Обложка
ищется

Обложка
ищется

XLVII Сем. № 4.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 556.

Памяти В. Б. Струве.

(1854. VI — 1912. I).

И. Александрова (Москва).

Скончался широкій общественный дѣятель въ области просвѣщенія, Василій Бернгардовичъ Струве. Я, какъ университетскій однокурсникъ покойнаго, а въ послѣдніе 4 года человѣкъ, имѣвшій счастье быть близкимъ къ покойному и къ его семьѣ, просилъ бы позволенія посвятить нѣсколько словъ памяти этой далеко незаурядной личности.

Прежде всего на какомъ бы мѣстѣ не появлялся В. Б., (а онъ былъ директоромъ Константиновскаго Межевого Института, инспекторомъ Николаевскаго Женскаго Института въ С.-Петербургѣ, основателемъ средней школы Московскаго Народнаго Университета, и т. д.*), всюду немедленно начиналась широкая реорганизація школьнаго дѣла

*) Подробная біографія покойнаго, его посмертныя статьи и замѣтки, нѣкоторые изъ его замѣчательныхъ докладовъ по различнымъ вопросамъ образованія, перечень его печатныхъ трудовъ и т. д. выйдутъ особымъ сборникомъ, издаваемымъ въ память покойнаго Константиновскимъ Межевымъ Институтомъ.

на европейскихъ началахъ и съ той широтой, съ какой только позволяли условія. Работоспособность В. Б. была почти невѣроятна; его эрудиція, между прочимъ, поддерживаемая частымъ посѣщеніемъ заграничныхъ школъ, была очень велика. Его отзывчивость на педагогическіе вопросы, его способность сразу горячо имъ отдаваться была замѣчательна, и при томъ это происходило съ нимъ при всякаго рода стеченіи обстоятельствъ.

Такъ, напримѣръ, потерявъ старшаго сына, много обѣщавшаго прекраснаго юношу, который наглядно могъ показать всю силу исповѣдуемыхъ В. Б. педагогическихъ принциповъ, онъ, обуреваемый несвойственными его природѣ черными мыслями, отправился на Съѣздъ Преподавателей Математики въ С.-Петербургъ. Тамъ его другъ и пріятель, профессоръ К. А. Поссе указалъ ему, что практическое обоснованіе доклада самого К. А. Поссе на тему „О согласованіи программъ въ средней и высшей школахъ“ едва ли не лучше извѣстно ему, В. Б. Тогда В. Б. въ 2 — 3 ночи составилъ свой замѣчательный докладъ *) и блестяще его прочиталъ; успѣхъ и большое значеніе этого доклада уже извѣстно читателямъ „Вѣстника“.

Обладая качествами, обезпечивавшими ему крупное мѣсто въ общественной дѣятельности, какъ то, европейской культурностью, органической неспособностью къ неделикатности, крайнею требовательностью къ себѣ, чисто парламентской корректностью и т. д., покойный обладалъ еще болѣе цѣнными и глубокими качествами. Укажу изъ нихъ, во первыхъ, на глубокое, проникающее плоть и кровь, пониманіе обязанностей гражданина, а во вторыхъ, ту изумительную силу, съ которой покойный выполнялъ долгъ гражданина при всякихъ обстоятельствахъ.

Позволю себѣ указать на факты. Болѣзнь сына, о которомъ я говорилъ выше, продолжалась очень долго и иногда принимала угрожающіе размѣры. Именно въ эти моменты В. Б., какъ и всегда, часто посѣщалъ вечерніе курсы для землемѣровъ, руководителемъ которыхъ онъ состоялъ. На этихъ курсахъ работалъ и я. Мои товарищи по этому дѣлу и я можемъ засвидѣтельствовать, что на этихъ урокахъ В. Б. замѣчалъ все, до послѣдней мелочи; это было, если можно такъ выразиться, стальное вниманіе. Тому, кому интересно знать свои достоинства и недостатки такъ, какъ они есть, а не такъ, какъ они кажутся, посѣщенія уроковъ В. Б. были очень дороги. А надо замѣтить, что смерть сына, какъ многіе справедливо думаютъ, была причиной гибели самого В. Б. — между ними были идеальныя отношенія **).

