Обложка
пщется

Обложка
ищется

XLVII Сем. № 5—6.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 557—558.

Способъ для быстраго вычисленія корней изъ чиселъ съ большою точностью.

Я. Успенскаго.

Въ сочиненіи Дедекинда: „Stetigkeit und irrationale Zahlen" на стр. 14 имѣется любопытный способъ доказательства слѣдующаго предложенія: если число A не равно квадрату раціональнаго числа, и всѣ раціональныя числа распредѣлены на два класса, образующіе разрѣзъ такъ, что всякое положительное число, квадратъ котораго $< A$, находится въ первомъ классѣ, а всякое положительное число, квадратъ котораго $> A$, находится во второмъ классѣ, то въ первомъ классѣ нѣтъ наибольшаго числа и во второмъ нѣтъ наименьшаго.

Способъ разсужденія Дедекинда по отношенію къ столь простому предложенію можетъ показаться слишкомъ сложнымъ и искусственнымъ; этимъ, вѣроятно, объясняется то обстоятельство, что авторы, излагающіе теорію ирраціональныхъ чиселъ, обыкновенно доказываютъ упомянутое предложеніе иначе чѣмъ Дедекиндъ.

На самомъ дѣлѣ способъ Дедекинда имѣетъ большее значеніе, чѣмъ можно думать съ перваго взгляда. Дѣйствительно, если вникнуть въ основы этого способа разсужденія и обобщить мысль Дедекинда надлежащимъ образомъ, то нетрудно будетъ придти къ любопытному способу для извлеченія корней изъ чиселъ съ большою точностью при малой затратѣ труда и времени.

1. Начнемъ съ изложенія способа для извлеченія квадратнаго корня.

Пусть A данное число, изъ котораго желаемъ извлечь квадратный корень, и a — любое положительное число. Обозначимъ черезъ $2s-1$ какое нибудь нечетное число и опредѣлимъ изъ равенства:

$$p - q\sqrt{A} = (a - \sqrt{A})^{2s-1} \tag{1}$$

числа p и q раціонально черезъ a и A. Затѣмъ положимъ:

$$a' = \frac{p}{q} = f(a). \tag{2}$$

Такимъ образомъ изъ даннаго числа a мы совершенно опредѣленнымъ образомъ выводимъ новое число a', которое будетъ положительнымъ. Связь, установленная между a' и a, такова, что при условіяхъ $a < \sqrt{A}$ или $a > \sqrt{A}$ будемъ имѣть соотвѣтственно $a' < \sqrt{A}$ или $a' > \sqrt{A}$. Это непосредственно вытекаетъ изъ равенства (1), если написать его въ формѣ:

$$a' - \sqrt{A} = \frac{(a - \sqrt{A})^{2s-1}}{q} \tag{3}$$

и принять въ соображеніе, что q положительное число. Сверхъ того будемъ имѣть $a' > a$, если $a < \sqrt{A}$ и $a' < a$, если $a > \sqrt{A}$. Въ самомъ дѣлѣ, изъ равенства (3) легко выводимъ:

$$\frac{a' - \sqrt{A}}{a - \sqrt{A}} = \frac{1}{1 + t + t^2 + \cdots + t^{2s-2}},$$

гдѣ для сокращенія положено

$$\frac{a + \sqrt{A}}{a - \sqrt{A}} = t.$$

При положительномъ a число t будетъ или > 0 или < -1. При такихъ значеніяхъ t сумма $1 + t + t^2 + \cdots + t^{2s-2} = 1 + (t^2 + t) + (t^4 + t^3) + \cdots + (t^{2s-2} + t^{2s-3})$ будетъ > 1, слѣдовательно, всегда:

$$\frac{a' - \sqrt{A}}{a - \sqrt{A}} < 1,$$

чѣмъ доказывается сдѣланное выше утвержденіе. Принимая во вниманіе изложенное, приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Если, исходя изъ какого нибудь числа $a_0 > 0$, составить послѣдовательность чиселъ:

$$a_0, \; a_1, \; a_2, \; \ldots, \; a_n, \; \ldots$$

выводя каждое послѣдующее изъ предыдущаго съ помощью равенства:

$$a_n = f(a_{n-1}),$$

то въ случаѣ $a_0 < \sqrt{A}$ числа $a_0, a_1, a_2, \ldots$, будутъ идти возрастая, но всѣ будутъ $< \sqrt{A}$; въ случаѣ же $a_0 > \sqrt{A}$ числа $a_0, a_1, a_2, \ldots$, будутъ идти убывая, но всѣ будутъ $> \sqrt{A}$. Въ обоихъ случаяхъ числа $a_0, a_1, a_2, \ldots$, будутъ приближаться къ предѣлу, который будетъ равенъ $\sqrt{A}$.

Чтобы судить о быстротѣ приближенія a_n къ предѣлу $\sqrt{A}$, достаточно обратить вниманіе на равенство:

$$\frac{a_n - \sqrt{A}}{a_n + \sqrt{A}} = \left(\frac{a_0 - \sqrt{A}}{a_0 + \sqrt{A}}\right)^{(2s-1)^n},$$

которое легко выводится изъ (1).

Изъ изложенныхъ свойствъ ряда чиселъ $a_0, a_1, a_2, \ldots$, вытекаетъ весьма удобный способъ для вычисленія квадратнаго корня съ помощью быстро сходящихся послѣдовательныхъ приближеній; причемъ, распоряжаясь начальнымъ числомъ a_0, всегда можно получать приближенное значеніе корня съ недостаткомъ или съ избыткомъ.

2. Для примѣненія на практикѣ указаннаго способа наиболѣе интересны простѣйшіе случаи: $2s-1=3$ и $2s-1=5$. Въ первомъ случаѣ имѣемъ:

$$a_n = \frac{a_{n-1}(a_{n-1}^2 + 3A)}{3a_{n-1}^2 + A} \quad \text{(равенство Дедекинда)}, \qquad (4)$$

$$\frac{a_n - \sqrt{A}}{a_n + \sqrt{A}} = \left(\frac{a_0 - \sqrt{A}}{a_0 + \sqrt{A}}\right)^{3^n}. \qquad (4^*)$$

Во второмъ случаѣ получается:

$$a_n = \frac{a_{n-1}(a_{n-1}^4 + 10Aa_{n-1}^2 + 5A^2)}{5a_{n-1}^4 + 10Aa_{n-1}^2 + A^2}, \qquad (5)$$

$$\frac{a_n - \sqrt{A}}{a_n + \sqrt{A}} = \left(\frac{a_0 - \sqrt{A}}{a_0 + \sqrt{A}}\right)^{5^n}. \qquad (5^*)$$

Покажемъ теперь примѣненіе развитаго способа на численныхъ примѣрахъ.

Для перваго примѣра вычислимъ $\sqrt{5}$ въ предположеніи $2s-1=3$. Чтобы сразу получить большое приближеніе, найдемъ съ помощью логариѳмической линейки первое приближенное значеніе корня $a_0=2{,}24$ съ избыткомъ. Затѣмъ по ариѳмометру вычисляемъ:

$$a_0^2=5{,}0176;\quad a_0^2+3A=20{,}0176.$$

$$a_0(a_0^2+3A)=44{,}839424;\quad 3a_0^2+A=20{,}0528.$$

$$a_1=\frac{44{,}839424}{20{,}0528}=\underline{2{,}23606798}\,.$$

Найденное число a_1 отличается отъ $\sqrt{5}=2{,}23606797$ только въ восьмомъ знакѣ.

Для другого примѣра вычислимъ при $2s-1=5$ корень квадратный изъ 73, принимая $a_0=8$. Имѣемъ:

$$a_0^4+10Aa_0^2+5A^2=77461;\quad a_0\left(a_0^4+10Aa_0^2+5A^2\right)=619688.$$

$$5a_0^4+10Aa_0^2+A^2=72529.$$

$$a_1=\frac{619688}{72529}=8{,}5438.$$

Въ дѣйствительности же $\sqrt{73}=8{,}54400$.

3. Развитыя соображенія нельзя непосредственно примѣнить для корня m-ой степени, гдѣ $m>2$, такъ какъ число $\left(a-\sqrt[m]{A}\right)^k$ не приводится къ виду $p-q\sqrt[m]{A}$, гдѣ p и q выражаются раціонально черезъ a и A. Чтобы обойти это затрудненіе и получить пригодные на практикѣ результаты, мы начнемъ съ рѣшенія слѣдующаго вопроса: обозначая $\zeta=\sqrt[m]{A}$, опредѣлить числа $p_0, p_1, \ldots, p_{m-1}$ такъ, чтобы выраженіе

$$(a-\zeta)^3(p_0+p_1\zeta+p_2\zeta^2+\cdots+p_{m-1}\zeta^{m-1}) \tag{6}$$

приводилось къ виду $\varrho-\sigma\zeta$, гдѣ ϱ и σ выражаются раціонально черезъ a и A.

Развернувъ по степенямъ ζ выраженіе (6) и понизивъ, гдѣ возможно, степени ζ съ помощью равенства $\zeta^m=A$, найдемъ, что коэффиціентъ при ζ^k, гдѣ $k=3, 4, \ldots, m-1$, будетъ:

$$a^3p_k-3a^2p_{k-1}+3ap_{k-2}-p_{k-3}\,.$$

Коэффиціенты же при ζ^0, ζ, ζ^2 будутъ соотвѣтственно:

$$a^3 p_0 - 3a^2 A p_{m-1} + 3aAp_{m-2} - Ap_{m-3},$$

$$a^3 p_1 - 3a^2 p_0 \quad + 3aAp_{m-1} - Ap_{m-2},$$

$$a^3 p_2 - 3a^2 p_1 \quad + 3ap_0 \quad - Ap_{m-1}.$$

По условію коэффиціенты при ζ^2, ζ^3, ..., ζ^{m-1} должны быть равны нулю, что даетъ рядъ равенствъ:

$$a^3 p_k - 3a^2 p_{k-1} + 3ap_{k-2} - p_{k-3} = 0 \text{ при } k = 3, 4, \cdots, m-1, \tag{7}$$

$$a^3 p_2 - 3a^2 p_1 + 3ap_0 - Ap_{m-1} = 0. \tag{8}$$

Система уравненій (7) позволяетъ выразить p_k, гдѣ $k = 3, 4, \ldots, m-1$, черезъ p_0, p_1, p_2. Получается

$$p_k = \frac{2p_0 - (a^2p_2 - 4ap_1 + 3p_0)\,k + (a^2p_2 - 2ap_1 + p_0)\,k^2}{2a^k}. \tag{9}$$

Подставляя найденное изъ послѣдняго равенства значеніе p_{m-1} въ равенство (8), видимъ, что три числа p_0, p_1, p_2 связаны единственнымъ линейнымъ и однороднымъ соотношеніемъ. Для полученія болѣе простыхъ результатовъ мы прибавимъ новое соотношеніе того же вида и именно положимъ $p_{m-1} = 0$. Тогда получимъ:

$$p_k = \frac{m-1+(m-2)\,k - k^2}{a^k\,(m-1)}\,p_0 \text{ при } k = 1, 2, 3, \ldots, m-2,$$

гдѣ p_0 остается произвольнымъ. Полагая $p_0 = (m-1)\,a^{m-2}$, найдемъ окончательно

$$p_k = (k+1)(m-k-1)\,a^{m-k-2}. \tag{10}$$

Такимъ образомъ приходимъ къ заключенію: произведеніе

$$(a-\zeta)^3 \{ 1 \cdot (m-1)\,a^{m-2} + 2\,(m-2)\,a^{m-3}\,\zeta + 3\,(m-3)\,a^{m-4}\,\zeta^2 + \cdots$$
$$+ (m-1) \,.\, 1 \,.\, \zeta^{m-2} \}$$

приводится къ виду $\varrho - \sigma\zeta$, гдѣ ϱ и σ выражаются раціонально черезъ a и A и, какъ легко видѣть, будутъ:

$$\varrho = a\,\{ (m-1)\,a^m + (m+1)\,A \},$$

$$\sigma = \quad (m+1)\,a^m + (m-1)\,A.$$

Положимъ теперь

$$a' = \frac{\varrho}{\sigma} = \frac{a\,\{(m-1)\,a^m + (m+1)\,A\}}{(m+1)\,a^m + (m-1)\,A}. \tag{11}$$

Тогда имѣемъ:

$$a'-a=\frac{2a(A-a^m)}{(m+1)a^m+(m-1)A}, \tag{12}$$

$$a'-\zeta=(a-\zeta)^3\cdot\frac{1\cdot(m-1)a^{m-2}+2(m-2)a^{m-3}+\cdots+(m-1)\cdot1\cdot\zeta^{m-2}}{(m+1)a^m+(m-1)A} \tag{12*}$$

Эти равенства показываютъ, что a' будетъ $>$ или $<a$, когда $a<\sqrt[m]{A}$ или $a>\sqrt[m]{A}$; и вмѣстѣ съ тѣмъ, что a' будетъ $<$ или $>\sqrt[m]{A}$, когда $a<\sqrt[m]{A}$ или $a>\sqrt[m]{A}$.

Отсюда выводится окончательное заключеніе, дающее способъ вычислять корень любой степени при помощи быстро сходящихся послѣдовательныхъ приближеній.

Если, исходя изъ произвольнаго положительнаго числа a_0, составить послѣдовательность чиселъ:

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$

въ которой смежныя числа связаны зависимостью

$$a_n=a_{n-1}+\frac{2a_{n-1}(A-a_{n-1}^m)}{(m+1)a_{n-1}^m+(m-1)A},$$

то a_n будетъ приближаться къ предѣлу $\sqrt[m]{A}$, возрастая или убывая въ зависимости отъ того, будетъ ли $a_0<\sqrt[m]{A}$ или $a_0>\sqrt[m]{A}$. О степени приближенія позволяетъ судить равенство:

$$a_n-\sqrt[m]{A}=(a_{n-1}-\sqrt[m]{A})^3\cdot P_m,$$

гдѣ

$$P_m=\frac{1\cdot(m-1)a_{n-1}^{m-2}+2(m-2)a_{n-1}^{m-3}\zeta+\cdots+(m-1)\cdot1\cdot\zeta^{m-2}}{(m+1)a_{n-1}^m+(m-1)A}$$

будетъ близко къ $\dfrac{m^2-1}{12\zeta^2}$, если a_{n-1} близко къ $\sqrt[m]{A}$.

4. Для случаевъ $m=3$ и $m=5$ имѣемъ:

$$a_n=a_{n-1}+\frac{a_{n-1}(A-a_{n-1}^3)}{2a_{n-1}^3+A}\quad\text{для } m=3,$$

$$a_n=a_{n-1}+\frac{a_{n-1}(A-a_{n-1}^5)}{3a_{n-1}^5+2A}\quad\text{для } m=5.$$

Примѣнимъ теперь развитый способъ къ численнымъ примѣрамъ.

Для перваго примѣра вычислимъ $\sqrt[3]{20}$. За исходное значенiе беремъ $a_0 = 2{,}72$ (что находится съ помощью логариѳмической линейки). Далѣе вычисляемъ по ариѳмометру:

$$a_0^3 = 20{,}123648; \quad 2a_0^3 + A = 60{,}247296,$$

$$a_0 (A - a_0^3) = -0{,}33632256,$$

$$a_1 = 2{,}72 - \frac{0{,}33632256}{60{,}247296} = \underline{2{,}714417632}.$$

Такимъ же образомъ, принимая $a_0 = 2{,}71$, находимъ

$$a_1 = 2{,}714417608,$$

слѣдовательно, $\sqrt[3]{20} = 2{,}7144176$ съ точностью до $\frac{1}{2 \cdot 10^7}$.

Для другого примѣра вычислимъ $\sqrt[5]{50}$, принимая $a_0 = 2{,}2$. Находимъ:

$$a_1 = 2{,}186725.$$

Тотъ же корень, вычисленный по семизначнымъ таблицамъ логариѳмовъ, оказывается равнымъ 2,186721.

Международная Коммиссiя по преподаванiю математики.

Постановка преподаванiя математики въ мужскихъ среднихъ учебныхъ заведенiяхъ Пруссiи.

В. Лицмана.

(Продолженiе).*

2. Научные ученическiе кружки.

Наряду съ свободными для частныхъ занятiй днями я упомяну здѣсь о научныхъ ученическихъ кружкахъ. Ученическiе кружки существуютъ при очень многихъ учебныхъ заведенiяхъ, и среди нихъ немало научныхъ, хотя все же преобладаютъ гимнастическiе, гребные, музыкальные и т. п. Такимъ образомъ, въ Пруссiи ученическiе научные кружки нельзя признавать такимъ же нормальнымъ явленiемъ, какъ, напримѣръ, въ Венгрiи, гдѣ имъ даже посвященъ цѣлый рядъ министерскихъ циркуляровъ. Къ сожалѣнiю, т. н. «Программы»

---

*) См. „Вѣстникъ“ № 551—552.

отдѣльныхъ учебныхъ заведеній даютъ очень мало матеріала изъ жизни этихъ кружковъ.

Большею частью эти кружки предпочитаютъ литературу и исторію, но есть и естественно научные кружки. Если мнѣ будетъ позволено сослаться на собственныя воспоминанія, то я долженъ сказать, что эти кружки чрезвычайно много содѣйствуютъ умственному развитію участниковъ. Организація этихъ кружковъ бываетъ очень различная. Въ гимназіи имени короля Фридриха во Франкфуртѣ на Майнѣ, въ которой я учился, уже въ то время существовалъ ученическій научный кружокъ, въ составъ котораго входила группа по естествознанію. Каждую недѣлю одинъ изъ членовъ группы дѣлалъ докладъ, на который предоставлялось отъ получаса до $^3/_4$ часа. Засѣданія были приноровлены ко времени учебныхъ занятій и происходили въ помѣщеніи старшаго класса; учитель рѣдко имѣлъ что либо противъ этого. Математика, впрочемъ, затрагивалась при этомъ лишь косвенно, — напримѣръ, въ докладѣ о законахъ Кеплера и т. п. Дебаты были часто очень горячіе, критика старшихъ по отношенію къ младшимъ очень полезна. Участниками были ученики 7-го, 8-го и выпускного класса.

Въ естественно-научномъ кружкѣ при Асканіевской гимназіи въ Берлинѣ читаются часто доклады съ опытами, для которыхъ преподаватель предоставляетъ приборы изъ гимназической коллекціи. Часто избираются такія темы, которыя не затрагиваются вовсе школьнымъ преподаваніемъ; замѣчается также большой интересъ къ астрономіи и біологіи.

Въ послѣднее время, повидимому, такимъ ученическимъ кружкамъ придаютъ больше значенія, чѣмъ бывало раньше*). Какъ высоко бывшіе сочлены цѣнили полученную отъ этихъ кружковъ пользу, можетъ показать тотъ фактъ, что Т. Моммзенъ (Tycho Mommsen) всегда посылалъ свои труды тому научному кружку, членомъ котораго онъ былъ, когда учился въ старшихъ классахъ гимназіи въ Альтонѣ.

3. Спеціальныя лекціи.

Во многихъ школахъ установилось обыкновеніе производить выпускъ абитуріентовъ не тотчасъ послѣ окончанія устныхъ испытаній, а только въ концѣ учебнаго года. Смотря по условіямъ, эти испытанія происходятъ отъ двухъ до восьми недѣль раньше этого. И вотъ, часто на этотъ промежутокъ времени назначаются для абитуріентовъ спеціальныя лекціи. Впрочемъ, и ученикамъ двухъ старшихъ классовъ читаются часто подобныя лекціи; такъ напримѣръ, въ Берлинѣ и въ другихъ мѣстахъ такія лекціи читаются по гигіенѣ.

Здѣсь можно упомянуть и о лекціяхъ, какія устроилъ, напримѣръ, г. Шубертъ (Schubert) въ Гамбургѣ, которыя подобно лекціямъ Физическаго Кружка и Зенкенбергскаго Общества во Франкфуртѣ на Майнѣ, посѣщаются также учениками двухъ старшихъ классовъ.

---

*) Еще въ 1899 году было предложено одной рейнской конференціи директоровъ на обсужденіе слѣдующее положеніе: „Научные кружки нежелательны". Конечно, это положеніе не было принято.

Можетъ быть, здѣсь будетъ умѣстно указать, что математика иногда, хотя и рѣже другихъ предметовъ, бываетъ темой торжественныхъ рѣчей, произносимыхъ по случаю школьныхъ праздниковъ.

4. Частныя занятія у преподавателя на дому (Privatissima).

Существуетъ еще одинъ способъ ближе подойти къ индивидуальнымъ особенностямъ и интересамъ учениковъ, о которомъ умѣстно здѣсь упомянуть. Это — частныя занятія, которыя ведетъ учитель съ небольшимъ числомъ учениковъ для ихъ развитія или для подготовки къ университетскимъ занятіямъ. Есть немало учителей, которые работаютъ въ этомъ направленіи, но широкой публикѣ ничего неизвѣстно объ ихъ работѣ, и за свои излишніе труды они не получаютъ никакого другого вознагражденія, кромѣ собственнаго личнаго удовлетворенія. Гёфлеръ (Höfler) предложилъ однажды, чтобы „каждому учителю старшихъ классовъ предоставлялось по одному «свободному часу», въ который онъ могъ бы, вникая въ индивидуальные интересы своихъ учениковъ, помочь имъ въ выборѣ матеріала для частнаго чтенія; могъ бы наводить на поучительные, болѣе или менѣе связанные съ школьными занятіями, проблемы; короче сказать, могъ бы съ учениками, въ преддверіи къ университету, дѣлать то, что ему, по его свободному убѣжденію, помимо всякой регламентаціи кажется наилучшимъ для подготовки къ достойной свободѣ академическаго обученія".

5. Спеціальные курсы.

Мы обращаемся наконецъ къ нѣкоторымъ учрежденіямъ, которыя представляютъ собою уже болѣе значительное отступленіе отъ организаціи и учебныхъ программъ школы. Здѣсь идетъ дѣло, главнымъ образомъ, о двухъ типахъ. Я начинаю съ спеціальныхъ курсовъ. Характернымъ для этого учрежденія, въ противоположность групповымъ занятіямъ, о которыхъ будетъ рѣчь ниже, является то, что ученики не принуждены такъ или иначе использовать предлагаемую имъ свободу выбора; напротивъ, они могутъ, если они это предпочитаютъ, ограничиться обычной программой. Такіе особые курсы мнѣ извѣстны до сихъ поръ только при гимназіяхъ. Я опишу это учрежденіе сначала подробнѣе на какомъ либо одномъ примѣрѣ.

a) Лицей въ Ганноверѣ. Вотъ основныя руководящія положенія:

1. Наряду съ занятіями согласно учебнымъ планамъ ученикамъ старшихъ двухъ классовъ дается возможность слушать особые курсы. Такіе курсы читаются по:

a) философской пропедевтикѣ,
b) нѣмецкому языку,
c) древнимъ языкамъ,
d) новымъ языкамъ,
e) исторіи,
f) математикѣ,
g) естествознанію.

2. Изъ этихъ курсовъ функціонируютъ каждый годъ тѣ, для которыхъ находятся соотвѣтственные ученики и на руководство которыми изъявляютъ

свое согласіе члены коллегіи. Занятія происходятъ по два часа въ недѣлю, отдѣльно для каждаго класса *).

3. Кто принимаетъ участіе въ какомъ нибудь одномъ особомъ курсѣ, освобождается отъ двухъ часовъ математики или отъ двухъ до трехъ часовъ латыни; кто занимается на двухъ курсахъ, освобождается отъ двухъ часовъ того и другого предмета. При нѣкоторыхъ условіяхъ, однако, ученику можетъ быть отказано въ этомъ освобожденіи.

4. Въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ рѣшающій голосъ относительно участія въ особыхъ занятіяхъ и освобожденія отъ уроковъ принадлежитъ школѣ; но къ желаніямъ учениковъ или родителей, поскольку они, по мнѣнію школы, не идутъ въ разрѣзъ съ истинными интересами учениковъ, слѣдуетъ отнестись съ полнымъ, сердечнымъ вниманіемъ.

5. При этомъ необходимо всегда наблюдать, чтобы ученики, занимающіеся на особыхъ курсахъ, въ нормальныхъ занятіяхъ по тѣмъ же предметамъ принимали участіе вмѣстѣ съ прочими учениками.

Такимъ образомъ по отношенію къ математикѣ въ каждомъ выпускномъ классѣ, въ которомъ установлены особые курсы, создаются три группы учениковъ: I — ученики съ нормальнымъ учебнымъ временемъ (4 часа), II — ученики съ сокращеннымъ учебнымъ временемъ, III — ученики особаго курса. И вотъ, затрудненіе заключается въ томъ, что изъ этихъ трехъ группъ, — которыя по ихъ склонности къ математикѣ представятъ собою «The great middle class», «The submerged tenth» и «The upper tenth», — I, II и III имѣютъ два общихъ между собою часа, I и III еще другихъ два часа. Учебный планъ III группы обнимаетъ дифференціальное исчисленіе.

Что касается другихъ видовъ особыхъ курсовъ, то мы теперь можемъ ограничиться немногими указаніями.

b) При гимназіи съ реальнымъ училищемъ въ Мюльгеймѣ на Рейнѣ учрежденъ только одинъ особый курсъ по математикѣ (одинъ часъ въ недѣлю). То же, можетъ быть, существуетъ и въ другихъ учебныхъ заведеніяхъ; но здѣсь большія познанія участниковъ курсовъ принимаются во вниманіе и при экзаменахъ на аттестатъ зрѣлости.

c) Въ Королевской гимназіи Августы-Викторіи въ Познани, въ которой только лишь начали учреждаться особые курсы, къ послѣднимъ привлечены также и ученики 7-го класса (O II). Здѣсь не дѣлаютъ ученикамъ такого рода облегченія, которое можетъ быть связано съ нарушеніемъ цѣли прохожденія того или другого предмета. За то практикуется освобожденіе отъ регулярныхъ домашнихъ работъ въ пользу большихъ сочиненій. Впрочемъ, до Пасхи 1909 года математическій курсъ тамъ еще не былъ учрежденъ.

d) Шире всего поставлены опыты въ городской гимназіи въ Бохумѣ (Bochum), гдѣ также и 7-ой классъ (O II) принимаетъ участіе въ особыхъ курсахъ. Число особыхъ курсовъ здѣсь очень велико. Въ приводимой ниже таблицѣ указано также число участниковъ изъ различныхъ классовъ. При

---

*) Въ $190^8/_9$ году былъ особый курсъ по математикѣ для учениковъ послѣдняго класса, оберъ-примы; въ $190^9/_{10}$ учебномъ году особыхъ курсовъ по математикѣ не было вовсе.

этомъ чертой (—) обозначено, что участіе въ данномъ курсѣ соотвѣтствующему классу не разрѣшено; нуль (0) указываетъ, что участниковъ даннаго класса нѣтъ, хотя курсъ имъ и разрѣшенъ. И здѣсь учебнымъ матеріаломъ также служитъ дифференціальное и интегральное исчисленія.

Классы.	Число учениковъ въ классѣ.	Нѣмецкій		Латынь.	Греческій.	Искусство.	Французск.	Математика.		Исторія, географія.	Естествознаніе.	ВСЕГО.
		Эстет.-философ. отдѣл.	Филологическ. отдѣл.					Высшіе отдѣлы.	Низшіе отдѣлы.			
O I	24	5	0	2	1	21	0	4	—	11	0	44
U I	21	3	3	0	2	13	3	—	2	1	3	30
O. II	36	3	8	4	5	—	0	—	—	—	—	80
Всего . . .		11	11	6	8	34	3	4	2	12	3	94
Недѣльныхъ часовъ . . .		1	1	1	1	1	1	2	2	1	2	13

Особые курсы при городской гимназіи въ Бохумѣ.

6. Группировка учениковъ.

Наиболѣе глубокія измѣненія въ школьной организаціи производитъ раздѣленіе учениковъ на группы. Здѣсь, какъ и во всѣхъ подобныхъ случаяхъ, особенно, напримѣръ, въ упомянутой реформѣ школы, мы имѣемъ дѣло съ преобразованіемъ средней школы, которое и въ другихъ странахъ уже дало практическіе результаты. Совершенно такъ же, какъ въ нашихъ гимназіяхъ, обстоятъ, напримѣръ, дѣла въ Италіи.

Въ Пруссіи мы встрѣчаемъ примѣры раздѣленія на группы въ гимназіяхъ и реальныхъ гимназіяхъ, но не въ высшихъ реальныхъ училищахъ; съѣздъ директоровъ этихъ послѣднихъ (Берлинъ, 1908 годъ) прямо высказался противъ раздѣленія на группы въ этомъ типѣ школы.

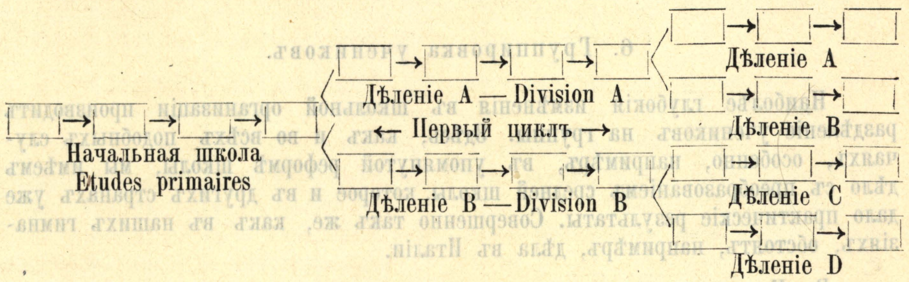
Для системы дѣленія на группы существуютъ образцы, насчитывающіе три десятилѣтія (Гамбургская реальная гимназія). Но дѣйствующія въ настоящее время учрежденія, насколько мнѣ извѣстно, всѣ лишь недавняго происхожденія. Всѣ они клонятся къ тому, чтобы въ послѣднихъ двухъ классахъ (U. I и O. I) устроить развѣтвленіе на двѣ группы, т. е. такъ называемую бифуркацію.

Схематическое изображеніе средней школы въ Пруссіи становится особенно содержательнымъ, если представить себѣ соединеніе реформированной школы съ раздѣленіемъ на группы. Схема полной школы такого рода имѣетъ примѣрно слѣдующій видъ:

Полная реформированная школа съ развѣтвленіемъ въ старшихъ 2-хъ классахъ.

Если подобныхъ полныхъ школъ и не существуетъ, то все же встрѣчаются части ихъ, (напримѣръ, реформированная реальная гимназія съ развѣтвленіемъ).

Интересно, пожалуй, сравнить эту схему съ бифуркаціей (учебные планы 1901 года). Здѣсь развѣтвленіе происходитъ значительно раньше, чѣмъ въ нѣмецкой системѣ.



Школьная система во Франціи.

При сравненіи необходимо обратить вниманіе на то, что во Франціи въ общій счетъ входятъ четыре подготовительныхъ класса, въ Германіи же три приготовительныхъ класса не считаются.

Перехожу теперь къ болѣе подробному изложенію нѣкоторыхъ случаевъ группировка учениковъ.

а) Королевская гимназія въ Страсбургѣ въ Западной Пруссіи. При переходѣ въ выпускной классъ ученикъ долженъ рѣшить, въ какую группу онъ желаетъ вступить: въ историко-филологическую (A) или въ естественно-математическую (B). Група A имѣетъ всего 2 часа математики, при томъ отдѣльно отъ группы B; по существу, она остается на уровнѣ знаній 7-го класса, присоединяются сюда только нѣкоторыя главы изъ программы математики въ выпускномъ классѣ. За то отъ учениковъ требуются частныя работы по собственному выбору по древнимъ языкамъ, а въ извѣстныхъ случаяхъ и по новымъ. Группа В имѣетъ по учебному плану 4 часа математики и нѣсколько переходитъ за рамки гимназической программы. За то она свободна отъ 2-хъ часовъ латинской грамматики и на экзаменѣ зрѣлости, вмѣсто перевода на латинскій языкъ, даетъ переводъ съ латинскаго на нѣмецкій.

b) Такой же точно примѣръ представляетъ собою Бисмарковская гимназія въ Вильмерсдорфѣ подъ Берлиномъ, только на мѣсто латыни здѣсь фигурируетъ греческій. Всѣ ученики имѣли 6 часовъ по греческому языку, группа А, кромѣ того, еще 2, но за то только 2 недѣльныхъ часа по математикѣ. Отдѣленіе В, напротивъ, имѣло оффиціально установленные 4 часа въ недѣлю по математикѣ. На испытаніяхъ зрѣлости, принимая во вниманіе различіе въ учебномъ матеріалѣ, каждой группѣ предложены были отдѣльныя темы. Раздѣленіе на группы ставится въ зависимость отъ даннаго состава учениковъ; такъ напримѣръ, въ $190^9/_{10}$ учебномъ году это раздѣленіе не было произведено.

Въ обоихъ описанныхъ нами случаяхъ, особенно въ послѣднемъ, замѣчается, что математика оказывается въ убыткѣ съ точки зрѣнія числа часовъ. Получается впечатлѣніе, что развѣтвленіе главнымъ образомъ продиктовано интересами преподаванія языковъ. Такое же впечатлѣніе производитъ дѣленіе на группы въ нѣкоторыхъ реальныхъ гимназіяхъ; привожу два примѣра.

c) Въ городской реальной гимназіи въ Эльберфельдѣ въ группѣ А усилены французскій и англійскій языки за счетъ математики и естественныхъ наукъ. Группа В, которая, между прочимъ, болѣе многочисленна, обнаруживаетъ значительное усиленіе математики и естественныхъ наукъ — установлены также 2 часа по біологіи — за счетъ всѣхъ языковъ (ср. слѣдующую таблицу).

Предметы.	Оффиціальный учебный планъ	Эльберфельдскій планъ.		Рейхенбахскій планъ.	
		А	В	А	В
Латынь	4	4	3	5	3
Французскій языкъ	4	5	2	6	2
Англійскій »	3	4	2	4	2
Исторія	3	3	2	3	3
Географія	—	1	1	—	—
Математика	5	3	6	3	6
Естествознаніе	5	4	8	5	8
Языки	11	13	7	15	7
Естеств.-мат. предметы	10	7	14	8	14

Распредѣленіе часовъ въ двухъ реальныхъ гимназіяхъ, развѣтвляющихся на группы въ двухъ послѣднихъ классахъ.

Намъ придется еще вернуться къ учебному плану этого, а также и слѣдующаго учебнаго заведенія.

d) Въ училищѣ имѣни короля Вильгельма (Королевская реальная гимназія) въ Рейхенбахѣ въ Силезіи уклоненія отъ обычнаго распредѣленія часовъ еще значительнѣе.

Помѣщенная выше таблица даетъ прежде всего распредѣленіе часовъ между отдѣльными предметами, на которыхъ отражается развѣтвленіе; затѣмъ въ ней сопоставлено общее число часовъ, удѣляемыхъ языкамъ и естественно-математическимъ предметамъ.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Тема для сотрудниковъ № 3.

Извлеченіе квадратнаго корня изъ правильныхъ дробей, близкихъ къ единицѣ.

Дано положительное число a. Найти предѣлъ суммы безконечнаго ряда.

$$\frac{1}{a+\frac{1}{a}}+\frac{1}{\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)}+\frac{1}{\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\left(a^4+\frac{1}{a^4}\right)}+$$

$$\frac{1}{\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\left(a^4+\frac{1}{a^4}\right)\left(a^8+\frac{1}{a^8}\right)}+\cdots$$

и примѣнить полученное тождество къ извлеченію квадратнаго корня изъ правильныхъ дробей, близкихъ къ единицѣ.

Въ частности, показать, что, если

$$1>m>1-\frac{1}{10^k},$$

то квадратный корень изъ m вычисляется по формулѣ:

$$\sqrt{m}=\frac{m+5}{4}-\frac{1}{m+1}$$

съ отрицательной ошибкой, по абсолютной величинѣ меньшей $\frac{1}{10^{4k+1}}$.

Привести численные примѣры извлеченія квадратныхъ корней по предыдущей формулѣ съ 5, 9 и 13 десятичными знаками.

Срокъ представленія работъ 1-е сентября с. г.

П. Флоровъ.

Нормальная мѣра радія и ея примѣненіе при радіоактивныхъ измѣреніяхъ.

Е. Ретгерфорда.

ВВЕДЕНІЕ.

Въ теченіе послѣдняго десятилѣтія быстро и непрерывно расширялось наше знакомство съ радіоактивными явленіями. Не только изслѣдованы тщательнымъ образомъ типы лучей, испускаемыхъ радіоактивными веществами, но затрачено также много труда, чтобы раскрыть характеръ сложныхъ процессовъ, происходящихъ въ радіоактивной матеріи. Далѣе, установлена теорія, дающая удовлетворительное объясненіе огромному количеству собранныхъ экспериментальныхъ данныхъ. Эта теорія, извѣстная подъ названіемъ „теоріи превращенія“ или „теоріи распада“, обоснована Рётгерфордомъ и Содди (Rutherford und Soddy) въ 1903 г. Она исходитъ изъ того, что атомы радіоактивнаго вещества неустойчивы и въ извѣстныхъ случаяхъ распадаются съ силой, подобной взрыву, при чемъ они испускаютъ характернаго типа лучи. Въ результатѣ этихъ атомныхъ взрывовъ получается новый атомъ, совершенно отличный отъ первоначальнаго по своимъ химическимъ и физическимъ свойствамъ. Эти новые атомы также неустойчивы, въ свою очередь распадаются, и начавшійся однажды процессъ во многихъ случаяхъ продолжается цѣлымъ рядомъ промежуточныхъ ступеней. До настоящаго времени извѣстно около двадцати пяти такихъ переходныхъ или неустойчивыхъ элементовъ, изъ которыхъ каждый обнаруживаетъ опредѣленныя химическія и физическія свойства и большею частью испускаетъ характернаго типа лучи. Превращенія этихъ неустойчивыхъ веществъ происходятъ по очень простому общему закону. Число атомовъ уменьшается въ геометрической прогрессіи, когда время возрастаетъ въ ариѳметической прогрессіи. Если, напримѣръ, по истеченіи времени T остается неизмѣненной половина вещества, то черезъ промежутокъ времени $2T$ остается четверть, черезъ промежутокъ $3T$ — восьмая доля и т. д. Самый процессъ распада протекаетъ для каждаго вещества особымъ, характернымъ для него образомъ.

Время превращенія элемента удобно выразить помощью „періода“, полупревращенія, т. е. времени, необходимаго для превращенія половины даннаго вещества. Разсмотримъ для примѣра радій. Онъ представляетъ собою неустойчивый элементъ, атомы котораго распадаются, испуская α-лучи; эти лучи представляютъ собой заряженные атомы гелія. Процессъ распада здѣсь протекаетъ сравнительно медленно, ибо для превращенія половины радія потребовалось бы 2000 лѣтъ. Вслѣдствіе выдѣленія атома гелія часть радія превращается въ новый элементъ — въ эманацію радія, инертный газъ съ атомнымъ вѣсомъ $= 222{,}5$. Эманація еще гораздо неустойчивѣе, чѣмъ самъ радій, и распадается, испуская α-лучи, съ періодомъ въ 3,85 дня. Этотъ процессъ распада совершается чрезъ длинный рядъ промежуточныхъ ступеней и ведетъ къ продуктамъ, извѣстнымъ подъ названіями: радій A, радій B и т. д. до радія F. Рядъ превращеній радія наглядно изображенъ на рис. 1, гдѣ указаны также типы лучей и періоды.

Такъ какъ радій есть измѣняющееся вещество съ періодомъ въ 2000 лѣтъ, то его присутствіе въ древнихъ минералахъ можно объяснить только допущеніемъ, что онъ самъ получается изъ другого вещества. Это допущеніе подтвердилось; выдѣленный Болтвудомъ (Boltwood) изъ урана элементъ подъ названіемъ „іоній“ даетъ радій;

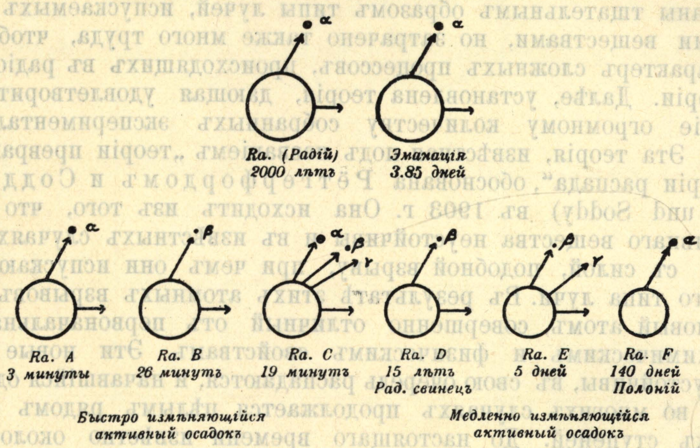


Рис. 1.

поэтому этотъ іоній слѣдуетъ считать отцомъ радія. Съ другой стороны, нельзя также сомнѣваться, что іоній происходитъ путемъ превращенія урана. Но это превращеніе урана происходитъ такъ медленно, что только въ теченіе періода по меньшей мѣрѣ въ 1000 милліоновъ лѣтъ оно можетъ дойти до половины. Элементъ уранъ слѣдуетъ разсматривать, какъ первое звено въ длинной цѣпи элементовъ, которые идутъ одинъ за другимъ въ ряду послѣдовательныхъ превращеній. Таковы: уранъ x, іоній, радій и примыкающій къ послѣднему длинный рядъ потомковъ радія.

Хотя радій въ отношеніи радіоактивности аналогиченъ со многими другими радіоактивными веществами, но онъ пріобрѣлъ огромное значеніе въ радіоактивныхъ изслѣдованіяхъ, какъ концентрированный источникъ интенсивнаго излученія. Этимъ онъ обязанъ главнымъ образомъ относительной медленности своего превращенія, а затѣмъ тому обстоятельству, что его возможно цѣликомъ выдѣлить изъ урановой руды. Соединенія радія могутъ быть получены въ чистомъ видѣ, а недавно г-жѣ Кюри и Дебіерну (Debierne) удалось выдѣлить его въ видѣ металла. Съ 1903 г. въ распоряженіи изслѣдователей имѣются чистыя соединенія радія (обыкновенно бромидъ), и благодаря этому въ радіоактивныхъ изслѣдованіяхъ въ качествѣ источника излученія пользуются радіемъ въ самыхъ широкихъ размѣрахъ. Но и для медицинскихъ и терапевтическихъ цѣлей радій нашелъ разнообразное примѣненіе.

Необходимость установленія единицы радія.

По мѣрѣ того какъ увеличивались наши знанія о радіоактивныхъ явленіяхъ, возрастала точность измѣреній и цѣлесообразность примѣняемыхъ приборовъ. Съ помощью электроскопа и электрометра ежедневно измѣряются многія радіоактивныя величины съ точностью до одной сотой, а въ нѣкоторыхъ опытахъ можно достигнуть еще большей точности. Важное значеніе радія, какъ источника излученія, побудило заняться тщательнымъ опредѣленіемъ его химическихъ и физическихъ свойствъ. Г-жа Кюри и Торпе (Thorpe) сдѣлали точныя опредѣленія его атомнаго вѣса, а другіе изслѣдователи получили его спектръ.

Какъ извѣстно, незначительное количество радія испускаетъ ежесекундно огромное количество α и β-частицъ. α-частицы суть атомы гелія, имѣющіе положительный зарядъ, а β-лучи состоятъ изъ заряженныхъ отрицательно частицъ — электроновъ, масса которыхъ очень мала сравнительно съ атомомъ водорода. Такъ какъ количество выброшенныхъ радіоактивнымъ веществомъ α-частицъ служитъ мѣриломъ превращенія, то важно опредѣлить съ возможно большей точностью общее число α-частицъ, которое испускаетъ одинъ граммъ радія, освобожденнаго отъ своихъ производныхъ или находящагося въ равновѣсіи со своими быстро превращающимися продуктами — эманаціей, радіемъ A, радіемъ B, радіемъ C.

Придуманы методы для обнаруженія отдѣльной α-частицы по ея элекрическому дѣйствію и для подсчета α-частицъ, выбрасываемыхъ даннымъ количествомъ радія въ теченіе секунды. Найдено, что каждая изъ сверкающихъ искръ, появляющихся, когда α-лучи попадаютъ на экранъ, покрытый сѣрнистымъ цинкомъ, происходитъ отъ удара одной α-частицы, такъ что число наблюденныхъ въ теченіе секунды на опредѣленной поверхности искръ равно числу падающихъ на нее α-частицъ. Обнаружить β-частицу по ея оптическимъ или электрическимъ дѣйствіямъ еще не удалось, но число выброшенныхъ въ теченіе секунды β-частицъ можетъ быть выведено изъ измѣренія перенесеннаго ими отрицательнаго заряда, такъ какъ величина заряда, перенесеннаго каждой β-частицей, извѣстна изъ другихъ данныхъ.

Мы знаемъ, что радій и другія радіоактивныя вещества производятъ гелій, и размѣръ этого производства гелія является, несомнѣнно, мѣрой числа α-частицъ, выброшенныхъ даннымъ радіоактивнымъ веществомъ. Въ высшей степени важно опредѣлить точно характеръ образованія гелія изъ радія, потому что полученныя такимъ образомъ данныя чрезвычайно цѣнны для вычисленія ряда радіоактивныхъ и физическихъ величинъ.

Дальнѣйшій поразительный эффектъ, производимый радіемъ, это—постоянное испусканіе энергіи въ формѣ теплоты. Сдѣланы многочисленныя измѣренія для опредѣленія послѣдней въ абсолютныхъ единицахъ. Повидимому, не подлежитъ сомнѣнію, что тепловое дѣйствіе радія слѣдуетъ приписать, главнымъ образомъ, тому обстоятельству, что испускаемые α-лучи поглощаются самимъ активнымъ веществомъ и такимъ образомъ превращаютъ свою кинетическую энергію въ теплоту.

Если радій находится въ равновѣсіи съ производимой имъ эманаціей, то этотъ газъ образуется изъ радія съ такой же быстротой, съ какой самъ распадается. При этомъ получается новый продуктъ, негазообразный, именно радій *A*. Слѣдовательно, данный объемъ эманаціи, исходящейся въ равновѣсіи съ граммомъ радія, есть постоянная величина, которую слѣдуетъ точно установить.

Изъ вышесказаннаго вытекаетъ, что существуетъ рядъ важныхъ, связанныхъ съ радіемъ величинъ, которыя должны быть опредѣлены съ наибольшей возможной точностью. Найденное значеніе каждой изъ нихъ зависитъ отъ чистоты употребленнаго при этихъ опытахъ радія. И даже если различными наблюдателями измѣренія сдѣланы съ одинаковой точностью, то все же полученное значеніе этихъ постоянныхъ конечно также зависитъ отъ чистоты использованнаго радія.

При дороговизнѣ радія и при невозможности получать его иначе, чѣмъ въ малыхъ количествахъ, большинство изслѣдователей не можетъ подвергать препараты радія очисткѣ тѣмъ способомъ, какимъ это было бы возможно въ обычныхъ условіяхъ, если бы матеріалъ можно было достать не такъ дорого и въ большемъ количествѣ. Поэтому изслѣдователь имѣетъ лишь малую гарантію въ томъ, что въ употребляемомъ имъ матеріалѣ содержится дѣйствительно указанное количество радія. Чтобы можно было сравнивать свои результаты съ чужими, многіе изслѣдователи отнесли ихъ къ количеству радія, которое они считали почти чистымъ. Такъ, напримѣръ, рядъ изслѣдователей въ Англіи, Германіи и Америкѣ въ основу опубликованныхъ ими результатовъ положили единицу, предложенную нѣсколько лѣтъ назадъ Рётгерфордомъ и Болтвудомъ. Но эта примѣненная ими единица произвольна, хотя и считается приблизительно точной величиной. Очевидно, чрезвычайно важно, чтобы всѣ наблюдатели относили свои результаты къ одной и той же единицѣ, такъ какъ иначе результаты ихъ измѣреній не строго сравнимы между собой.

Авторъ этихъ строкъ имѣлъ въ прошломъ году случай сравнить единицы, употребляющіяся въ различныхъ значительныхъ лабораторіяхъ Европы; онъ нашелъ, что эти единицы сильно отличаются другъ отъ друга,—максимальная разница доходитъ почти до 20%; вслѣдствіе этого значенія найденныхъ различными наблюдателями радіоактивныхъ постоянныхъ обнаруживаютъ большія различія, несмотря на самую точную работу.

Въ настоящее время радіоактивность по отношенію къ единицѣ радія находится въ такомъ же положеніи, въ какомъ 50 лѣтъ тому назадъ было электричество по отношенію къ нормальному сопротивленію. Каждый изслѣдователь обозначалъ сопротивленіе своихъ проволочныхъ обмотокъ при помощи произвольной, въ его лабораторіи принятой единицы. Только послѣ того, какъ была установлена международная единица сопротивленія, стали строго сравнимы между собой работы, исходившія изъ различныхъ лабораторій. Принятіе международной единицы радія является очевидной необходимостью для научнаго прогресса. Пока это не будетъ сдѣлано, будетъ царить неопредѣленность какъ въ отношеніи значеній ряда радіоактивныхъ постоянныхъ, такъ и въ отношеніи выведенныхъ изъ нихъ данныхъ. Употребленіе твердо установленной единицы радія несомнѣнно приведетъ къ болѣе точному опредѣленію важныхъ основныхъ величинъ.

Установленіе международной единицы имѣло бы значительную важность также и для торговли. Количество радія, примѣняемое ежегодно, стоитъ огромныхъ денегъ; поэтому, очевидно, слѣдуетъ, чтобы точное содержаніе радія въ препаратѣ удостовѣрено было неоспоримымъ способомъ. Разъ не существуетъ такой общепризнанной единицы, продавцы радія вольны выбирать любой, удобный для нихъ, масштабъ чистоты радія. Не подлежитъ сомнѣнію, что въ продажѣ находятся подъ видомъ чистыхъ препаратовъ радія такіе, которые содержатъ только сравнительно ничтожное число процентовъ требуемаго количества радія. Этому мало удовлетворительному обстоятельству можно положить конецъ только тѣмъ, чтобы препараты радія отмѣчались на основаніи международныхъ единицъ.

Сравненіе нормальныхъ мѣръ радія.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію методовъ, съ помощью которыхъ можно точно опредѣлить содержаніе радія въ любомъ препаратѣ. Цѣлесообразнѣе всего было бы выразить количественное содержаніе металлическаго радія, находящагося въ данномъ препаратѣ, потому что интенсивность испускаемаго излученія зависитъ единственно и всецѣло отъ этого фактора. Г-жа Кюри и Дебьернъ изолировали недавно металлическій радій и показали, что онъ обладаетъ той активностью, которой слѣдуетъ ожидать, если активность есть свойство самаго элемента радія и независима отъ его соединеній съ неактивными веществами. Если въ нашемъ распоряженіи имѣется только нѣсколько миллиграммовъ радія, то установить химическимъ путемъ чистоту препарата чрезвычайно трудно. Но, къ счастью, нѣтъ необходимости идти этимъ путемъ, такъ какъ содержаніе радія въ препаратѣ можно узнать путемъ сравненія интенсивности испускаемыхъ излученій. Отдѣленный отъ всѣхъ своихъ производныхъ радій, самъ испускаетъ только α-лучи, которые очень легко поглощаются. Но немедленно послѣ его полученія онъ начинаетъ производить эманацію радія, которая, съ своей стороны, снова претерпѣваетъ превращеніе въ дальнѣйшіе продукты: радій A, радій B и радій C. Радій C испускаетъ γ-лучи съ большой способностью проницанія. Приблизительно черезъ мѣсяцъ послѣ отдѣленія интенсивность γ-лучей, которые почти всѣ происходятъ изъ радія C, доходитъ до своего максимума и тогда она пропорціональна наличному количеству радія. Когда достигается максимумъ, тогда интенсивность γ-лучей остается практически неизмѣнной, и только очень тонкими измѣреніями возможно открыть измѣненіе въ теченіе періода въ нѣсколько лѣтъ. Пусть J означаетъ интенсивность излученія въ какое нибудь время t послѣ отдѣленія радія отъ эманаціи; тогда $\frac{J}{J_0} = 1 - e^{-\lambda t}$, гдѣ λ есть постоянная распада эманаціи, e — основаніе натуральныхъ логариѳмовъ и J_0 — максимальное значеніе излученія. Если принять 1 день за единицу

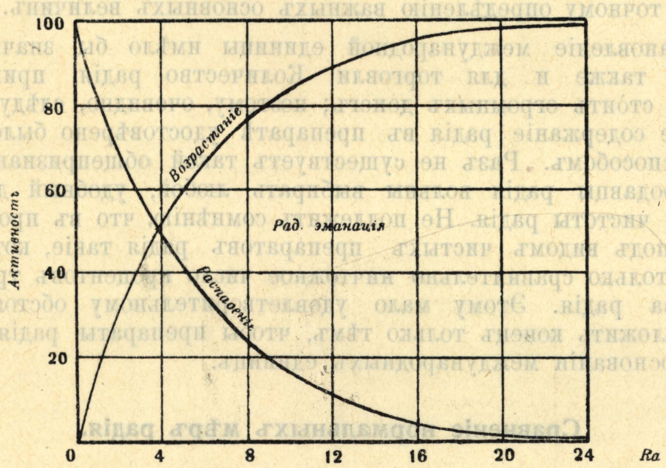


Рис. 2.

времени, то $\lambda = 0{,}1802$. Измѣненіе значенія J съ теченіемъ времени представлено кривой (рис. 2), на которой интенсивности γ-лучей отмѣчены ординатами, а соотвѣтствующее время въ дняхъ — абсциссами.

Слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что восходящая кривая, выражающая активность γ-лучей препарата радія съ теченіемъ времени, является дополненіемъ кривой паденія активности γ-лучей эманаціи. Если, напримѣръ, отъ нѣкотораго количества радія въ состояніи равновѣсія совершенно отдѣлить эманацію и помѣстить ее въ замкнутый сосудъ, то активность ея γ-лучей по истеченіи 4 часовъ приблизительно будетъ равна активности γ-лучей радія до удаленія эманаціи, и затѣмъ будетъ убывать съ періодомъ въ 3,85 дня въ геометрической прогрессіи съ теченіемъ времени. Если послѣ отдѣленія эманаціи сохранять радій въ запаянномъ сосудѣ, то активность его γ-лучей будетъ возрастать съ теченіемъ времени такимъ образомъ, что сумма активностей γ-лучей радія и отдѣленной отъ послѣдняго эманаціи будетъ постоянной и будетъ равняться первоначальной активности радія въ равновѣсіи. Въ самомъ дѣлѣ, на кривыхъ на рис. 2 сумма убывающихъ и возрастающихъ активностей всегда $= 100$. Послѣ 3,85 дней, напримѣръ, активность γ-лучей радія составляетъ 50, считая максимумъ за 100; въ то же время γ-активность отдѣленной эманаціи также равна 50% максимума. Спустя 7,7 дней, γ-активность радія составляетъ 75%, между тѣмъ какъ γ-активность эманаціи опускается до 25% максимума.

Въ нижеслѣдующей таблицѣ приведено возрастаніе активности γ-лучей препарата радія съ теченіемъ времени. Рядомъ помѣщены цифры паденія активности отдѣленной отъ радія эманаціи. Слѣдуетъ замѣтить, что послѣднія цифры показываютъ также существующее въ любой моментъ количество эманаціи и ея продуктовъ.

Эта связь проявляется, однако, только тогда, когда радій заключенъ въ запаянный сосудъ, такъ что никакая часть эманаціи не можетъ ускользнуть. Изъ препаратовъ радія, къ которымъ открытъ доступъ воздуху, часть эманаціи диффундируетъ и уходитъ въ воздухъ. Въ такомъ случаѣ дѣйствіе γ-лучей слабѣе, чѣмъ когда препаратъ былъ заключенъ въ маленькомъ запаянномъ сосудѣ; отдѣляющаяся эманація

Время въ дняхъ	Возрастаніе γ-активности радія съ теченіемъ времени	Паденіе γ-активности эманаціи
0	9	100
1	16,5	83,5
2	30,2	69,8
3	41,7	58,3
3,85	50,0	50,0
4	51,3	48,7
5	59,3	40,7
6	66,0	34,0
8	76,3	23,7
10	84,2	15,8
15	93,3	6,72
20	97,27	2,73
25	98,89	1,11
30	99,55	0,45
40	99,93	0,07
50	99,99	0,01

задерживается въ этомъ сосудѣ, и поэтому препаратъ радія даетъ тотъ же эффектъ γ-лучей, какъ если бы эманація оставалась въ самомъ препаратѣ.

(Окончаніе слѣдуетъ).

Труды Я. Г. Вантъ-Гоффа.

Джузеппе Бруни.

Яковъ Генрихъ Вантъ-Гоффъ родился 30 августа 1852 г. въ Роттердамѣ, гдѣ отецъ его еще недавно занимался медицинской практикой. Предки его въ теченіе длиннаго ряда лѣтъ занимали должность бургомистра въ маленькомъ селѣ Groote Lindt близъ Роттердама.

Его школьная карьера началась довольно скромно; онъ посѣщалъ начальную школу въ маленькомъ селѣ, а среднее образованіе получилъ въ родномъ городѣ. Родители Вантъ-Гоффа, повидимому, не особенно вѣрили въ его будущность; во всякомъ случаѣ, они не сразу одобрили его желаніе посвятить себя чистой наукѣ, къ которой онъ чувствовалъ сильное влеченіе. Вантъ-Гоффу пришлось сперва поступить въ дельфтскую политехническую школу, гдѣ онъ, по истеченіи двухъ лѣтъ*), сдалъ выпускной экзаменъ и получилъ дипломъ технолога.

Удовлетворивъ, такимъ образомъ, родителей своимъ профессіональнымъ дипломомъ, Вантъ-Гоффъ получилъ, наконецъ, столь страстно желанное разрѣшеніе посвятить себя наукѣ; въ 1871 г. онъ поступилъ въ лейденскій университетъ, старѣйшій и наиболѣе знаменитый научный центръ Голландіи. Здѣсь Вантъ-Гоффъ изучалъ математику и физику, но главнымъ образомъ занимался химіей. Въ 1873 г. онъ отправился въ Боннъ, гдѣ нѣсколько мѣсяцевъ работалъ въ лабораторіи Кекуле; здѣсь онъ выполнилъ свою первую экспериментальную работу. Дальше мы увидимъ, какое вліяніе оказало на развитіе его идей пребываніе въ Боннѣ. Нѣсколько меньше времени онъ провелъ въ Парижѣ, гдѣ посѣщалъ лабораторію Вюрца; мы скоро увидимъ, что здѣсь работы Пастёра произвели на Вантъ-Гоффа болѣе глубокое впечатлѣніе, чѣмъ теоріи Вюрца.

Возвратившись на родину, Вантъ-Гоффъ возобновилъ свои научныя занятія въ Лейденѣ, и въ сентябрѣ 1874 г. опубликовалъ на голландскомъ языкѣ краткую замѣтку, въ которой изложилъ въ сжатой, но довольно полной формѣ всѣ существенныя части стереохимической теоріи. Эта статья, судьбу которой мы разсмотримъ ниже, появилась двумя мѣсяцами раньше аналогичной работы Ле-Беля. Молодой Вантъ-Гоффъ не рѣшился представить эту работу для полученія докторской степени**) и предпочелъ ограничиться скромной диссертаціей о ціаноуксусной и малоновой кислотахъ, за которую и былъ удостоенъ докторской степени 22 декабря 1874 г.

Въ слѣдующемъ году мы застаемъ молодого доктора въ поискахъ занятій, которыя соотвѣтствовали бы его наклонностямъ и позволяли бы ему

*) Курсъ этого политехникума расчитанъ на 3 года.

Прим. перев.

**) Напомнимъ читателю, что докторской степени европейскихъ университетовъ у насъ соотвѣтствуетъ званіе „окончившаго университетъ".

Прим. перев.

прежде всего продолжать любимую научную работу. Онъ попытался сначала получить скромный постъ преподавателя технической школы въ Бреда, но потерпѣлъ неудачу. Смѣшное и вмѣстѣ съ тѣмъ трогательное впечатлѣніе производитъ письмо директора этой школы къ министру народнаго просвѣщенія; директоръ описываетъ въ этомъ письмѣ молодого разсѣяннаго человѣка съ внѣшностью изобрѣтателя, совершенно поглощеннаго своими фантастическими идеями и ничего не видящаго, кромѣ своихъ атомовъ съ ихъ валентностями, расположенными въ пространствѣ; въ заключеніе директоръ пишетъ, что, по мнѣнію его, равно какъ и всѣхъ его коллегъ по школѣ, Вантъ-Гоффъ совершенно не подходитъ для подобнаго поста. Этотъ почтенный чиновникъ не подозрѣвалъ, въ какомъ смыслѣ и насколько онъ былъ близокъ къ истинѣ.

Въ 1876 г. Вантъ-Гоффъ былъ, наконецъ, назначенъ доцентомъ ветеринарной школы въ Утрехтѣ, гдѣ онъ оставался лишь годъ съ небольшимъ, такъ какъ уже въ концѣ слѣдующаго года былъ приглашенъ лекторомъ въ новый университетъ, только что основанный въ Амстердамѣ. Вантъ-Гоффъ быстро снискалъ себѣ уваженіе университетскаго начальства и въ 1878 г. былъ выбранъ профессоромъ химіи, минералогіи и геологіи. Это мѣсто онъ занималъ въ продолженіе 17 лѣтъ, т. е. до 1895 года. Къ этому періоду, самому важному въ научной дѣятельности Вантъ-Гоффа, относятся его большія работы о химическихъ равновѣсіяхъ и по теоріи растворовъ. То былъ періодъ необыкновеннаго расцвѣта физической химіи; новое направленіе, несравненнымъ пропагандистомъ котораго былъ Оствальдъ, имѣло въ лицѣ Вантъ-Гоффа своего наиболѣе геніальнаго и авторитетнаго представителя.

Слава его быстро возрастала. Въ 1887 г. лейпцигскій университетъ предложилъ Вантъ-Гоффу занять каѳедру, отъ которой онъ однако отказался. Въ 1889 г. Вантъ-Гоффъ, едва достигшій 37-лѣтняго возраста, былъ выбранъ почетнымъ членомъ нѣмецкаго химическаго общества, удостоившись чести, которой домогаются величайшіе ученые. Наконецъ, въ 1896 г. берлинскому университету удалось привлечь его къ себѣ; приглашеніе было сдѣлано въ столь же исключительной, сколько и почетной формѣ: Вантъ-Гоффъ былъ избранъ почетнымъ ординарнымъ профессоромъ безъ обязательныхъ преподавательскихъ функцій. Академія наукъ избрала его дѣйствительнымъ членомъ и дала ему средства на устройство лабораторіи для научныхъ изслѣдованій. Въ этой лабораторіи Вантъ-Гоффъ въ продолженіе 10 лѣтъ работалъ надъ изслѣдованіемъ условій образованія соляныхъ залежей въ Стассфуртѣ; это — первая грандіозная попытка примѣнить теоріи физической химіи къ изученію геологическихъ явленій. Тѣмъ временемъ, въ 1901 году, стокгольмская академія наукъ облекла всемірный плебисцитъ химиковъ въ конкретную форму, присудивъ Вантъ-Гоффу первую нобелевскую премію по химіи.

Осенью 1906 г. у него стали обнаруживаться первые признаки страшной болѣзни*), которой ему не суждено было осилить; пребываніе въ санаторіи какъ будто возстановило его силы, такъ что автору этихъ строкъ, встрѣчавшему Вантъ-Гоффа осенью 1907 г., казалось, что къ учителю возвратилось его былое цвѣтущее здоровье. Но это только казалось. Болѣзнь не

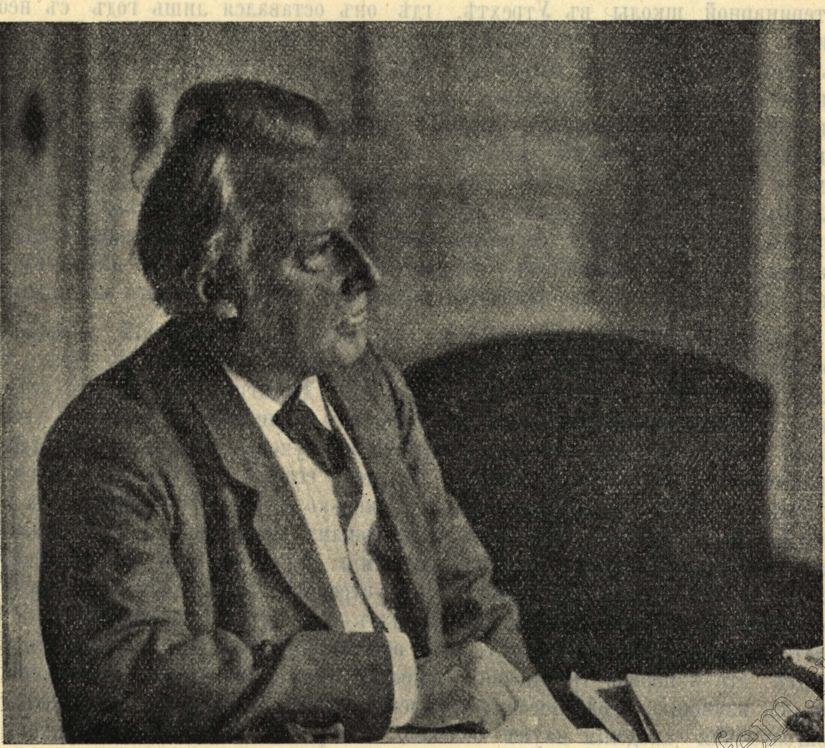
---

*) Вантъ-Гоффъ умеръ отъ болѣзни легкихъ. *Ред.*

замедлила вернуться, и 1-го марта 1911 года Вантъ-Гоффъ скончался въ Штеглицѣ, близъ Берлина. Жизнь его была коротка и бѣдна внѣшними событіями, но велика, какъ немногія другія, если измѣрить ее количествомъ и значеніемъ сдѣланнаго.

* *

Такъ, въ общихъ чертахъ, протекла внѣшняя жизнь великаго ученаго. Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію его научной дѣятельности. Если оставимъ въ сторонѣ самыя раннія изслѣдованія его въ области органической химіи и нѣсколько отрывочныхъ и случайныхъ работъ или замѣтокъ, имѣющихъ характеръ сводокъ, то творенія Вантъ-Гоффа могутъ быть раздѣлены на



Яковъ Генрихъ Вантъ-Гоффъ.
† 1 марта н. с. 1911.

четыре большія главы: 1) стереохимію, 2) ученіе о химическихъ равновѣсіяхъ, 3) теорію разбавленныхъ растворовъ и 4) изслѣдованія о соляныхъ залежахъ въ Стассфуртѣ. Вторая и третья главы взаимно связаны какъ въ отношеніи хронологическаго развитія, такъ и логически.

* * *

Творческій періодъ стереохимической теоріи продолжался чрезвычайно недолго, всего лишь три года, отъ 1874 до 1877 г.

Мемуаръ, изданный въ 1874 г. на голландскомъ языкѣ, на своихъ 14 страницахъ содержитъ уже всю существенную часть теоріи. Авторъ здѣсь прежде всего раскрываетъ тотъ фактъ, что всѣ извѣстныя вещества, отклоняющія плоскость поляризаціи, содержатъ, по меньшей мѣрѣ одинъ асимметрическій атомъ углерода, т. е. такой, который связанъ съ четырьмя отличными другъ отъ друга атомами или группами. Изслѣдуя причину этой зависимости, Вантъ-Гоффъ обнаружилъ слѣдующее: если представить себѣ, что четыре валентности углероднаго атома направлены къ вершинамъ тетраэдра, центръ котораго образуетъ самъ атомъ, то наличность такого асимметрическаго атома является необходимой и достаточной причиной существованія двухъ пространственныхъ фигуръ, каждая изъ которыхъ представляетъ собой зеркальное изображеніе другой; этимъ объясняется существованіе двухъ изомеровъ, — одного правовращающаго и другого лѣвовращающаго, — и третьяго, недѣятельнаго соединенія, которое получается отъ соединенія этихъ двухъ и при расщепленіи даетъ ихъ обратно. Что такіе изомеры существуютъ и ихъ можно раздѣлить, доказано было первыми работами геніальнаго Пастёра впервые за десять лѣтъ до того на виноградной и винныхъ кислотахъ.

Въ этой части, соображенія, развитыя два мѣсяца спустя Ле-Белемъ, были сходны съ разсужденіями молодого голландца, отличаясь отъ нихъ только формой. Однако, въ одномъ пунктѣ Вантъ-Гоффъ пошелъ дальше: онъ предвидѣлъ, что ненасыщенныя соединенія, въ которыхъ два атома соединены двойной связью, а другія двѣ валентности соединены съ двумя неодинаковыми атомами или группами, могутъ дать два пространственныхъ изомера, которые не являются антиподами и оптически недѣятельны; прототипами такихъ изомеровъ служатъ фумаровая и малеиновая кислоты.

Если мы желаемъ прослѣдить генезисъ стереохимической идеи у Вантъ-Гоффа, то мы прежде всего должны признать рѣшающее вліяніе, которое на него оказало ученіе Кекуле, и которое еще усилилось во время пребыванія въ Боннѣ. Своимъ ученіемъ о валентности, въ особенности о четырехвалентности углерода, своей разработкой структурной теоріи, которая достигла своего апогея въ ученіи о строеніи ароматическихъ соединеній, Кекуле сдѣлалъ прирейнскій университетъ центромъ новыхъ идей органической химіи и собралъ вокругъ себя многочисленныхъ блестящихъ учениковъ.

Нѣсколько лѣтъ передъ тѣмъ изъ Бонна отправился въ Италію молодой нѣмецкій химикъ В. Кёрнеръ, который въ томъ же году опубликовалъ свои классическія изслѣдованія объ опредѣленіи химическаго мѣста въ ароматическихъ соединеніяхъ, — дальнѣйшее геніальное развитіе теоріи Кекуле. Это совпаденіе не лишено интереса. Тетраэдрическая модель Вантъ-Гоффа была тождественна съ той, которою Кекуле уже пользовался въ своихъ доказательствахъ. Кекуле далъ модель, какъ въ одномъ случаѣ, такъ и въ другомъ, но онъ не былъ увѣренъ, что ею можно по праву пользоваться во всѣхъ выводахъ и представленіяхъ, которые вытекаютъ изъ этой модели.

Конечно, новшество, введенное Вантъ-Гоффомъ, носило болѣе революціонный характеръ, такъ какъ впервые у него структурныя формулы указываютъ не только, въ какомъ порядкѣ атомы соединены между собой своими валентностями, но и распредѣленіе атомовъ въ пространствѣ.

Еще Пастёръ основательно изучилъ природу тѣхъ замѣчательныхъ изомеровъ, которые имѣютъ совершенно одинаковыя физическія и химическія свойства, за исключеніемъ, во-первыхъ, вращательной способности, которая у нихъ равна по численной величинѣ и противоположна по знаку, и, во вторыхъ, формы кристалловъ, которые у этихъ изомеровъ относятся другъ къ другу, какъ предметъ и его зеркальное изображеніе. Уже Пастёръ съ непреложной интуиціей указалъ, что причина этой асимметріи коренится въ молекулярной асимметріи, ибо она не исчезаетъ, какъ въ кварцѣ, съ исчезновеніемъ кристаллической формы, а сохраняется въ жидкомъ и растворенномъ веществѣ. Онъ предвидѣлъ, что въ молекулахъ этихъ изомеровъ атомы должны быть расположены такимъ образомъ, что образуются двѣ фигуры, находящіяся между собою въ такомъ же отношеніи, какъ соотвѣтственные кристаллы или, например, какъ двѣ спирали, изъ которыхъ одна закручена вправо, а другая — влѣво.

Но за отсутствіемъ подходящей модели Пастёръ не могъ достигнуть полнаго рѣшенія проблемы. Это удалось Вантъ-Гоффу, который примѣнилъ модель Кекуле къ изслѣдованію причины молекулярной асимметріи, предусмотрѣнной Пастёромъ; охвативъ проницательнымъ взоромъ соотвѣтственныя вещества, которыхъ было извѣстно уже большое число, онъ вдругъ какъ бы при свѣтѣ молніи напалъ на мысль, что искомая причина есть не что иное, какъ присутствіе во всѣхъ оптически дѣятельныхъ соединеніяхъ асимметрическаго атома углерода. Различіе между идеями Вантъ-Гоффа и Ле-Беля и менѣе законченный характеръ идеи послѣдняго легко объясняются тѣмъ обстоятельствомъ, что ученіе о валентности и о структурѣ во Франціи еще не было оцѣнено и не пользовалось тѣмъ распространеніемъ, котораго оно заслуживало.

Вначалѣ идеи Вантъ-Гоффа и Ле-Беля были встрѣчены всеобщимъ молчаніемъ и равнодушіемъ. Въ 1875 г., когда Вантъ-Гоффъ былъ еще стѣсненъ матеріально и искалъ занятій, онъ опубликовалъ французскій переводъ своего перваго мемуара подъ названіемъ «La chemie dans l'espace».

Новой теоріи впервые пришлось получить боевое крещеніе въ 1875 г., на засѣданіи парижскаго химическаго общества, гдѣ Вантъ-Гоффъ сдѣлалъ краткое сообщеніе о своихъ идеяхъ. Атака была начата Бертело, который, несмотря на молодость, уже пользовался тогда большимъ авторитетомъ, благодаря своимъ выдающимся работамъ въ различныхъ областяхъ химіи. Онъ заявилъ, что, не отрицая a priori за пространственными формулами Вантъ-Гоффа и Ле-Беля нѣкотораго преимущества предъ обычными структурными формулами въ плоскости, нельзя, однако, ожидать отъ этихъ новыхъ воззрѣній никакихъ результатовъ, пока намъ неизвѣстны колебанія атомовъ внутри молекулы. Позже Бертело выставилъ другія возраженія болѣе положительнаго характера: такъ, онъ указалъ на существованіе оптически дѣятельныхъ веществъ безъ асимметрическихъ атомовъ углерода. Вантъ-Гоффъ, Ле-Бель и другіе экспериментаторы въ отвѣтъ на эти возраженія указывали, что данныя противорѣчія вытекаютъ лишь изъ ошибокъ наблюденія.

Тѣмъ временемъ одно обстоятельство въ весьма значительной степени содѣйствовало распространенію новыхъ теорій. Вюрцбургскій профессоръ Вислиценусъ, извѣстный своими работами по органической химіи, еще за нѣсколько лѣтъ передъ тѣмъ призналъ недостаточность структурныхъ формулъ для объясненія нѣкоторыхъ случаевъ изомеріи. Познакомившись съ фундаментальнымъ мемуаромъ Вантъ-Гоффа, онъ былъ пораженъ его идеями и понялъ ихъ огромное значеніе; ассистентъ Вислиценуса Германъ по его порученію перевелъ мемуаръ на нѣмецкій языкъ, и переводъ съ предисловіемъ Вислиценуса былъ напечатанъ въ 1877 г. подъ названіемъ «Die Lagerung der Atome im Raume». Это изданіе, доставившее воззрѣніямъ Вантъ-Гоффа весьма большую извѣстность, при своемъ появленіи вызвало новыя возраженія и страстные нападки главнымъ образомъ со стороны Германа Кольбе.

Выступленія Кольбе, какъ и возраженія Бертело, не могли остановить побѣдоноснаго шествія стереохиміи. Гансъ Ландольтъ, лучшій знатокъ и экспериментаторъ въ области химической оптики и поляриметріи, призналъ, что новыя воззрѣнія находятся въ согласіи съ фактами опыта, а Піутти одинъ изъ первыхъ выставилъ въ подтвержденіе новыхъ теорій новые факты, къ которымъ привели его изслѣдованія стереоизомерныхъ аспарагиновъ. Еще болѣе важное значеніе имѣли нѣсколько серій изслѣдованій, выполненныхъ въ Германіи послѣ 1885 г. Кромѣ работы Вислиценуса о стереоизомеріи ненасыщенныхъ соединеній, упомянемъ еще изслѣдованіе А. Байера о стереоизомеріи гидроароматическихъ соединеній и о стереохоміи циклическихъ соединеній вообще.

Но высшаго тріумфа новое ученіе достигло, когда Эмиль Фишеръ, опираясь на эти воззрѣнія, впервые разрѣшилъ великую проблему о строеніи сахаровъ. Эта темная область, куда химики до того времени не могли проникнуть, несмотря на всѣ свои усилія, внезапно освѣтилась, когда столь искусный экспериментаторъ взялъ въ свои руки нить Аріадны, которая одна могла привести къ цѣли.

Теперь, по прошествіи 37 лѣтъ, мы можемъ сказать, что мало такихъ теорій, которыя могли бы увѣнчаться подобнымъ тріумфомъ. Въ настоящее время нѣтъ ни одного вполнѣ установленнаго факта, который бы не былъ предусмотрѣнъ въ первомъ мемуарѣ 1874 г. и не содержался бы въ немъ, по крайней мѣрѣ, въ видѣ зародыша.

Чтобы ближе познакомиться съ существеннымъ достоинствомъ и степенью оригинальности труда Вантъ-Гоффа и Ле-Беля, нелишнимъ будетъ прибавить здѣсь нѣсколько словъ, такъ какъ относительно этого пункта нерѣдко приходится читать и слышать не совсѣмъ удовлетворительныя сужденія. Иногда высказывается мнѣніе, что заслуга голландскаго ученаго состоитъ въ томъ, что онъ выдумалъ и ввелъ тетраэдрическую модель, или что онъ первый создалъ представленіе о пространственномъ расположеніи атомовъ въ молекулѣ.

Нѣтъ ничего болѣе ошибочнаго или, по крайней мѣрѣ, болѣе поверхностнаго, такъ какъ именно въ этомъ вопросѣ Вантъ-Гоффъ и Ле-Бель имѣли многочисленныхъ предшественниковъ. Тетраэдрическая модель была необходимымъ слѣдствіемъ концепціи Кекуле; послѣдній самъ пользовался этой моделью въ ея современной формѣ, хотя и не придавалъ ей того значенія, которое мы придаемъ ей теперь. Далѣе, какъ уже было сказано, Вислиценусъ утверждалъ вообще, что необходимо прибѣгать къ пространственнымъ конфигураціямъ для объясненія нѣкоторыхъ случаевъ изомеріи. Еще раньше, въ 1869 г., Патерно предложилъ воспользоваться для этой цѣли ничѣмъ инымъ, какъ тетраэдрической схемой. Не въ этомъ, слѣдовательно, заключается заслуга Вантъ-Гоффа, но скорѣе въ томъ фактѣ, что онъ главнымъ образомъ постигъ геніальную идею объ асимметрическомъ углеродномъ атомѣ и послѣ внимательнаго и тщательнаго разсмотрѣнія всѣхъ уже извѣстныхъ фактовъ сразу далъ теоріи ея окончательный видъ; поэтому можно сказать, что эта теорія, подобно классической Минервѣ, вышла во всеоружіи изъ головы Юпитера.

Начиная съ 1877 г., Вантъ-Гоффъ уже не принимаетъ болѣе непосредственннаго и творческаго участія въ дальнѣйшемъ развитіи созданнаго имъ ученія. Тѣмъ не менѣе онъ все время внимательно слѣдилъ за успѣхами своей теоріи и отмѣчалъ ихъ въ послѣдующихъ изданіяхъ своихъ книгъ, между которыми особеннаго вниманія заслуживаетъ «Dix annès dans l'histoire d'une théorie», что̀ можетъ служить прекраснымъ примѣромъ проявленія скромности во время тріумфа.

* *
*

Возвратимся къ 1877 г., когда нашъ молодой ученый сдѣлался профессоромъ амстердамскаго университета. Вантъ-Гоффу было всего 25 лѣтъ, но онъ уже за три года передъ тѣмъ выступилъ на научное поприще и основалъ дисциплину, которой было бы достаточно, чтобы сохранить его имя въ исторіи. Передъ нимъ разстилалось все необозримое поле химіи, и его глазъ открылъ новые пути, которые доставили ему еще болѣе блестящіе тріумфы.

Въ это время наступаетъ перерывъ въ научномъ творчествѣ Вантъ-Гоффа, вызванный, быть можетъ, потерей времени вслѣдствіе необходимости приспособиться къ новымъ условіямъ жизни и работы; но этотъ перерывъ обусловливался несомнѣнно, главнымъ образомъ, потребностью сосредоточиться и оріентироваться, прежде чѣмъ пуститься въ путь. Какъ бы то ни было, Вантъ-Гоффъ въ теченіе 7 лѣтъ, съ 1878 до 1884 г., не опубликовалъ ни одного оригинальнаго мемуара, заслуживающаго того, чтобы на немъ остановиться. Онъ выпустилъ лишь одну очень интересную книгу «Ansichten über die organische Chemie», которая въ настоящее время вышла изъ продажи и почти совершенно неизвѣстна, хотя представляетъ весьма важное значеніе для того, кто желаетъ прослѣдить эволюцію научной мысли Вантъ-Гоффа. Онъ самъ выяснилъ эту эволюцію въ рѣчи, произнесенной имъ въ 1892 г. въ Берлинѣ, къ которой намъ еще не разъ придется возвратиться.

Въ этой рѣчи Вантъ-Гоффъ замѣчаетъ, что уже его первыя работы объ асимметрическомъ атомѣ углерода должны быть разсматриваемы, по крайней мѣрѣ съ одной извѣстной стороны, какъ попытка содѣйствовать разрѣшенію проблемы, которая съ самаго начала казалась ему основной проблемой общей химіи (да такова и есть въ дѣйствительности): открыть соотношенія между химической конституціей веществъ и ихъ физическими и химическими свойствами.

Самая важная и насущная задача, которую поставилъ себѣ Вантъ-Гоффъ, состояла въ томъ, чтобы заполнить существовавшiе большiе пробѣлы и попытаться слить въ одну теорiю скудныя и разбросанныя свѣдѣнiя, которыми въ то время располагала наука. Съ такимъ намѣренiемъ онъ энергично принялся за работу, которая имѣла теоретическiй характеръ въ такой же мѣрѣ, какъ и экспериментальный. Первые результаты своихъ изслѣдованiй Вантъ-Гоффъ изложилъ не въ видѣ отдѣльныхъ мемуаровъ, но соединилъ ихъ въ одно стройное цѣлое въ книгѣ, озаглавленной «Études de dynamique chimique», вышедшей въ 1884 г. Эта книга уже вся проникнута тѣмъ духомъ, которымъ отличаются всѣ дальнѣйшiя произведенiя Вантъ-Гоффа.

Авторъ здѣсь попытался въ предѣлахъ возможнаго примѣнить къ изученiю химическихъ явленiй математическiе методы и, прежде всего, принципы термодинамики. Идея сама по себѣ была не нова: еще за двадцать лѣтъ передъ тѣмъ Клаузiусъ намекалъ на возможныя приложенiя этихъ принциповъ, въ особенности второго; но онъ не далъ ни одного конкретнаго примѣра. Правда, имѣлся также монументальный трудъ Вилларда Джиббса, но это колоссальное творенiе лежало еще схороненнымъ въ запискахъ невѣдомой американской академiи и оставалось неизвѣстнымъ для всѣхъ ученыхъ и, понятно, для всѣхъ химиковъ. Единственными болѣе или менѣе важными являлись попытки подобнаго примѣненiя къ явленiямъ диссоцiацiи, сдѣланныя Гортсманномъ, Пеленомъ (Peslin) и Мутье.

Работа Вантъ-Гоффа была гораздо значительнѣе и систематичнѣе; такъ какъ авторъ, настоящiй химикъ, производилъ одновременно теоретическое изслѣдованiе и экспериментальную провѣрку, то эта работа оказала глубокое влiянiе на химиковъ, познакомивъ ихъ съ методами и принципами новой отрасли науки.

Вантъ-Гоффъ изучаетъ преимущественно скорость реакцiй, выбирая самые разнообразные типы процессовъ; онъ опредѣляетъ ихъ законы и изслѣдуетъ, въ какой мѣрѣ методы этой химической кинетики примѣнимы къ опредѣленiю порядка реакцiй. Онъ придумываетъ въ высшей степени остроумные способы нахожденiя общихъ законовъ въ тѣхъ случаяхъ, когда ихъ маскируютъ вторичныя реакцiи; эти послѣднiя онъ исключаетъ какъ въ опытахъ, такъ и въ вычисленiяхъ. Наконецъ, онъ изучаетъ измѣненiя, претерпѣваемыя скоростью реакцiй подъ влiянiемъ температуры.

Затѣмъ Вантъ-Гоффъ переходитъ къ химическимъ равновѣсiямъ, которыя онъ разсматриваетъ, какъ результатъ двухъ противоположныхъ процессовъ, и прежде всего останавливается на гомогенныхъ равновѣсiяхъ въ газахъ и растворахъ. Особенное вниманiе онъ удѣляетъ гетерогеннымъ равновѣсiямъ и спецiально тѣмъ, которыя онъ называетъ конденсированными системами, т. е. системами, въ которыя не входятъ вещества перемѣннаго состава, какъ газы или растворы. Онъ находитъ, что въ этихъ случаяхъ, въ отличiе отъ другихъ, мы имѣемъ предъ собою не непрерывное перемѣщенiе равновѣсiя, а точку перехода; одна система является устойчивой выше этой точки, а другая система устойчива ниже нея. Точки перехода были извѣстны уже давно для полиморфныхъ разновидностей одного и того же вещества, напримѣръ, для ромбической и моноклинической сѣры; Вантъ-Гоффъ же обобщилъ это понятiе и показалъ, что его можно распространить на взаимный переходъ химическихъ изомеровъ и на системы нѣсколькихъ веществъ, напримѣръ, на дегидратацію гидратныхъ солей, на образованіе и разложеніе двойныхъ солей и т. д.

Перейдя затѣмъ къ перемѣщенію равновѣсія, происходящему съ измѣненеміемъ температуры, Вантъ-Гоффъ впервые устанавливаетъ такъ называемый принципъ подвижного равновѣсія, который онъ формулируетъ такъ: «всякое равновѣсіе между двумя различными состояніями вещества перемѣщается при пониженіи температуры, и при томъ въ сторону той системы, при образованіи которой развивается теплота». Какъ извѣстно, этотъ принципъ немного позже былъ обобщенъ Ле-Шателье, который распространилъ его не только на термическія измѣненія, но и на всякія измѣненія внѣшнихъ и внутреннихъ условій равновѣсія (давленія, электрическаго состоянія, концентраціи и т. д.). Этотъ принципъ гласитъ такъ: «всякое внѣшнее дѣйствіе вызываетъ въ данномъ тѣлѣ или въ данной системѣ измѣненіе въ такомъ направленіи, что сопротивленіе, противопоставляемое тѣломъ или системой внѣшнему дѣйствію, возрастаетъ». Этотъ принципъ сохраняетъ все свое значеніе даже рядомъ съ вторымъ началомъ термодинамики; дѣйствительно, хотя при помощи этого принципа можно выводить лишь заключенія качественнаго характера, но онъ можетъ, однако, примѣняться съ успѣхомъ въ тѣхъ случаяхъ, когда нужно разобраться, въ какомъ направленіи совершится извѣстный процессъ, особенно въ тѣхъ случаяхъ, когда невозможно пользоваться математическимъ аппаратомъ уравненія Клапейрона или другими аналогичными формулировками второго начала. Къ тому же, благодаря простой формѣ и общности принципа, его легко запомнить, такъ какъ онъ заключаетъ въ себѣ идею о нѣкоторой присущей веществу приспособляемости къ внѣшнимъ воздѣйствіямъ.

Какъ мы уже сказали, Вантъ-Гоффъ установилъ этотъ принципъ лишь для термическихъ измѣненій. Но умалять на этомъ основаніи его заслугу, какъ это дѣлаютъ нѣкоторые авторы, кажется намъ глубоко несправедливымъ: не говоря уже о безспорномъ пріоритетѣ Вантъ-Гоффа, не слѣдуетъ забывать, что объясненный имъ случай имѣетъ для химіи наиболѣе важное значеніе; ему удалось разрѣшить также вопросъ, который уже давно занималъ химиковъ, — вопросъ о направленіи реакціи, имѣющій, какъ извѣстно, фундаментальное значеніе.

Извѣстно, что за нѣсколько лѣтъ передъ тѣмъ Томсенъ предложилъ правило, которое Бертело позже желалъ возвести въ законъ природы: это такъ называемый принципъ наибольшей работы, согласно которому изъ всѣхъ возможныхъ реакцій совершаются самопроизвольно и безъ участія внѣшней энергіи тѣ именно реакціи, которыя сопровождаются развитіемъ наибольшаго количества теплоты. Это правило, правда, подтверждается въ большинствѣ обыкновенныхъ реакцій общей химіи, но оно оказывается несостоятельнымъ во многихъ хорошо изученныхъ случаяхъ химическихъ реакцій въ собственномъ смыслѣ слова и въ цѣломъ рядѣ процессовъ, какъ, напримѣръ, въ обратимыхъ процессахъ. Томсенъ признавалъ эмпирическій характеръ своего правила, тогда какъ Бертело, напротивъ, старался спасти свой принципъ при помощи цѣлаго ряда остроумныхъ разсужденій, примѣняя такія неопредѣленныя выраженія, какъ «совершаться самопроизвольно» и «безъ участія посторонней энергіи». Напрасный трудъ! Чтобы спасти этотъ принципъ, пришлось бы, какъ рѣзко замѣтилъ Дюгемъ, отнести къ внѣшней энергіи также и теплоту, поглощаемую при эндотермическихъ процессахъ. Въ такомъ случаѣ разсматриваемый принципъ сводился бы къ слѣдующему положенію: «всякій процессъ, который не поглощаетъ теплоты, развиваетъ ее»; другими словами, для того чтобы оставаться вѣрнымъ, принципъ «долженъ былъ бы превратиться въ смѣшную тавтологію».

Принципъ Вантъ-Гоффа даетъ намъ ключъ къ разрѣшенію этихъ противорѣчій: такъ какъ пониженіе температуры благопріятствуетъ процессамъ, которые сопровождаются выдѣленіемъ теплоты, то при низкихъ температурахъ должны совершаться преимущественно экзотермическія реакціи. Такъ какъ, съ другой стороны, обычныя температурныя условія нашей среды и обыкновенныхъ химическихъ процессовъ соотвѣтствуютъ довольно низкимъ областямъ въ полной шкалѣ возможныхъ температуръ, то естественно, что правило Томсена здѣсь подтверждается въ первомъ приближеніи. Принципъ Бертело былъ бы строго вѣренъ лишь при абсолютномъ нулѣ. Высокимъ же температурамъ соотвѣтствуютъ преимущественно эндотермическіе процессы, и если бы химики жили при температурѣ въ 3000°, скорѣе могли бы придти къ принципу наименьшей работы.

Книга Вантъ-Гоффа заканчивается главой, посвященной химическому сродству, гдѣ разсматривается случай притяженія воды въ гидратныхъ соляхъ и въ растворахъ. Здѣсь заключается уже зародышъ той плодотворной теоріи, къ которой мы сейчасъ перейдемъ. Въ цѣломъ же объ этой книгѣ можно сказать, что мало такихъ трудовъ, которые бы проливали свѣтъ на такое большое число новыхъ фактовъ и давали столько плодотворныхъ идей.

* *
*

Начиная съ этого момента, научная дѣятельность Вантъ-Гоффа развѣтвляется по двумъ направленіямъ. Продолжая до конца своей жизни экспериментальное изслѣдованіе гетерогенныхъ равновѣсій, въ особенности конденсированныхъ системъ, онъ лучшую часть своей дѣятельности въ теоретической области посвящаетъ изученію другой фундаментальной проблемы — теоріи разбавленныхъ растворовъ и изслѣдованію молекулярнаго состоянія растворенныхъ веществъ.

Теорія растворовъ настолько извѣстна всѣмъ, по крайней мѣрѣ въ общихъ чертахъ, что мы считаемъ излишнимъ излагать ее здѣсь, хотя бы вкратцѣ; интересно, однако, разсмотрѣть генезисъ этой теоріи, несомнѣнно менѣе извѣстный. Этотъ генезисъ было бы нетрудно прослѣдить по трудамъ нашего ученаго, но онъ самъ ясно изложилъ его въ докладѣ, читанномъ въ 1892 г. въ берлинскомъ химическомъ обществѣ: «Wie die Theorie der Lösungen entstand»?

Начало этой теоріи мы находимъ въ разсмотрѣнномъ выше трудѣ Études... Вантъ-Гоффъ старается выяснить сродство, удерживающее воду въ растворахъ и въ гидратныхъ соляхъ, и, какъ это сдѣлалъ уже Митчерлихъ, приходитъ къ мысли, что мѣрой этого сродства можетъ служить уменьшеніе упругости пара этихъ системъ сравнительно съ чистой водой. Но абсолютная величина этихъ разностей кажется ему слишкомъ малой въ сравненіи съ той величиной, которую должны имѣть, на его взглядъ, химическія силы, даже самыя минимальныя. Здѣсь Вантъ-Гоффъ ставитъ себѣ вопросъ, нельзя ли измѣрять это притяженіе воды болѣе непосредственнымъ образомъ. Съ этимъ вопросомъ на устахъ — разсказываетъ Вантъ-Гоффъ — онъ вышелъ однажды изъ лабораторіи и встрѣтилъ своего коллегу Де-Вриса. Послѣдній въ то время занимался изслѣдованіемъ осмотическихъ явленій; онъ познакомилъ Вантъ-Гоффа съ классическими изслѣдованіями Пфеффера о непосредственномъ измѣреніи осмотическаго давленія. Такъ было найдено звено, котораго не доставало у Вантъ-Гоффа. Онъ разсматриваетъ сперва процессъ перегонки водяного пара, переходящаго изъ чистой воды въ растворъ, благодаря меньшей упругости послѣдняго; затѣмъ онъ разсматриваетъ переходъ воды, происходящій черезъ полупроницаемыя стѣнки въ направленіи отъ чистаго растворителя къ раствору вслѣдствіе осмотическаго давленія; сравнивая эти два явленія, онъ находитъ между ними параллелизмъ.

Но этимъ дѣло еще не ограничивается. Къ равновѣсіямъ въ газахъ Вантъ-Гоффъ примѣнилъ одно изъ своихъ уравненій, которое, въ сущности, представляетъ собою сочетаніе уравненія Клапейрона съ закономъ газообразнаго состоянія, и пытался изслѣдовать, нельзя ли примѣнить это уравненіе также къ растворамъ. Оказалось, что посредствомъ полупроницаемыхъ стѣнокъ можно, замѣнивъ давленіе газа осмотическимъ давленіемъ, воспроизвести для растворовъ обратимые круговые процессы и обратимыя измѣненія, которые привели его къ выводу уравненія для газовъ.

Отсюда неизбѣжно вытекаетъ, что законы газовъ должны также имѣть силу для осмотическаго давленія. Вантъ-Гоффъ провѣрилъ имѣвшіяся данныя и нашелъ, что законы Бойля и Гэ-Люссака дѣйствительно подтверждаются измѣреніями Пфеффера, и, слѣдовательно, принципъ Авогадро долженъ быть примѣнимъ. Изотоническіе растворы должны быть эквимолекулярными. Основываясь на томъ, что законъ газовъ примѣнимъ къ растворамъ, и пользуясь измѣреніями Пфеффера, Вантъ-Гоффъ вычислилъ константу R и нашелъ, къ своему великому удивленію, что численное значеніе этой постоянной можно считать равнымъ соотвѣтственной величинѣ для газовъ: давленіе газа и осмотическое давленіе, производимое даннымъ количествомъ вещества, разбавленнымъ въ опредѣленномъ объемѣ, равны между собою.

Съ этого момента данный вопросъ освѣщается вполнѣ, и устанавливается аналогія между газообразнымъ состояніемъ и состояніемъ разбавленнаго раствора. Вантъ-Гоффъ не замедлилъ выяснить зависимость между осмотическимъ давленіемъ и уменьшеніемъ упругости пара, повышеніемъ точки кипѣнія и пониженіемъ точки замерзанія растворовъ. Эмпирическія правила, найденныя раньше Раулемъ, Вантъ-Гоффъ подвелъ, какъ частные случаи, подъ изложенные выше законы. Такимъ образомъ дана была возможность опредѣлять молекулярныя величины растворенныхъ веществъ путемъ непосредственныхъ измѣреній осмотическаго давленія и путемъ непрямыхъ измѣреній, каковы тенсиметрическія, эбуліоскопическія и кріоскопическія опредѣленія, гораздо болѣе точныя и болѣе удобныя. Прежде наши свѣдѣнія о молекулярномъ состояніи тѣлъ ограничивались только тѣми веществами, которыя могутъ быть приведены въ газообразное состояніе; теперь же, благодря Вантъ-Гоффу, они распространяются на всѣ растворимыя вещества. Какую революцію это расширеніе ученія о растворахъ вызвало во всѣхъ областяхъ химіи и въ смежныхъ наукахъ, въ достаточной мѣрѣ извѣстно, и распространяться здѣсь объ этомъ нѣтъ надобности.

Эта теорія впервые была изложена въ полномъ объемѣ въ трехъ мемуарахъ, представленныхъ одновременно, 14 октября 1885 г., королевской академіи наукъ въ Стокгольмѣ и опубликованныхъ въ запискахъ этой академіи въ слѣдующемъ 1886 году.

Въ этихъ мемуарахъ имѣется довольно значительное ограниченіе: всѣ водные растворы солей, кислотъ и сильныхъ основаній составляютъ исключеніе въ томъ смыслѣ, что они даютъ слишкомъ большое осмотическое давленіе. Поэтому въ уравненія, относящіяся къ этимъ веществамъ, Вантъ-Гоффу пришлось ввести коэффиціентъ i, превышающій единицу.

Это кажущееся исключеніе было вскорѣ объяснено молодымъ шведскимъ физикомъ Сванте Аррeніусомъ, который за три года передъ тѣмъ съ большимъ успѣхомъ изслѣдовалъ электропроводность растворовъ. Такъ какъ аномалія, о которой сейчасъ была рѣчь, обнаруживается въ растворахъ, обладающихъ электролитической проводимостью, и, при прочихъ равныхъ условіяхъ, она выражена тѣмъ сильнѣе, чѣмъ больше эта проводимость, то Арреніусъ сдѣлалъ предположеніе, что электролиты уже въ моментъ растворенія въ значительной части расщепляются на свои іоны.

Такъ возникла теорія электролитической диссоціаціи, съ самаго своего появленія неразрывно связанная съ теоріей растворовъ, съ которой ей пришлось дѣлить и борьбу, и тріумфы.

Возраженій не пришлось долго ждать. Буря негодованія и изумленія, тотчасъ разразившаяся почти во всемъ мірѣ химиковъ, была направлена не столько противъ теоріи Вантъ-Гоффа, сколько противъ теоріи Арреніуса, который, казалось, хотѣлъ расшатать самыя основныя идеи науки. Однако, и теорія Вантъ-Гоффа не осталась безъ возраженій, особенно въ Англіи. Во Франціи большинство ученыхъ ограничилось пренебрежительнымъ индифферентизмомъ, тогда какъ въ Англіи, напротивъ, группа химиковъ и физиковъ во главѣ съ Пиккерингомъ, Армстронгомъ и Фицджеральдомъ, защитниками теоріи гидратовъ, открыла противъ новыхъ идей настоящій походъ; болѣе освѣдомленнные, они не уклонялись отъ спора, а, напротивъ, устроили настоящее специальное словесное состязаніе.

Въ исторіи науки мало столь интересныхъ и памятныхъ публичныхъ споровъ, какъ тотъ, который разыгрался въ 1890 г. на собраніи Британской Ассоціаціи въ Лидсѣ, и въ которомъ приняли участіе спеціально приглашенные три главныхъ представителя новаго движенія: Вантъ-Гоффъ, Арреніусъ и Оствальдъ.

Оствальдъ описываетъ этотъ турниръ слѣдующимъ образомъ: «Надѣюсь, что для нашихъ гостепріимныхъ хозяевъ не будетъ обиднымъ мое предположеніе, что они пригласили насъ съ доброжелательнымъ намѣреніемъ убѣдить насъ, что мы заблуждаемся, и, давъ намъ хорошій урокъ, съ миромъ отпустить насъ домой. Первые дни говорили исключительно наши противники, такъ что до извѣстной степени можно было бы думать, что мы уже убиты научно. Когда же послѣ продолжительныхъ и оживленныхъ личныхъ споровъ представители новыхъ идей получили, наконецъ, слово даже на публичныхъ засѣданіяхъ, картина сразу измѣнилась, такъ что мы могли разстаться съ нашими хозяевами по пріятельски и не безъ тріумфа».

Идеи нашихъ борцовъ встрѣтили болѣе безпристрастный пріемъ со стороны сэра Оливера Лоджа; въ самой Англіи они нашли сильнаго союзника въ лицѣ Вилліама Рамзая, своего ровесника, который уже тогда былъ извѣстенъ своими цѣнными изслѣдованіями, а своими позднѣйшими работами пріобрѣлъ впослѣдствіи всемірную славу.

Съ этого времени начинается быстрый и тріумфальный успѣхъ новой школы; возраженія, которыя прежде сыпались на нее со всѣхъ сторонъ, вскорѣ почти затихли; конечно, они не исчезли совершенно, но они не высказывались открыто и съ помощью объективныхъ доводовъ, а раздавались втихомолку.

Новыя теоріи скоро были введены даже въ элементарные курсы, а въ настоящее время онѣ проникли во всѣ отрасли химіи и всюду внесли реформу.

Что касается Италіи, то мы должны съ радостью отмѣтить, что она была одной изъ первыхъ странъ, признавшихъ новыя идеи*). Достаточно назвать главные труды Патерно и Назини, посвященные этимъ вопросамъ.

Но въ теченіе послѣднихъ лѣтъ теоріи Вантъ-Гоффа снова вызвали споры, и при томъ какъ съ теоретической, такъ и съ экспериментальной стороны. Американскій физико-химикъ Каленбергъ, выполнившій нѣсколько измѣреній осмотическаго давленія, пришелъ къ заключенію о несостоятельности теоріи Вантъ-Гоффа. Но такое радикальное заключеніе нельзя выводить изъ столь скромныхъ опытныхъ данныхъ, которыя къ тому же опровергаются другими изслѣдователями, въ томъ числѣ Когеномъ, первымъ ученикомъ Вантъ-Гоффа.

Другой американецъ Морзъ (Morse) показалъ въ рядѣ экспериментальныхъ работъ, не вызывающихъ сомнѣній въ ихъ основательности и точности, что осмотическое давленіе слѣдуетъ законамъ Вантъ-Гоффа до нѣкоторой довольно высокой степени концентраціи. Скарпа подтвердилъ, что измѣненія осмотическаго давленія съ температурой слѣдуютъ законамъ Гэ-Люссака.

Другіе химики и физики, которые недостаточно изучили труды Вантъ-Гоффа или познакомились съ ними лишь изъ вторыхъ рукъ, пытались критиковать его взгляды на механизмъ осмотическаго давленія. Но это значитъ сражаться съ вѣтряными мельницами. Вантъ-Гоффъ, правда, иногда дѣлалъ намеки на кинетическое представленіе о растворахъ и указывалъ на параллелизмъ между ними и газами; но къ этому представленію онъ прибѣгалъ лишь съ дидактическими цѣлями и никогда не выводилъ съ его помощью своихъ законовъ. Онъ даже постоянно указывалъ, что механизмъ осмотическаго давленія и способъ дѣйствія полупроницаемой перегородки не имѣли никакого вліянія на выводъ и развитіе данной теоріи.

Въ дѣйствительности теорія разбавленныхъ (многіе забываютъ это слово, которое Вантъ-Гоффъ постоянно подчеркивалъ) растворовъ есть

*) Въ Россіи въ это время господствовала гидратная теорія, и, благодаря ея вліянію, теорія Аррениуса была встрѣчена несочувственно. Въ послѣднее время и у насъ измѣнились взгляды на обѣ эти теоріи въ смыслѣ ихъ примиренія. *Ред.*

лишь предѣльный законъ вродѣ столь многихъ другихъ великихъ законовъ природы, значенія которыхъ никто не отрицалъ по этой причинѣ. Кромѣ того, въ дѣйствительности совершенно полупроницаемая перепонка есть идеальный объектъ, котораго почти невозможно реализовать, и который чрезвычайно трудно осуществить, хотя бы въ приближеніи.

Но если бы даже такая перепонка была чистой абстракціей, теорія все-таки останется вѣрной, такъ какъ всѣ законы испаренія, кипѣнія и замерзанія растворовъ, вытекающіе изъ этой теоріи, были подтверждены, да и теперь еще подтверждаются съ достаточной точностью. Много тысячъ эбуліоскопическихъ и въ особенности кріоскопическихъ опредѣленій, которыя производились и ежедневно производятся въ лабораторіяхъ, подтверждаютъ эти законы и ставятъ эту теорію на гранитную основу, которую не удастся поколебать даже самой безпощадной критикѣ.

Правда, наши понятія о природѣ растворовъ, въ особенности растворовъ концентрированныхъ, и о состояніи веществъ разбавленныхъ растворовъ въ послѣдніе годы получили новое направленіе, и теперь существуетъ тенденція возвратиться къ теоріи гидратовъ и сольватовъ вообще, т. е. допустить существованіе комплексовъ молекулъ растворителя и растворенныхъ молекулъ или іоновъ; но въ этомъ нѣтъ ничего такого, что противорѣчило бы теоріи Вантъ-Гоффа, тѣмъ болѣе, что именно убѣжденные приверженцы этой теоріи явились иниціаторами новаго движенія.

Въ этомъ отношеніи также ученіе Вантъ-Гоффа является предѣльной теоріей: она соотвѣтствуетъ чисто физическому представленію о растворѣ, въ которомъ растворитель служитъ лишь для разбавленія, удаленія молекулъ растворѣннаго вещества другъ отъ друга; дѣйствительность болѣе или менѣе расходится съ этой схемой. Отклоненія незначительны, если растворы достаточно разбавлены, и растворители совершенно индифферентны; въ отсутствіи же этихъ условій отклоненія становятся значительными.

Такой фактъ въ исторіи науки случается нерѣдко: въ извѣстный моментъ два ученія кажутся совершенно противоположными, и одно изъ нихъ одерживаетъ верхъ; но съ теченіемъ времени оказывается, что противорѣчіе вовсе не было такимъ непримиримымъ, какъ думали вначалѣ, что каждая изъ двухъ теорій представляетъ лишь крайнее и одностороннее рѣшеніе проблемы, и что побѣжденная теорія сама содержитъ зачатки истины, способные развиваться и приспособляться.

Какъ замѣчаетъ Вальденъ, двадцать лѣтъ тому назадъ въ Лидсѣ можно было подумать, что физическая теорія растворовъ находится въ непримиримомъ противорѣчіи съ химической теоріей гидратовъ; теперь же Пиккерингъ съ удовлетвореніемъ можетъ видѣть возрожденіе своей идеи о соединеніи растворѣннаго вещества съ растворителемъ; но эта идея не только не является отрицаніемъ взглядовъ Вантъ-Гоффа, но, напротивъ, служитъ для нихъ полезнымъ дополненіемъ. Глашатаемъ этого новаго движенія слѣдуетъ признать Чамичана, который еще въ 1891 г. предлагалъ признавать образованіе такихъ сольватовъ для объясненія электролитической диссоціаціи.

Здѣсь умѣстно будетъ отмѣтить вліяніе, которое оказали на разсматриваемые нами вопросы новѣйшія изслѣдованія брауновскаго движенія и природы коллоидовъ. Эти блестящія изслѣдованія установили непрерывный рядъ переходовъ отъ грубыхъ дисперсій къ истиннымъ растворамъ въ собственномъ смыслѣ слова, и впервые дали вѣроятное доказательство реальнаго существованія молекулъ и, слѣдовательно, кинетической природы давленія газовъ и осмотическаго давленія. Другими словами, новѣйшія изслѣдованія подтвердили теорію растворовъ вплоть до ея внѣшней оболочки, хотя для доказательства ея существенной части это не было логически необходимо; всего лишь нѣсколько лѣтъ тому назадъ было бы большой смѣлостью допустить такой результатъ даже въ видѣ теоретической возможности.

Возвратимся къ нашему предмету. Въ 1890 г. Вантъ-Гоффъ изложилъ чрезвычайно интересное расширеніе своей теоріи. Онъ показалъ, что она можетъ быть примѣнена также и къ однороднымъ твердымъ смѣсямъ типа изоморфныхъ смѣсей, и основалъ такимъ образомъ теорію твердыхъ растворовъ, въ развитіи которой я имѣлъ счастье принять скромное участіе.

* *
*

Вмѣсто того, чтобы способствовать развитію теоріи растворовъ экспериментальными изслѣдованіями, Вантъ-Гоффъ ограничился лишь тѣмъ, что распространялъ ее съ помощью статей и докладовъ, въ которыхъ онъ излагалъ вкратцѣ и разъяснялъ свои взгляды. Экспериментальной работы Вантъ-Гоффъ отнюдь не прекращалъ, а, напротивъ, продолжалъ ее съ неослабнымъ рвеніемъ; но эту часть своей дѣятельности онъ посвятилъ другой группѣ вопросовъ, разработанныхъ въ его «Études de dynamique chimique», а именно, гетерогеннымъ равновѣсіямъ и конденсированнымъ системамъ.

Эта область, особенно въ той части, которая относится къ явленіямъ диссоціаціи, была уже разработана блестящей французской школой, начиная съ Сенъ-Клеръ-Девилля и кончая Ле-Шателье; въ томъ же направленіи, но исходя изъ нѣсколько иныхъ идей, начала работать также и голландская школа во главѣ съ Бакгуисомъ Розебомомъ.

Вантъ-Гоффъ и его ученики занялись прежде всего условіями образованія и разложенія двойныхъ солей въ водныхъ растворахъ, изслѣдуя, съ одной стороны, такія соединенія, какъ астраканитъ и карналлитъ, которыя въ природѣ находятся въ видѣ минераловъ, а съ другой стороны — рацематы, составлявшіе естественный переходъ къ стереохимическимъ вопросамъ.

Результаты этихъ изслѣдованій были собраны въ небольшой книгѣ, вышедшей въ 1897 г. подъ названіемъ «Vorlesungen über Bildung und Spaltung der Doppelsalze». Это безъ сомнѣнія одна изъ наименѣе извѣстныхъ книгъ нашего ученаго, такъ какъ вопросы, которымъ она посвящена, при своей чрезвычайной важности отличаются малой доступностью, и изложеніе ихъ носитъ нѣсколько сухой характеръ.

Эта группа работъ заняла десятилѣтіе отъ 1886 до 1895 г., т. е. второй періодъ пребыванія Вантъ-Гоффа въ Амстердамѣ.

Мы подходимъ теперь къ берлинской эпохѣ его дѣятельности. Эта эпоха посвящена всецѣло примѣненію найденныхъ прежде принциповъ и методовъ къ изслѣдованію условій образованія океаническихъ осадковъ и въ особенности знаменитыхъ стассфуртскихъ залежей. Эта работа является первой и самой грандіозной попыткой примѣнить физическую химію къ вопросамъ геологіи и, по мѣрѣ возможности, преобразовать геологію въ экспериментальную науку. Въ этой работѣ Вантъ-Гоффъ имѣлъ постояннаго сотрудника въ лицѣ Вильгельма Мейергоффера; сотрудничество продолжалось десять лѣтъ и прекратилось лишь съ преждевременной смертью Мейергоффера въ 1906 г.

Изслѣдованіе продолжалось десять лѣтъ, и результаты его изложены въ 51 мемуарѣ; всѣ эти мемуары были опубликованы въ запискахъ берлинской академіи въ теченіе десятилѣтія отъ 1897 до 1906 г. Если бы мы пожелали дать хотя бы общее представленіе объ этихъ работахъ, это завело бы насъ слишкомъ далеко. Стассфуртскія залежи произошли, какъ думаютъ, отъ испаренія внутренняго моря; онѣ состоятъ главнымъ образомъ изъ хлоридовъ, сульфатовъ и боратовъ натрія, калія, магнія и кальція и изъ ихъ всевозможныхъ двойныхъ солей. Требовалось опредѣлить порядокъ, въ которомъ соли осѣли, затѣмъ возможныя сочетанія минераловъ (что называютъ парагенезисомъ), наконецъ, предѣлы температуры и концентраціи, въ которыхъ могли имѣть мѣсто различные случаи выдѣленія и парагенезиса. Чтобы разрѣшить столь запутанную задачу, опредѣляли растворимость при различныхъ температурахъ сперва для пары солей, а затѣмъ для всевозможныхъ комплексныхъ системъ; для установленія различныхъ температуръ превращенія служили обыкновенные тензиметрическіе и дилатометрическіе методы.

Въ настоящее время эту задачу можно считать вполнѣ рѣшенной, по крайней мѣрѣ, съ теоретической стороны. Полученные выводы почти по всѣмъ пунктамъ сходятся съ результатами, къ которымъ пришли минералоги и практики. При помощи полученныхъ указаній въ природѣ было найдено нѣсколько новыхъ минераловъ, которые раньше приготовлялись лишь синтетически; одинъ изъ этихъ минераловъ названъ вантгоффитомъ. Важное значеніе этихъ изслѣдованій также съ практической точки зрѣнія было признано представителями промышленности и германскимъ правительствомъ. Въ 1908 г. былъ основанъ комитетъ для болѣе подробнаго изученія стассфуртскихъ залежей; изслѣдованіе ставило себѣ прикладную цѣль, но основывалось главнымъ образомъ на трудахъ Вантъ-Гоффа.

Конецъ этихъ трудовъ почти совпалъ со смертью Мейергоффера и началомъ болѣзни учителя. Жизнь и труды этого героя науки близились къ концу. Его благородному уму не суждено было болѣе открывать новыя области знанія для блага человѣчества.

Желаніе работать и идеи у Вантъ-Гоффа отнюдь не изсякли. Какъ только въ состояніи его здоровья наступило кажущееся улучшеніе, онъ предпринялъ въ новой лабораторіи въ Штеглицѣ рядъ изслѣдованій о синтетическомъ дѣйствіи энзимовъ, которые обнаруживаются главнымъ образомъ въ растеніяхъ, начиная съ образованія глюкозидовъ. Онъ уже представилъ по этому вопросу двѣ замѣтки въ берлинскую аладемію. Вантъ-Гоффъ, конечно, разрабатывалъ эту задачу съ количественной стороны и при помощи физико-химическихъ методовъ. Работа прервалась слишкомъ рано, чтобы можно было составить сужденіе объ ея предметѣ; но можно представить себѣ, какіе горизонты могъ бы намъ открыть Вантъ-Гоффъ по этому вопросу, столь жизненному во всѣхъ смыслахъ слова, если бы завистливая смерть не похитила его столь преждевременно.

* *
*

Мы разсмотрѣли въ общихъ чертахъ жизнь Вантъ-Гоффа и различныя фазы его научной дѣятельности. Теперь мы постараемся дать представленіе о характерѣ его, какъ человѣка и ученаго.

Какъ я уже говорилъ, черты его лица представляли голландскій типъ. Роста онъ былъ немного выше средняго; въ своей манерѣ одѣваться и говорить и въ своемъ обращеніи онъ казался такимъ, какимъ и былъ въ дѣйствительности, т. е. скромнымъ; только глаза ласковые, но вмѣстѣ съ тѣмъ живые и проницательные, порою выдавали въ немъ исключительную натуру.

Какъ человѣкъ, онъ не принадлежалъ къ числу тѣхъ, въ которыхъ блескъ генія омрачается грубостью и экстравагантностью характера; его истинная доброта, спокойная мягкость, его скромность, доходившая до простодушія, снискали ему любящихъ друзей, которыхъ у него было столь же много, какъ и почитателей.

Вантъ-Гоффъ былъ неизмѣннымъ приверженцемъ атомистической и молекулярной теоріи, да и странно было бы ожидать другого отъ основателя стереохиміи. Другъ Оствальда и его товарищъ по оружію въ борьбѣ за новыя физико-химическія теоріи, Вантъ-Гоффъ, однако, разошелся съ нимъ, когда послѣдній объявилъ войну атомистикѣ во имя энергетики и не только высказалъ сомнѣніе относительно реальности атомовъ и молекулъ и возможности когда-либо доказать ее, но выступилъ даже противъ пользованія атомной теоріей въ качествѣ рабочей гипотезы. Когда начатая Оствальдомъ кампанія, которую ожидало скорое пораженіе, была въ полномъ разгарѣ, Вантъ-Гоффъ въ 1906 г. произнесъ въ Вѣнѣ рѣчь, въ которой онъ, не измѣняя своего мирнаго и спокойнаго тона, предостерегалъ противъ опасностей поднятаго движенія и вновь выразилъ свое твердое убѣжденіе, что атомистикѣ еще предстоитъ оказать наукѣ большія услуги.

Изъ двухъ направленій, по которымъ можетъ слѣдовать физическая химія, онъ (по природному влеченію и по зрѣломъ обсужденіи) выбралъ химическое направленіе. Какъ химикъ, онъ всегда интересовался веществами, какъ таковыми. Физическія свойства интересовали его лишь какъ признаки, которыми эти вещества характеризуются; общіе же законы сами по себѣ, а также физическіе и математическіе методы занимали Вантъ-Гоффа, какъ болѣе совершенныя орудія для изслѣдованія природы веществъ, позволяющія дать ихъ безконечному разнообразію количественное выраженіе, болѣе точное, чѣмъ то, которое достигалось при помощи расплывчатыхъ понятій и неточныхъ методовъ традиціонной химіи. Напротивъ, физико-химиковъ второго крыла такъ же, какъ чистыхъ физиковъ, интересуютъ прежде всего сами свойства; вещества же для этихъ изслѣдователей являются лишь неизбѣжными носителями этихъ свойствъ.

Во всякомъ случаѣ, не будетъ несправедливо, если скажемъ, что Вантъ-Гоффъ былъ выше головой даже самыхъ знаменитыхъ физико-химиковъ своего поколѣнія. Чтобы найти такихъ великихъ ученыхъ, какъ онъ, пришлось бы обратиться къ болѣе отдаленной эпохѣ, къ тѣмъ героическимъ временамъ, когда дифференціація между химиками и физиками была еще слабо выражена: передъ нами встаютъ имена Бунзена, Фарадея, Гэ-Люссака. Но къ чему эти сравненія? Несомнѣнно, что Вантъ-Гоффъ принадлежитъ къ звѣздамъ первой величины, — тѣмъ, блескъ которыхъ не меркнетъ.

Изъ четырехъ великихъ областей, имъ разработанныхъ, любой одной было бы достаточно, чтобы доставить ему славу великаго химика; двѣ изъ нихъ (стереохимія и теорія растворовъ) составляютъ весьма важныя отрасли всей науки, и каждая изъ нихъ могла бы обезпечить своему творцу мѣсто между величайшими представителями науки. Слава Вантъ-Гоффа не только не будетъ увядать, но, вѣроятно, еще возрастетъ, такъ какъ она основана не на внѣшнихъ исключительныхъ свойствахъ его, какъ человѣка, а на величіи его трудовъ.

РЕЦЕНЗІИ.

В. Я. Гебель. *Начала аналитической геометріи въ пространствѣ и собраніе задачъ.* Для среднихъ техническихъ училищъ и для самообразованія. Москва, 1911. Стр. I + 59 + 1. 8⁰. Ц. 50 к.

Въ предисловіи авторъ указываетъ, что предлагаемое руководство представляетъ первый опытъ изложенія началъ аналитической геометріи въ пространствѣ въ объемѣ, опредѣленномъ программой среднихъ техническихъ училищъ, но вмѣстѣ съ тѣмъ выражаетъ надежду, что усвоеніе содержанія его курса принесетъ пользу и тѣмъ, кто пожелаетъ подготовить себя къ изученію подробныхъ курсовъ. На обложкѣ такъ и обозначено, — для среднихъ техническихъ училищъ и для самообразованія. — Поэтому и судить о книжкѣ нужно и съ той и съ другой точки зрѣнія. Съ первой къ ней можно отнестись довольно снисходительно: въ рукахъ хорошаго преподавателя, который исправляетъ и пополняетъ встрѣчающіеся въ учебникѣ недочеты и пробѣлы, книжка можетъ принести пользу при бѣдности нашей педагогической литературы. Но и для преподавателя не лишнее, конечно, обратить вниманіе на замѣченные въ книжкѣ недосмотры.

Въ началѣ излагаются основныя теоремы теоріи проекцій. Авторъ въ § 1 занимается проекціями на прямую, при чемъ опредѣливъ проекцію точки, какъ основаніе перпендикуляра, авторъ различаетъ случаи, — лежитъ ли проектируемый отрѣзокъ въ одной плоскости съ осью проекцій, или не лежитъ, предлагая въ первомъ случаѣ опускать перпендикуляръ изъ его концовъ на ось, а во второмъ проводить черезъ конецъ отрѣзка плоскости, перпендикулярныя къ оси. На самомъ дѣлѣ, конечно, въ обоихъ случаяхъ мы опускаемъ перпендикуляры на ось проекціи; но существенно не это, а то, что нужно провести плоскость, перпендикулярную къ оси, чтобы получить проекцію точки. Такъ и нужно бы опредѣлить проекцію точки, и прибавить, что такимъ образомъ, всѣ точки, лежащія въ одной плоскости, перпендикулярной къ оси проекцій, имѣютъ своею проекціей одну и ту же точку оси. — Далѣе слѣдовало бы выставить, какъ особую теорему: проекція AB + проекція $BA = 0$, и за основную теорему взять, что проекція ломаной равна проекціи замыкающей, а теорему о равенствѣ нулю проекціи замкнутаго многоугольника взять, какъ слѣдствіе. Не особенно удачно и вводимое въ § 4 и употребляемое мѣстами и въ дальнѣйшемъ выраженіе „стороны многоугольника идутъ по одному теченію".

Въ § 5 авторъ переходитъ къ проекціямъ (ортогональнымъ) на плоскость; понятія соотвѣтственно предполагаются извѣстными изъ начертательной геометріи. Это, конечно, сокращаетъ объемъ книжки, но для самообразованія конечно неудобно; да и для учащагося въ учебномъ заведеніи было бы, конечно, только полезно сопоставленіе опредѣленій о свойствѣ проекцій точки, линіи, фигуры, которыми въ дальнѣйшемъ приходится пользоваться. Здѣсь умѣстно было бы отмѣтить, что одну и ту же проекцію на плоскость имѣютъ всѣ точки, лежащіе на одномъ перпендикулярѣ къ плоскости. То увеличеніе объема, которое при этомъ получилось бы, можно было скомпенсировать сокращенiемъ въ § 14 перваго доказательства формулы для угла между двумя прямыми при помощи теоремы о разстоянiи между двумя точками и сторонъ треугольника, — ограничившись приведеннымъ мелкимъ шрифтомъ „вторымъ“ доказательствомъ при помощи проекцiй; конечно, при этомъ лучше воспользоваться теоремой, что проекцiя ломанной равна проекцiи замыкающей и не говорить о „встрѣчномъ теченiи“. Въ § 13 для координатъ точки, дѣлящей данный отрѣзокъ въ данномъ отношенiи $p:q$ внутренне, дается обычная неправильная формула $\frac{qx_1+px_2}{q+p}$, хотя въ § 3 и было сказано о направленiи отрѣзковъ прямыхъ линiй. На стр. 12 имѣемъ вторичный § 14, гдѣ говорится объ „основной задачѣ аналитической геометрiи въ пространствѣ“ и говорится довольно неудачно: каждая геометрическая фигура, разсматриваемая въ аналитической геометрiи, должна представлять собою, по мнѣнiю автора, нѣкоторое геометрическое мѣсто точекъ или линiй. Я не знаю, можно ли послѣ этого разсматривать въ аналитической геометрiи треугольникъ, тетраэдръ, параллелипипедъ, хотя это несомнѣнно геометрическая фигура. И далѣе, врядъ ли удобно говорить, что уравненiе которому удовлетворяютъ координаты каждой точки геометрической фигуры, связываетъ ихъ съ параметрами этой фигуры. Усвоивъ это опредѣленiе, учащiйся затруднится указать, каковы параметры геометрической фигуры, опредѣленной уравненiемъ $x^2+y^2=z^2$. Я бы съ нѣкоторою осторожностью употреблялъ безъ оговорки и терминъ „трансцендентное уравненiе“ (стр. 14, 19), и не сталъ бы употреблять слово „порядокъ поверхности“ стр. 19, не опредѣливъ, что это есть число точекъ пересѣченiя поверхности съ прямою линiей (стр. 19). Слишкомъ категорично на стр. 18 сказано, что, если уравненiя $F(x,y,z)=0$ $F_1(x,y,z)=0$ не 1-й степени, то выражаемая ими линiя есть кривая, напримѣръ, два круговыхъ цилиндра $x^2+y^2-v^2=0$, $(x-2v)^2+y^2-v^2=0$ имѣютъ общую прямую линiю ($x=v, y=0$); такъ же два параболическихъ цилиндра $y^2=2px$ и $(y-b)=2p(x-a)$; далѣе не нужно говорить, что, если три уравненiя между x, y, z всѣ первой степени, то системой ихъ опредѣляется только одна точка (стр. 18 стр. 23—24 св.). На стр. 25 послѣ вѣрнаго опредѣленiя знака перпендикуляра изъ точки на плоскость (стр. 7—8 св.) написана невѣрная формула

$$l=x_1\cos\alpha=y_1\cos\beta+z_2\cos\gamma-p$$

(въ спискѣ опечатокъ оговорено, что вмѣсто 2-го = должно быть +, но не сказано, что должно быть z_1 а не z_2); тоже повторено и на стр. 57, въ спискѣ формулъ: должно быть слѣва $-l$. На предыдущей стр. 24 неудачно выраженiе: $\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ есть правильная дробь. Надо было сказать: по абсолютной величинѣ $\leqq 1$. На стр. 28 авторъ утверждаетъ, будто „въ аналитической геометрiи въ пространствѣ всякую линiю принято разсматривать, какъ пересѣченiе двухъ поверхностей“. Это не правда. Во-первыхъ, начиная съ прямой линiи, которую очень удобно изображать уравненiями:

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n},$$

какъ и дѣлаетъ даже самъ авторъ на стр. 35), весьма употребительно изображенiе линiй уравненiями въ параметрической формѣ $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$, — что уже всегда дѣлается въ механикѣ. Во вторыхъ, это невѣрно и по существу, ибо напротивъ не всякая линiя можетъ быть разсматриваема, какъ полное пересѣченiе двухъ поверхностей; классическiй примѣръ — косое коническое сѣченiе.

О поверхностяхъ второй степени сказано немного. Выписано общее уравненiе второй степени, указано что прямая пересѣкаетъ поверхность 2-го порядка, не болѣе, какъ въ двухъ точкахъ, что линiя пересѣченiя поверхности 2-го порядка съ плоскостью есть, вообще говоря, кривая 2-го порядка; затѣмъ дается обзоръ поверхностей второй степени по ихъ простѣйшимъ уравненiямъ, при чемъ гиперболоиды и эллипсоиды получаются сначала вращенiемъ, затѣмъ уже авторъ переходитъ къ поверхностямъ съ неравными осями. Хотѣлось бы, чтобы нѣсколько больше было сказано обо всѣхъ этихъ поверхностяхъ, особенно о шарѣ, для котораго можно было бы вывести элементарно и уравненіе касательной плоскости. Для конуса, по крайней мѣрѣ, слѣдовало бы сказать, что есть только конусъ 2-го порядка, а не эллиптическій (и можно думать также гиперболическій), и что этотъ конусъ можно и при томъ двоякимъ способомъ разсматривать, какъ косой круговой конусъ. За то можно было бы опустить основанное опять таки на посторонних свѣдѣніяхъ введеніе термина развертывающихся поверхностей (для коническихъ и цилиндрическихъ) и даже косыхъ линейчатыхъ (стр. 42) Какъ удачное мѣсто долженъ на той же стр. 42 отмѣтить указаніе, какъ построить простую нитяную модель однополаго гиперболоида вращенія при помощи двухъ равныхъ круговъ съ соотвѣтственными отверстіями по ихъ окружности; лишнее, конечно, требовать, чтобы эти отверстія были непремѣнпо на равныхъ разстояніяхъ другъ отъ друга. Рецензія моя нѣсколько затянулась. Замѣчу еще только, что едва ли такъ очевидно, что гиперболическій параболоидъ есть поверхость линейчатая, какъ это заявляетъ авторъ на стр. 49 стр. 1 сн. На стр. 50—54 даны 126 задачъ на разные отдѣлы, распредѣленныя по главамъ, и отвѣты къ нимъ На поверхности второго порядка задачъ не предлагается. Въ концѣ приложенъ списокъ формулъ, соотношеній, уравненій и списокъ (хотя и неполный) опечатокъ. — Вышеизложенное позволяетъ, мнѣ кажется, сказать, что для самообразованія книжка г. Гебеля едва ли пригодна.

Проф. Д. Синцовъ.

К. Б. Пеніонжкевичъ. *Основанія аналитической геометріи.* Курсъ дополнительнаго класса реальныхъ училищъ. По программѣ 1907 года Ученымъ Комитетомъ Министерства Народнаго Просвѣщенія удостоена малой преміи Императора Петра Великаго и допущена въ качествѣ пособія для среднихъ учебныхъ заведеній. („Журн. Мин. Нар. Просв. 1909 г. іюнь и 1911 г. іюль). Изданіе книжнаго магазина В. В. Думнова. Стр. VI+198, 8°. Ц. 1 р.

Курсъ г. Пеніонжкевича получилъ уже авторитетное одобреніе Ученаго Комитета и удостоенъ малой преміи Императора Петра Великаго, что уже свидѣтельствуетъ о его положительныхъ качествахъ. По объему онъ превышаетъ средній объемъ тѣхъ курсовъ, которые въ ходу въ настоящее время. Авторъ не побоялся отпугнуть увеличеніемъ объема, и за это его можно, конечно, только одобрить: изъ болѣе подробнаго курса всегда легче кое что въ случаѣ надобности выбросить, чѣмъ къ слишкомъ краткому добавлять; да и для усвоенія болѣе взрослыхъ учениковъ 7-го класса конечно лучше изложеніе болѣе обстоятельное, чѣмъ сжатое и даже конспективное; и самому автору легче удовлетворительно изложить предметъ не слишкомъ экономя мѣстомъ. Наконецъ это же дало автору возможность ввести въ свой учебникъ и достаточное количество упражненій (480), — такъ что отпадаетъ надобность въ особомъ задачникѣ.

Авторъ оживляетъ изложеніе и историческими экскурсами, хотя, надо сказать правду, не совсѣмъ удачными. Если на стр. 1 методъ координатъ приписывается Декарту, то этимъ воспроизводится лишь обычное воззрѣніе, несправедливое къ П. Фермату, знавшему методъ еще до появленія Декартовой Геометріи, а слѣды метода можно возвести къ древнимъ землемѣрамъ (Tropfke, „Geschichte der Elementarmathematik“ II, 407), и примѣненіе его для изслѣдованія геометрическихъ фигуръ можно констатировать у Аполлонія и Архимеда какъ это и показываетъ Zeuthen въ статьѣ „Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum und Mittelalter“, S. 78 и сл. Равнымъ образомъ весьма спорнымъ является происхожденіе названій коническихъ сѣченій отъ того какой брался конусъ остро-прямо-или тупоугольный. Вѣроятнѣе мнѣніе Цейтена, связывающаго эти названія съ названіями параболическаго, эллиптическаго и гиперболическаго построенія при помощи гномона, въ связи съ которыми, можно думать, и были получены впервые эти кривыя. Мнѣ кажется также, хотя это уже мелочь, что лучше бы не называть Менэхма

Менайхмомъ, какъ мы не называемъ гиперболу „гюперболой“. Изъ числа другихъ недочетовъ я прежде всего отмѣчу невѣрный чертежъ на стр. 23, дающій вмѣсто синусоиды просто рядъ полуокружностей, — хотя кривая линія, такимъ образомъ выполненная, и имѣетъ видъ „волнообразной“, но она совершенно не передаетъ характернаго вида синусоиды, встрѣчающей ось x-овъ подъ угломъ поперемѣнно $+45^0$ и -45^0. Обычнымъ недостаткомъ страдаетъ (§ 5) опредѣленіе координатъ точки, дѣлящей данный отрѣзокъ въ данномъ отношеніи: при внутреннемъ дѣленіи разстоянія до концовъ отъ точки дѣленія откладываются въ разныя стороны, и отношеніе ихъ отрицательное. Слишкомъ просто принято, что уравненіе $F(x, y)=0$ опредѣляетъ непрерывную линію (§ 7). Не могу согласиться также, чтобы цѣлесообразно было перпендикуляръ изъ всякой точки на прямую считать положительнымъ: при выводѣ нормальнаго уравненія прямой перпендикуляръ изъ начала на прямую принимается всегда положительнымъ, перпендикуляры же, откладываемые въ противоположномъ направленіи, согласно правилу Декарта (стр. 2), должно считать отрицательными. Не вполнѣ удачны заглавія параграфовъ: § 14: уравненіе прямой, пересѣкающей оси координатъ вмѣсто хотя бы „наклонной къ оси“. § 66 „вѣтви на безконечности“ вмѣсто вѣтви, уходящія въ безконечность или безконечныя вѣтви. §§ 70 и 71, гдѣ мнѣ кажется излишнимъ придавать уравненіямъ $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}-1=0$ назнаніе „каноническаго“ уравненія эллипса или гиперболы. Наконецъ въ § 65 неправильно опредѣленіе „центромъ всякой кривой, а слѣдовательно и коническаго сѣченія называется такая точка, которая дѣлитъ пополамъ всѣ хорды черезъ нее проходящія“. Если прямая встрѣчаетъ кривую въ 4 точкахъ, то какую точку ея надо считать за середину хорды. Слова „всякой кривой, а слѣдовательно“ совершенно излишни.

Несмотря на указанные недочеты, книжку г. Пеніонжкевича я все же считаю очень недурнымъ руководствомъ аналитической геометріи на плоскости.

Я хотѣлъ бы замѣтить лишь слѣдующее. Послѣднія 6 страницъ посвящены биполярнымъ координатамъ (§§ 93—96) и даже уравненію параболы въ системѣ координатъ „полюсъ-директриса“ (§ 96). Я, конечно, понимаю, что въ учебникѣ, составленномъ по программамъ 1907 г. нельзя было совсѣмъ не упомянуть объ этихъ координатахъ. Но этому можно было бы посвятить всего 2-3 строчки. За то не увеличивая объема можно было бы посвятить двѣ—три страницы понятію о косоугольныхъ координатахъ, безконечно болѣе важныхъ. Если онѣ въ программахъ 1907 г. не упоминаются, то, конечно, лишь за тѣмъ, чтобы не осложнять изложенія новыми формулами. Но отмѣтить, какія изъ формулъ, выведенныхъ для координатъ прямоугольныхъ, сохраняются безъ измѣненія и для косоугольныхъ было бы по моему необходимо, особенно въ учебникѣ, гдѣ аналитической геометріи на плоскости посвящено почти 200 страницъ.

Проф. Д. Синцовъ.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей привать-доцента **Е. Л. Буницкаго.**

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

ОТДѢЛЪ I.

№ 17 (6 сер.). Доказать тожества

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)r_a^2}+\frac{ca}{(b-c)(b-a)r_b^2}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)r_c^2}=$$

$$=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)r_b r_c}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)r_c r_a}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)r_a r_b}=\frac{1}{r^2},$$

гдѣ a, b, c суть стороны, а r, r_a, r_b, r_c — радіусы внѣвписанныхъ круговъ нѣкотораго треугольника.

Л. Богдановичъ (Ярославль).

№ 18 (6 сер.). Вывести тожество

$$\operatorname{tg} 3a=\operatorname{tg} a \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+a\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-a\right)$$

и показать, что равенства, предложенныя для доказательства въ задачѣ № 375 (№ 529 „Вѣстника“) суть частные случаи этого тожества.

Е. Томашевичъ (Москва).

№ 19 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^3+\sqrt[n]{a^{n-m}}\,x^2+\sqrt[n]{a^m}\,x+a=0.$$

С. Адамовичъ (Варшава).

№ 20 (6 сер.). Пусть I — точка касанія вписаннаго круга въ треугольникъ ABC со стороной BC, a — уголъ BIA. Доказать, что

$$\frac{1}{p-b}-\frac{1}{p-c}=\frac{2}{r\operatorname{tg} a},$$

гдѣ r — радіусъ вписаннаго круга.

(Заимств.).

ОТДѢЛЪ II.

Задачи на изслѣдованіе хода и свойствъ функцій.

№ 8) Прямая D задана въ прямоугольныхъ декартовыхъ координатахъ уравненіемъ:

$$3y - 4x = 1.$$

1°. Найти угловые коэффиціенты биссектрисъ угловъ, образуемыхъ прямой D съ осью y-овъ.

2°. Найти уравненіе этихъ биссектрисъ.

Р. Витвинскій (Одесса).

№ 9) Данъ полукругъ діаметра $AB = 2R$. На продолженіи этого діаметра берутъ точку S на разстояніи a отъ точки A ($a > 2R$; точка B лежитъ по условію между точками A и S) и соединяютъ эту точку S прямой съ нѣкоторой точкой M полуокружности; затѣмъ вращаютъ вокругъ прямой AS фигуру, ограниченную дугой AM и прямыми MS и AS. Изучить измѣненіе объема полученнаго такимъ образомъ тѣла вращенія при измѣненіи положенія точки M на данной полуокружности, выбравъ за независимое перемѣнное разстояніе $AP = x$ отъ точки A до проекціи P точки M на діаметрѣ AB. Показать, что разсматриваемый объемъ достигаетъ maximum'а, если прямая MS касается полукруга.

(Заимств.)

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 418 (5 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$\frac{8x^2 - 40x + 25}{7x^2 - 68x + 70} - \frac{1}{(x-1)^2} = 0.$$

Послѣ освобожденія отъ знаменателя и приведенія данное уравненіе принимаетъ видъ:

$$8x^4 - 56x^3 + 106x^2 - 22x - 45 = 0.$$

Умноживъ обѣ части на 2, получимъ:

$$16x^4 - 112x^3 + 212x^2 - 44x - 90 = 0,$$

или, полагая

$$2x = y, \tag{1}$$

$$y^4 - 14y^3 + 53y^2 - 22y - 90 = y^4 + y^3 - 15y^3 - 15y^2 + 68y^2 + 68y - 90y - 90 =$$

$$= (y+1)(y^3 - 15y^2 + 68y - 90) = (y+1)(y^3 - 5y^2 - 10y^2 + 50y + 18y - 90) =$$

$$= (y+1)(y-5)(y^2 - 10y + 18) = 0.$$

Такимъ образомъ, преобразованное уравненіе распадается на три уравненія:

$$y + 1 = 0, \quad y - 5 = 0, \quad y^2 - 10y + 18 = 0,$$

рѣшая которыя находимъ:

$$y_1 = -1,\quad y_2 = 5,\quad y_{3,4} = 5 \pm \sqrt{7},$$

а потому [см. (1)] корни даннаго уравненія суть

$$x_1 = -\frac{1}{2},\quad x_2 = -\frac{5}{2},\quad x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}.$$

А. Фрумкинъ (Одесса); *М. Рыбкинъ* (Ейскъ).

№ 424 (5 сер.). *Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе*

$$x^3 - 100 = 225y.$$

Такъ какъ числа 100 и $225y$ кратны простого числа 5, то и x^3, а потому и x кратно 5. Итакъ,

$$x = 5z, \tag{1}$$

гдѣ z цѣлое число. Подставивъ x изъ равенства (1) въ данное уравненіе, получимъ: $125z^3 - 100 = 225y$, или

$$5z^3 - 4 = 9y. \tag{2}$$

Такъ какъ $9y$ кратно 3, то разность $5z^3 - 4$ должна дѣлиться на 3. Всякое цѣлое значеніе z можно представить въ видѣ $3t + u$, гдѣ t — цѣлое число, а u имѣетъ одно изъ значеній 0, 1, (-1). Полагая въ равенствѣ (2) $z = 3t + u$, запишемъ его въ видѣ:

$$\frac{5(3t+u)^3 - 4}{3} = 3y, \quad \text{или} \quad \frac{5(27t^3 + 27ut^2 + 9u^2t) + 5u^3 - 4}{3} = 3y,$$

т. е.

$$5(9t^3 + 9ut^2 + 3u^2t) + \frac{5u^3 - 4}{3} = 3y, \tag{3}$$

откуда видно, что разность $5u^3 - 4$ должна быть кратна 3. Но эта разность при $u = 0$, 1 получаетъ соотвѣтственно также значенія -4, 1, и лишь при $u = -1$ она обращается въ кратное 3-хъ число (-9). Поэтому

$$z = 3t - 1, \tag{4}$$

и равенство (3) даетъ намъ въ этомъ предположеніи $5 \cdot 3(3t^3 - 3t^2 + t) - 3 = 3y$, откуда

$$y = 15t^3 - 15t^2 + 5t - 1, \tag{5}$$

т. е. оказывается; что при $z = 3t - 1$ y получаетъ цѣлое значеніе. Изъ равенствъ (1) и (4) находимъ: $z = 5(3t - 1) = 15t - 5$. Итакъ, формулы [см. (5)]

$$x = 15t - 5,\quad y = 15t^3 - 15t^2 + 5t - 1,$$

гдѣ t — произвольное цѣлое число, даютъ всѣ цѣлыя рѣшенія предложеннаго уравненія.

А. Фрумкинъ (Одесса); *Н. С.* (Одесса).

№ 436 (5 сер). *Въ какомъ треугольникѣ средины высотъ лежатъ на одной прямой?*

Пусть въ треугольникѣ ABC точки a, b, c — суть соотвѣтственно средины сторонъ BC, AC, AB, а AD, BE, CF — его высоты. Прямыя ab, bc, ac соотвѣтственно параллельны сторонамъ AB, BC, AC, а потому высоты AD, BE, CF пересѣкаются прямыми bc, ca, ab соотвѣтственно въ срединахъ α, β, γ этихъ высотъ. Итакъ, средины высотъ α, β, γ треугольника ABC лежатъ на сторонахъ (или на продолженіяхъ сторонъ) треугольника abc, вершины котораго суть средины сторонъ треугольника ABC. Если треугольникъ ABC остроугольный, то точки α, β, γ лежатъ соотвѣтственно на сторонахъ bc, ca, ab треугольника abc и ни одна изъ нихъ не лежитъ ни въ одной изъ его вершинъ; слѣдовательно, въ остроугольномъ треугольникѣ средины высотъ не лежатъ на одной прямой. Если одинъ изъ угловъ треугольника ABC, напримѣръ A, тупой, то точка α лежитъ на сторонѣ bc, а точки β и γ — лежатъ соотвѣтственно на продолженіяхъ сторонъ ac и ab; значитъ и въ тупоугольномъ треугольникѣ средины высотъ не лежатъ на одной прямой. Если же треугольникъ ABC прямоугольный (пусть A — прямой уголъ), то точки β и γ совпадаютъ соотвѣтственно съ точками c и b, такъ что средины высотъ α, β, γ треугольника лежатъ на одной прямой BC. Итакъ, только въ прямоугольномъ треугольникѣ средины высотъ лежатъ на одной прямой.

М. Пистракъ (Лодзь); *А. Бочекъ* (Телавъ); *В. Моргулевъ* (Одесса).

№ 443 (5 сер). *Найти сумму* n *членовъ каждаго изъ рядовъ*

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \cdots + \sin^2 mx + \cdots$$

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cdots + \cos^2 mx + \cdots$$

Называя сумму n членовъ перваго и втораго ряда соотвѣтственно черезъ s_n и s'_n, получимъ:

$$s_n + s'_n = (\sin^2 x + \cos^2 x) + (\sin^2 2x + \cos^2 2x) + \cdots + (\sin^2 nx + \cos^2 nx) = n. \quad (1)$$

Представляя вторую сумму въ видъ:

$$s'_n = \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \cdots + \frac{1+\cos 2nx}{2} =$$

$$= \tfrac{1}{2}[n + (\cos 2x + \cos 4x + \cdots + \cos 2nx)]$$

и полагая

$$\cos 2x + \cos 4x + \cdots + \cos 2nx = \sigma_n, \quad (2)$$

имѣемъ:

$$s'_n = \tfrac{1}{2}(n + \sigma_n). \quad (3)$$

Пусть $\sin x \neq 0$, т. е. $x \neq k\pi$, гдѣ k — цѣлое число. Тогда

$$\cos 2mx = \frac{\sin(2m+1)x - \sin(2m-1)x}{2\sin x}$$

Полагая въ этомъ тожествѣ послѣдовательно $m = 1, 2, \ldots, n$ получимъ рядъ равенствъ:

$$\cos 2x = \frac{\sin 3x - \sin x}{2}, \quad \cos 4x = \frac{\sin 5x - \sin 3x}{2}, \ldots,$$

$$\cos 2nx = \frac{\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x}{2\sin x},$$

сложивъ которыя, находимъ [см. (3)]

$$\sigma_n = \frac{\sin(2n+1)x - \sin x}{2\sin x} = \frac{2\cos(n+1)x\sin nx}{2\sin x} = \frac{\sin nx\cos(n+1)x}{\sin x},$$

откуда [см. (3), (1)]

$$s'_n = \cos^2 x + \cos^2 2x + \cdots + \cos^2 2nx = \tfrac{1}{2}\left(n + \frac{\sin nx\cos(n+1)x}{\sin x}\right),$$

$$s_n = \sin^2 x + \sin^2 2x + \cdots + \sin^2 2nx = \tfrac{1}{2}\left(n - \frac{\sin nx\cos(n+1)x}{\sin x}\right).$$

Если же $x = k\pi$ (k — цѣлое число), то $s_n = 0$, $s'_n = n$.

Р. Витвинскій (Одесса); *Т. Тикуновъ* (Козловъ); *Г. Варкентинъ* (Петербургъ); *С. Кудинъ* (Москва).

№ 446 (5 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$x^4 + 3x^3 + 2\sqrt{2}x^2 + 3\sqrt{2}x + 2 = 0.$$

Представивъ данное уравненіе послѣдовательно въ видѣ:

$$(x^4 + 2\sqrt{2}x^2 + 2) + (3x^3 + 3\sqrt{2}x) = (x^2 + \sqrt{2})^2 + 3x(x^2 + \sqrt{2}) =$$

$$= (x^2 + \sqrt{2})(x^2 + 3x + \sqrt{2}) = 0,$$

разлагаемъ его на два квадратныхъ уравненія:

$$x^2 + \sqrt{2} = 0, \quad x^2 + 3x + \sqrt{2} = 0,$$

рѣшая которыя, находимъ четыре корня даннаго уравненія:

$$x_{1,2} = \pm i\sqrt[4]{2} \quad (i = \sqrt{-1}), \quad x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4\sqrt{2}}}{2} = \frac{-3 \pm (1 - \sqrt{8})}{2},$$

или

$$x_3 = -1 - \sqrt{2}, \quad x_4 = -2 + \sqrt{2}.$$

Н. Пернуховъ (Москва); *Р. Витвинскій* (Одесса); *Н. Шемяновъ* (Владиміръ); *В. Моргулевъ* (Одесса); *М. Рыбкинъ* (Ейскъ); *А. Кисловъ* (Москва); *С. Розенблатъ* (Армавиръ); *П. Тикуновъ* (Козловъ).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

Ф. Клейнъ, профессоръ. *Вопросы элементарной и высшей математики.* Лекціи, читанныя въ Гёттингенскомъ университетѣ. Часть I. Ариѳметика, алгебра и анализъ. Переводъ съ нѣмецкаго Д. А. Крыжановскаго подъ редакціей приватъ-доцента В. Ф. Кагана. Изданіе „Mathesis". Одесса, 1912. Стр. XIX + 486. Ц. 3 руб.

А. А. Ляминъ. *Прямолинейная тригонометрія* для средне-учебныхъ заведеній Изданіе А. С. Панафидиной. Москва, 1912. Стр. 119. Ц. 60 к.

Его же. *Измѣненіе тригонометрическихъ функцій при измѣненіи угла.* (Наглядное пособіе). (Въ примѣненіи принципа живой фотографіи). Изданіе А. С. Панафидиной. Москва, 1911. Ц. 25 к.

В. И. Поповъ, преподаватель Витебскаго Учительскаго Института. *Химія для самообразованія.* Практическія работы въ дешевой домашней лабораторіи Часть I Съ предисловіемъ академика Н. Н. Бекетова. Съ 297 рис. Изданіе 2-ое Т ва И. Д. Сытина. Москва, 1912. Стр. 392. Ц. 1 р.

Вентвортъ и Ридъ. *Начальная ариѳметика.* Выпускъ I-й. Для учителей. Стр. 129. Ц. 30 к. Выпускъ II-ой. Для учениковъ. Стр. 128. Ц. 30 к. Переводъ съ послѣдняго американскаго изданія подъ редакціей и съ дополненіями В. Р. Мрочека. Изданіе „Новая школа". СПБ., 1911.

К. М. Щербина, директоръ Кіевскаго Учительскаго Института. *О преподаваніи систематическаго курса обыкновенныхъ дробей.* Замѣтки по методикѣ ариѳметики. Кіевъ, 1911. Стр. 25. Ц. 25 к.

В. В. Добровольскій. *Техническая механика въ элементарномъ изложеніи.* Руководство для учащихся и для самообразованія. Часть 1-ая. Изданіе книжнаго магазина Г. В. Гольстена (СПБ.). Брянскъ, 1912. Стр. 260. Ц. 2 руб

Ив. Менделѣевъ. *Мысли о познаніи.* СПБ., 1909. Стр. VI+142. Ц. 1 р. 50 к.

Его же. *Оправданіе истины.* СПБ., 1910. Стр. VIII + 59. Ц. 50 к.

Б. Чихановъ. *Учебникъ ариѳметики.* Курсъ среднихъ учебныхъ заведеній. Изданіе седьмое. Минскъ, 1912. Стр. 143. Ц. 60 к.

Его же. *Учебникъ прямолинейной тригонометріи.* Курсъ среднихъ учебныхъ заведеній. Изданіе четвертое. Минскъ, 1912. Стр. 92. Ц. 50 к.

Его же. *Таблицы пятизначныхъ логариѳмовъ чиселъ и тригонометрическихъ величинъ.* 2-ое стереотипное изданіе. Минскъ, 1912. Стр. 139 + XIII. Ц. 80 коп.

П. Курилко, преподаватель математики Шавельской гимназіи. *Геометрическія (тригонометрическія) уравненія.* Къ докладу на Первомъ Всероссійскомъ Съѣздѣ Преподавателей Математики. СПБ., 1912. Стр. 16. Ц. 30 к.

Александръ Зачиняевъ. *Букварекъ.* Психологическая система обученія. Изданіе „Новая Школа". СПБ, 1912. Стр. 64. Ц. 8 к.

С. И. Шохоръ-Троцкій. *Методика ариѳметики для учителей среднихъ учебныхъ заведеній.* Изданіе 2-ое, исправленное и значительно дополненное. Стр. XVI + 524 Ц. 2 р. 40 к.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
пщется

Обложка
пщется