Обложка
пщется

Обложка
ищется

XLVII Сем. № 8

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

И

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 560.

Новыя термодинамическія теоріи.

(Теорема Нернста о теплотѣ и гипотеза о квантахъ).

М. Планка,

профессора теоретической физики въ Берлинскомъ университетѣ.

Докладъ, читанный 16 декабря 1911 г. въ Нѣмецкомъ Химическомъ Обществѣ въ Берлинѣ.

Милостивые государи!

Слѣдуя любезному приглашенію уважаемаго президіума, я попытаюсь развить передъ вами рядъ мыслей, характеризующихъ новѣйшіе успѣхи термодинамики. Но раньше позвольте мнѣ вкратцѣ изобразить нѣсколько главныхъ чертъ въ ходѣ развитія термодинамики до настоящаго времени. Правда, я при этомъ рискую повторить безъ надобности вещи, давно уже извѣстныя. Но только такимъ путемъ я буду въ состояніи яснѣе отмѣтить тѣ вопросы, за которые взялись новѣйшіе изслѣдователи, и надлежащимъ образомъ сопоставить полученные ими результаты съ тѣмъ, что было извѣстно давно.

Чтобы обозрѣть успѣхи термодинамики до настоящаго времени, мы должны строго различать между двумя отдѣльными методами изслѣдованія. Одинъ опирается исключительно лишь на оба главныхъ начала термодинамики и совершенно не прибѣгаетъ къ болѣе спеціальнымъ гипотезамъ о природѣ тепла; другой же методъ, напротивъ, стремится, исходя изъ болѣе спеціальной точки зрѣнія — механической теоріи тепла, на основѣ подходящихъ атомистическихъ представленій глубже проникнуть въ существующія закономѣрности. Какъ достоинства, такъ и слабыя стороны этихъ двухъ методовъ, которые нерѣдко дополняли другъ друга весьма счастливымъ образомъ, изображались столь часто и столь хорошо, что здѣсь нѣтъ надобности останавливаться на этомъ. Въ дальнѣйшемъ изложеніи я буду пользоваться сперва исключительно первымъ методомъ, и лишь во второй части доклада я разсмотрю атомистическое значеніе новѣйшихъ теорій, насколько это представляется въ настоящее время возможнымъ.

I.

Изъ двухъ главныхъ началъ ученія о теплотѣ, введенныхъ подъ этимъ названіемъ въ термодинамику, впервые Клаузіусомъ, первое есть принципъ сохраненія энергіи. Это начало въ настоящее время стоитъ столь прочно и его всеобъемлющее значеніе настолько самоочевидно, что иногда высказывается даже мнѣніе, что принципъ энергіи въ сущности не есть предложеніе, основанное на опытѣ: этотъ принципъ есть будто бы лишь особаго рода опредѣленіе, съ которымъ и впредь можно будетъ такъ или иначе привести въ согласіе всякій фактъ опыта, если только надлежащимъ образомъ истолковать этотъ фактъ.

Съ практической естественно-научной точки зрѣнія вопросъ о справедливости такого взгляда многимъ можетъ показаться черезчуръ тонкимъ и празднымъ; тѣмъ не менѣе я позволю себѣ нѣсколько остановиться на обсужденіи этого вопроса, такъ какъ позже намъ придется къ нему вернуться. Къ тому же совсѣмъ недавно именно по поводу этого самаго вопроса происходилъ весьма оживленный споръ, а именно, когда нужно было энергетически объяснить постоянное выдѣленіе значительныхъ количествъ теплоты соединеніями радія. Въ то время можно было въ весьма почтенныхъ научныхъ статьяхъ встрѣтить мнѣніе, что поразительныя новыя открытія серьезно поколебали въ числѣ многихъ теорій, до сихъ поръ считавшихся общепризнанными, также и принципъ сохраненія энергіи. Впослѣдствіи же, когда этотъ принципъ все таки съ торжествомъ вышелъ изъ испытанія, стали говорить, что это вовсе и не удивительно, такъ какъ законъ сохраненія энергіи имѣетъ, вообще, лишь формальное значеніе и потому въ концѣ концовъ можетъ быть приспособленъ къ всякому факту: если бы принципъ въ его теперешней формѣ оказался несостоятельнымъ, то стоитъ лишь ввести новый подходящій видъ энергіи, скажемъ потенціальной природы, и все опять будетъ въ порядкѣ.

Какъ же обстоитъ дѣло съ этими воззрѣніями? Безъ сомнѣнія, никто не будетъ имѣть ничего противъ слѣдующей формулировки принципа энергіи: въ системѣ тѣлъ, замкнутой отъ всякаго воздѣйствія извнѣ, энергія остается постоянной:

$$\triangle U = 0;$$

здѣсь U обозначаетъ энергію системы, а знакъ $\triangle$ выражаетъ разность значеній энергіи въ двухъ состояніяхъ системы, конечнымъ образомъ различающихся между собой.

Это уравненіе, однако, имѣетъ реальный смыслъ лишь въ томъ случаѣ, если мы можемъ дѣйствительно указать значеніе энергіи U въ опредѣленномъ состояніи системы, и именно поэтому уравненіе въ предыдущей формѣ еще недостаточно. Напримѣръ, если бы насъ спросили: чему равна энергія 1 *гр.* воды при 0^0, то многіе затруднялись бы дать правильный отвѣтъ. Причина очень простая: этотъ вопросъ съ точки зрѣнія термодинамики не имѣетъ опредѣленнаго смысла. Въ самомъ дѣлѣ, въ природѣ мы никогда не измѣряемой самой энергіи, но лишь разность энергіи; при этомъ измѣненіе, испытываемое энергіей системы тѣлъ во всякомъ процессѣ природы, равно суммѣ всѣхъ работъ A, произведенныхъ надъ тѣломъ извнѣ, и всѣхъ количествъ теплоты Q, доставленныхъ тѣлу извнѣ и измѣренныхъ надлежащей единицей:

$$\triangle U = \Sigma A + \Sigma Q. \qquad (1)$$

Это уравненіе представляетъ въ то же время предыдущую формулировку принципа энергіи въ обобщенномъ видѣ, такъ какъ оно сводится къ предыдущему въ томъ случаѣ, когда система не испытываетъ никакого дѣйствія извнѣ (т. е., когда $A = 0$, $Q = 0$).

Такъ какъ послѣднее уравненіе повидимому показываетъ лишь, какъ измѣряется измѣненіе энергіи, то можетъ въ самомъ дѣлѣ показаться, что правы тѣ, которые утверждаютъ, что принципъ энергіи по существу есть лишь опредѣленіе. Но говорить такъ значитъ упускать существенное содержаніе уравненія. Послѣднее въ дѣйствительности содержитъ гораздо больше, чѣмъ правило относительно измѣренія энергіи. Въ самомъ дѣлѣ, лѣвая часть уравненія, т. е. разность $\triangle U$ энергіи, относится къ двумъ опредѣленнымъ состояніямъ разсматриваемой системы тѣлъ, вслѣдствіе чего значеніе этой разности является вполнѣ опредѣленнымъ; правая же часть уравненія, т. е. механическій эквивалентъ внѣшнихъ дѣйствій $\Sigma A + \Sigma Q$, относится къ любому переходу отъ перваго состоянія къ второму, и принципъ требуетъ, чтобы уравненіе удовлетворялось для л ю б о г о перехода. Поэтому, если система тѣлъ переводится по двумъ различнымъ путямъ изъ одного опредѣленнаго состоянія въ другое, то механическій эквивалентъ внѣшнихъ дѣйствій въ обоихъ случаяхъ одинъ и тотъ же. Другими словами, принципъ энергіи въ примѣненіи къ переходу системы тѣлъ изъ одного опредѣленнаго состоянія въ другое состоитъ не въ томъ, что измѣненіе энергіи равно суммѣ внѣшней работы и внѣшней теплоты, но въ томъ, что сумма внѣшней работы и теплоты не зависитъ отъ способа перехода отъ начальнаго состоянія системы къ конечному.

Отсюда непосредственно вытекаетъ, что принципъ энергіи отнюдь не есть лишь простое опредѣленіе; но содержитъ утвержденіе, вѣрность котораго можетъ быть въ безчисленномъ множествѣ случаевъ подтверждена или опровергнута измѣреніемъ, — а именно во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, но и только въ тѣхъ, когда система тѣлъ можетъ быть переведена изъ одного состоянія въ другое различными путями.

Такъ, напримѣръ, температуру жидкости можно повысить двумя различными способами: либо непосредственно, сообщивъ жидкости извѣстное число калорій, либо же исключительно посредствомъ тренія, какъ въ знаменитомъ опытѣ Джауля съ вращеніемъ колесъ съ лопастями. Въ первомъ случаѣ (1) доставленная работа $A_1 = 0$ и количество сообщенной теплоты есть Q_1. Во второмъ случаѣ (2) доставленная работа A_2 равна механической работѣ, уничтоженной треніемъ, а доставленная теплота $Q_2 = 0$. Принципъ сохраненія энергіи требуетъ, чтобы разность между энергіей жидкости въ нагрѣтомъ состояніи и энергіей въ первоначальномъ состояніи была въ обоихъ случаяхъ одна и та же.

$$\triangle U = A_1 + Q_1 = A_2 + Q_2,$$

т. е. въ нашемъ случаѣ

$$Q_1 = A_2;$$

какъ извѣстно, Джауль, основываясь на этомъ соображеніи, вычислилъ механическій эквивалентъ теплоты. При этомъ, очевидно, совершенно безразлично, каковы наши представленія о сущности теплоты или въ частности, какъ мы представляемъ себѣ процессъ возникновенія теплоты путемъ тренія: существенно здѣсь лишь, чтобы состояніе жидкости, вызванное треніемъ, было точно такое же, какъ и состояніе, вызванное полученіемъ теплоты. Если бы мы, видоизмѣняя опытъ, напримѣръ, беря различныя жидкости и температуры или мѣняя аппараты для тренія, получили хотя бы въ одномъ только случаѣ другое значеніе для механическаго эквивалента теплоты, — напередъ отнюдь нельзя признать это невозможнымъ, — то принципъ сохраненія энергіи оказался бы несостоятельнымъ, и его нельзя было бы спасти никакимъ толкованіемъ, никакимъ приспособленіемъ или послѣдующимъ дополненіемъ. Понятно, что примѣровъ въ родѣ сейчасъ приведеннаго можно было бы указать несчетное множество.

Особенно простую и важную форму уравненіе энергіи получаетъ въ томъ случаѣ, если оба состоянія, къ которымъ относится разность энергіи $\triangle U$, тождественны. Тогда $\triangle U = 0$, и уравненіе энергіи выражаетъ, что при превращеніи, которое приводитъ разсматриваемую систему тѣлъ къ ея первоначальному состоянію, т. е. при такъ называемомъ круговомъ процессѣ полная сумма доставленныхъ извнѣ количествъ работы и теплоты равна нулю.

Если мы отсюда бросимъ снова взглядъ на упомянутое выше самопроизвольное выдѣленіе теплоты радіоактивными веществами, то увидимъ, что состоятельность принципа энергіи вполнѣ могла бы быть провѣрена и въ этихъ своеобразныхъ процессахъ, но лишь въ томъ случаѣ, если бы удалось либо возвратить радіоактивное вещество къ его первоначальному состоянію, либо привести вещество изъ одного состоянія въ другое двумя различными способами. Первое условіе нужно, правда, признать неосуществимымъ. Что же касается второго, то я считаю вполнѣ мыслимымъ, что со временемъ мы научимся извѣстнымъ образомъ воздѣйствовать внѣшними средствами на ходъ радіоактивныхъ процессовъ. Нужно, однако, признать, что опыты, предпринятые для рѣшенія этого въ высокой степени важнаго принципіальнаго вопроса, пока еще не увѣнчались успѣхомъ.

Какъ видно изъ общей формулировки уравненія энергіи, энергію системы тѣлъ можно вообще вычислить множествомъ различныхъ способовъ, и всѣ различные пути должны привести къ одному и тому же результату. Но какъ бы мы ни варіировали разработку задачи и методы, мы всегда получаемъ разности энергіи, но никогда не находимъ количества самой энергіи. Поэтому принято говорить, что въ значеніи энергіи всегда еще остается *неопредѣленной* нѣкоторая *аддитивная постоянная*. Величина этихъ константъ не имѣетъ никакого значенія для термодинамическихъ явленій. Нужно признать, что эта неопредѣленность въ значеніи величины, играющей такую огромную роль въ физикѣ и химіи, оставляетъ въ насъ нѣкоторую неудовлетворенность, и на этомъ основаніи иные научные пуристы никогда не говорятъ о самой энергіи, но всегда лишь о ея приращеніяхъ. Они принципіально не соглашаются разсматривать энергію, какъ свойство самихъ тѣлъ, ссылаясь на то обстоятельство, что энергію тѣла мы всегда измѣряемъ лишь по внѣшнимъ воздѣйствіямъ на тѣло, и потому мы должны искать ея значеніе во всякомъ случаѣ внѣ тѣла. Но хотя эта точка зрѣнія и представляется на первый взглядъ вполнѣ основательной, она оказывается однако безплодной: при послѣдовательномъ примѣненіи она не открываетъ намъ новыхъ видовъ, но лишь весьма неудобнымъ образомъ усложняетъ способъ разсмотрѣнія и вычисленія, и при этомъ не доставляетъ намъ никакой выгоды. Поэтому безъ сомнѣнія цѣлесообразно, хотя бы изъ практическихъ соображеній, производить вычисленіе непосредственно съ самой энергіей тѣлъ и вмѣстѣ съ нею брать также и неопредѣленную аддитивную постоянную. Послѣдняя не должна насъ смущать, такъ какъ при вычисленіи измѣримыхъ количествъ тепла или произведенныхъ работъ неопредѣленныя константы въ выраженіяхъ энергіи соотвѣтственныхъ тѣлъ благодаря вычитанію взаимно уничтожаются.

Для полноты я долженъ, однако, упомянуть, что этотъ пробѣлъ, оставленный термодинамикой въ опредѣленіи энергіи, недавно былъ заполненъ съ совершенно неожиданной стороны. Согласно новому *принципу относительности Лоренца-Эйнштейна*, абсолютная величина энергіи покоющагося тѣла въ механическихъ мѣрахъ равна (если внѣшнее давленіе можно не принимать въ разсчетъ) произведенію массы тѣла на квадратъ скорости распространенія свѣта въ пустотѣ, съ этимъ огромнымъ числомъ термодинамикѣ, однако, нигдѣ не приходится имѣть дѣла, и потому оно до настоящаго времени и не пріобрѣло никакого практическаго значенія.

Я нѣсколько подробнѣе остановился на первомъ главномъ началѣ термодинамики съ той цѣлью, чтобы упростить этимъ изложеніе в т о р о г о главнаго начала, такъ какъ тѣ именно соображенія, которыя я въ предыдущемъ подчеркивалъ, какъ наиболѣе существенныя, могутъ быть отнесены непосредственно и ко второму главному началу.

Ядромъ этого послѣдняго, какъ извѣстно, является тотъ опытный фактъ, что міръ, говоря коротко, безпрестанно и безповоротно измѣняется, т. е., что міръ никогда не можетъ возвратиться вполнѣ къ состоянію, въ которомъ онъ находился когда либо раньше. Поэтому ни одинъ процессъ въ природѣ не бываетъ вполнѣ обратимымъ. Математически это начало формулируется слѣдущимъ образомъ. Для всякой системы тѣлъ можно указать нѣкоторую величину, которая въ каждый моментъ опредѣляется соотвѣтственнымъ состояніемъ системы и обладаетъ той особенностью, что при всѣхъ физическихъ и химическихъ измѣненіяхъ, происходящихъ въ замкнутой системѣ, не испытывающей никакихъ дѣйствій извнѣ, эта величина всегда измѣняется въ одномъ направленіи, а именно постоянно возрастаетъ и никогда не убываетъ. Эту величину можно поэтому разсматривать подобно энергіи, какъ нѣкоторое совершенно опредѣленное свойство данной системы тѣлъ; К л а у з і у с ъ назвалъ ее энтропіей S системы. Такимъ образомъ, второе начало термодинамики въ своей общей формулировкѣ гласитъ, что при всякомъ измѣненіи состоянія замкнутой системы,

$$\triangle S > 0,$$

гдѣ $\triangle S$ обозначаетъ разность значенія энтропіи въ позднѣйшемъ и первоначальномъ состояніи системы. Это неравенство выражаетъ, что всѣ процессы природы могутъ протекать только въ одну сторону, и этимъ неравенствомъ исчерпывается также все содержаніе второго главнаго начала, такъ какъ неравенство ничего не говоритъ намъ о величинѣ приращенія энтропіи. Только въ идеальномъ предѣльномъ случаѣ о б р а т и м ы х ъ процессовъ, неравенство переходитъ въ равенство:

$$\triangle S = 0,$$

такъ какъ тогда позднѣйшее и первоначальное состояніе системы могутъ смѣнить другъ друга. Въ послѣдующемъ изложеніи мы будемъ заниматься исключительно этимъ идеальнымъ случаемъ.

Всѣ соображенія, приведенныя нами выше относительно принципа энергіи, примѣняются также къ предыдущему равенству, которое имѣетъ силу для всѣхъ обратимыхъ процессовъ. Оно имѣетъ практическій смыслъ, понятно, при томъ лишь условіи, если мы можемъ дѣйствительно указать значеніе энтропіи S; поэтому необходимо дополнить неравенство, обобщивъ его на такое измѣненіе состоянія разсматриваемой системы, при которомъ на систему извнѣ затрачивается работа и система получаетъ извнѣ теплоту. Тогда измѣненіе энтропіи системы будетъ:

$$\triangle S = \Sigma \frac{Q}{T}, \qquad (2)$$

гдѣ T есть абсолютная температура количества теплоты Q, доставленной системѣ.

Это уравненіе представляетъ собою обобщеніе предыдущаго аналогично тому, какъ уравненіе (1) измѣненія энергіи $\triangle U$ является обобщеніемъ уравненія $\triangle U = 0$ для замкнутыхъ системъ. Изъ него вытекаютъ поэтому совершенно аналогичныя слѣдствія. Прежде всего не слѣдуетъ думать, что уравненіе для $\triangle S$ есть лишь опредѣленіе измѣненія энтропіи. Въ самомъ дѣлѣ, при переходѣ системы тѣлъ изъ одного опредѣленнаго состоянія въ другое энтропія системы испытываетъ совершенно опредѣленное измѣненіе, независимо отъ того, какимъ путемъ совершается измѣненіе состоянія, и уравненія энтропіи выражаетъ, что въ обратимомъ процессѣ количество $\Sigma \frac{I}{Q}$ не зависитъ отъ рода перехода, т. е. для кругового процесса эта сумма равна нулю. Правильность этого утвержденія можно провѣрить путемъ измѣреній.

Правда, и здѣсь, какъ въ случаѣ энергіи, измѣряется лишь разность, а не абсолютная величина энтропіи, и потому здѣсь тоже приходится мириться съ тѣмъ, что въ значеніи энтропіи остается неопредѣленной аддитивная постоянная. Это не мѣшаетъ намъ, однако, разсматривать энтропію подобно энергіи, какъ величину, опредѣляемую состояніемъ системы.

Таково ученіе классической термодинамики. Раньше, чѣмъ итти дальше, я займусь еще нѣкоторыми болѣе спеціальными приложеніями.

Въ изотермическихъ процессахъ, которые играютъ въ физической химіи особенно важную роль, температура T остается постоянной; изъ послѣдняго уравненія энтропіи (2) мы, пользуясь уравненіемъ энергіи (1), выводимъ:

$$\triangle U - T . \triangle S = \Sigma A.$$

Введя для сокращенія величину

$$U - TS = F,$$

мы можемъ написать:

$$\triangle F = \Sigma A. \tag{3}$$

Итакъ, въ случаѣ обратимыхъ изотермическихъ процессовъ о произведенной внѣшней работѣ ΣA можно сказать то же, что о суммѣ $\Sigma A + \Sigma Q$ внѣшней работы и теплоты въ произвольныхъ процессахъ: она не зависитъ отъ пути, по которому система переводится изъ одного состоянія въ другое, и равна разности между значеніями величины F въ концѣ и началѣ процесса. Такимъ образомъ, эта величина F въ названныхъ процессахъ имѣетъ для внѣшней свободно превращающейся работы совершенно такое же значеніе, какъ въ общемъ случаѣ энергія U — для суммы внѣшней работы и теплоты; поэтому Гельмгольцъ и назвалъ это количество „свободной энергіей“ въ противоположность полной энергіи U. Въ частности въ случаѣ кругового процесса $\triangle F = 0$, и, слѣдовательно, $\Sigma A = 0$.

Предположимъ наконецъ, что обратимый процессъ протекаетъ не только изотермически, но также изобарно, т. е. при постоянномъ давленіи p; тогда можно непосредственно указать внѣшнюю работу:

$$\Sigma A = -p \,.\, \triangle V,$$

гдѣ $\triangle V$ обозначаетъ произведенное процессомъ измѣненіе объема разсматриваемой системы тѣлъ. Тогда мы имѣемъ:

$$\triangle U - T \,.\, \triangle S + p \,.\, \triangle V = 0,$$

или

$$\triangle (U - TS + pV) = 0 \tag{4}$$

послѣднее уравненіе показываетъ, что при обратимыхъ изотермически изобарныхъ измѣненіяхъ состоянія величина

$$U - TS + pV = P$$

вовсе не измѣняется, т. е. остается постоянной.

Область примѣненія этого простого предложенія простирается въ частности на случаи измѣненія аггрегатнаго состоянія, каковы парообразованіе, плавленіе, возгонка или также переходъ вещества въ аллотропную модификацію, если переходъ обратимъ и протекаетъ изотермически и изобарно. Это предложеніе можно еще выразить и такъ: при двухъ совмѣстно существующихъ фазахъ опредѣленнаго вещества величина P, отнесенная къ опредѣленной массѣ, въ обѣихъ фазахъ обладаетъ однимъ и тѣмъ же значеніемъ; эта величина P обыкновенно называется термодинамическимъ потенціаломъ. Если выраженіе потенціала P извѣстно, то можно указать условіе равновѣсія двухъ смежныхъ фазъ, и такимъ образомъ дать отвѣтъ на важнѣйшій изъ всѣхъ вопросовъ ученія о фазахъ.

Но выраженіе потенціала P, какъ видно изъ формулы, содержитъ величины U и S, и, такъ какъ эти обѣ величины содержатъ по неопредѣленной аддитивной постоянной, то въ значеніи потенціала P два члена остаются неопредѣленными; классическая термодинамика совершенно безсильна заполнить вообще этотъ пробѣлъ. Отъ этого, правда, значеніе термодинамическаго потенціала не становится иллюзорнымъ,такъ какъ константа, хотя бы и совершенно неопредѣленная, представляетъ существенныя преимущества сравнительно съ перемѣнной. Все же мы видимъ, что на вопросъ о равновѣсіи существующихъ фазъ классическая термодинамика не даетъ полнаго отвѣта, такъ какъ она не въ состояніи выразить законъ для равновѣсія такимъ уравненіемъ-условіемъ, которое содержало бы лишь величины, относящіяся къ доступнымъ измѣренію свойствамъ отдѣльныхъ фазъ.

Въ такомъ состояніи была теорія еще шесть лѣтъ тому назадъ, когда выступилъ В. Нернстъ съ новой поразительной гипотезой.

Значеніе послѣдней, говоря коротко, состоитъ въ томъ, что она весьма простымъ способомъ и въ совершенно общемъ видѣ опредѣляетъ аддитивную константу въ выраженіи энтропіи S, ту самую константу, которая въ классической термодинамикѣ остается неопредѣленной.

Чтобы выяснить плодотворность этой теоремы Нернста о теплотѣ во всемъ ея значеніи, я считаю наиболѣе цѣлесообразнымъ сейчасъ же указать ея содержаніе въ той формулировкѣ, которая по моему мнѣнію является наиболѣе многозначительной и въ то же время наиболѣе простой. А именно, теорема гласитъ: энтропія конденсированнаго (т. е. твердаго или жидкаго) химически однороднаго вещества при нулевой точкѣ абсолютной шкалы температуръ имѣетъ значеніе нуль.

На первый взглядъ это предложеніе тоже кажется опредѣленіемъ: такъ какъ въ термохиміи мы всегда имѣемъ дѣло только съ разностями энтропіи, то фиксированіе аддитивной постоянной (въ общемъ видѣ) представляется въ цѣляхъ измѣренія излишнимъ. Но такое предположеніе оказывается несостоятельнымъ уже потому, что конденсированное вещество можетъ встрѣчаться въ различныхъ модификаціяхъ или аггрегатныхъ состояніяхъ, и мы не можемъ знать заранѣе, является ли его энтропія при нулевой точкѣ абсолютной шкалы температуры независимой отъ модификаціи и аггрегатнаго состоянія, какъ того требуетъ положеніе Нернста. Чтобы показать, сколь далеко простирается область примѣненія этой теоремы, я разсмотрю нѣсколько спеціальныхъ примѣровъ. При этомъ я для болѣе поучительнаго сравненія въ каждомъ примѣрѣ изложу сперва слѣдствія, которыя можно вывести исключительно изъ классической термодинамики, а затѣмъ покажу, какъ они дополняются теоремой Нернста.

Для вычисленія энтропіи S конденсированнаго тѣла классическая термодинамика, даетъ согласно уравненію (2) формулу:

$$S = \int \frac{C_p dT}{T}.$$

Здѣсь C_p — теплоемкость при постоянномъ давленіи, и интегрированіе должно быть произведено при постоянномъ давленіи.

Верхній предѣлъ интеграла есть T, а нижній — классическая термодинамика оставляетъ безъ опредѣленія; теорема же Нернста требуетъ, чтобы нижній предѣлъ былъ равенъ нулю, такъ что для энтропіи получается вполнѣ опредѣленное выраженіе:

$$S = \int_0^T \frac{C_p}{T} dT. \qquad (5)$$

Изъ этого уравненія вытекаетъ прежде всего, что при $T = 0$ количество C_p должно быть равно нулю. Такимъ образомъ мы получаемъ многозначительный выводъ: съ убываніемъ температуры теплоемкости всѣхъ конденсированныхъ химически однородныхъ веществъ стремятся къ предѣлу нуль. Десять лѣтъ тому назадъ такое предложеніе звучало бы болѣе чѣмъ странно; но въ новѣйшее время оно получило поразительное подтвержденіе, главнымъ образомъ благодаря измѣреніямъ Нернста и его учениковъ.

Съ этимъ тѣсно связано другое общее предложеніе: при абсолютномъ нулѣ термическій коэффиціентъ расширенія всякаго конденсированнаго химически однороднаго тѣла становится равнымъ нулю. Уже и теперь нѣкоторыя данныя указываютъ на общепримѣнимость этого предложенія, хотя произведенными до сихъ поръ измѣреніями еще не удалось сдѣлать его столь же очевиднымъ, какъ предыдущее положеніе.

Разсмотримъ далѣе, измѣненіе аггрегатнаго состоянія и переходъ двухъ аллотропныхъ модификацій конденсированнаго тѣла. Для равновѣсія двухъ смежныхъ фазъ классическая термодинамика даетъ соотношеніе (4), или, если вторую фазу отмѣтимъ значками, уравненіе:

$$U' - U - T(S' - S) + p(V' - V) = 0. \qquad (6)$$

Здѣсь выраженіе $U' - U + p(V' - V)$ представляетъ теплоту перехода r. Такимъ образомъ, пользуясь уравненіемъ (5), мы получимъ условіе равновѣсія двухъ фазъ:

$$r - T \int_0^T \cdot \frac{C_p' - C_p}{T} dT = 0. \qquad (7)$$

Если теплота перехода r и теплоемкости C_p' и C_p извѣстны, т. е. извѣстна ихъ зависимость отъ температуры, то можно вычислить отсюда температуру плавленія или температуру перехода тѣла. Но классическая термодинамика одна не въ состояніи сдѣлать это, такъ какъ она верхній предѣлъ интеграла оставляетъ неопредѣленнымъ.

Такъ, напримѣръ, согласно измѣреніямъ Брёнштеда (Broenstеd), теплота превращенія ромбической сѣры въ моноклиническую равна приблизительно

$$r = 1{,}57 + 1{,}15 \,.\, 10^{-5} \,.\, T^2 \text{ калоріямъ}$$

и

$$C_p' - C_p = \frac{dr}{dT} = 2{,}3 \,.\, 10^{-5} \,.\, T.$$

Отсюда при помощи уравненія (7) можно получить, что температура перехода

$$T = 369{,}5;$$

непосредственнымъ измѣреніемъ было найдено число 368,4.

Для энтропіи химически однороднаго газа въ идеальномъ состояніи классическая термодинамика даетъ такое выраженіе:

$$S = n(C_p \ln T - R \ln p + k), \qquad (8)$$

гдѣ n — число молекулъ, p — давленіе, C_p — молекулярная теплота при постоянномъ давленіи, R — абсолютная константа газовъ и k — постоянная, которая остается неопредѣленной. При абсолютномъ нулѣ энтропія, очевидно, есть не нуль, а отрицательная безконечность.

Теорема Нернста дѣлаетъ это выраженіе болѣе опредѣленнымъ, такъ какъ постоянная k обладаетъ вполнѣ опредѣленнымъ измѣримымъ значеніемъ, которое является характеристичнымъ для всѣхъ физико-химическихъ свойствъ газа и потому можетъ быть названо химической константой газа.

(Окончаніе слѣдуетъ).

Крупная неточность въ обычной теоріи сокращеннаго извлеченія кубическаго корня изъ чиселъ и дѣйствительно возможныя сокращенія.

Г. Брусиловскаго.

Теорема о сокращенномъ извлеченіи кубическаго корня изъ чиселъ обычно выражается слѣдующимъ образомъ: «если найдено цыфръ кубическаго корня на 2 больше, чѣмъ осталось найти, то, раздѣливъ послѣдній (полный) остатокъ на утроенный квадратъ извѣстной части корня, найдемъ съ точностью до 1 остальныя цыфры корня». Иногда условіе излагаютъ нѣсколько иначе (Никульцевъ): «если найдено на 1 цыфру болѣе половины всѣхъ цыфръ корня, то ... и т. д.». Но эта редакція, какъ для четнаго, такъ и для нечетнаго числа цыфръ въ корнѣ, очевидно, совпадаетъ съ обычнымъ изложеніемъ теоремы, представляя лишь не совсѣмъ цѣлесообразный обходъ послѣдняго.

Нѣкоторые (Маракуевъ), утверждаютъ, что для возможности примѣненія метода сокращеннаго извлеченія достаточно знать лишь бóльшую часть цыфръ корня (на 1 больше, чѣмъ осталось найти), но что получаемое такимъ образомъ значеніе корня точно лишь до 2, т. е. ошибка менѣе 2 единицъ. При этомъ, правда, прибавляется, что на практикѣ корень получается почти всегда съ точностью до 1 и ошибка, большая 1, бываетъ лишь «въ рѣдкихъ, исключительныхъ случаяхъ», но тутъ же рекомендуется для вящей точности, провѣрять каждый результатъ, вычисляя разность по довольно сложной формулѣ, что, пожалуй, будетъ затруднительнѣе отысканія лишней цыфры.

Между тѣмъ нетрудно показать, что пріемомъ сокращеннаго извлеченія можно пользоваться всегда, когда найдено болѣе половины цыфръ корня, и что получаемое при этомъ значеніе корня точно до 1, за исключеніемъ одного вполнѣ опредѣленнаго случая, когда ошибка можетъ превысить 1, причемъ превышеніе это, если оно имѣетъ мѣсто, настолько очевидно, что, такъ сказать, само себя исправляетъ, и во всякомъ случаѣ ни въ какой провѣркѣ результатъ дѣйствія не нуждается. Это положеніе доказывается нижеприводимой теоремой I. Теорема эта оказывается, однако, лишь частнымъ случаемъ другой болѣе общей истины (изложенной въ теоремѣ II), которая позволяетъ, при отысканіи кубическаго корня, дѣлать еще болѣе значительныя сокращенія въ нѣкоторыхъ вполнѣ опредѣленныхъ и легко узнаваемыхъ случаяхъ.

Относительно получаемаго такимъ образомъ приближеннаго корня мы не можемъ сказать, является ли онъ недостаточнымъ или избыточнымъ. Эта неопредѣленность имѣетъ мѣсто и въ обычномъ методѣ (т. е. когда предварительно находятъ на 2 цыфры болѣе, чѣмъ осталось), но почему то не отмѣчается въ доказательствахъ и выводахъ.

Теорема I. Если найдено (обыкновеннымъ путемъ) болѣе половины всѣхъ цыфръ кубическаго корня изъ цѣлаго числа, то остальная часть корня, съ точностью до 1, вычисляется дѣленіемъ послѣдняго (полнаго) остатка на утроенный квадратъ найденной части корня.

Доказательство. Пусть

$$\sqrt[3]{N} = a + x, \qquad (1)$$

гдѣ N есть нѣкоторое цѣлое число (случай къ которому приводятся остальные), a — найденная часть корня, содержащая $2n+1$ цыфру ($n+1$ значащихъ и n нулей), x — искомая часть корня, содержащая не болѣе n цыфръ и, вообще говоря, число несоизмѣримое. Эти условія можно записать такъ:

$$10^{2n} \leqslant a < 10^{2n+1}, \qquad (2)$$

$$x < 10^n. \qquad (3)$$

Изъ (1) слѣдуетъ:

$$N = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3.$$

Послѣдній остатокъ, по отысканіи части корня a равенъ:

$$N - a^3 = 3a^2x + 3ax^2 + x^3,$$

откуда

$$\frac{N - a^3}{3a^2} = x + \frac{3ax^2 + x^3}{3a^2} = x + R, \qquad (4)$$

гдѣ, очевидно, $R = \dfrac{3ax^2 + x^3}{3a^2}$.

Полагая $x = y + r$, гдѣ y есть цѣлая часть числа x, а $r < 1$, будемъ имѣть изъ (4):

$$\frac{N - a^3}{3a^2} = y + r + R. \qquad (5)$$

Преобразуемъ R:

$$R = \frac{3ax^2 + x^3}{3a^2} = \frac{x^2}{a} \cdot \frac{3a + x}{3a} = \frac{x^2}{a}\left(1 + \frac{x}{3a}\right).$$

Въ дальнѣйшемъ доказательствѣ будемъ различать 2 случая, смотря по тому, имѣетъ ли мѣсто соотношеніе $x \leqslant 10^n - 1$ или $x > 10^n - 1$.

Первый случай: $x \leqslant 10^n - 1$.