Года два В. Б. лѣчилъ сына заграницей по всѣмъ правиламъ новѣйшей медицины. Какихъ денегъ это стоитъ, мы не будемъ указывать. Но, именно, въ это время, В. Б. пришелъ къ убѣжденію, что

*) Покойный мастерски владѣлъ перомъ. Докладъ на ту же тему онъ читалъ 20 лѣтъ тому назадъ; оставалось прибавить идеи и факты, появившіеся съ того времени.

**) В. Б. скончался отъ мозговаго удара черезъ 5 мѣсяцевъ послѣ смерти сына.

вечерніе курсы при Межевомъ Институтѣ вредны для самаго института. Тогда онъ, не имѣвшій ничего, кромѣ жалованья, а курсы оплачивались очень хорошо, немедленно возбудилъ ходатайство о закрытіи этихъ курсовъ.

Разбирая математическія бумаги покойнаго, я нашелъ довольно много рецензій В. Б. на учебники, писанныя имъ, когда онъ былъ членомъ Учебнаго Комитета въ вѣдомствѣ Императрицы Маріи. Я не могу не сказать, что эти рецензіи*) существенно отличаются отъ тѣхъ рецензій, которыя мы обыкновенно встрѣчаемъ теперь. Въ основу ихъ положены: 1) отсутствіе всякихъ предположеній, могущихъ такъ или иначе нервировать автора, 2) тщательное до кропотливости изученіе рецензируемой книги и такое же обоснованіе всей рецензіи. Боязнь какъ нибудь задѣть автора доходила у В. Б. до того, что одинъ задачникъ В. Б. продѣлалъ весь цѣликомъ; въ другомъ случаѣ онъ не указываетъ на заимствованіе изъ задачника Верещагина, а просто констатируетъ фактъ, что 29 задачъ въ томъ и другомъ задачникѣ идентичны и приводитъ самыя задачи. Понятно, что при такомъ отношеніи къ дѣлу, около В. Б. было легко и пріятно работать.

Глубокое пониманіе обязанностей гражданина, его неизмѣнное выполненіе закона, на основаніи котораго принято исполненіе тѣхъ или другихъ обязанностей, въ связи съ общимъ громаднымъ развитіемъ духовныхъ силъ, дѣлали изъ В. Б. весьма крупную личность, на внутренній строй которой, между прочимъ, не могли вліять политическія вѣянія страны, хотя практически эти вѣянія всегда были учитываемы покойнымъ лучше, чѣмъ кѣмъ либо другимъ.

Можно объ этомъ человѣкѣ написать очень много, но и сказаннаго достаточно, чтобы понять, какую видную роль игралъ этотъ человѣкъ не только въ развитіи просвѣщенія, но и въ ростѣ пониманія гражданскаго долга. Что же касается лицъ, близко знавшихъ В. Б., то своею жизнью онъ имъ показалъ, что ни при какихъ обстоятельствахъ не слѣдуетъ впадать въ уныніе.

*) Нѣкоторыя рецензіи будутъ помѣщены въ сборникѣ, издаваемомъ Межевымъ Институтомъ.

† Петръ Николаевичъ Лебедевъ.

1-го марта неожиданно скончался одинъ изъ наиболѣе выдающихся русскихъ ученыхъ, знаменитый физикъ, Петръ Николаевичъ Лебедевъ.

П. Н. Лебедевъ родился 24-го февраля 1886 г. Высшее образованіе покойный получилъ сначала въ Императорскомъ Московскомъ Техническомъ Училищѣ. Не окончивъ его, онъ переѣхалъ въ Страсбургъ, гдѣ работалъ подъ руководствомъ знаменитаго физика А. Кундта. Въ 1891 году онъ получилъ степень доктора философіи въ Страсбургскомъ университетѣ и вернулся въ Россію. Здѣсь П. Н. былъ приглашенъ покойнымъ профессоромъ А. Г. Столѣтовымъ въ лаборанты физической лабораторіи. Вскорѣ послѣ этого въ 1899 г. за работу «Экспериментальное изслѣдованіе пондеромоторнаго дѣйствія волнъ на резонаторы» П. Н. сразу получилъ отъ Московскаго Университета степень доктора физики. Въ 1900 г. П. Н. былъ избранъ профессоромъ Московскаго Униврситата, который покинулъ въ прошломъ году. Самая замѣчательная работа П. Н., создавшая ему всемірную извѣстность, заключалась въ томъ, что онъ экспериментально обнаружилъ существованіе свѣтового давленія. Объ этой своей работѣ онъ сообщилъ впервые физическому конгрессу въ Парижѣ въ 1900 г., а затѣмъ опубликовалъ ее въ 33-мъ томѣ журнала Русскаго Физ.-Химич. Общества подъ заглавіемъ «Опытное изслѣдованіе свѣтового давленія» (1901). Въ помѣщенной въ прошломъ семестрѣ «Вѣстника» статьѣ англійскаго физика Пойнтинга, идеи и методы Лебедева подробно изложены. П. Н. продолжалъ и послѣ этого неустанно работать; вызванному этимъ переутомленію друзья покойнаго приписываютъ его болѣзнь и преждевременную смерть. Небольшая семья русскихъ физиковъ понесла неизгладимую утрату.

Къ реформѣ преподаванія математики въ средней школѣ.

II.

Къ вопросу о согласованіи программъ математики въ средней и высшей школѣ.

Проф. В. Б. Струве (†).

(Читано на Съѣздѣ преподавателей математики въ СПБ. 3 января 1912 года).

Намъ, педагогамъ, многое ставится въ вину, насъ во многомъ упрекаютъ. Не берусь судить, насколько справедливы тѣ многочисленные упреки, которые дѣлаются школѣ, но въ одномъ, мнѣ кажется, мы можемъ себя дѣйствительно упрекнуть. Есть слабость, въ которой у насъ по общей ли человѣческой слабости, или по какой либо другой причинѣ, слово особенно рѣзко расходится съ дѣломъ. Мы очень много говоримъ о переутомленіи, о вредѣ многопредметности, о необходимости концентрировать обученіе на основательномъ изученіи немногаго (классическое non multa, sed multum), о важности индивидуализаціи. На ряду съ этимъ мы не дѣлаемъ ни одного шага, чтобы осуществить свои пожеланія, и при составленіи нашихъ учебныхъ плановъ идемъ какъ разъ въ разрѣзъ съ ними. Всякому, кто принималъ когда нибудь участіе въ составленіи табели средней школы того или другого типа, хорошо извѣстно, какъ представители каждаго изъ многочисленныхъ предметовъ, входящихъ въ курсъ средней школы, стараются отвоевать себѣ возможно большее число часовъ и остаются въ конечномъ счетѣ недовольными, такъ какъ возможное число часовъ оказывается недостаточнымъ. За 33 года моей работы въ школахъ самаго разнообразнаго типа, какъ средней, такъ и высшей, я не припоминаю случая, чтобы я былъ свидѣтелемъ или участникомъ сокращенія числа предметовъ, или сокращенія программъ. Обратное происходитъ постоянно: число предметовъ увеличивается, программы расширяются. Мы не можемъ, если не захотимъ быть неискренними, отрицать этого несомнѣннаго факта несоотвѣтствія между нашимъ словомъ и нашимъ дѣломъ. Результаты, которые получаются, т. е. уровень общеобразовательной подготовки абитуріентовъ среднихъ школъ, не должны повышаться при наличіи такого противорѣчія слова съ дѣломъ, если слова наши говорятся не на вѣтеръ, если они дѣйствительно продуманы, если они выражаютъ сумму нашихъ наблюденій и нашего знанія. Это ясно a priori и подтверждается на опытѣ. Сѣтованія на недостаточность общеобразовательной подготовки учащихся вы можете услышать въ каждой высшей школѣ, и притомъ сѣтованія не голословныя, а подтверждаемыя документальными данными. Они подтверждаются тѣми изумительными сочиненіями, которыя пишутъ абитуріенты на конкурсныхъ испытаніяхъ, они подтверждаются тѣмъ фактомъ, что весьма небольшой процентъ поступающихъ въ высшія школы справляются даже съ очень скромнымъ минимумомъ, требуемымъ для зачета перваго года по математикѣ, подтверждаются единодушнымъ отзывомъ лицъ, ведущихъ практическія занятія по математикѣ въ различныхъ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ. Два основныхъ предмета школы — родной языкъ и математика поставлены такъ, что оставляютъ желать весьма многаго, выражаясь возможно сдержанно. Приписывать это явленіе несовершенству методовъ преподаванія, недостаточной требовательности въ средней школѣ, или несовершенству способовъ оцѣнки познаній учащихся было бы, я думаю, неосновательно, разъ на лицо имѣется основная причина — противорѣчіе дѣйствительнаго положенія дѣла тѣмъ принципамъ, передъ которыми мы сами преклоняемся и которымъ мы при всякомъ удобномъ случаѣ свидѣтельствуемъ свое почтеніе. Положеніе юноши на рубежѣ средней и высшей школы я позволилъ бы себѣ характеризовать такъ: переходъ изъ одного водоворота многопредметности и разбросанности мысли въ другой.

Я позволяю себѣ далѣе утверждать, милостивые государи, что какъ бы мы ни старались усовершенствовать наши методы преподаванія, какъ бы мы ни старались приспособить наши программы къ современному уровню науки, какъ бы мы строго ни относились къ самимъ себѣ и къ учащимся, но до тѣхъ поръ, пока мы не дадимъ возможности учащемуся на извѣстной ступени его развитія сосредоточиться на небольшомъ циклѣ дисциплинъ, соотвѣтствующемъ его индивидуальному духовному складу, мы не достигнемъ у него той умственной зрѣлости и силы, которая необходима для успѣшнаго прохожденія высшей школы.

Авторъ настоящаго доклада около двадцати лѣтъ тому назадъ, послѣ внимательнаго ознакомленія на мѣстѣ съ постановкой преподаванія математики въ парижскихъ лицеяхъ, высказалъ въ стѣнахъ этого самаго Педагогическаго Музея, гостепріимно открывшаго намъ свои двери, свое убѣжденіе, что французская система спеціальныхъ математическихъ классовъ (тогда — classe de mathématiques élementaires et de mathématiques spéciales, по теперешнему обозначенію — classe de mathématiques et classe de mathématiqes spéciales) наилучшимъ образомъ обезпечиваетъ математическую подготовку поступающихъ въ высшія спеціальныя школы.

За истекшія двадцать лѣтъ и собственный опытъ преподаванія, и продолжительное наблюденіе за преподаваніемъ въ одной изъ высшихъ спеціальныхъ школъ, и соображенія теоретическія только укрѣпили во мнѣ высказанное въ то время убѣжденіе. Разница, однако, большая между тѣмъ моментомъ и теперь. Тогда я увлекался единственно тою мыслью, что только при французской системѣ, какъ я старался показать, есть мѣсто въ средней школѣ для дѣйствительной культуры элементарной математики. Теперь я защищаю свое положенія не только въ интересахъ преподаванія математики, но и въ интересахъ общеобразовательнаго курса средней школы вообще, въ интересахъ духовнаго здоровья нашей молодежи въ тѣ критическіе годы ея развитія, когда она стоитъ на распутьи, и когда вопросъ самоопредѣленія, вопросъ „выбора факультета“ является для нея роковымъ и часто опредѣляющимъ неправильно и сумбурно все будущее индивидуума.

Мое утвержденіе, что культура элементарной математики находится во Франціи въ наиболѣе благопріятныхъ условіяхъ, подкрѣпляется въ настоящее время рядомъ новыхъ данныхъ. На этихъ дняхъ вы изволили выслушать, милостивые государи, глубоко интересный докладъ М. Г. Попруженко о введеніи анализа безконечно малыхъ въ курсъ средней школы, объ актѣ, который докладчикъ назвалъ однимъ изъ важнѣйшихъ культурныхъ пріобрѣтеній школы XX вѣка. Докладчикъ справедливо указалъ, что инициатива этого введенія принадлежитъ французской математической школѣ. Переходя далѣе къ оцѣнкѣ учебной литературы, по этому предмету М. Г. Попруженко отдалъ рѣшительное предпочтеніе французскимъ учебникамъ передъ нѣмецкими. Оно и понятно: при французской системѣ есть возможность дать строгое научное изложеніе на своемъ мѣстѣ (Bourlet) и заложить основныя идеи при преобладаніи психологическихъ моментовъ надъ логическими — на своемъ (Borel). Профессоръ Клейнъ точно также указываетъ своимъ соотечественникамъ на примѣръ учебной литературы зарейнскихъ сосѣдей. Не подлежитъ сомнѣнію, что и обратное вліяніе тоже велико. Двадцать лѣтъ тому назадъ преподаватели французскихъ лицеевъ совсѣмъ не занимались вопросами методики преподаванія, и органъ, посвященный этимъ вопросамъ, журналъ „l'Enseignement mathématique" праздновалъ въ прошломъ году лишь десятилѣтіе своего существованія. Чѣмъ объяснить такое равнодушіе? Я объясняю его ничѣмъ инымъ, какъ полной обезпеченностью собственно математическаго преподаванія и математической подготовки при наличности спеціальныхъ математическихъ классовъ. Мы знаемъ, однако, что за послѣднее десятилѣтіе, когда интересъ къ общепедагогическимъ вопросамъ во Франціи значительно поднялся, общеобразовательный курсъ математики подвергся у нихъ тщательной переработкѣ.

Возвращаюсь къ основной мысли моего доклада и къ практическимъ изъ нея выводамъ. Я полагаю, что на высшей ступени средней школы нужно дать молодымъ людямъ возможность углубиться въ ту область идей, къ которой они намѣрены приложить свои силы въ высшей школѣ. Эта мысль при ея осуществленіи на практикѣ должна быть проведена не только по отношенію къ будушимъ слушателямъ математическаго отдѣленія физико-математическаго факультета и высшихъ техническихъ школъ, но и по отношенію къ будущимъ натуралистамъ, медикамъ, юристамъ и филологамъ съ соотвѣтствующими, конечно, модификаціями. Для полнаго развитія моей мысли и иллюстраціи ея практическими предложеніями потребовался бы докладъ несравненно большаго объема, чѣмъ тотъ, который я могу предложить вашему вниманію. Соотвѣтственно задачамъ нашего Съѣзда и предѣламъ нашей компетенціи я могу говорить теперь только о желательности математическихъ классовъ, какъ вѣнца зданія средней школы для тѣхъ ея учащихся, которые ищутъ высшаго математическаго или построеннаго на высшей математикѣ высшаго техническаго образованія. Предложеніе мое затрагиваетъ, однако, и общій для всѣхъ, независимо отъ выбора специальности, курсъ средней школы въ двухъ развѣтвленіяхъ. Во первыхъ, возникаетъ вопросъ, съ какого класса начать раздѣленіе на специальности. Во вторыхъ, естественно возникаетъ вопросъ объ объемѣ и характерѣ курса математики въ общихъ классахъ при существованіи специальныхъ математическихъ классовъ. Какъ тотъ, такъ и другой вопросы требуютъ, конечно, всесторонней и тщательной разработки и въ настоящемъ докладѣ не только не могутъ быть исчерпаны, но не могутъ даже быть въ общихъ чертахъ намѣчены: если основная мысль будетъ признана правильной, то эти вопросы должны пройти черезъ горнило коллективной педагогической мысли, чтобы освободиться отъ шлаковъ субъективизма. Сдѣлаю по этому поводу только два замѣчанія. При разработкѣ обоихъ вопросовъ педагоги не будутъ стоять передъ tabula rasa, на которой имъ придется писать результаты одного педагогическаго творчества и вдохновенія. Пособіемъ, но отнюдь не обязательнымъ руководствомъ, будетъ служить тщательно разработанная и проведенная уже въ жизнь французская система средняго образованія. Второе замѣчаніе существенно связано съ моими дальнѣйшими разсужденіями и касается вопроса о продолжительности курса средней школы. Французская система средней школы строитъ два математическихъ класса на фундаментѣ шести общихъ, не считая приготовительныхъ. У насъ повидимому имѣется тенденція къ установленію такой же продолжительности, т. е. восьмилѣтней, для курса средней школы съ уравненіемъ ея для гимназій и реальныхъ училищъ. Я лично сочувствую тому, чтобы продолжительность эта не возрастала, и чтобы общій курсъ можно было помѣстить въ 6 классахъ. Допуская, однако, то, необходимость чего я лично не предусматриваю безусловно, т. е. что общій курсъ потребуетъ для себя не шести, а семи классовъ, и что продолжительность курса средней школы возрастетъ до 9 лѣтъ по примѣру германской, я позволяю себѣ утверждать, что продолжительность пребыванія въ средней и высшей школѣ въ совокупности отъ этого все таки не возрастетъ, а имѣетъ даже шансы на сокращеніе сравнительно съ существующей. Къ этому убѣжденію приводятъ меня данныя о продолжительности пребыванія студентовъ въ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ. Студенты, которые оканчиваютъ курсъ высшей школы въ число лѣтъ, опредѣленное нормальнымъ учебнымъ планомъ, составляютъ исключеніе. При другомъ уровнѣ и характерѣ подготовки это должно измѣниться, такъ какъ облегчится и упорядочится задача какъ средней, такъ и высшей школы.

Послѣ этихъ двухъ замѣчаній позвольте пойти дальше и, чтобы не разбрасывать вниманія, pour fixer les idées, какъ говорятъ французы, позвольте предположить, что основная мысль моя осуществленна и математическіе классы существуютъ. Посмотримъ, что можетъ выиграть отъ этого математическое преподаваніе въ средней школѣ, и что дастъ этотъ порядокъ высшей. Что, наконецъ, это дастъ для полезнаго взаимодѣйствія обѣихъ. Въ высшую ступень средней школы, въ математическіе классы, перейдетъ значительная и существенная часть элементовъ высшей математики въ ихъ вполнѣ научной формѣ и въ томъ приблизительно объемѣ, въ которомъ они нынѣ читаются на обязательныхъ лекціяхъ двухъ первыхъ годовъ учебнаго плана высшихъ техническихъ школъ и отчасти математическаго факультета университета. Не поставленныя въ положеніе воюющей державы, въ какомъ эти элементы находятся въ средней девятилѣтней школѣ германскаго типа по отношенію къ равноправнымъ гуманитарнымъ наукамъ и естествознанію, и во всѣхъ высшихъ нашихъ и германскихъ спеціальныхъ школахъ по отношенію къ техническимъ предметамъ, они могутъ вылиться въ ту строгую, изящную и чарующую форму, въ которую они намъ знакомы уже давно, на современномъ уровнѣ науки по классическимъ руководствамъ, предназначеннымъ для classe de mathématiques élementaires и classe de mathématiques spéciales, руководствамъ, находящимся всегда въ соотвѣтствіи съ консолидированнымъ уровнемъ современной науки. Ученики средней школы, находясь еще въ общихъ классахъ, будутъ знать о существованіи этой науки въ своихъ же стѣнахъ, будутъ оріентированы до нѣкоторой степени въ ея розахъ и шипахъ, а перейдя въ самые математическіе классы, будутъ имѣть возможность испытать свои умственныя силы и вкусы на серьезной и трудной работѣ, условія которой существенно отличны отъ условій работы на младшихъ курсахъ высшей школы. Преподавательскій персоналъ средней школы можетъ тогда совершенно иначе осмыслить и провести въ жизнь тотъ запасъ математическихъ идей, который мы считаемъ нужнымъ сдѣлать уже общимъ достояніемъ, которымъ долженъ быть проникнутъ курсъ общихъ классовъ. Въ то же время этотъ преподавательскій персоналъ не будетъ обреченъ на одну популяризацію математическихъ идей, на одну пропедевтику, а будетъ работать надъ изложеніемъ и усвоеніемъ ихъ въ строго научной формѣ, почерпая изъ этого источника и постоянное живое общеніе съ наукой и путеводную нить для построенія общаго курса. Пропасть между средней и высшей школами будетъ заполнена, и заполнена такъ, что откроется широкая дорога для дѣйствительныхъ талантовъ, весьма часто гибнущихъ въ сумбурѣ школьнаго строя. Упомянутая пропасть существуетъ не только у насъ. На нее, какъ вамъ извѣстно, сѣтуетъ и профессоръ Клейнъ, который на ея заполненіе посвятилъ уже болѣе двадцати лѣтъ упорнаго труда. Мнѣ представляется, что эта перспектива и при томъ не гипотетическая, а имѣющая себѣ уже подтвержденіе въ вѣковомъ опытѣ, должна встрѣтить только сочувствіе преподавателей математики какъ съ общепедагогической, такъ и со спеціально математической и, наконецъ, съ бытовой точки зрѣнія. Рѣчь идетъ о томъ, чтобы зажечь свѣточъ нашей науки не только въ сравнительно немногихъ университетскихъ городахъ, но и въ многочисленныхъ темныхъ и отдаленныхъ углахъ нашего отечества. Что можетъ дать этотъ порядокъ для высшей технической школы, для университета? Онъ можетъ, я думаю, освободить эти учрежденія отъ тѣхъ задачъ, которыя имъ несвойственны и справляться съ рѣшеніемъ которыхъ имъ всегда труднѣе. Онъ дастъ имъ совершенно иначе подготовленный и дѣйствительно зрѣлый, сознательный контингентъ слушателей, который можетъ быть прямо поставленъ in medias res, въ самую суть спеціальной работы безъ всякихъ прелиминарій, которыя теперь являются источникомъ массы огорченій. Не нужно думать, чтобы эти огорченія составляли нашу русскую особенность, частное проявленіе нѣкоторой неустойчивости нашего жизненнаго уклада. Въ исторіи преподаванія математики въ высшихъ спеціальныхъ школахъ Германіи мы встрѣчаемся съ тѣмъ же явленіемъ, которое получило тамъ даже терминъ Anti-Mathematik-Bewegung — противо-математическое движеніе. Это настоящая война спеціальныхъ техническихъ предметовъ съ чистой математикой на почвѣ черезполосности изъ общей территоріи. Учащіеся спеціальныхъ высшихъ техническихъ школъ имѣютъ вездѣ опредѣленныя утилитарныя тенденціи, и о томъ, какъ нелегко впречь ихъ въ оглобли строгой математической подготовки, могутъ вамъ пересказать многое присутствующіе здѣсь профессора. Я не боюсь впасть въ преувеличеніе, если скажу, что огромнее большинство студентовъ техниковъ въ этой области стараются какъ можно меньшему научиться и какъ можно основательнѣе позабыть выученное. