный курсъ тригонометріи на третьемъ или четвертомъ году, что соотвѣтствуетъ возрасту въ 16-17 лѣтъ. Кое-гдѣ учащіеся упражняются съ теодолитомъ и другими подобными инструментами, вообще же въ high schools такихъ инструментовъ не имѣется. Такія занятія ведутся регулярно въ колледжѣ въ первый годъ, а въ слѣдующіе годы въ качествѣ необязательнаго курса для математиковъ, и обязательнаго — для инженеровъ.

Въ нѣкоторыхъ спеціальныхъ школахъ встрѣчаются довольно интересныя занятія. Напримѣръ, недавно Principal Stark изучалъ совмѣстно съ авторомъ вопросъ о примитивныхъ математическихъ инструментахъ и роли ихъ въ современномъ обученіи. Результаты были примѣнены на практикѣ въ школѣ

---

*) Dr. K. Brandenberger, „Der mathematische Unterricht an den Schweizerischen Gymnasien und Realschulen, стр. 13—25, стр. 57.

**) Ibid. стр. 60, 62, 119.

***) Американская „элементарная школа“ имѣетъ 8 классовъ (Grades); въ первый классъ поступаютъ дѣти въ возрастѣ 6-7 лѣтъ, а восьмой классъ кончаютъ въ возрастѣ 13-14 лѣтъ. Въ „high scool“ курсъ продолжается 4 года; учащіеся поступаютъ сюда въ возрастѣ 14-15 лѣтъ и кончаютъ въ 17-18 лѣтъ. Столько же продолжается курсъ въ college'ѣ, который учащіеся оставляютъ въ возрастѣ 21-22 лѣтъ со степенью бакалавра. Начало университетскаго курса въ строгомъ смыслѣ слова соотвѣтствуетъ возрасту въ 21-22 года, и степень доктора философіи пріобрѣтается обычно на 25-26 году.

Общества Этической Культуры въ Нью-Іоркѣ; дѣти изготовляли астролябіи изъ бумажныхъ транспортировъ и обнаруживали большой интересъ къ измѣреніямъ, которыя они производили на открытомъ воздухѣ съ помощью этихъ и подобныхъ инструментовъ. Въ Horace Mann School (въ Нью-Іоркѣ), состоящей при учительскомъ колледжѣ, имѣется спеціальный классъ математики; учащіеся на восьмомъ году пребыванія въ школѣ работаютъ подъ открытымъ небомъ съ простыми инструментами, подготовляясь къ послѣдующимъ болѣе научнымъ занятіямъ *).

Астрономическія упражненія съ инструментами могутъ быть начаты на первомъ курсѣ колледжа и продолжаться на слѣдующихъ; они необязательны. Студенты, избравшіе этотъ курсъ, получаютъ подготовку къ научнымъ фотографическимъ работамъ, которыя производятся на старшемъ, т.-е. четвертомъ курсѣ колледжа (такъ называемый senior, возрастъ 21-22 года). Матеріалъ для подобныхъ работъ имѣется въ лучше поставленныхъ колледжахъ.

Разсматриваемая въ этой главѣ дидактическая задача можетъ быть формулирована слѣдующимъ образомъ. Какіе простые и недорогіе инструменты могутъ быть примѣнены, чтобы повысить интересъ учащихся къ математикѣ на раннихъ ступеняхъ обученія? Въ частности, посредствомъ чего можно сдѣлать индуктивный циклъ или фазу геометріи болѣе реальной и интересной, не ослабляя дедуктивной стороны? Наконецъ, какіе еще инструменты можно было бы съ успѣхомъ примѣнить въ дальнѣйшемъ курсѣ геометріи и тригонометріи?

7. Геометрическое черченіе и графическое изображеніе.

Въ разосланномъ циркулярѣ были поставлены вопросы о занятіяхъ по начертательной геометріи (параллельное косоугольное проектированіе), объ изготовленіи плановъ и профилей, о центральной проекціи и теоріи тѣней; далѣе идетъ вопросъ о сліяніи всего этого съ преподаваніемъ стереометріи и, наконецъ, вопросъ о томъ, отнести ли эту работу къ классу математики или къ классу черченія?

Въ австрійскихъ реальныхъ училищахъ вся эта работа возложена номинально на спеціально назначаемаго учителя, который долженъ сдать соотвѣтственный экзаменъ. Профессоръ Динцль поднимаетъ вопросъ, насколько цѣлесообразенъ такой порядокъ; онъ полагаетъ, что для достиженія успѣшныхъ результатовъ преподаваніе начертательной геометріи должно быть поручено учителю математики. Въ настоящее время почти въ одной трети школъ учитель математики въ трехъ старшихъ классахъ (V—VIII) преподаетъ также начертательную геометрію. Хотя учащіеся примѣняютъ методы начертательной геометріи для изображенія стереометрическихъ тѣлъ, тѣмъ не менѣе между занятіями по стереометріи и начертательной геометріи имѣется вполнѣ опредѣленная демаркаціонная линія. Такимъ образомъ, въ старшихъ классахъ австрійскихъ реальныхъ училищъ занятія по начертательной геометріи, повидимому, до извѣстной степени введены въ систему. Въ гимназіяхъ начертательная геометрія не преподается отдѣльно; но на урокахъ стереометріи уча-

*) Этотъ классъ ведетъ г. Браунъ (J. C. Brown), извѣстный своими работами по психологіи первоначальнаго обученія математики.

щіеся чертятъ планы и профили, изготовляютъ ортогональныя проекціи параллелопипедовъ, октаэдровъ, пирамидъ и т. п. *).

Въ Англіи начертательная геометрія преподавалась прежде только для тѣхъ воспитанниковъ, которые готовились къ спеціальнымъ экзаменамъ, и обыкновенно находилась въ вѣдѣніи преподавателя искусствъ; въ результатѣ все сводилось къ работѣ линейкой, при чемъ очень много вниманія удѣлялось чисто художественной сторонѣ (наведеніе чернилъ). Но въ послѣднее время это положеніе вещей измѣнилось благодаря слѣдующимъ причинамъ: 1) Военные экзаменаторы теперь разсматриваютъ этотъ предметъ, какъ отдѣлъ математики, и не требуютъ наведенія чернилъ; въ виду этого математики уже не отказываются отъ преподаванія этого предмета, тогда какъ раньше ихъ смущало сознаніе своей технической неподготовленности въ художественномъ отношеніи. 2) Начертательная геометрія теперь требуется для полученія степени по математикѣ въ Кэмбриджѣ; это обстоятельство несомнѣнно повыситъ интересъ преподавателей математики къ этому предмету, и непосредственно отразится на школьномъ преподаваніи. 3) Молодымъ людямъ, намѣревающимся въ университетѣ изучать инженерныя науки, рекомендуется овладѣть начертательной геометріей и перспективой въ средней школѣ. Косоугольная параллельная перспектива въ англійскихъ школахъ изучается мало. Начертательная геометрія по Монжу съ упражненіями (планы, профили и т. п.) преподается въ 76% отчетныхъ школъ, примѣрно въ одной половинѣ школъ она теперь входитъ въ курсъ старшихъ классовъ, а въ остальныхъ школахъ преподается только для будущихъ спеціалистовъ. Но она еще, повидимому, не имѣетъ прочнаго узаконеннаго мѣста въ школьной программѣ, такъ какъ не входитъ въ обычную программу экзаменовъ. Въ двухъ третяхъ школъ, гдѣ проходятъ начертательную геометрію, она приноровлена къ курсу стереометріи, и въ большинствѣ случаевъ преподается математикомъ. Въ public schools рѣдко встрѣчается то, что составляетъ обыкновенное явленіе въ другихъ среднихъ школахъ, а именно, начертательная геометрія примѣняется къ ручной работѣ въ столярной мастерской. Перспектива имѣетъ болѣе техническій характеръ, чѣмъ начертательная геометрія, и потому не столь часто поручается математику; въ 63% отчетныхъ школъ перспектива преподается обыкновенно учителемъ черченія въ связи съ этимъ предметомъ. Точное черченіе въ связи съ проективной геометріей, включая сюда построеніе коническихъ сѣченій по свойствамъ ангармоническаго отношенія, совершенно отсутствуетъ въ 69% школъ, а въ остальныхъ до этой сравнительно высокой ступени доходятъ лишь немногіе наиболѣе успѣвающіе ученики.

Во Франціи начертательная геометрія преподается въ лицеяхъ и колледжахъ лишь въ 1^{re} C и D (возрастъ — 16 лѣтъ), въ «Mathématique A и B», и въ спеціальныхъ подготовительныхъ классахъ къ высшимъ научнымъ школамъ **).

Чаще всего начертательная геометрія преподается отдѣльно отъ стереометріи. Обыкновенно геометрическое черченіе не находится въ вѣдѣніи учи-

---

*) Ср. Adler, „Der Unterricht in der darstellenden Geometrie an den Realschulen, Gymnasien, Realgymnasien und Reformgymnasien“, и. Müller „Der Unterricht in der darstellenden Geometrie in den technischen Hochschulen“. (1-ый выпускъ австрійскаго доклада).

**) См. сообщеніе Руссо (Rousseau) въ докладѣ Блютеля (Blutel), vol. II.

теля математики, но въ настоящее время замѣчается сильная тенденція передать этотъ предметъ математикамъ *).

Германія, подобно Австріи, въ разсматриваемомъ отношеніи занимаетъ, повидимому, передовое положеніе. Мы нерѣдко встрѣчаемъ здѣсь модели для изученія проективныхъ свойствъ (Projektionsapparat). Систематическія занятія этого рода введены въ реальныя гимназіи и особенно въ Oberrealschulen. Въ Пруссіи косоугольную параллельную проекцію проходятъ въ Obersecunda **) (седьмой годъ въ этомъ типѣ школы, или десятый годъ обученія), а начертательная геометрія въ качествѣ спеціальнаго предмета преподается въ Oberprima (девятый, т. е. послѣдній годъ ***). Въ сѣверной Германіи наблюдалась тенденція сдѣлать начертательную геометрію въ ея различныхъ ступеняхъ необязательнымъ предметомъ и отнести къ категоріи искусствъ. Въ Саксоніи и южной Германіи этотъ предметъ чаще является обязательнымъ ****). Вообще же въ Германіи наблюдается тенденція передать геометрическое черченіе подъ той или другой рубрикой въ руки учителя математики *****). Въ южной Германіи этотъ предметъ уже издавна былъ поставленъ удовлетворительно, но въ сѣверной Германіи ему не удѣляли никакого вниманія до 1898 г. Въ общемъ можно сказать, что геометрическое черченіе обыкновенно преподается въ гимназіяхъ и Oberrealschulen, и что въ этихъ послѣднихъ ему удѣляется больше вниманія, чѣмъ въ гимназіяхъ. Далѣе, оно преподается, главнымъ образомъ, въ двухъ старшихъ классахъ (Secunda и Prima), какъ и можно было ожидать; въ прежнее время этотъ предметъ относили къ разряду искусствъ, теперь же онъ становится частью математики. Далѣе, въ не техническихъ школахъ начертательная геометрія приноровлена болѣе къ изображенію обыкновенныхъ геометрическихъ тѣлъ при помощи проектированія, чѣмъ къ непосредственному изготовленію рабочихъ набросковъ, какіе дѣлаются ремесленниками. Наконецъ, этому дѣлу здѣсь удѣляютъ больше вниманія, чѣмъ въ не техническихъ школахъ всѣхъ другихъ государствъ, исключая Австрію и Швейцарію.

Въ Швейцаріи ******) гимназіи удѣляютъ мало вниманія начертательной геометріи, и большинство гимназій о ней не упоминаетъ *******). Въ реальныхъ же училищахъ она за послѣдніе три года преподается почти вездѣ безъ исклю-

---

*) Докладъ, посланный настоящему Комитету, весьма кратокъ; подробныя свѣдѣнія читатель можетъ найти въ напечатанныхъ докладахъ Коммиссіи.

**) Объясненіе германскихъ названій классовъ см. въ статьѣ Лицмана „Постановка преподаванія математики въ мужскихъ среднихъ учебныхъ заведеній Пруссіи“. „Вѣстникъ“ № 549.

***) См. въ особенности, Lietzmann „Die Organisation etc“, стр. 139. и Zühlke, „Der Unterricht im Linearzeichnen und in der darstellenden Geometrie an den deutschen Realanstalten“.

****) Thaer, Geuther und Böttger, цит. соч. стр. 81.

*****) Ibid. стр. 31, 32, 36, 56, 70, 73; Wieleitner, цит. соч стр. 29, 35, 43, 56; Witting, цит. соч. стр. 27, 29, 33, 36, 57, 64; Cramer, цит. соч, стр. 15. 20; Schimmack, цит. соч., стр. 13, 15, 20, 43; Wirz, цит. соч., стр. 9, 17, 25, 31, 50; Zühlke, цит. соч.

******) См. Brandenberger, цит. соч., стр. 14 — 25, 129 — 137.

*******) Цит. соч., стр. 14 — 20, 129.

ченія *). Въ опубликованныхъ швейцарскихъ программахъ очень ясно описанъ характеръ занятій, которыя ведутся подъ названіемъ «геометрическое черченіе» (Geometrisches Zeichnen) и «начертаттльная геометрія» (Darstellende Geometrie). Напримѣръ, по Бернской программѣ въ курсъ входятъ упражненія въ геометрическомъ орнаментѣ въ родѣ рисунковъ паркетовъ, ортогональное проектированіе геометрическихъ тѣлъ, черченіе коническихъ сѣченій и другихъ плоскихъ кривыхъ; черченіе моделей машинъ; построеніе тѣней; аксонометрія; полярная перспектива; тѣла вращенія; планы и рельефы. Судя по всѣмъ докладамъ, присланнымъ въ отвѣтъ на опросные листы, только въ трехъ государствахъ (Австрія, Германія, Швейцарія) подобныя занятія ведутся и въ не технической школѣ. Далѣе, въ значительномъ большинствѣ школъ вполнѣ, повидимому, сознано практическое значеніе всѣхъ этихъ работъ для техники. Повидимому, признано также, что преподаваніе начертательной геометріи цѣлесообразнѣе поручить учителю математики, чѣмъ учителю графическихъ искусствъ **).

Въ Соединенныхъ Штатахъ въ общихъ «high school» не преподается вовсе геометрическаго черченія. Раньше кое-что при случаѣ показывалъ учитель рисованія; но благодаря пробудившемуся нѣсколько лѣтъ тому назадъ интересу къ искусству, механическое черченіе, которое было тогда въ модѣ, уступило мѣсто болѣе свободному рисованію отъ руки и красками. Эта замѣна оправдывалась обстоятельствами, такъ какъ механическое черченіе было, вообще, поставлено плохо, и страна была весьма заинтересована въ повышеніи художественнаго уровня. Въ техническихъ «high schools», которыя начинаютъ появляться въ большихъ городахъ, введено геометрическое черченіе, но пока еще это дѣло здѣсь не стоитъ на такой высотѣ, какъ въ австрійскихъ, германскихъ и швейцарскихъ школахъ. На техническихъ курсахъ колледжей геометрическое черченіе начинается съ перваго года (возрастъ учащихся — около 18 лѣтъ), и предназначено лишь для будущихъ архитекторовъ или инженеровъ. Преподавателемъ здѣсь рѣдко лишь является математикъ, а обыкновенно инженеръ или архитекторъ.

Подведя итогъ изложенному въ настоящей главѣ, мы можемъ формулировать поставленную дидактическую задачу слѣдующимъ образомъ. Въ достаточной ли степени преподается черченіе въ связи съ геометріей? Въ частности, признаемъ ли мы практическую важность не только рабочихъ набросковъ, какіе дѣлаются ремесленниками, но также и геометрическаго рисованія, картографіи, топографическаго черченія и геометрическихъ построеній?

8. Графическіе методы.

Графическіе методы***) въ томъ или другомъ видѣ мы находимъ теперь въ курсахъ математики всѣхъ странъ, по крайней мѣрѣ, въ реальныхъ учебныхъ

*) Ibid., стр. 20—25. 130. Одно изъ самыхъ ясныхъ описаній характера занятій, какое можно найти въ докладахъ, см. стр. 130—135.

**) Ibid., стр. 60, 62, 118, 137.

***) Изображеніе функцій на миллиметровой бумагѣ. Изображеніе векторовъ. Скалярныя поля. Графическое вычисленіе и въ частности графическая статика. Вычисленіе площадей при помощи миллиметровой бумаги или посредствомъ планиметра.

заведеніяхъ: изъ инженерныхъ наукъ эти методы постепенно перешли черезъ термодинамику и общую физику въ чистую математику. Но не вездѣ они, конечно, примѣняются въ одинаковой мѣрѣ.

Въ Австріи миллиметровой бумагой пользуются прежде всего для изображенія простыхъ функцій, какъ-то для простѣйшихъ алгебраическихъ, для показательной функціи, для логариѳмической и круговыхъ функцій. Значеніе синусовъ вычисляется съ точностью до двухъ десятичныхъ знаковъ при помощи измѣреній по клѣточкамъ бумаги; вычисленія часто провѣряются графическимъ способомъ. Планиметръ примѣняется рѣдко. Векторіальная геометрія служитъ для изображенія комплексныхъ чиселъ и для лучшаго уясненія нѣкоторыхъ частей механики. Въ примѣненіи къ комплекснымъ числамъ векторы вводятся въ шестой классъ (повторяются въ восьмомъ), а въ связи съ механикой — въ шестой классъ (реальныхъ училищъ) или седьмой (гимназій). Скалярное поле не изучается самостоятельно, но понятіе о немъ дается лишь въ старшихъ классахъ при ознакомленіи съ магнитнымъ и электрическимъ полемъ, съ понятіемъ потенціала и т. д.

Въ Англіи 90% школъ*) сообщаютъ, что въ ихъ программу введено графическое изученіе статистики. Повидимому, оно начинается чаще всего въ низшихъ и среднихъ классахъ школъ. Вѣроятно, эти занятія сводятся къ составленію статистическихъ таблицъ. Этотъ новый предметъ дѣлаетъ быстрые успѣхи, такъ какъ онъ пользуется, съ одной стороны, покровительствомъ математиковъ, и, кромѣ того, находитъ обширное поле примѣненій. Графическое изображеніе функцій преподается во всѣхъ «public schools». Въ 27% этотъ предметъ начинается въ низшихъ классахъ, въ 58% — въ среднихъ, а въ 15% — въ старшихъ классахъ. Онъ обыкновенно преподается въ связи съ рѣшеніемъ уравненій и приближеннымъ вычисленіемъ корней. Усваиваетъ ли, дѣйствительно, при этомъ учащійся идею функціональности, остается открытымъ вопросомъ; но графика во всякомъ случаѣ образуетъ основу, на которой можно стремиться къ дальнѣйшимъ успѣхамъ. Въ значительномъ большинствѣ школъ мы встрѣчаемъ примѣненіе векторовъ къ механикѣ (скорости, ускоренія, силы), которая въ Англіи составляетъ часть курса математики. Въ нѣкоторыхъ школахъ векторы примѣняются къ комплекснымъ числамъ. Графическую статику проходятъ вездѣ. Площади вычисляются въ большинствѣ школъ при помощи бумаги съ клѣтками, планиметръ же употребляется рѣдко.

Во Франціи понятіе координатъ усваивается учащимися приблизительно въ возрастѣ 14 лѣтъ. Графика примѣняется при изученіи уравненій, какъ, повидимому, во всѣхъ другихъ государствахъ. Въ техническихъ школахъ примѣняется графическая механика. Графическую статику проходятъ въ École des Arts et Métiers, на третьемъ году (возрастъ учащихся — 20 лѣтъ), и въ высшихъ спеціальныхъ школахъ. Планиметръ не употребляется.

Въ Германіи входитъ въ обычай, чтобы часть классной доски, по крайней мѣрѣ въ Tertia и Secunda, была снабжена квадратными линейками для графическаго изображенія функцій**); длина стороны квадрата равна около

*) Проценты вездѣ исчислены нами по отношенію къ числу всѣхъ школъ, приславшихъ отвѣты на опросъ.

**) Lietzmann, „Die Organisation", стр. 37.

5 *см*. Въ нѣкоторыхъ гимназіяхъ *) подобныя упражненія въ графическомъ изображеніи функцій налажены весьма тщательно, начиная съ Obertertia. Въ этомъ классѣ графически изучаются такія функціи, какъ

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad y = \frac{1}{x}, \quad y = \sqrt{a^2 + x^2}, \quad \text{и} \quad y = ax^3 \quad \text{или} \quad ax^4.$$

Въ классѣ Untersecunda графическое изученіе распространяется на показательную, логариѳмическую и тригонометрическія **) функціи, а въ классахъ Obersecunda и Prima — на функціи степени выше второй ***). Вездѣ при этомъ главную роль играетъ понятіе функціи, и не видно, чтобы графика примѣнялась лишь для рѣшенія уравненія ****). Въ германскихъ школахъ мы далѣе встрѣчаемъ также употребленіе графическаго способа при вычисленіяхъ *****).

Въ Швейцаріи графическое изображеніе уравненій и функцій весьма распространено, какъ въ другихъ государствахъ ******), и примѣняется для разработки понятія о предѣлѣ. Вопросъ относительно понятія функціи здѣсь еще не разрѣшенъ, какъ, впрочемъ, и во всѣхъ другихъ странахъ. Что именно можно сдѣлать въ этомъ направленіи и какъ это должно быть сдѣлано, все это — вопросы, которые ждутъ своего разрѣшенія путемъ опыта. Д-ръ Бранденбергеръ указываетъ, напримѣръ, на тотъ фактъ, что въ программѣ одного реальнаго училища вовсе даже не упоминается слово функція, хотя здѣсь мы должны были бы его ожидать, тогда какъ въ одной гимназіи (гдѣ математика занимаетъ менѣе видное мѣсто), это понятіе играетъ весьма существенную роль. Надо полагать, что на практикѣ различія менѣе рѣзки, чѣмъ въ печатныхъ сообщеніяхъ, и что понятіе функціи вводится обыкновенно съ того времени, когда въ немъ появляется потребность. Нѣкоторыя школы вводятъ его рано, другія — позже, а опытъ, повидимому, не вынесъ еще своего окончательнаго приговора.

Въ Соединенныхъ Штатахъ графическое изображеніе простыхъ алгебраическихъ функцій при помощи миллиметровой бумаги обыкновенно начинаютъ въ первый годъ «high schools» (въ возрастѣ 14 лѣтъ), и продолжаютъ, главнымъ образомъ въ примѣненіи къ кривымъ второго порядка, на третьемъ году (возрастъ — 16 лѣтъ). Графическое изученіе векторовъ и скаляровъ пріурочено къ колледжу, гдѣ оно начинается въ связи съ алгеброй въ первомъ году (въ возрастѣ 18 лѣтъ). Съ нѣкоторой полнотой этотъ предметъ проходятъ лишь тѣ студенты, которые выбираютъ курсъ векторіальнаго анализа; этотъ послѣдній читается часто на третьемъ и четвертомъ году, и нерѣдко отодвигается до выпускныхъ годовъ (22 — 24).

---

*) Ibid., стр. 161.

**) Ibid., стр. 161, 170.

***) См. Thaer, Geuther, u Böttger, цит. соч., стр. 6, 9, 79; Wieleitner, цит. соч., стр. 20, 42; Witting, цит. соч., стр. 36; Geck, „Der mathematische Unterricht . . im Königreich Württemberg“, стр. 21, 25, 59; Schnell, „Der mathematische Unterricht . . . im Grossherzogtum Hessen“, стр. 20, 29, 39, 41.

****) См. особенно Schimmack, цит. соч. стр. 19, 22 и Wirz, цит. соч., стр. 45.

*****) Timerding, „Die Kaufmännischen Aufgaben, стр. 35.

******) Brandenberger, цит. соч., стр. 95, 101, 103, 104 — 109.

9. Вычисленія.

Въ разосланномъ циркулярѣ комитета были поставлены вопросы о сокращенномъ вычисленіи, о примѣненіи счетной линейки и таблицъ, и о приближенномъ вычисленіи корней уравненій.

Въ Австріи сокращенные способы вычисленія введены въ третій классъ (возрастъ — около 13 лѣтъ) въ связи съ измѣреніемъ площадей*). Счетная линейка еще не вошла во всеобщее употребленіе въ средней школѣ. Это объясняется большой стоимостью инструмента, такъ какъ болѣе дешевые слишкомъ неточны; но помимо того, не малую роль играетъ также то обстоятельство, что для пріобрѣтенія необходимаго навыка требуется время. Въ старшихъ классахъ вычисленія производятся почти исключительно при помощи логариѳмовъ. По новой программѣ въ курсъ старшаго класса вводятся элементы теоріи вѣроятностей, и простѣйшія задачи относительно страхованія жизни создаютъ необходимость примѣненія таблицъ смертности.

Въ Англіи издавна уже примѣнялись механическія правила сокращенныхъ дѣйствій съ десятичными дробями, но въ настоящее время эти формальныя правила, повидимому, теряютъ подъ собою почву. Умѣнье отбрасывать безполезные десятичные знаки и получать результаты съ опредѣленной степенью приближенія будетъ все болѣе распространяться по мѣрѣ того, какъ практическія и лабораторныя занятія въ низшихъ классахъ будутъ становиться на твердую почву. Съ другой стороны, по мнѣнію нѣкоторыхъ преподавателей логариѳмы оказываются болѣе полезными, чѣмъ сокращенные методы, и эти послѣдніе, будучи усвоены учащимися, впослѣдствіи рѣдко лишь примѣняются ими на дѣлѣ. Въ 25% отчетныхъ школъ счетная линейка не употреблялась; въ 18% она употребляется въ старшихъ классахъ, а въ 52% ею пользовались ученики, готовящіеся къ спеціальнымъ экзаменамъ. Малое распространеніе счетной линейки несомнѣнно объясняется тѣмъ, что вездѣ примѣняются 4-ехзначныя таблицы логариѳмовъ. Таблицы квадратовъ и квадратныхъ корней не примѣняются въ 40% школъ, а таблицы кубическихъ корней не примѣняются въ 58%. Таблицы логариѳмовъ примѣняются во всѣхъ школахъ; въ 60% школъ употребленіе таблицъ начинаютъ въ старшихъ классахъ, а въ 27% — въ среднихъ. Таблицы смертности примѣняются лишь въ части школъ. 88% школъ употребляютъ 4-ехзначные логариѳмы. Графическіе методы въ примѣненіи къ уравненіямъ высшихъ степеней не введены систематически, и не встрѣчаются вовсе въ 53% школъ.

Во Франціи сокращенные методы, игравшіе видную роль въ серединѣ XIX-го столѣтія, теперь уже не преподаются, такъ какъ они, повидимому, не имѣютъ практическаго значенія. Счетная линейка не примѣняется въ лицеяхъ и колледжахъ, за исключеніемъ классовъ, подготовляющихъ къ техническимъ школамъ. Въ «научныхъ» классахъ лицеевъ и техническихъ школъ воспитанники учатся употребленію логариѳмовъ, большею частью по пятизначнымъ таблицамъ. Обычно встрѣчаются также тригонометрическія таблицы съ логариѳмами функцій, а также таблицы**) квадратныхъ и кубическихъ корней и зна-

*) См. австрійскій докладъ, Heft 3, стр. 40 и Heft 6, стр. 9.

**) Напримѣръ, таблицы Комбетта (Combette), изданныя Белиномъ (Belin, Paris).

ченій $\log(1 + r)$. Приближенное рѣшеніе уравненій высшихъ степеней съ численными коэффиціентами какъ посредствомъ графическаго метода, такъ и путемъ вычисленій, преподается лишь въ спеціальныхъ математическихъ классахъ («classes de mathématiques spéciales»).

Что касается Германіи, то по Прусской программѣ сокращенныя вычисленія не требуются, хотя они и преподаются въ нѣкоторыхъ учебныхъ заведеніяхъ *). Вопросъ о значеніи этого предмета, повидимому, еще не рѣшенъ. Въ Баваріи ему удѣляется нѣкоторое время въ низшихъ классахъ гимназій и реальныхъ училищъ **). Въ Саксоніи этотъ предметъ преподаютъ въ Obertertia или Untersecunda гимназій ***), а въ Баденѣ и Эльзасъ-Лотарингіи въ — Oberrealschule въ классѣ Quarta ****). Можно, вообще, сказать, что въ различныхъ государствахъ германской имперіи сокращенныя вычисленія входятъ въ программу, по крайней мѣрѣ, номинально. Счетная линейка въ Германіи, какъ и въ другихъ странахъ, входитъ въ употребленіе весьма медленно *****), Таблицы употребляются во всѣхъ школахъ, какъ и въ другихъ странахъ.

Въ большинствѣ школъ таблицы пятизначныя, но около одной трети всѣхъ школъ пользуется четырехзначными таблицами, при чемъ интерполяція дѣлается въ умѣ, а не посредствомъ табличекъ пропорціональныхъ частей. Въ низшихъ классахъ о методѣ составленія таблицъ упоминается лишь вскользь, и лишь въ старшихъ классахъ Oberrealschulen дѣйствительно выполняются эти вычисленія, а именно съ помощью рядовъ. Современное реформистское движеніе отвело также мѣсто графическому рѣшенію численныхъ уравненій высшихъ степеней и приближенному вычисленію корней ******). Примѣненіе приближенныхъ методовъ (въ родѣ правила Ньютона и Regula falsi) встрѣчается въ реальныхъ учебныхъ заведеніяхъ, въ классѣ Oberprima.

Въ Швейцаріи сокращеннымъ вычисленіямъ удѣляется особенное вниманіе въ техническихъ школахъ. Счетную линейку мы находимъ въ программахъ 6 реальныхъ училищъ изъ числа 25 и въ 2 гимназіяхъ *******). Логариѳмы употребляются вездѣ; большинство школъ пользуется пятизначными таблицами, но около 30% школъ — семизначными. Нѣкоторое усовершенствованіе достигнуто въ дѣленіи угла на десятичныя части: для подобныхъ дѣленій составлены особыя таблицы. Примѣняются также таблицы корней и смертности. Въ 25% гимназій изучаются безконечные ряды вмѣстѣ съ ихъ приложеніемъ къ составленію таблицъ логариѳмовъ. Преподаются методы приближеннаго вычисленія корней уравненій высшихъ степеней съ численными коэффиціентами. Во всѣхъ реальныхъ училищахъ преподаются графическіе методы, Regula falsi и Ньютоновъ способъ приближеннаго вычисленія корней ура-

*) Lietzmann, „Die Organisation", стр. 104, 159; Stoff und Methode ... Unterricht, стр. 85.

**) Wieleitner, цит. соч., стр. 24, 41.

***) Witting, цит. соч., стр. 16.

****) Cramer, цит. соч., стр. 18; Wirz, цит. соч., стр. 29, 33.

*****) Lietzmann, „Stoff und Methode ... Unterricht", стр. 70 и сл.; Timerding, „Die Kaufmännischen Aufgaben", стр. 35.

******) Lietzmann, „Die Organisation", стр. 161, 173, 178, 182, 197; Thaer, цит. соч., стр. 73; Wieleitner, цит. соч., стр. 31; Witting, цит. соч., стр. 24.

*******) Brandenberger, цит. соч., стр. 60, 90.

вненія, а въ нѣкоторыхъ школахъ преподаются еще методы Горнера (Horner), Лагранжа или Греффе (Gräffe).

Въ Соединенныхъ Штатахъ сокращенныя вычисленія съ десятичными дробями рѣдко преподаются, какъ въ элементарныхъ школахъ, такъ и въ «high schools». Въ техническихъ «high schools» (сравнительно новый типъ школы, параллельный болѣе старому типу общей «high school») и въ колледжахъ, въ которыхъ проходятъ инженерныя науки, сокращенные методы вычисленія преподаются попутно въ тѣхъ курсахъ, гдѣ они могутъ найти примѣненіе. Счетная линейка получаетъ большое распространеніе въ техническихъ «high schools» и примѣняется въ колледжахъ во всѣхъ инженерныхъ курсахъ. Въ общихъ high schools лучшихъ типовъ учитель объясняетъ употребленіе счетной линейки на урокахъ тригонометріи. Математическія таблицы въ «high schools» не примѣняются, пока не начинаютъ проходить тригонометріи, которая является необязательнымъ предметомъ. Таблицы здѣсь обыкновенно пятизначныя. Въ нѣкоторыхъ курсахъ ариѳметики и въ коммерческихъ наукахъ примѣняются таблицы сложныхъ процентовъ (восьмая ступень, возрастъ учащихся — 13 лѣтъ). Таблицы смертности въ средней школѣ встрѣчаются рѣдко. Методы вычисленія таблицъ не преподаются въ элементарныхъ курсахъ, и лишь при прохожденіи анализа и высшей алгебры (курсъ колледжа, возрастъ 18 — 19 лѣтъ) студенту показываютъ, какимъ образомъ нѣкоторыя функціи ($\sin x$, e^x, $\log x$ и т. д.) разлагаются въ ряды и какъ при помощи этихъ рядовъ можно составить таблицы. Графическій и ариѳметическій методы рѣшенія уравненія высшихъ степеней съ численными коэффиціентами входятъ въ курсъ алгебры въ колледжѣ (возрастъ — около 18 лѣтъ); ариѳметическій способъ обыкновенно по Горнеру. За послѣднее время начали выше цѣнить графическій методъ рѣшенія такихъ уравненій.

Вычисленія такого типа имѣютъ большое значеніе для современной промышленности. Въ наше время пишущая машина въ значительной мѣрѣ замѣнила перо, а вычислительная машина старыя счетныя кассы *) Японія удержала свой соробанъ **), такъ какъ она полагаетъ, что возвращается эра механическаго вычисленія. Удешевленіе вычислительныхъ машинъ на Западѣ свидѣтельствуетъ, что Японія, дѣйствительно, права. Что должны дѣлать школы въ виду такой перемѣны? Теперь уже не культивируется искусство очень быстраго счета. Вступаемъ ли мы въ практическую полосу графическаго вычисленія? логариѳмическія таблицы будутъ ли вытѣснены счетной линейкой? будутъ ли съ помощью не дорогихъ машинъ производиться обыкновенныя вычисленія подобно тому, какъ производятся теперь нѣкоторыя особенныя вычисленія? Если да, то повторимъ ли мы ошибку, которую сдѣлали, введя семизначныя таблицы, тогда какъ цѣлесообразнѣе было пользоваться четырехзначными, или же мы можемъ съ научной предусмотрительностью выбрать дѣйствительно практичный матеріалъ?

Настоящей коммиссіи было поручено сдѣлать докладъ о современномъ положеніи вещей и предложить вопросы, и въ ея обязанность не входило рекомендовать то или другое на будущее время. Такъ какъ постановка задачи столь же важна, какъ и рѣшеніе, то нужно надѣяться, что нѣкоторые изъ

*) „Cash drawer“ кассы съ ящиками, приспособленныя для сортированія и счета денегъ.

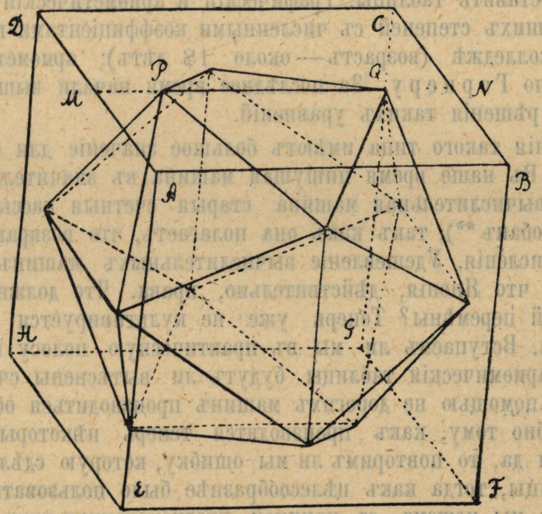
**) См. докладъ проф. Фуджисава (Fujisawa).

поднятыхъ вопросовъ сыграютъ полезную роль. Само собой разумѣется, что нѣкоторые изъ затронутыхъ здѣсь вопросовъ отнюдь не могутъ быть исчерпаны въ бѣглой замѣткѣ *).

Достойны серьезнаго вниманія доводы въ пользу свободы преподавателя въ вопросахъ, затронутыхъ въ настоящемъ докладѣ.

О построеніи правильныхъ многогранниковъ.

Въ настоящей замѣткѣ мы разсмотримъ пріемъ построенія правильныхъ многогранниковъ, значительно облегчающій черченіе проекцій этихъ многогранниковъ на плоскость. Пріемъ этотъ прежде всего основывается на извѣстномъ свойствѣ правильныхъ многогранниковъ — ихъ сопряженности: если центры граней какого либо правильнаго многогранника соединить съ центрами сосѣднихъ граней, то получится также правильный многогранникъ; изъ тетраэдра — тетраэдръ; изъ куба — октаэдръ и обратно; изъ икосаэдра — додекаэдръ и обратно; такимъ образомъ достаточно указать способъ построенія лишь трехъ многогранниковъ, напримѣръ тетраэдра, куба и икосаэдра.



Исходнымъ многогранникомъ намъ послужитъ простѣйшій многогранникъ — кубъ, черченіе котораго въ любомъ ракурсѣ при проектированіи на плоскость не представляетъ затрудненій.

---

*) Когда этотъ докладъ былъ уже готовъ къ печати, въ журналѣ „L'Enseignement mathématique" (іюль, 1912. Стр. 327) появилась замѣтка гг. Кардинала (Cardinal) и Барроу (Barrow) относительно голландскихъ школъ.

Для построенія тетраэдра достаточно соединить четыре его вершины $ACFH$ діагоналями граней; отъ соединенія четырехъ другихъ вершинъ $BDEG$ получимъ также тетраэдръ, сопряженный первому.

Чтобы построить икосаэдръ поступимъ образомъ: проведемъ попарно параллельные отрѣзки, соединяющіе середины реберъ куба въ противоположныхъ граняхъ, такъ, чтобы эти отрѣзки не имѣли общихъ точекъ; каждый такой отрѣзокъ раздѣлимъ на три части въ отношеніи

$$1 : m : 1, \text{ гдѣ } m = (3 - \sqrt{5}) : 2(\sqrt{5} - 1).$$

Полученныя двѣнадцать точекъ дѣленія на всѣхъ отрѣзкахъ явятся, какъ нетрудно видѣть, вершинами икосаэдра.

Дѣленіе каждаго отрѣзка въ указанномъ отношеніи, напримѣръ, отрѣзка MN въ точкахъ P и Q, выполняется въ связи съ построеніемъ правильнаго пятиугольника. Если черезъ a обозначимъ сторону куба, черезъ b — икосаэдра, то, какъ извѣстно, $b = 2a : (\sqrt{5} + 1)$; такъ какъ апоѳема a_5 правильнаго пятиугольника, у котораго радіусъ описанной окружности единица, равна $a_5 = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)$, то, слѣдовательно, точки P и Q опредѣлятся построеніемъ $PQ = b = a : 2a_5$.

А. Б—чъ.

Парадоксъ.

Мнѣ пришлось столкнуться съ однимъ интереснымъ физическимъ парадоксомъ, разрѣшеніе котораго привело меня къ нѣкоторымъ соображеніямъ, связаннымъ съ закономъ Архимеда и его слѣдствіемъ. Вотъ этотъ парадоксъ:

«На чашкѣ вѣсовъ находятся стаканъ съ какой-нибудь жидкостью и другое, болѣе плотное, твердое тѣло, къ которому прикрѣплена нить, также лежащая на чашкѣ. Все это уравновѣшивается гирями на другой чашкѣ. Затѣмъ твердое тѣло снимается съ чашки и нитью прикрѣпляется къ коромыслу вѣсовъ — въ точкѣ привѣса той же чашки — такъ, чтобы тѣло находилось внутри жидкости, но не касалось сосуда. Тогда, по закону Архимеда, жидкость производитъ на погруженное въ нее тѣло давленіе вверхъ, равное вѣсу вытѣсненной жидкости, а, въ силу III закона Ньютона, тѣло, въ свою очередь, производитъ такое же давленіе на жидкость въ противоположномъ направленіи. Такъ какъ оба эти давленія передаются, въ окончательномъ счетѣ, одной и той же точкѣ — точкѣ привѣса чашки, то они взаимно уравновѣшиваются. Отъ погруженія же тѣла въ жидкость уровень послѣдней повышается, а пропорціонально повышенію уровня увеличивается давленіе на дно сосуда; это давленіе передается чашкѣ вѣсовъ, такъ что чашка съ сосудомъ должна была бы опуститься. Но вѣдь массы разсматриваемыхъ тѣлъ мы не измѣнили, произошла только перегруппировка массъ, которая никакого вліянія на вѣсъ всей системы оказать не можетъ, слѣдовательно, въ наше разсужденіе вкралась ошибка. Въ чемъ она?»

Я думаю, что неправильный выводъ проистекаетъ вотъ изъ чего. Изъ закона Архимеда (на основанiи III закона Ньютона) слѣдуетъ только то, что погруженное тѣло давитъ на жидкость такъ, какъ раньше давила на нее вытѣсненная тѣломъ жидкость. Это послѣднее давленiе (передававшееся опредѣленнымъ образомъ точкѣ привѣса) уже было нами учтено при уравновѣшиванiи чашекъ, такъ что нельзя вновь принимать во вниманiе давленiе тѣла на жидкость, только замѣняющее прежнее давленiе жидкости на жидкость. Что же касается увеличенiя давленiя на дно (вслѣдствiе повышенiя уровня) и давленiя жидкости на тѣло, то они, очевидно, компенсируются.

Подобную же неполноту разсужденiй мы встрѣчаемъ во многихъ употребительныхъ учебникахъ физики (напримѣръ, у Краевича, Косоногова, Ковалевскаго, и пр.) при объясненiи извѣстнаго опыта, доказывающаго существованiе давленiя погруженнаго тѣла на жидкость. Дѣло въ томъ, что при объясненiи этого опыта и при выводѣ изъ него заключенiя обычно принимается во вниманiе только давленiе тѣла на жидкость, и вовсе не разсматриваются два взаимно компенсирующихся фактора: 1) увеличенiе давленiя благодаря повышенiю уровня и 2) уничтоженiе давленiя на остальную жидкость со стороны той жидкости, которая теперь замѣщена тѣломъ. Между тѣмъ, наличность перваго изъ этихъ факторовъ бросается въ глаза (уровень повышается), существованiе второго легко можетъ остаться незамѣченнымъ (на чемъ, собственно, и основанъ приведенный выше парадоксъ). Поэтому, мнѣ кажется, слѣдовало бы упоминать какъ о существованiи этихъ двухъ факторовъ, такъ и объ ихъ взаимной компенсацiи.

Легко придумать такой опытъ, который болѣе непосредственно показывалъ бы существованiе давленiя тѣла на жидкость и давалъ бы возможность опредѣлить величину этого давленiя: стоитъ только вытѣсняемую тѣломъ жидкость удалить, что произойдетъ само собой, если жидкость предварительно была налита до краевъ стакана. Въ этомъ случаѣ равновѣсiе не нарушится, откуда непосредственно ясно, что тѣло на оставшуюся жидкость производитъ такое же давленiе, какое раньше производила замѣщенная тѣломъ жидкость. При разъясненiи же обычнаго опыта, мнѣ кажется, было бы полезнымъ расчленить явленiе погруженiя тѣла въ жидкость на два параллельно происходящихъ явленiя:

1) тѣло замѣщаетъ соотвѣтствующiй объемъ жидкости, вслѣдствiе этого, какъ было показано выше, никакого измѣненiя давленiя на остальную жидкость не произойдетъ,

2) вытѣсняемая тѣломъ жидкость распредѣляется надъ остальной жидкостью, благодаря чему происходитъ поднятiе уровня и увеличенiе давленiя на дно. Объемъ этой вытѣсняемой жидкости въ точности равенъ объему тѣла, такъ что приростъ давленiя равенъ вѣсу жидкости, взятой въ объемѣ тѣла, что и подтверждается опытомъ.

Въ случаѣ сосуда съ невертикальными стѣнками произойдетъ то же самое, но тутъ при разсужденiи нужно принять во вниманiе давленiе на наклонныя стѣнки; результатъ разсужденiя отъ этого не зависитъ.

М. Фихтенгольцъ.

Геометрическіе анаглифы.

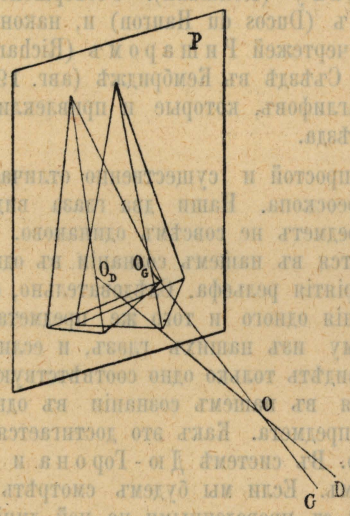
Никто не сомнѣвается въ томъ, какое значеніе для наглядности преподаванія имѣетъ или, по крайней мѣрѣ, можетъ имѣть стереоскопъ. Особенно ясно это въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ приходится имѣть дѣло съ построеніями въ пространствѣ, какъ, напримѣръ, въ стереометріи, кристаллографіи, астрономіи и т. п. Здѣсь стереоскопъ съ успѣхомъ можетъ замѣнить болѣе дорогія и часто не всегда удобныя модели. И если обыкновенный стереоскопъ все таки не получилъ еще въ этой области достаточно широкаго распространенія, то виной этому — одинъ существенный его недостатокъ: при его помощи рельефное пространственное изображеніе можетъ быть показано одновременно одному лишь лицу, что на практикѣ представляетъ большое неудобство. Этотъ недостатокъ является фактически устраненнымъ въ новой системѣ стереоскопическаго видѣнія, которой, повидимому, суждено широко распространиться въ ближайшемъ же будущемъ. Это — такъ называемые «анаглифы», первоначальная идея которыхъ принадлежитъ Рольману (Rollmann). Усовершенствованы они были Дюкосъ-дю-Нороном (Ducos du Hauron) и, наконецъ, приспособлены для геометрическихъ и т. п. чертежей Ришаромъ (Richard*). Р Ѵ-мъ Международномъ Математическомъ Съѣздѣ въ Кембриджѣ (авг. 1912) Ришаръ выставилъ около 40 своихъ анаглифовъ, которые и привлекли къ себѣ заслуженное вниманіе участниковъ Съѣзда.

Принципъ устройства ихъ довольно простой и существенно отличается отъ всѣмъ извѣстнаго обыкновеннаго стереоскопа. Наши два глаза видятъ одинъ и тотъ же (не очень удаленный) предметъ не совсѣмъ одинаково. Эти два нѣсколько различныхъ образа соединяются въ нашемъ сознаніи въ одинъ, и это соединеніе и лежитъ въ основѣ воспріятія рельефа. Слѣдовательно, если у насъ будутъ два плоскихъ изображенія одного и того же предмета въ томъ видѣ, какъ онъ представляется каждому изъ нашихъ глазъ, и если мы устроимъ такъ, что каждый глазъ будетъ видѣть только одно соотвѣтствующее изображеніе, то оба изображенія соединятся въ нашемъ сознаніи въ одно и мы получимъ полную иллюзію рельефнаго предмета. Какъ это достигается въ обыкновенномъ стереоскопѣ, всѣмъ извѣстно. Въ системѣ Дю-Горона и Ришара это достигается слѣдующимъ образомъ. Если мы будемъ смотрѣть черезъ красное стекло на листъ бѣлой бумаги съ проведенными на ней линіями самыхъ различныхъ цвѣтовъ, то наше стекло будетъ пропускать только красные лучи и поглощать всѣ остальные; поэтому бумага покажется намъ краснаго цвѣта, красная линія сольется съ остальнымъ тономъ, и мы ея совсѣмъ не увидимъ; всѣ остальныя линіи покажутся намъ чернаго цвѣта. То же самое, mutatis mutandis, произойдетъ, если мы будемъ брать стекла какого угодно другого цвѣта. Всякій разъ для насъ исчезнетъ линія того же цвѣта, а всѣ остальныя покажутся намъ черными. На этотъ давнымъ давно извѣстный фактъ долго не обращали вниманія, а между тѣмъ его легко использовать для нашей цѣли. Сдѣлаемъ на бѣлой бумагѣ два чертежа одного и того же предмета: одинъ для лѣваго, другой для праваго глаза, какъ въ

*) См. H. Vuibert. „Les anaglyphes géométriques". Paris, 1912.

обыкновенномъ стереоскопѣ, но съ слѣдующими отличіями: 1) чертежи должны отчасти налегать другъ на друга (это, впрочемъ, не всегда обязательно, см. ниже), 2) чертежъ для праваго глаза помѣстимъ слѣва и наоборотъ, и 3) сдѣлаемъ эти чертежи въ двухъ различныхъ (лучше всего дополнительныхъ) цвѣтахъ, напримѣръ, правый чертежъ (для лѣваго глаза) — краснаго цвѣта, лѣвый (для праваго глаза) — зелено-голубого цвѣта. Будемъ разсматривать этотъ чертежъ черезъ очки съ стеклами тѣхъ же двухъ цвѣтовъ, но расположенными такъ, что правый глазъ смотритъ черезъ красное стекло, лѣвый — черезъ зелено-голубое. Очевидно, что правый глазъ будетъ видѣть только зеленый чертежъ, лѣвый — только красный (и тотъ и другой въ черномъ цвѣтѣ). Но это и есть все, что требуется для стереоскопическаго видѣнія. Мы увидимъ нашъ предметъ вполнѣ рельефно, и увидимъ его не на плоскости бумаги, а въ пространствѣ передъ нею. Сама бумага покажется бѣлаго или вѣрнѣе сѣраго цвѣта (красный + зелено-голубой даютъ бѣлый).

Приготовлять изображенія можно обычнымъ способомъ при помощи фотографіи съ послѣдующей окраской въ два цвѣта. Но для геометрическихъ и т. п. чертежей можно обойтись и безъ фотографіи, выполняя ихъ построеніе при помощи простыхъ вычисленій. Если мы представимъ себѣ между экраномъ P и глазами G, D наблюдателя какую нибудь геометрическую фигуру (на приложенномъ чертежѣ треугольную пирамиду, изъ которой изображена только одна точка O) и проведемъ прямыя изъ каждаго глаза черезъ каждую точку фигуры *) до пересѣченія съ экраномъ, то мы получимъ на экранѣ двѣ проекціи нашей фигуры, по одной для каждаго глаза. Зная разстояніе между глазами и положеніе въ пространствѣ данной фигуры и экрана относительно глазъ, мы можемъ, очевидно, вычислить изъ подобныхъ треугольниковъ всѣ элементы, необходимые для построенія. Если экранъ достаточно удаленъ, а предметъ достаточно близокъ къ глазу, то обѣ проекціи не будутъ налегать другъ на друга, въ противномъ случаѣ онѣ отчасти покроютъ другъ друга. При разсматриваніи разстояніе глаза отъ экрана должно быть то же, что и при построеніи, тогда и предметъ мы будемъ видѣть въ томъ же мѣстѣ, гдѣ мы его при построеніи предполагали.



Такъ какъ фотографія допускаетъ репродукцію при помощи клише въ очень большомъ числѣ экземпляровъ, и такъ какъ приборъ для наблюденія («очки») очень простъ и дешевъ, то при помощи анаглифовъ станетъ воз-

*) Въ данномъ случаѣ достаточно, очевидно, восьми прямыхъ, проведенныхъ изъ каждаго глаза черезъ четыре вершины пирамиды.

можна рельефная иллюстрація книгъ. Затѣмъ — и это очень важно — анаглифическія діапозитивы можно проектировать на экранъ и получать такимъ образомъ то, что до сихъ поръ являлось недостижимымъ — рельефныя изображенія на экранѣ передъ болѣе или менѣе значительной аудиторій. Возможно, наконецъ, что этотъ способъ удастся примѣнить и къ кинематографу — насколько увеличится отъ этого даваемая имъ иллюзія! *).

Главная техническая трудность при приготовленіи анаглифовъ заключается въ томъ, что цвѣта стеколъ и чертежей должны быть по возможности одинаковыми, ибо иначе не произойдетъ полнаго поглощенія.

Спеціально для цѣлей преподаванія Вюиберъ и Ришаръ предполагаютъ выпустить въ ближайшемъ будущемъ рядъ небольшихъ систематически составленныхъ анаглифическихъ альбомовъ. Въ брошюрѣ, указанной въ подстрочномъ примѣчаніи на предыдущей страницѣ, приведенъ рядъ такихъ анаглифовъ; они великолѣпно воспроизводятъ рельефъ чертежа.

БИБЛІОГРАФІЯ.

II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ.

Авторы, переводчики и редакторы новыхъ сочиненій приглашаются присылать для этого отдѣла, извѣстнаго въ германской литературѣ подъ названіемъ: „Selbstanzeigen", краткія сообщенія о выпущенныхъ ими сочиненіяхъ, объ ихъ характерѣ и объ ихъ назначеніи. Къ этимъ сообщеніямъ долженъ быть приложенъ экземпляръ сочиненія. Помѣщая эти сообщенія, редакція сохраняетъ, однако, за собою право помѣстить и независимую рецензію.

М. Г. Центнершверъ. *Очерки по исторіи химіи.* Популярно-научныя лекціи; съ 83 рис. Изданіе «Mathesis». Одесса, 1912. Стр. 318 + XV.

«Исторія науки, это — сама наука, а прошлое, это — ключъ къ будущему!» Эти слова одного изъ самыхъ выдающихся русскихъ химиковъ характеризуютъ мѣтко и ясно пользу и цѣль исторіи естественныхъ наукъ. Дѣйствительно: всякая наука составляетъ, по существу, не что иное, какъ сокращенное повтореніе того хода научной мысли, который совершенъ былъ въ теченіе столѣтій самыми выдающимися геніями въ области научнаго творчества. И поэтому та система преподаванія оказывается самой естественной и одновременно и самой удобопонятной, которая возможно ближе подходитъ къ дѣйствительному историческому процессу развитія вѣковыхъ научныхъ проблемъ.

Въ предлагаемыхъ популярно-научныхъ лекціяхъ авторъ старался продемонстрировать ходъ развитія нѣкоторыхъ основныхъ проблемъ, составляющихъ предметъ столь общирной и столь сложной науки, какъ химія.

*) Быть можетъ изобрѣтенный недавно „кинопластикумъ", устройство котораго составляетъ пока секретъ изобрѣтателя, и является чѣмъ нибудь въ этомъ родѣ?

Первыя двѣ лекціи посвящены вопросу: «откуда происходятъ первыя химическія свѣдѣнія?» и «какъ они возникли?» Изслѣдованія, относящіяся къ доисторической эпохѣ человѣческой культуры, памятники которой открыты раскопками послѣдняго времени, указываютъ на то, что побужденіемъ къ зарожденію химіи явились матеріальныя потребности первыхъ культурныхъ націй: ассирійцевъ, вавилонянъ и египтянъ: потребность въ матеріалахъ, пригодныхъ для выдѣлки инструментовъ, оружія, предметовъ украшенія и пр. Такими матеріалами явились металлы; и дѣйствительно, первыя химическія манипуляціи, примѣнявшіяся прадѣдами нашей европейской культуры, состояли въ приготовленіи металловъ изъ природныхъ рудъ.

Только въ началѣ среднихъ вѣковъ эта первобытная металлургія выродилась въ особую отрасль или, скорѣе, отродье химіи: въ алхимію, — въ стремленіе къ искусственному полученію золота. Хотя мечта алхимиковъ о томъ, что прибавленіемъ особаго элексира можно не только превращать неблагородные металлы въ благородные, даже облагораживать и людей, лѣчить болѣзни, словомъ совершать чудеса, — не оправдалась, однако, безчисленными опытами алхимиковъ собранъ былъ богатый эмпирическій матеріалъ, послужившій основой для дальнѣйшаго развитія химіи.

Химія, какъ наука съ реальными стремленіями и съ реальными средствами для достиженія послѣднихъ, появляется на сцену только въ половинѣ XVII-го столѣтія. Ея представителями являются химики-пневматики, тщательно изучающіе свойства газовъ, — ея выразительницей является первая теорія огня, теорія флогистона. Въ третьей лекціи авторъ описываетъ возникновеніе, развитіе и рушеніе этой грандіозной теоріи, судьба которой связана съ трагической судьбой основателя современной химической системы, Антона Лаврентія Лавуазье.

Въ слѣдующихъ четырехъ лекціяхъ нарисована картина развитія основныхъ химическихъ ученій, сплетенная съ именами безсмертныхъ героевъ борьбы за знаніе: Дэви, Фарадея, Либиха, Велера, Джауля, Майера и др. Первымъ двумъ мы обязаны главнымъ образомъ созданіемъ основныхъ законовъ электрохиміи. Либихъ и Велеръ положили основаніе органической химіи. Первый синтезъ мочевины явился исходной точкой для искусственнаго полученія самыхъ сложныхъ органическихъ продуктовъ вплоть до бѣлковыхъ веществъ. Одновременно съ этимъ направленіемъ практической химіи развиваются теоретическія фундаментальныя понятія, благодаря которымъ сталъ возможенъ синтезъ отдѣльныхъ химическихъ явленій. Это понятіе энергіи и понятіе атома. Первое возникло съ самаго начала на незыблемомъ фундаментѣ опыта. Представленіе же объ атомахъ, наоборотъ, есть дитя богатой фантазіи классической философіи древнихъ грековъ. Экспериментальное подтвержденіе существованія атомовъ и опредѣленіе ихъ абсолютной величины составляетъ событіе послѣднихъ дней. Это одинъ изъ величайшихъ тріумфовъ человѣческой мысли, чаявшей уже передъ тысячелѣтіями то, что составляло самую глубокую тайну природы.

Восьмая и девятая лекція посвящены ознакомленію съ современнымъ состояніемъ химіи. Въ нихъ изображенъ новѣйшій періодъ развитія органической химіи, а также нарисованы успѣхи физической химіи, того отдѣла химіи, который получилъ за послѣднія десятилѣтія особое значеніе не-только благодаря практическимъ примѣненіямъ, но и благодаря теоретическому интересу затрагиваемыхъ въ этой области общихъ проблемъ.

Послѣдняя лекція посвящена «химіи будущаго», — изслѣдованію недавно открытыхъ явленій радіоактивности. Хотя эти изслѣдованія еще далеко незакончены, тѣмъ не менѣе уже теперь можно предвидѣть, что этому классу явленій суждено сыграть совершенно исключительную роль.

Слѣдуетъ прибавить, что издательство «Mathesis» выпустило книгу въ свѣтъ съ чрезвычайной тщательностью. Въ особенности рисунки выполнены очень хорошо и оживляютъ всю книгу, написанную въ формѣ легкой и удобопонятной.

М. Центнершверъ.

Отъ редакціи.

Мы имѣли въ виду въ настоящемъ номерѣ помѣстить статью о жизни и дѣятельности скончавшагося основателя журнала Э. К. Шпачинскаго. Не располагая еще всѣмъ необходимымъ матеріаломъ, мы вынуждены это еще на нѣкоторое время отложить. Мы вынуждены также отложить, вѣроятно, до слѣдующаго номера замѣтку относительно статьи г. Видемана.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей приватъ-доцента **Е. Л. Буницкаго.**

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 58 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$(\sin 2x + 3) \sin^4 x - (\sin 2x + 3) \sin^2 x + 1 = 0.$$

В. Тюнинъ (Самара).

№ 59 (6 сер.). Доказать, что выраженіе

$$3^{3n+2} + 5 \cdot 2^{3n+1}$$

кратно 19 при n цѣломъ и не отрицательномъ.

Ш. Хотимскій (Александровскъ).

№ 60 (6 сер.). Среди всѣхъ прямоугольныхъ треугольниковъ данной площади s найти такой, для котораго сумма объемовъ трехъ тѣлъ, полученныхъ отъ вращенія треугольника около каждой изъ его сторонъ, достигаетъ наибольшаго значенія.

Н. С. (Одесса).

№ 61 (6 сер.). На сторонахъ AB и AC треугольника ABC взяты соотвѣтственно точки D и E такъ, что площадь всего треугольника оказывается вдвое болѣе площади ADE; затѣмъ проведена медіана CM треугольника ABC. Доказать, что прямыя DE и CM встрѣчаются въ точкѣ I, для которой удовлетворяется равенство

$$IM \,.\, ID = IE \,.\, IC.$$

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 19 (6 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$x^3 + \sqrt[n]{a^{n-m}}\, x^2 + \sqrt[n]{a^m}\, x + a = 0.$$

Представивъ уравненіе въ видѣ

$$x^2\left(x + \sqrt[n]{a^{n-m}}\right) + \sqrt[n]{a^m}\left(x + \sqrt[n]{a^{n-m}}\right) = \left(x + \sqrt[n]{a^{n-m}}\right)\left(x^2 + \sqrt[n]{a^{n-m}}\right) = 0,$$

разлагаемъ его на два уравненія $x + \sqrt[n]{a^{n-m}} = 0$, $x^2 + \sqrt[n]{a^{n-m}} = 0$, откуда находимъ всѣ три корня даннаго уравненія:

$$x_1 = -\sqrt[n]{a^{n-m}},\quad x_{2,3} = \sqrt{-\sqrt[n]{a^{n-m}}}.$$

А. Кисловъ (Москва); *П. Берендъ* (Кіевъ); *Б. В.* (Верхотурье, Пермск. губ.); *В. Сѣверный* (Тула); *А. Ильинъ* (Астрахань); *Е. Цивьянъ* (Исть-Лейксингъ); *М. Рыбкинъ* (Ейскъ); *N. N.*; *В. Кованько* (станц. Струнико).

№ 27 (6 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$\frac{z^2 + 8(z+1)}{4(z+2)} - \sqrt{z+1} = 0.$$

Запишемъ данное уравненіе въ видѣ:

$$\frac{z^2 + 8(z+1)}{4(z+1)+4} - \sqrt{z+1} = 0 \qquad (1)$$

и положимъ

$$\sqrt{z+1} = x, \qquad (2)$$

откуда

$$z = x^2 - 1. \qquad (3)$$

Подставляя значенія выраженій $\sqrt{z+1}$ и z изъ равенствъ (2) и (3) въ уравненіе (1), получимъ:

$$\frac{(x^2-1)^2+8x^2}{4x^2+4}=x, \quad x^4-2x^2+1+8x^2=4x^3+4x,$$

или $x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0$, т. е. $(x-1)^4=0$, откуда $x=1$. Поэтому [см. (3)] $z=0$ есть единственное рѣшеніе даннаго уравненія.

А. Ильинъ (Астрахань); *А. Кисловъ* (Москва); *М. Рыбкинъ* (Ейскъ) *Б. Щиголевъ* (Варшава).

№ 28 (6 сер.). *Найти безъ помощи таблицъ гипотенузу прямоугольнаго треугольника по опущенной на нее высотѣ* h, *зная, что одинъ изъ острыхъ угловъ его равенъ* 33°.

Пусть въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC острый уголъ B равенъ 33°, а высота AD, опущенная на гипотенузу BC, равна h. Тогда

$$BC=a=AD\cot B+AD\cot C=h(\cot 33^\circ+\cot 57^\circ)=\frac{h\sin(33^\circ+57^\circ)}{\sin 33^\circ.\sin 57},$$

откуда

$$a=\frac{2h}{2\sin 33^\circ\cos 33^\circ}=\frac{2h}{\sin 66^\circ}=\frac{2h}{\cos 24^\circ}. \qquad (1)$$

Такъ какъ 24° есть $\frac{1}{15}$ всей окружности, то

$$\sin 24^\circ=\frac{a_{15}}{2R}, \qquad (2)$$

гдѣ a_{15} — сторона правильнаго пятнадцатиугольника, вписаннаго въ кругъ радіуса R. Пользуясь обычнымъ выраженіемъ для a_{15} (см. Киселевъ „Элементарная Геометрія“), получимъ [см. (2)]:

$$\sin 24^\circ=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{8}.$$

Такимъ образомъ для искомой гипотенузы a находимъ слѣдующее выраженіе [см. (1)]:

$$a=\frac{2h}{\sqrt{1-\sin^2 24^\circ}}=\frac{16h}{\sqrt{64-\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)\right)^2}}.$$

N. N.; *В. Ковалько* (ст. Струнино).

№ 30 (6 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$35x^3-28x^2+15x-12=0.$$

Разлагая лѣвую часть на множителей, получимъ:

$$7x^2(5x-4)+3(5x-4)=(7x^2+3)(5x-4)=0.$$

Итакъ, данное уравненіе распадается на два уравненія

$$7x^2+3=0, \quad 5x-4=0,$$

рѣшая которыя находимъ корни даннаго уравненія:

$$x_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{3}{7}}, \quad x = \frac{4}{5},$$

гдѣ $i = \sqrt{-1}$.

Л. Марголисъ (Петербургъ); *С. Ѳ.* (Очаковъ); *А. Ильинъ* (Астрахань); *П. Берендъ* (Кіевъ); *С. Львовъ* (Тула): *А. Кисловъ* (Москва); *И. Зюзинъ* (Стерлитамакъ); *Б. Щиголевъ* (Варшава); *Д. Алимовъ* (Вольскъ).

№ 31 (6 сер.). *Данъ секторъ* MON *съ угломъ* MON = 60° *при вершинѣ. Построить правильный шестиугольникъ* ABCDEF, *вписанный въ данный секторъ, такъ, чтобы вершины* A *и* B *шестиугольника лежали на радіусѣ* OM, *вершины* C *и* D — *на дугѣ* MN, *а вершины* E *и* F — *на радіусѣ* ON.

Задача рѣшается просто методомъ подобія. Предположивъ, что задача рѣшена, выводимъ изъ равенствъ $\angle BAF = \angle 120^\circ$, $\angle OAF = 60^\circ$, что сторона AF искомаго шестиугольника параллельна хордѣ MN. Проведемъ теперь изъ произвольной точки a, взятой внутри отрѣзка OM, прямую, параллельную хордѣ MN, до встрѣчи въ f съ радіусомъ ON; затѣмъ построимъ на af, какъ на сторонѣ, правильный шестиугольникъ $abcdef$ такъ, чтобы его вершины b и e лежали соотвѣтственно на радіусахъ OM и ON. Тогда искомый шестиугольникъ и вспомогательный шестиугольникъ подобны и подобно расположены, при чемъ центромъ ихъ подобія служитъ точка O. Отсюда вытекаетъ построеніе: построивъ, какъ указано выше, вспомогательный шестиугольникъ $abcdef$, находимъ точки встрѣчи C и D прямыхъ Oc и Od съ дугою MN. Построивъ на CD, какъ на сторонѣ, правильный шестиугольникъ такъ, чтобы онъ лежалъ по ту же сторону отъ CD, какъ и центръ круга O, находимъ искомый шестиугольникъ (строго говоря, полученное рѣшеніе нуждается въ провѣркѣ, которую слѣдуетъ произвести при помощи надлежащихъ паръ подобныхъ треугольниковъ).

В. Ковалько (ст. Струнино); *Н. С.* (Одесса).

№ 33 (6 сер.). *Найти предѣлъ выраженія*

$$\left(\frac{\sin\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{n}}}{\sin\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{n}+1}} - 1\right)\mathrm{n}$$

при $\mathrm{n} = \infty$.

Представимъ данное выраженіе въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left(\frac{\sin\frac{a}{n}}{\sin\frac{a}{n+1}} - 1\right)n = \frac{\sin\frac{a}{n} - \sin\frac{a}{n+1}}{\sin\frac{a}{n+1}}\cdot n = \frac{2\cos\frac{(2n+1)\,a}{2n\,(n+1)}\cdot\sin\frac{a}{2n(n+1)}}{\sin\frac{a}{n+1}}\cdot n =$$

$$= \cos\frac{(2n+1)\,a}{2n\,(n+1)}\cdot\frac{\sin\frac{a}{2n\,(n+1)}}{\left[\frac{a}{2n\,(n+1)}\right]}\cdot\frac{2a}{2n\,(n+1)}\cdot\frac{n}{\sin\frac{a}{n+1}} =$$

$$= \cos\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)a}{2\,(n+1)}\cdot\frac{\sin\frac{a}{2n\,(n+1)}}{\left[\frac{a}{2n\,(n+1)}\right]}\cdot\frac{\left[\frac{a}{(n+1)}\right]}{\sin\frac{a}{n+1}}.$$

При безконечномъ возрастанiи n числитель дроби $\dfrac{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)a}{2(n+1)}$ стремится къ предѣлу $2a$, а знаменатель безконечно возрастаетъ; слѣдовательно дробь стремится къ предѣлу, равному нулю. Каждая изъ дробей $\dfrac{a}{2n(n+1)}$, $\dfrac{a}{n+1}$ тоже стремится при $n=\infty$ къ предѣлу, равному нулю. Итакъ,

$$\lim_{n=\infty} \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)a}{2(n+1)}=0, \quad \lim_{n=\infty} \frac{a}{2n(n+1)}=0, \quad \lim_{n=\infty} \frac{a}{n+1}=0,$$

а потому

$$\lim_{n=\infty} \cos\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)a}{2(n+1)}=1, \quad \lim_{n=\infty} \frac{\sin\frac{a}{2n(n+1)}}{\left[\frac{a}{2n(n+1)}\right]}=1, \quad \lim_{n=\infty} \frac{\left(\frac{a}{n+1}\right)}{\sin\frac{a}{n+1}}=1.$$

Слѣдовательно, искомый предѣлъ, равный произведенiю послѣднихъ трехъ предѣловъ, тоже равенъ единицѣ. Итакъ

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{\sin\frac{a}{n}}{\sin\frac{a}{n+1}}-1\right)n=1.$$

П. Тикуновъ (Козловъ); *Н. С.* (Одесса).

Книги и брошюры, поступившiя въ редакцiю.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцiю „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманiя, будетъ данъ отзывъ.

Б. Ф. Вериго, профессоръ Императорскаго Новороссiйскаго Университета. Основы общей бiологiи. II. *Бiологiя клѣтки, какъ основа ученiй о зародышевомъ развитiи и размноженiи.* Съ 60 рисунками. Изданiе „Mathesis". Одесса, 1913. Стр. 336 Ц. 2 р. 50 к.

И. О. Ярковскiй, инженеръ-технологъ. *Всемiрное тяготѣнiе, какъ слѣдствiе образованiя вѣсомой матерiи внутри небесныхъ тѣлъ.* Кинетическая гипотеза и вытекающiя изъ нея слѣдствiя въ области физики, химiи, геологiи, метеорологiи и космогонiи. Подъ редакцiей инженеръ-технологовъ В. И. Ярковскаго, преподавателя СПБ. Технологическаго Института, и Вл. И. Ярковскаго, лаборанта СПБ. Технологическаго Института. Часть первая. Второе дополненное изданiе Общества Технологовъ. СПБ., 1912. Стр. XX + 268. Ц. 2 р. 50 к.

Д. Галанинъ. *Начальная алгебра въ связи съ пропедевтическимъ курсомъ геометрiи.* Изданiе фирмы „Сотрудникъ школъ" А. К. Залѣсской. Москва, 1912. Стр. XI+211. Ц. 75 к.

Его же. *Введенiе въ методику ариѳметики.* Пособiе при прохожденiи методики въ 8-мъ классѣ женскихъ гимназiй и учительскихъ семинарiй. Изданіе фирмы „Сотрудникъ школъ“ А. К. Залѣсской. Москва, 1911. Стр. XVI+160. Ц. 80 коп.

Его же. *Методика ариѳметики.* Первый годъ обученія. Стр. IV+100. Ц. 50 к. Второй годъ обученія. Стр. 104. Ц. 50 к. Изданіе фирмы „Сотрудникъ школъ“ А. К. Залѣсской. Москва, 1911.

А. А. Ляминъ. *Физико-математическая хрестоматія.* Томъ I. Ариѳметика. Изданіе фирмы „Сотрудникъ школъ“. Москва, 1912. Стр. 280. Ц. 1. 25 к.

Н. Извольскій. *Сборникъ алгебраическихъ задачъ.* Часть I. 2-е изданіе, вновь переработанное, кн. маг. В. В. Думнова. Москва, 1912. Стр. 66. Ц. 35 к.

Е. И. Игнатьевъ. *Букварь-задачникъ по ариѳметикѣ.* Для начальныхъ школъ, дѣтскихъ садовъ и домашняго обученія. Изданіе Т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1912. Стр. 108. Ц. 30 к.

П. А. Некрасовъ. *Общій основной методъ производящихъ функцій въ приложеніи къ исчисленію вѣроятностей и къ законамъ массовыхъ явленій.* (Четвертый отвѣтъ академику А. А. Маркову). Москва, 1912. Стр. 112.

І. І. Косоноговъ, ординарный профессоръ Университета Св. Владиміра. *Концентрическій учебникъ физики.* Для среднихъ учебныхъ заведеній. Съ рисунками и задачами въ текстѣ. Третье изданіе, переработанное и дополненное. Изданіе книжн. магаз. В. А. Просяниченко. Кіевъ, 1912. Стр. XVI+512. Ц. 2 р. 25 к.

Н. Г. Донскихъ. *Система міра.* 2-е изданіе. Томскъ, 1910. Стр. 59.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
ищется

Обложка
ищется