Возвышаемъ обѣ части неравенства въ квадратъ:

$$x^2 \leqslant 10^{2n} - 2 \,.\, 10^n + 1,$$

откуда, прибавляя къ правой части двучленъ $10^n - 1$, положительный при всѣхъ значеніяхъ $n > 0$, будемъ имѣть:

$$x^2 \leqslant 10^{2n} - 10^n.$$

Согласно неравенству (2),

$$a \geqslant 10^{2n}.$$

Дѣля почленно эти неравенства, имѣющія противоположный смыслъ, получимъ новое неравенство:

$$\frac{x^2}{a} < 1 - \frac{1}{10^n}. \tag{6}$$

Далѣе, (3) и (2) даютъ систему неравенствъ:

$$x < 10^n,$$

$$a \geqslant 10^{2n},$$

откуда, какъ выше, получимъ:

$$\frac{x}{a} < \frac{1}{10^n} \quad \text{и} \quad \frac{x}{3a} < \frac{1}{10^n},$$

а слѣдовательно,

$$1 + \frac{x}{3a} < 1 + \frac{1}{10^n}. \tag{7}$$

Перемножимъ неравенства (6) и (7), имѣющія одинаковый смыслъ:

$$\frac{x^2}{a}\left(1 + \frac{x}{3a}\right) < 1 - \frac{1}{10^{2n}},$$

т. е.

$$R < 1 - \frac{1}{10^{2n}},$$

а слѣдовательно, и подавно

$$R < 1\text{*)}.$$

На основаніи неравенствъ $r < 1$ и $R < 1$, напишемъ **):

$$y \leqslant y + r + R < y + 2, \qquad (8)$$

откуда и подавно

$$y \leqslant \text{цѣлой части числа } (y + r + R) < y + 2; \qquad (9)$$

это значитъ, что если мы будемъ брать цѣлую часть, частнаго (5), пренебрегая остаткомъ отъ дѣленія, то можемъ получить лишь два результата:

$$y \text{ или } y + 1,$$

которые оба отличаются отъ истинной величины искомой части корня $x = y + r$ меньше, чѣмъ на 1, причемъ y даетъ приближенное недостаточное значеніе x, а $y + 1$ — избыточное: оба съ точностью до 1. Теорема для разсматриваемаго случая доказана.

Второй случай: $x > 10^n - 1$.

Изъ написаннаго только что неравенства и даннаго въ условіи неравенства (3) слѣдуетъ, что x въ этомъ случаѣ представляетъ собою нѣкоторое, вообще говоря, несоизмѣримое число, цѣлая часть котораго изображается одной или нѣсколькими девятками.

Для этого случая мы не можемъ утверждать, что $R < 1$. Слѣдовательно, цѣлая часть частнаго (5) можетъ имѣть, кромѣ y и $y + 1$, также значенія

$$y + 2, \quad y + 3 \quad \text{и т. д.}$$

Но изъ всѣхъ этихъ чиселъ только $y = 10^n - 1$ удовлетворяетъ основному условію (3), выражающему требованіе, чтобы цѣлая часть искомой части корня заключала не болѣе n цыфръ. Числа же

$$y + 1 = 10^n, \quad y + 2 = 10^n + 1 \quad \text{и т. д.}$$

очевидно, содержатъ болѣе n цыфръ и должны быть отброшены, какъ несоот-

---

*) Это можно доказать и инымъ путемъ: $R = \frac{3ax^2 + x^3}{3a^2} = \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2}$. Изъ предыдущаго имѣемъ: $\frac{x^2}{a} < 1 - \frac{1}{10^n}$. Если $x < 10^n$ и $a \geqslant 10^{2n}$, то $x^3 < 10^{3n}$ и $a^2 \geqslant 10^{4n}$; слѣдовательно, $\frac{x^3}{a^2} < \frac{1}{10^n}$, а отсюда и подавно $\frac{x^3}{3a^2} < \frac{1}{10^n}$. Сложивъ неравенства $\frac{x^2}{a} < 1 - \frac{1}{10^n}$ и $\frac{x^3}{3a^2} < \frac{1}{10^n}$, получимъ: $\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2} < 1$, т. е. $R < 1$.

**) R, очевидно, больше нуля.

вѣтствующія числу оставшихся граней, и если бы одно изъ нихъ получилось въ частномъ отъ дѣленія $N - a^3$ на $3a^2$, то вмѣсто него слѣдовало бы взять число $y = 10^n - 1$, изображаемое n девятками *): послѣднее, дѣйствительно, и представляетъ искомую часть корня приближенно по недостатку и съ точностью до 1.

Итакъ, во всѣхъ случаяхъ, если только найдено больше половины всѣхъ цыфръ корня (больше, чѣмъ осталось найти), остальныя цыфры могутъ быть отысканы сокращенно съ точностью до 1 по способу, предложенному въ доказанной выше теоремѣ.

Примѣчаніе 1. Если въ числѣ $a + x$ (въ цѣлой его части) содержится четное число цыфръ, то, найдя болѣе половины всѣхъ цыфръ корня, мы тѣмъ самымъ найдемъ 2-мя цыфрами болѣе, чѣмъ осталось найти. Но для доказательства возможности сокращеннаго извлеченія въ этомъ случаѣ, нѣтъ надобности въ предыдущихъ разсужденіяхъ (хотя они и здѣсь сохраняютъ силу), и вполнѣ достаточно одного изъ обычныхъ способовъ.

Примѣчаніе 2. Корень изъ куба цѣлаго числа вычисляется этимъ способомъ, очевидно, совершенно точно, притомъ безъ всякихъ оговорокъ, такъ какъ для цѣлаго корня случай 2-й доказательства отпадаетъ.

Идеи, содержащіяся въ вышеизложенномъ допускаютъ еще дальнѣйшее развитіе. Мы ограничимся, однако, только слѣдующей теоремой, которую приведемъ безъ доказательетвъ.

Теорема II. Если найдено (обыкновеннымъ путемъ) нѣсколько цыфръ кубическаго корня изъ цѣлаго числа, а именно на $p - 2$ цыфръ болѣе, чѣмъ осталось найти, то, раздѣливъ послѣдній (полный) остатокъ на утроенный квадратъ извѣстной части корня, найдемъ съ точностью до 1 остальныя цыфры корня; p есть наименьшее количество цыфръ корня, которое нужно взять, начиная съ первой, въ извѣстной части корня, чтобы составленное ими число было больше квадрата 1-й искомой цыфры, увеличенной на 1, или равно этому квадрату.

*) Или же, увеличивъ послѣднюю цыфру найденной части корня a на 1, приписать къ ней n нулей: полученное число будетъ представлять приближенное избыточное значеніе $\sqrt[3]{N}$ съ точностью до 1.

Рѣшеніе квадратныхъ и кубическихъ уравненій съ цѣлыми коэффиціентами при помощи послѣдовательныхъ вычитаній.

П. Свѣшникова.

Возьмемъ уравненіе вида $x^2 - px + q = 0$ съ цѣлыми коэффиціентами. Выраженіе $n^2 - pn$ есть сумма n членовъ ряда:

$$1 - p,\quad 3 - p,\quad 5 - p,\quad 7 - p,\ \ldots,\ 2n - 1 - p. \qquad \text{(a)}$$

Если n есть корень даннаго уравненія, то эта сумма будетъ равна $-q$. Слѣдовательно, для опредѣленія положительнаго цѣлаго корня даннаго уравненія слѣдуетъ вычитать изъ $-q$ послѣдовательно члены ряда (a), пока такія вычитанія возможны. Если получится остатокъ 0, то число произведенныхъ вычитаній будетъ равно искомому корню уравненія. Если же при производствѣ двухъ послѣдовательныхъ вычитаній получатся остатки съ разными знаками, то число произведенныхъ вычитаній до перемѣны знака остатка равно приближенному корню уравненія съ недостаткомъ, съ точностью до 1. Для опредѣленія положительнаго несоизмѣримаго корня уравненія съ точностью до $\frac{1}{10^n}$, надо составить новое уравненіе, корни котораго были бы въ 10^n разъ болѣе корней даннаго, и опредѣлить приближенный корень новаго уравненія съ недостаткомъ, съ точностью до 1. Рѣшимъ такимъ способомъ уравненіе $x^2 - 10x + 22 = 0$. Вычитая изъ -22 послѣдовательно числа:

$$1 - 10 = -9,\quad 3 - 10 = -7,\quad 5 - 10 = -5,\quad 7 - 10 = -3,$$

получаемъ остатки -13, -6, -1, 2. Значитъ, 3 есть приближенный корень даннаго уравненія съ недостаткомъ, съ точностью до 1. Возьмемъ тождество

$$-22 - (3^2 - 10 \,.\, 3) = -1 \quad \text{или} \quad 3^2 - 10 \,.\, 3 + 22 = 1.$$

Умноживъ обѣ части этого тождества на 100, получимъ:

$$3^2 \,.\, 100 - 10 \,.\, 3 \,.\, 10 \,.\, 10 + 22 \,.\, 100 = 1 \,.\, 100 \quad \text{или} \quad 30^2 - 100 \,.\, 30 + 2200 = 100.$$

Беремъ уравненіе $y^2 - 100y + 2200 = 0$, корни котораго будутъ въ 10 разъ болѣе корней даннаго. Полагаемъ $y = 30 + t$. Тогда находимъ:

$$(30 + t)^2 - 100 \,.\, (30 + t) + 2200 = 0$$

или

$$30^2 + 60t + t^2 - 100 \,.\, 30 - 100t + 2200 = 0.$$

На основаніи только что полученнаго тождества находимъ:

$$t^2 - 40t + 100 = 0.$$

Вычитая изъ -100 послѣдовательно число:

$$1-40=-39,\quad 3-40=-37,\quad 5-40=-35,$$

находимъ остатки -61, -24, 11. Значитъ, 2 есть приближенное значенiе корня уравненiя съ буквой t съ недостаткомъ, съ точностью до 1. Возьмемъ тождество;

$$-100-(2^2-40\,.\,2)=-24 \quad \text{или} \quad 2^2-40\,.\,2+100=24.$$

Написавъ вмѣсто 100 выраженiе $30^2-100\,.\,30+2200$ и вмѣсто $-40\,.\,2$ выраженiе $60\,.\,2-100\,.\,2$, получимъ:

$$30^2+60\,.\,2+2^2-100\,.\,30-100\,.\,2+2200=24,$$

откуда

$$32^2-100\,.\,32+2200=24.$$

Умноживъ обѣ части этого тождества на 100, получимъ:

$$320^2-1000\,.\,320+220000=2400.$$

Беремъ уравненiе $z^2-1000z+220000=0$, корни котораго будутъ въ 100 разъ болѣе корней даннаго. Полагаемъ $z=320+t_1$. Тогда

$$(320+t_1)^2-1000\,.\,(320+t_1)+220000=0$$

или

$$320^2+640t_1+t_1^2-1000\,.\,320-1000t_1+220000=0.$$

На основанiи предшествующаго тождества находимъ:

$$t_1^2-360t_1+2400=0.$$

Вычитая изъ -2400 послѣдовательно -359, -357, -355, -353 -351, -349, -347, получаемъ остатки -2041, -1684, -1329 -976, -625, -276, $+71$. Значитъ, 6 есть приближенный съ недостаткомъ, съ точностью до 1, корень уравненiя съ неизвѣстнымъ t_1. Беремъ тождество:

$$-2400-(6^2-360\,.\,6)=-276 \text{ или } 6^2-360\,.\,6+2400=276.$$

Замѣняя 2400 выраженiемъ $320^2-1000\,.\,320+220000$ и $-360\,.\,6$ выраженiемъ $640\,.\,6-1000\,.\,6$, находимъ:

$$320^2+640\,.\,6+6^2-1000\,.\,320-1000\,.\,6+220000=276,$$

откуда

$$326^2-1000\,.\,326+220000=276.$$

Умноживъ всѣ члены этого тождества на 100, получимъ:

$$3260^2-10000\,.\,3260+22000000=27600.$$

Беремъ уравненiе $u^2-10000u+22000000=0$, корни котораго въ

1000 разъ болѣе корней даннаго. Полагая $u = 3260 + t_2$, получаемъ:

$$3260^2 + 6520t_2 + t_2^2 - 10000 \, . \, 3260 - 10000t_2 + 22000000 = 0,$$

откуда на основанiи послѣдняго тождества находимъ:

$$t_2^2 - 3480t_2 + 27600 = 0.$$

Вычитая последовательно изъ -27600 числа -3479, -3477 и т. д., найдемъ, что послѣ седьмого вычитанія остатокъ будетъ отрицательный, а послѣ восьмого положительный. Значитъ, приближенное съ недостаткомъ, съ точностью до 1, значеніе t_2 будетъ 7. Слѣдовательно, $u = 3267$ съ точностью до 1, а $x = 3{,}267$ съ недостаткомъ, съ точностью до 0,001.

Подобнымъ же образомъ рѣшаются кубическія уравненія. Для этого надо знать рядъ чиселъ, обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что сумма ихъ, начиная съ перваго, равна кубу ихъ числа. Такой рядъ будетъ

$$1,\ 7,\ 19,\ 37,\ 61,\ 91,\ 127,\ 169,\ 217,\ \ldots,\ (3n^2 - 3n + 1). \qquad (b)$$

Члены его, начиная со второго, представляютъ собою послѣдовательныя разности между членами ряда кубовъ натуральныхъ чиселъ.

Положимъ, что n есть цѣлый положительный корень уравненія

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0. \text{ Тогда } n^3 + pn^2 + qn = -r.$$

Но $n^3 + pn^2 + qn$ есть сумма n членовъ ряда

$$(1 + p \, . \, 1 + q), \quad (7 + p \, . \, 3 + q), \quad (19 + p \, . \, 5 + q), \ \ldots,$$
$$[3n^2 - 3n + 1 + p\,(2n - 1) + q].$$

Слѣдовательно, для опредѣленія точнаго или приближеннаго съ недостаткомъ, съ точностью до 1, корня даннаго уравненія, надо изъ $-r$ вычитать послѣдовательно члены написаннаго ряда, пока не получится въ остаткѣ 0 или пока не измѣнится знакъ остатка. Для примѣра рѣшимъ уравненіе $x^3 - 2x^2 + 3x - 8 = 0$.

Вычитая изъ 8 числа

$$1 - 2 \, . \, 1 + 3 = 2, \quad 7 - 2 \, . \, 3 + 3 = 4, \quad 19 - 2 \, . \, 5 + 3 = 12,$$

получаемъ остатки 6, 2, -10. Значитъ, 2 есть приближенный корень даннаго уравненія съ недостаткомъ, съ точностью до 1. Беремъ тождество:

$$8 - (2^3 - 2 \, . \, 2^2 + 3 \, . \, 2) = 2 \quad \text{или} \quad 2^3 - 2 \, . \, 2^2 + 3 \, . \, 2 - 8 = -2.$$

Умноживъ всѣ члены на 1000, получимъ:

$$20^3 - 20 \, . \, 20^2 + 300 \, . \, 20 - 8000 = -2000.$$

Беремъ уравненіе $y^3-20y^2+300y-8000=0$, корни котораго будутъ въ 10 разъ болѣе корней даннаго. Преобразуемъ это уравненіе, полагая $y=20+t$.

$$(20+t)^3-20(20+t)^2+300(20+t)-8000=0,$$

$$20^3+3.20^2t+3.20t^2+t^3-20.20^2-20.40t-20t^2+300.20+$$
$$+300t-8000=0.$$

На основаніи найденнаго тождества мы можемъ написать это въ видѣ:

$$t^3+40t^2+700t-2000=0.$$

Для нахожденія приближеннаго значенія t вычитаемъ послѣдовательно изъ 2000 числа:

$$1+40.1+700=741,\ 7+40.3+700=827,\ 19+40.5+700=919;$$

получаемъ остатки 1259, 432, -487. Слѣдовательно, приближенное значеніе t равно 2.

Для дальнѣйшихъ вычисленій напишемъ тождество

$$2000-(2^3+40.2^2+700.2)=432 \text{ или } 2^3+40.2^2+700.2-2000=-432.$$

Замѣняя -2000 черезъ $20^3-20.20^2+300.20-8000$, 700.2 черезъ $3.20^2.2-20.40.2+300.2$ и 40.2^2 черезъ $3.20.2^2-20.2^2$, находимъ:

$$20^3+3.20^2.2+3.20.2^2+2^3-20.20^2-20.40.2-20.2^2+$$
$$+300.20+300.2-8000=-432$$

или

$$22^3-20.22^2+300.22-8000=-432.$$

Умноживъ всѣ члены на 1000, получимъ:

$$220^3-200.220^2+30000.220-8000000=-432000.$$

Беремъ уравненіе $z^3-200z^2+30000z-8000000=0$, корни котораго въ 100 разъ болѣе корней даннаго. Полагаемъ $z=220+t_1$. Тогда

$$(220+t_1)^3-200(220+t_1)^2+30000(220+t_1)-8000000=0,$$

или

$$220^3+3.220^2t_1+3.220t_1^2+t_1^3-200.220^2-200.440t_1-200t_1^2+$$
$$+30000.220+30000t_1-8000000=0.$$

На основаніи послѣдняго тождества находимъ:

$$t_1^3+460t_1^2+87200t_1-432000=0.$$

Вычитая изъ 432000 послѣдовательно числа

$$1 + 460 . 1 + 87200 = 87661,\ 7 + 460 . 3 + 87200 = 88587,$$

$$19 + 460 . 5 + 87200 = 89519,\ 37 + 460 . 7 + 87200 = 90457,$$

получаемъ остатки 344339, 255752, 166233, 75776. При слѣдующемъ вычитанiи остатокъ будетъ отрицательный. Слѣдовательно, приближенное значенiе t_1 съ недостаткомъ, съ точностью до 1, равно 4.

Прекращая вычисленiя, находимъ, что $x = 2,24$ съ недостаткомъ, съ точностью до 0,01. Изложенный способъ можно примѣнить къ уравненiямъ какой угодно степени. Въ этомъ способѣ нахожденiе отдѣльныхъ цыфръ приближеннаго корня даннаго уравненiя походитъ на нахожденiе цыфръ въ корнѣ соотвѣтственной степени изъ даннаго числа.

V-й Международный Математическiй Конгрессъ.

Пятый Международный Математическiй Конгрессъ соберется въ Кэмбриджѣ 9 — 15 августа (нашего стиля). По всѣмъ дѣламъ, относящимся къ Конгрессу нужно обращаться къ генеральному секретарю Конгресса Prof. E. W. Hobson, Christ's College, Cambridge (Angleterre).

Организацiонный Комитетъ выпустилъ циркуляръ, сообщающiй слѣдующую программу Конгресса. Среда (8—21/VIII) вечеромъ прiемъ членовъ съѣзда въ большомъ залѣ Ст. Джонской коллегiи (университета). Четвергъ 10 ч. утра. Открытiе Конгресса; въ 2 часа 30 мин. Общее Собранiе; избранiе бюро. Въ 3 часа 30 мин. 1-ая лекцiя, въ 5 час. — вторая. Пятница. Секцiонныя засѣданiя съ 9 час. 30 мин. утра, въ 3 часа Общее Собранiе; 3-я и 4-ая лекцiи. Вечеромъ прiемъ у ректора университета, лорда Релея. Суббота. Утромъ секцiонныя засѣданiя, днемъ 5-ая и 6-ая лекцiи. Воскресенье послѣ обѣда прiемъ въ саду Christ's Colleges; вечеромъ органный концертъ въ капеллѣ королевской коллегiи. Понедѣльникъ утромъ секцiонныя засѣданiя; днемъ экскурсiя въ окрестности города; вечеромъ прiемъ въ Trinity College. Вторникъ утромъ засѣданiя секцiй; въ 3 часа Общее Собранiе; 7-ая лекцiя; вечеромъ заключительное засѣданiе Конгресса. Среда. Экскурсiя въ Оксфордъ и другiя замѣчательныя мѣста.

Лекцiи будутъ прочитаны на слѣдующiя темы: M. Bocher (Harvard) «Предѣльныя задачи въ области одного измѣренiя» (по англiйски). — E. Borel (Paris). «Опредѣленiе и область существованiя, моногенныхъ однородныхъ функцiй» (по французски). — E. Brown (Yale). «Перiодичность въ солнечной системѣ» (по англiйски).— K. Enriques (Bologna). «Задачи, относящiяся къ основанiямъ геометрiи (по итальянски).—Князь Б. Голицынъ (С.-Петербургъ). «Основы инструментальной сейсмологiи» (по французски). — E. Landau (Göttingen). «Рѣшенныя и нерѣшенныя задачи въ теорiи распредѣленiя простыхъ чиселъ» (по нѣмецки). — Sir J. Larmor (Cambrige). «Динамика радiацiи» (по англiйски) — W. N. White. «Мѣсто математики въ инженерной практикѣ».

На этомъ Конгрессѣ состоится Общее Собраніе Международной Коммиссіи по преподаванію математики. Первоначально предполагалось, что Коммиссія эта получитъ уже на этомъ съѣздѣ свое завершеніе. Это оказывается, однако, невозможнымъ: ни въ одной странѣ еще не приведена къ концу серія докладовъ о постановкѣ преподаванія математики въ томъ широкомъ масштабѣ, какъ они задуманы. Такимъ образомъ засѣданія Коммиссіи въ Кембриджѣ будутъ носить тотъ же характеръ, что въ Брюсселѣ и въ Миланѣ: это будетъ предварительное обсужденіе отдѣльныхъ коренныхъ вопросовъ.

Въ соединеніи съ педагогической секціей Конгресса Коммиссія будетъ имѣть 3 засѣданія.

1-ое засѣданіе. Представленіе работъ національныхъ Подкоммиссій. Отъ каждой страны делегатъ представитъ краткій отчетъ того, что сдѣлано національной Подкоммиссіей. Отчетъ долженъ быть составленъ въ письменной формѣ и долженъ содержать характерные моменты этихъ работъ: устный докладъ будетъ представлять краткую выдержку изъ этого отчета.

2-ое засѣданіе. Обсужденіе вопроса А. «Интуиція и опытъ при преподаваніи математики въ средней школѣ». Докладчикъ Е. Смитъ (D. E. Smith, New-York).

3-е засѣданіе. Обсужденіе вопроса В. «Математика въ Физикѣ». Познанія по математикѣ, необходимыя и полезныя при обученіи физикѣ. Докладчикъ К. Рунге (C. Runge, Göttingen).

Центральный Комитетъ организовалъ двѣ подкоммиссіи, которымъ поручилъ разработать доклады по названнымъ вопросамъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ В. Лицману (W. Lietzmann) и К. Рунге было заранѣе поручено составить опросные листы, чтобы такимъ образомъ собрать необходимый для докладчиковъ матеріалъ. Квнечно, между вопросами А и В имѣется тѣсная связь.

Изъ циркуляра Лицмана видно, что Подкоммиссія А не намѣрена поставить вопросъ во всемъ его объемѣ. Что интуиція и опытъ должны играть доминирующую роль въ дѣлѣ преподаванія математики въ низшей школѣ и на первой ступени средней школы, принимается, какъ общепризнанный фактъ. Обсужденію подлежитъ вопросъ, въ какой мѣрѣ эти пріемы примѣнимы и цѣлесообразны на высшей ступени обученія въ средней школѣ. Опросъ имѣетъ цѣлью установить, гдѣ и въ какой мѣрѣ эти пріемы обученія практикуются. Конкретно они сводятся къ 3 категоріямъ: 1) измѣреніе и оцѣнка величинъ (геодезическія и астрономическія работы), 2) черченіе и графическое изображеніе (начертательная геометрія, перспектива, векторы, графическія вычисленія и т. д.), 3) вычисленія (приближенныя вычисленія, примѣненіе счетной линейки, таблицъ и т. д.).

Что касается анкеты по вопросу В, то изъ циркуляра Рунге видно, что здѣсь имѣется въ виду, главнымъ образомъ, университетское преподаваніе.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Изъ вопросовъ современной безпроволочной телеграфіи. Въ лекціи, недавно прочитанной въ Берлинѣ, гр. Г. фонъ Арко, охарактеризовавъ функціи главныхъ частей современной радіо-телеграфической станціи, занялся обсужденіемъ вопроса объ антеннахъ (воздушныхъ проводахъ). Вертикальные провода, которыми пользовались до послѣдняго времени, поддерживаются очень высокими мачтами, достигающихъ даже громадныхъ размѣровъ въ тѣхъ станціяхъ, которыя расчитаны на далекое распространеніе телеграфныхъ сигналовъ. И дѣйствительно, проблема о передачѣ радіо-телеграфныхъ сигналовъ на большія разстоянія коренными образомъ зависитъ отъ устройства антенны. Вопросъ о томъ, передается ли дѣйствіе на разстояніе по воздуху, или по землѣ, или по той и другой средѣ вмѣстѣ, играетъ въ дѣлѣ безпроволочной телеграфіи капитальную роль Между тѣмъ до послѣдняго времени вопросъ этотъ оставался, въ сущности, совершенно открытымъ, хотя теорія приписывающая въ этомъ отношеніи преобладающую роль землѣ пріобрѣла большое число сторонниковъ. Д-ръ Кибицъ (Kiebitz) произвелъ по порученію германскаго главнаго почтоваго управленія систематическіе опыты въ этомъ направленіи. Опыты эти обнаружили, что электрическая энергія въ совершенствѣ передается по землѣ на громадныя разстоянія и что земля можетъ служить даже для огромныхъ разстояній источникомъ энергіи.

Подъ вліяніемъ этихъ результатовъ „Германское Общество Безпроволочной Телеграфіи" построило многочисленные типы землепроводныхъ антеннъ, которыя, повидимому, дѣйствительно оказываются болѣе цѣлесообразными, нежели воздушныя. Особенно важное значеніе имѣетъ то обстоятельство, что мы этимъ путемъ въ значительной мѣрѣ освобождаемся отъ вреднаго вліянія атмосферныхъ разрядовъ и постороннихъ станцій, число которыхъ въ настоящее время очень быстро возрастаетъ. При всемъ томъ дѣйствіе землепроводныхъ антеннъ остается самымъ тѣснымъ образомъ связаннымъ съ дѣйствіемъ воздушныхъ проводовъ.

Съ другой стороны, въ системѣ искровой телеграфіи въ настоящее время также сдѣланы чрезвычайно серьезныя усовершенствованія. Новые приборы даютъ возможность легко устанавливать, такъ называемый, „основной тонъ" искрового потока. Сущность этихъ усовершенствованій, однако, остается еще профессіональной тайной.

Притяженіе земли и луны. Притяженіе, которое оказываютъ другъ на друга земля и луна, сказывается не только въ приливахъ и отливахъ, но и въ деформаціяхъ земного шара; но деформаціи эти столь незначительны, что онѣ могутъ быть обнаржены только при помощи наиболѣе чувствительныхъ измѣрительныхъ аппаратовъ, именно, при помощи, такъ называемыхъ, горизонтальныхъ маятниковъ. Земля оказываетъ силамъ, вызывающимъ эти деформаціи, большое сопротивленіе; тѣмъ не менѣе она все же поддается ихъ дѣйствію и сама реагируетъ при этомъ, какъ шаръ такого же размѣра, сдѣланный изъ стали. Очень точныя измѣренія въ этомъ направленіи производились въ Потсдамской обсерваторіи съ 1902 по 1909 г. при помощи двухъ горизонтальныхъ маятниковъ, установленныхъ въ глубинѣ 25 *м.* Деформація верхнихъ частей земной коры производится, главнымъ образомъ, тепловымъ излученіемъ солнца, которое вызываетъ слабое измѣненіе въ положеніи коры относительно направленія силы тяжести, и этимъ вызываетъ кажущееся суточное движеніе маятника. Это дѣйствіе распространяется, однако, только на верхніе слои, такъ какъ въ песчанной почвѣ вызываемая имъ деформація на глубинѣ 25 *м.* падаетъ уже до $^1/_7$ величины ея поверхности. Другого рода деформація, которую испытываетъ весь земной шаръ, обнаруживается въ дѣйствительныхъ движеніяхъ вертикали, представляющихъ собой слѣдствіе притяженія солнца и луны. Опубликованныя недавно Прусскимъ Королевскимъ Геодезическимъ Институтомъ данныя содержатъ результаты, которые проф. Гекеръ (O. Hecker) извлекъ изъ всего матеріала потсдамскихъ наблюденій. Они приводятъ къ замѣчательному выводу, что твердость земли въ направленіи меридіана меньше, нежели по параллелямъ. По меридіанамъ она соотвѣтствуетъ твердости стекла, по параллелямъ она представляетъ собой нѣчто среднее между твердостью мѣди и стали. Эти результаты, хотя хорошо согласуются съ болѣе старыми наблюденіями, которыя были выполнены въ Страсбургѣ и Николаевѣ, а въ настоящее время очень тщательно продолжаются въ Юрьевѣ. Высказать что либо положительное относительно причины этихъ явленій проф. Гекеръ считаетъ еще преждевременнымъ. Можетъ быть правъ былъ лордъ Кельвинъ, который полагалъ, что эти вращенія находятся въ связи съ вращеніемъ земли; можно думать, однако, что это есть особенность той области, въ предѣлахъ которой производились измѣренія. Необходимы поэтому еще много новыхъ измѣреній, главнымъ образомъ, въ другихъ частяхъ земного шара.

БИБЛІОГРАФІЯ.

I. Рецензіи.

По поводу выхода 21-го изданія учебника геометріи А. П. Киселева*).

Выходъ этого изданія долженъ остановить на себя вниманіе какъ потому, что учебникъ г. Киселева является однимъ изъ самыхъ распространенныхъ, такъ особенно потому, что 1) авторъ въ предисловіи указываетъ, что это изданіе значительно переработано и 2) оно появилось послѣ I-го Съѣзда преподавателей математики (вѣроятно переработка учебника началась еще до Съѣзда; но, можетъ быть, отчасти Съѣздъ оказалъ нѣкоторое вліяніе на эту переработку).

Положительную сторону переработки курса я вижу въ новомъ изложеніи вопросовъ объ измѣреніи площади прямоугольника и объема прямоугольнаго параллелопипеда. Авторъ отказался отъ леммъ, позволяющихъ замѣнять въ извѣстныхъ случаяхъ, отношеніе объемовъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ (или площадей прямоугольниковъ) отношеніемъ отрѣзковъ (или произведеніемъ такихъ отношеній), такъ какъ эти леммы въ скрытомъ видѣ предполагаютъ, что эти площади (или объемы) уже выражены числами, а между тѣмъ еще не дано свѣдѣній о томъ, какъ ихъ выражать числами. Авторъ теперь исходитъ изъ разбиванія площади прямоугольника на квадратныя единицы въ случаѣ, когда стороны прямоугольника выражаются цѣлыми числами, и обобщаетъ постепенно найденное правило на случай дробныхъ и несоизмѣримыхъ чиселъ.

Крупнымъ также улучшеніемъ курса является сведеніе къ одному мѣсту основныхъ задачъ на построеніе перпендикулярныхъ между собою плоскости и прямой; жаль лишь, что авторъ попрежнему здѣсь видитъ только теоремы, а не задачи на построеніе.

---

*) Давая мѣсто этой рецензіи, мы должны оговориться, что не во всемъ согласны съ авторомъ. Мы надѣемся имѣть случай еще и съ своей стороны высказаться объ этой книгѣ. Пока замѣтимъ, что книга несомнѣнно носитъ на себѣ печать тщательнаго размышленія по поводу каждой теоремы, даже каждаго абзаца, хотя иногда можно съ авторомъ и разойтись.

Ред.

Можетъ быть подъ вліяніемъ минувшаго Съѣзда авторъ ввелъ въ свой курсъ понятіе о выпрямленномъ углѣ; но къ сожалѣнію это сдѣлано настолько неудачно, что здѣсь имѣетъ мѣсто не улучшеніе, а ухудшеніе курса. Въ § 18 даны свѣдѣнія о выпрямленномъ углѣ, и, хотя этотъ § напечатанъ мелкимъ шрифтомъ, надо думать, что авторъ желаетъ, чтобы этотъ параграфъ былъ усвоенъ хотя бы способнымъ ученикомъ. Если учащійся усвоитъ этотъ параграфъ, то для него уже ясно, что понятіе „смежные углы" (§ 20) эквивалентно понятію о двухъ углахъ, приложенныхъ другъ къ другу (процессъ сложенія угловъ данъ въ § 17), сумма которыхъ равна выпрямленному углу, а изъ §§ 21 и 22 учащійся увидитъ, что выпрямленный уголъ является также суммою двухъ прямыхъ угловъ; тогда какой же смыслъ имѣетъ теорема § 25, гдѣ „доказывается" (?), что сумма смежныхъ угловъ равна двумъ прямымъ? весь этотъ параграфъ слѣдовало бы лишь замѣнить краткимъ указаніемъ: разъ даны смежные углы, то ихъ сумма равна выпрямленному углу, который въ свою очередь равенъ суммѣ двухъ прямыхъ, слѣдовательно, сумма смежныхъ угловъ равна двумъ прямымъ. Я здѣсь долженъ также повторить одно мѣсто изъ моего доклада на минувшемъ Съѣздѣ: теорема „сумма двухъ смежныхъ угловъ равна двумъ прямыхъ" напрасно называется именемъ „теорема". Здѣсь доказывать не надо; здѣсь нужны лишь упражненія, пріучающія учащихся указывать сумму двухъ или нѣсколькихъ угловъ и позволяющія имъ видѣть, что въ нѣкоторыхъ случаяхъ эта сумма является особымъ угломъ, который можно назвать „выпрямленный уголъ" или „два прямыхъ угла". Затѣмъ при наличности § 18-го получается слѣдующее недоразумѣніе: въ § 17 принимается за „очевидную истину", что каждый уголъ можетъ быть раздѣленъ пополамъ; въ § 18 вводится въ курсъ выпрямленный уголъ; въ § 21 доказывается теорема, что изъ точки на прямой можно возставить къ этой прямой перпендикуляръ, причемъ авторъ сначала уменьшаетъ выпрямленный уголъ, проводя изъ данной точки равнонаклоненные къ сторонамъ этого выпрямленнаго угла лучи и пользуется § 17, примѣняя данную тамъ аксіому къ полученному углу, меньшему выпрямленнаго. Странно, почему, разъ выпрямленный уголъ введенъ въ семью угловъ, нельзя къ нему сразу примѣнить эту аксіому, а надо доказывать, что у него существуетъ биссекторъ.

Г. Кисилевъ въ 21-мъ изданіи особенно слѣдитъ за тѣмъ, чтобы, прежде чѣмъ давать опредѣленія какихъ либо фигуръ, доказывать возможность ихъ существованія. Напомнимъ по этому поводу слова недавно умершаго Д. В. Ройтмана (изъ предисловія къ курсу геометріи), что лучшимъ доказательствомъ выполнимости чего либо, является самое выполненіе; г. Киселевъ хорошо бы сдѣлалъ, если бы пересталъ доказывать существованіе какихъ либо объектовъ, а училъ бы учащихся осуществлять эти объекты путемъ построенія.

Во время Съѣзда между мною и г. Киселевымъ возникли дебаты по поводу двухъ теоремъ: 1) Прямая теорема Перпендикуляръ изъ точки на прямую короче всякой наклонной. 2) Обратная теорема. Кратчайшая изъ всѣхъ прямыхъ, проведенныхъ изъ точки къ прямой, есть перпендикуляръ.

Я утверждалъ (и теперь держусь того же мнѣнія), что здѣсь никакой обратной теоремы нѣтъ (рекомендую еще разъ согласно указаніямъ § 3 двадцать перваго изданія учебника г. Киселева составить обратную теорему для указанной прямой) и что выраженія „перпендикуляръ короче всякой наклонной" и „кратчайшая изъ указанныхъ прямыхъ есть перпендикуляръ" суть только разныя словесныя выраженія одной и той же мысли. Г. Киселевъ настаивалъ наоборотъ на томъ, что здѣсь имѣютъ мѣсто и прямая и обратная теоремы, что ихъ выше данныя словесныя выраженія не представляютъ собою тавтологіи. Напрасно г. Киселевъ не даетъ доказательства этой обратной теоремы въ 21-мъ изданіи, а предоставляетъ это учащимся, — это былъ бы лучшій способъ убѣдить въ справедливости высказаннаго имъ мнѣнія. Разъ г. Киселевъ убѣжденъ въ справедливости указаннаго мнѣнія, то странною является его непослѣдовательность: отчего въ § 134 также не дано прямой и обратной теоремы. (1. Прямая теорема. Діаметръ больше всякой хорды; 2. Обратная теорема. Наибольшая изъ хордъ есть діаметръ)? Вмѣсто этого въ § 134 находимъ лишь одну теорему: „Діаметръ есть наибольшая изъ хордъ“.

Много еще недоразумѣній возникаетъ при разсмотрѣніи этого 21-го переработаннаго учебника. Вотъ одно изъ нихъ. Г. Киселевъ говоритъ: „часть плоскости, заключенная внутри многоугольника или другой какой нибудь фигуры, называется площадью этой фигуры“. И даже: „площадь фигуры мы можемъ разсматривать какъ величину особаго рода ...“. Возникаютъ вопросы, на которыхъ нѣтъ отвѣта въ учебникѣ: что значитъ „разсматривать какъ величину, да еще особаго рода“. Почему нигдѣ въ предыдущемъ курсѣ не обращено вниманія на то, какіе объекты можно разсматривать, какъ величину? Отрѣзки или углы можно разсматривать какъ величину? Особаго ли рода эти величины? и т. п.

Неладно обстоитъ дѣло и съ терминологіею:

§ 6. Всякая ограниченная часть пространства называется геометрическимъ тѣломъ.

§ 432. Часть пространства, занимаемая геометрическимъ тѣломъ, называется объемомъ этого тѣла.

Впрочемъ, здѣсь въ скобкахъ добавлено: „если она разсматривается независимо отъ формы“.

Но эта поправка не измѣняетъ запутанности терминологіи. Мнѣ приходится здѣсь повторить мысль моего доклада на минувшемъ Съѣздѣ: разъ я говорю „часть пространства, ограниченная со всѣхъ сторонъ“, то неминуемо мыслю эту часть пространства, обладающею формою, и нѣтъ возможности отбросить эту форму. Существуетъ возможность (это указано въ моемъ докладѣ) всѣ ограниченныя плоскостями части пространства приводить къ однообразной формѣ (напримѣръ къ формѣ прямоугольнаго параллелепипеда съ опредѣленнымъ основаніемъ); но для этого необходимо дать чисто геометрическое ученіе о преобразованіи многогранниковъ въ другіе имъ равновеликіе, независимое отъ численнаго выраженія объемовъ многогранниковъ *). Такого ученія въ курсѣ г. Киселева не имѣется.

Я не останавливаюсь на тѣхъ добавленіяхъ, которыя введены въ курсъ г. Киселевымъ въ этомъ изданіи; не останавливаюсь потому, что полагаю, что качество учебника зависитъ не отъ этихъ дополненій, а отъ разработки основныхъ вопросовъ. А эти то основные вопросы разработаны по прежнему такъ, что слѣдуетъ сказать: трудно учить по учебнику г. Киселева и еще труднѣе научиться по этому учебнику геометріи.

Н. Извольскій.

II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ.

Авторы, переводчики и редакторы новыхъ сочиненій приглашаются присылать для этото отдѣла, извѣстнаго въ германской литературѣ подъ названіемъ: „Selbstanzeigen“, краткія сообщенія о выпущенныхъ ими сочиненіяхъ, объ ихъ характерѣ и объ ихъ назначеніи. Къ этимъ сообщеніямъ долженъ быть приложенъ экземпляръ сочиненія. Помѣщая эти сообщенія, редакція сохраняетъ, однако, за собою право помѣстить и независимую рецензію.

---

*) Этого выполнить нельзя. *Ред.*

П. Курилко, преподаватель математики Шавельской Женской гимназіи. *Гоніометрическія (тригонометрическія) уравненія.* С.-Петербургъ, 1912. Ц. 30 к.

Тригонометрическія уравненія послѣ правила Декарта представляютъ второе затруднительное мѣсто въ содержаніи курса тригонометріи при ея преподаваніи.

Въ то время, какъ вопросъ объ опредѣленіи элементовъ протяженія фигуръ, когда онъ приводится къ рѣшенію уравненій, рѣшаемыхъ элементарными средствами, не представляетъ никакихъ затрудненій,— болѣе интересный по сравненію съ нимъ вопросъ объ опредѣленіи угла,*) (фигуръ по достаточному числу данныхъ въ томъ же случаѣ представляетъ затрудненія. Именно затрудненія представляются при выборѣ опредѣляемой изъ уравненія тригонометрической величины (неизвѣстнаго угла), разъ ихъ нѣсколько. Неудачный выборъ этой величины, помимо вообще осложненія вопроса, приводитъ къ нерѣшаемому элементарными средствами уравненію, въ то время какъ при удачномъ выборѣ этого не случилось бы.

Изъ основныхъ формулъ гоніометріи и формулъ выраженія гоніометрическихъ величинъ угла черезъ тангенсъ половины его слѣдуетъ, что вопросъ тогда осложняется (степень уравненія повысится), и рѣшеніе можетъ стать невозможнымъ элементарными средствами, когда при исключеніи гоніометрическихъ величинъ будетъ введена новая ирраціональность или будутъ употреблены послѣднія изъ указанныхъ формулъ при возможности избѣжать одно и другое.

Какъ видно изъ прилагаемаго очерка, для простѣйшаго рѣшенія годятся или каждая гоніометрическая величина, или необходима только одна изъ нихъ, или ни одной. Указаніе подходящей гоніометрической величины поэтому, въ виду возможности, напримѣръ, второго случая, является также необходимымъ.

При годности для опредѣленія нѣсколькихъ гоніометрическихъ величинъ, не взаимно обратныхъ, всякій уголъ — корень уравненія дѣлаетъ корнями уравненія всѣ углы, ему соотвѣтственные въ остальныхъ квадрантахъ.

Отсутствіе простого и удобнаго указывающаго гоніометрическую величину правила, дѣлаетъ вопросъ о рѣшеніи задачъ на опредѣленіе угловъ фигуръ сложнымъ и непопулярнымъ среди учащихъ и учащихся.

Два года тому назадъ мнѣ удалось исчерпывающимъ образомъ разработать эту теорію тригонометрическихъ и тѣмъ отчасти гоніометрическихъ уравненій указаніемъ простого дѣленія уравненій на классы, которая мною изложена теперь кратко въ предлагаемой книжкѣ съ цѣлью, чтобы она могла служить дополненіемъ для преподавателя, а съ его помощью и для учениковъ къ существующимъ руководствамъ и сборникамъ задачъ по тригонометріи, не лишеннымъ примѣровъ на эти уравненія **).

Нужно отмѣтить здѣсь то заслуживающее вниманія обстоятельство, что всѣ уравненія 5-го класса 1-ой степени, большинство 5-го класса 2-ой и другихъ степеней относительно синуса и косинуса, рѣшаемыя элементарнымъ путемъ по общему правилу, и многія другія уравненія этого класса могутъ быть болѣе удобно рѣшаемы частными пріемами. (См. зад. 2513 — 2530 ч. III).

П. Курилко.

---

*) См. сборникъ задачъ по тригонометріи П. Курилко ч. I, 641 — 753; ч. II, 871 — 900; ч. III, 2601 — 2631.

**) См. сборникъ задачъ къ элементарному курсу гоніометріи и тригонометріи П. И. Курилко Одесса, 1912. Ц. 60 к. Тамъ же см. болѣе элементарное изложеніе теоріи тригонометрическихъ уравненій.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей приватъ-доцента Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

ОТДѢЛЪ I.

№ 25 (6 сер.). Найти сумму n членовъ ряда

$$\frac{b}{a}+\frac{(b+1)(a-b)}{a(a+1)}+\frac{(b+2)(a-b)^2}{a(a+1)(a+2)}+\frac{(b+3)(a-b)^3}{a(a+1)(a+2)(a+3)}+\cdots$$

и вычислить предѣлъ этой суммы при возрастаніи n до безконечности.

Р. Витвинскій (Одесса).

№ 26 (6 сер.). Стороны треугольника ABC раздѣлены въ точкахъ A', B', C' въ равныхъ отношеніяхъ такъ, что

$$\frac{AC'}{C'B}=\frac{BA'}{A'C}=\frac{CB'}{B'A},$$

и затѣмъ проведены прямыя AA', BB', CC'. Дано, что площадь треугольника, образованнаго пиресѣченіемъ этихъ прямыхъ, составляетъ $\frac{1}{m}$ площади треугольника ABC. Вычислить отношеніе, въ которомъ раздѣлены стороны треугольника.

И. Поляковъ (Ставрополь).

№ 27 (6 сер.). Рѣшпть уравненіе

$$\frac{z^2+8(z+1)}{4(z+2)}-\sqrt{z+1}=0.$$

В. Тюнинъ (Самара).

№ 28 (6 сер.). Найти безъ помощи таблицъ гипотенузу прямоугольнаго треугольника по опущенной на него высотѣ h, зная, что одинъ изъ острыхъ его угловъ равенъ 33°.

N.

ОТДѢЛЪ II.

Задачи на изслѣдованіе хода и свойствъ функцій.

№ 12) Доказать слѣдующее предложеніе: если уравненія

$$ax+by+c+(a_1x+b_1y+c_1) \quad \text{и} \quad ax+by+c-(a_1x+b_1y+c_1)=0$$

выражаютъ въ прямоугольныхъ координатахъ двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя, то эти прямыя суть биссектрисы угловъ между прямыми

$$ax+by+c=0 \quad \text{и} \quad a_1x+b_1y+c_1=0.$$

Пользуясь этимъ предложеніемъ, доказать основное свойство треугольника DEF, ортоцентрическаго по отношенію къ треугольнику ABC, т. е. установить, что высоты AD, BE, CF треугольника ABC суть биссектрисы угловъ треугольника DEF, вершины котораго суть основанія высотъ треугольника ABC.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 412 (5 сер.). *Въ данномъ твеугольникѣ* ABC *проводятъ биссектрису* $БD_1$ *угла* B, *затѣмъ биссектрису* D_1D_2 *треугольника* AD_1B, *затѣмъ биссектрису* D_2D_3 *треугольника* AD_1D_2, *затѣмъ биссектрису* D_3D_4 *треугольника* AD_3D_2 *и т. д. Называя уголъ* $D_{n-1}\,D_n\,D_{n+1}$ *черезъ* u_n, *вычислить* u_n *и найти предѣлъ* u_n *при возрастаніи* n *до безконечности.*

Называя углы треугольника черезъ A, B, C, а углы $ABD_1=\frac{B}{2}$ и $\angle BD_1D_2$ соотвѣтственно черезъ u_0 и u_1, имѣемъ:

$$u_1=\angle BD_1D_2=\angle AD_1D_2=\frac{1}{2}\left(\pi-A-\frac{\angle ABD_1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}-\frac{u_0}{2},$$

или, называя уголъ $\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$ черезъ M,

$$u_1=M-\frac{u_0}{2}. \tag{1}$$

Примѣняя къ треугольникамъ AD_2D_1, AD_3D_2, ..., AD_nD_{n-1} для вычисленія половинъ угловъ D_2, D_3, ..., D_n этихъ треугольниковъ тотъ же методъ, которымъ мы пользовались при выводѣ формулы (1), для вычисленія половины угла BD_1A треугольника ABD_1, получимъ рядъ равенствъ:

$$u_2=M-\frac{u_1}{2}, \quad u_3=M-\frac{u_2}{2}, \quad u_4=M-\frac{u_3}{2}, \quad \ldots, \quad u_n=M-\frac{u_{n-1}}{2}. \tag{2}$$

Изъ равенствъ (1) и (2) съ помощью послѣдовательной подстановки находимъ:

$$u_2 = M\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{u_0}{4},$$

$$u_3 = M\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - \frac{u_0}{8},$$

$$u_4 = M\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) + \frac{u_0}{16}, \ldots,$$

$$u_n = M\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right] + \frac{(-1)^n u_0}{2^n}.$$

Суммируя въ послѣднемъ равенствѣ прогрессію, заключенную въ квадратныя скобки и замѣчая, что $M = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)$, $u_0 = \frac{B}{2}$, получимъ:

$$u_n = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) \cdot \frac{1 - \frac{(-1)^n}{2^n}}{1 + \frac{1}{2}} + (-1)^n \frac{B}{2^{n+1}}$$

или

$$u_n = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{A}{3}\right)\left(1 - \frac{(-1)^n}{2^n}\right) + (-1)^n \frac{B}{2^{n+1}}. \qquad (3)$$

При безконечномъ возрастаніи n каждое изъ выраженій $\frac{(-1)^n}{2^n}$ и $\frac{B}{2^{n+1}}$ стремится къ предѣлу, равному нулю; слѣдовательно,

$$\lim_{n=\infty} u_n = \frac{\pi}{3} - \frac{A}{3}.$$

А. Фрумкинъ (Одесса); *Р. Витвинскій* (Одесса).

№ 452 (5 сер.). *Доказать справедливость тожества*

$$\frac{a}{r_a - r} + \frac{b}{r_b - r} + \frac{c}{r_c - r} = \frac{p}{r},$$

гдѣ a, b, c, p, r_a, r_b, r_c, r *суть соотвѣтственно стороны, полупериметръ и радіусы круговъ внѣвписанныхъ и вписаннаго.*

Называя черезъ s площадь треугольника, имѣемъ:

$$r_a - r = \frac{s}{p-a} - \frac{s}{p} = \frac{as}{p(p-a)},$$

откуда

$$\frac{a}{r_a - r} = \frac{p(p-a)}{s},$$

и точно также получимъ:

$$\frac{b}{r_b - r} = \frac{p(p-b)}{s}, \quad \frac{c}{r_c - r} = \frac{p(p-c)}{s}.$$

Поэтому

$$\frac{a}{r_a-r}+\frac{b}{r_b-r}+\frac{c}{r_c-r}=\frac{p(p-a)+p(p-b)+p(p-c)}{s}=\frac{p(3p-a-b-c)}{s}=$$

$$=\frac{p^2}{s}=p:\frac{s}{p}=\frac{p}{r}.$$

Л. Маргулисъ (Петербургъ); *С. Слугиновъ* (Казань); *М. Добровольскій* (Сердобскъ); *А. Лукошинъ* (Астрахань); *С. Розенблатъ* (Армавиръ); *М Пистракъ* (Лодзь); *П. Тикуновъ* (Козловъ); *Р. Витвинскій* (Варшава); *В. Моргулевъ* (Одесса); *Г. Варкентинъ* (Одесса).

№ 453 (5 сер.). *Найти наибольшую и наименьшую величину выраженія*

$$a\cos x+b\sin x.$$

Если a и b оба равны нулю, то задача теряетъ интересъ, такъ какъ разсматриваемое выраженіе остается равнымъ нулю при всякомъ значеніи x. Если же хоть одно изъ количествъ a и b отлично отъ нуля, то можно опредѣлить уголъ α, удовлетворяющій равенствамъ:

$$\cos\alpha=\frac{a}{\left|\sqrt{a^2+b^2}\right|}, \tag{1}$$

$$\sin\alpha=\frac{b}{\left|\sqrt{a^2+b^2}\right|}, \tag{2}$$

откуда

$$a=\left|\sqrt{a^2+b^2}\right|\cos\alpha,\quad b=\left|\sqrt{a^2+b^2}\right|\sin\alpha,$$

$$a\cos x+b\sin x=\left|\sqrt{a^2+b^2}\right|(\cos\alpha\cos x+\sin\alpha\sin x)=\left|\sqrt{a^2+b^2}\right|\cos(x-\alpha).$$

Такъ какъ наибольшее и наименьшее значенія выраженія $\cos(x-\alpha)$ суть 1 и (-1), то наибольшая и наименьшая величины даннаго выраженія суть $\left|\sqrt{a^2+b^2}\right|$ и $-\left|\sqrt{a^2+b^2}\right|$. Наибольшей величины оно достигаетъ при $\cos(x-\alpha)=1$, т. е. при $x-\alpha=2k\pi$, а наименьшей при $\cos(x-\alpha)=-1$, т. е. при $x-\alpha=(2k+1)\pi$, гдѣ k — произвольное цѣлое число, а α есть уголъ, опредѣленный въ радіантахъ съ помощью равенствъ (1), (2). Итакъ, данное выраженіе достигаетъ maximum'а $\left|\sqrt{a^2+b^2}\right|$ и minimum'а $\left(-\left|\sqrt{a^2+b^2}\right|\right)$ соотвѣтственно при $x=\alpha+2k\pi$ и $x=\alpha+(2k+1)\pi$.

М. Черняевъ (Москва); *М. Добровольскій* (Сердобскъ); *В. Моргулевъ* (Одесса).

№ 454 (5 сер.). *Рѣшить систему уравненій*

$$\lg_{0,125}(x^2-3)-\lg_{0,729}(y^2-7)=0,$$

$$2\lg_{10}x=\lg_{100}(y+2)^2+\lg_{\sqrt[3]{0,1}}\sqrt[3]{\frac{1}{y-2}}.$$

Съ помощью извѣстнаго предложенія о модулѣ, служащемъ для перевода логариѳмовъ отъ одного основанія къ другому, приведемъ всѣ логариѳмы въ данныхъ уравненіяхъ къ основанію 10, которое мы для большей краткости будемъ опускать при письмѣ. Тогда получимъ:

$$\frac{1}{\lg 0,125}\log(x^2-3)-\frac{1}{\lg 0,729}\lg(y^2-7)=0, \qquad (1)$$

$$\lg x^2=\frac{1}{\lg 100}\cdot 2\lg(y+2)+\frac{1}{\lg 0,1^{\frac{1}{3}}}\log(y-2)^{-\frac{1}{3}}=$$

$$=\lg(y+2)+\frac{1}{\frac{1}{3}(-1)}\cdot(-\tfrac{1}{3})\lg(y-2)+\lg(y+-2),$$

$$\lg x^2=\lg[(y+2)(y-2)],\quad \lg x^2=\lg(y^2-4),$$

или

$$x^2=y^2-4. \qquad (2)$$

Подставляя значенiе x^2 изъ уравненiй (2) въ уравненiе (1), находимъ:

$$\frac{1}{\lg 0,125}\lg(y^2-7)-\frac{1}{\lg 0,729}\lg(y^2-7)=\lg(y^2-7)\left(\frac{1}{\lg 0,125}-\frac{1}{\lg 0,729}\right)=0,$$

откуда

$$\lg(y^2-7)=0,$$

такъ какъ $\lg 0,125 \neq \lg 0,729$. Изъ равенства (3) находимъ: $y^2-7=1$, $y^2=8$, $y=\pm\sqrt{2}$, а потому [см. (2)] $x^2=4$, $x=\pm 2$. Изъ двухъ корней $\pm\sqrt{2}$, найденныхъ для y, мы удерживаемъ лишь $+\sqrt{2}$ такъ какъ иначе второе изъ данныхъ уравненiй теряетъ смыслъ. Итакъ формулы

$$x_1=2,\ \ y_1=\sqrt{2};\quad x_2=-2,\ \ y_2=\sqrt{2}$$

даютъ всѣ рѣшенiя предложенной системы.

М. Добровольскiй (Сердобскъ); *П. Тикуновъ* (Козловъ).

№ 455 (5 сер.) *Доказать, что при всякомъ цѣломъ и неотрицательномъ значенiи* n *число* $2^{6n+1}+3^{2n+2}$ *кратно* 11.

(Заимств. изъ *„Journal des Mathématiques élémentaires“*).

Представимъ данное выраженiе послѣдовательно въ видѣ:

$$2^{6n+1}+3^{2n+2}=2\,.\,(2^3)^{2n}+3^2 3^{2n}=2\,.\,8^{2n}+9\,.\,3^{2n}=$$

$$=2\,.\,8^{2n}-2\,.\,3^{2n}+11\,.\,3^{2n}=2\,(8^{2n}-3^{2n})+11\,.\,3^{2n}.$$

Членъ $11\,.\,3^{2n}$ кратенъ 11 при всякомъ цѣломъ и неотрицательномъ значенiи n. Множитель же $8^{2n}-3^{2n}$ при n цѣломъ и положительномъ, какъ разность четныхъ степеней, кратенъ суммы $8+3=11$, а при $n=0$ этотъ множитель обращается въ нуль; значитъ и членъ $2\,(8^{2n}-3^{2n})$ кратенъ 11 при цѣломъ и неотрицательномъ значенiи n. Слѣдовательно, и все данное выраженiе кратно 11 при цѣломъ и не отрицательномъ значенiи n.

А. Кисловъ (Москва); *А. Лукошинъ* (Астрахань); *С. Розенблатъ* (Армавиръ); *М. Пистракъ* (Лодзь); *П. Тикуновъ* (Козловъ); *Е. Доманицкiй* (Каменецъ-Подольскъ); *И. Зюзинъ* (Стерлитамакъ).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

Г. Ми, профессоръ Грейфсвальдскаго Университета. *Курсъ электричества и магнитизма.* Экспериментальная физика міроваго эѳира для физиковъ, химиковъ и электротехниковъ. Разрѣшенный авторомъ переводъ съ нѣмецкаго Ѳ. Ѳ. Соколова подъ редакціей заслуженнаго профессора О. Д. Хвольсона. Часть I. „Электростатика". Выпускъ I. Изданіе „Mathesis". Одесса, 1912. Стр. XII + 208. Ц. за все изданіе (4 вып.) 5 руб.

Дж. Пойнтингъ, профессоръ Бирмингамскаго Университета. *Давленіе свѣта.* Переводъ съ англійскаго. Изд. „Mathesis". Одесса, 1912. Стр. 128 + II. Ц. 50 коп.

Н. Р. Кемпбеллъ. *Современная электрическая теорія.* Переводъ съ англійскаго Б. Р. Абрамсона и М. Я. Якобсона съ дополненіями и измѣненіями. подъ редакціей заслуженнаго профессора И. И. Боргмана. Издательство „Образованіе". СПБ., 1912. Стр. VIII + 484. Ц. 2 руб. 50 коп.

Популярная естественно-научная библіотека № 14. **Э. Страсбургеръ.** *Реальныя основанія ученія о наслѣдственности.* Переводъ съ нѣмецкаго подъ ред. проф. В. Р. Заленскаго. Книгоиздательство „Образованіе". СПБ., 1912. Стр. 79. Ц. 50 к,

В. М. Ипатовъ. *Основанія анализа безконечно малыхъ и собраніе задачъ.* Курсъ VII класса реальныхъ училищъ. Изд. Т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1912. Стр. 200. Ц. 1 руб.

Новый сборникъ ариѳметическихъ задачъ въ связи съ краткими теоретическими опредѣленіями и правилами ариѳметики. I. a) Цѣлыя числа. b) Дроби. Для гимназій, институтовъ, реальныхъ и коммерческихъ училищъ, второклассныхъ учительскихъ школъ, училищъ духовныхъ и по положенію 1872 г. Составленъ подъ редакціей Н. Н. Аменицкаго и Ив. Сахарова Кружкомъ Московскихъ преподавателей. 2-ое исправленное и дополненное изданіе Т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1912. Стр. VIII+256. Ц. 50 к.

Живыя числа. Наглядный ариѳметическій задачникъ для начальныхъ училищъ, дѣтскихъ садовъ и дошкольнаго воспитанія. Съ распредѣленіемъ задачъ по содержанію и пріемамъ рѣшенія (типы). Выпускъ I. Задачи, примѣры, вопросы и задачи-картинки на числа первой сотни. Составленъ Кружкомъ преподавателей подъ редакціей Н. И. Лаврова. Изд. Т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1912. Стр. 88. Ц. 20 коп.

Живой счетъ. Иллюстрированный сборникъ ариѳметическихъ задачъ и и упражненій для сельскихъ школъ. Часть I. Составили К. А. Кроткова, А. Г. Бернашевскій и Г. М. Васильевъ подъ редакціей Е. А. Звягинцева. Изд. И. Д. Сытина. Москва, 1912. Стр. 80. Ц. 55 коп.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
ищется

Обложка
пщется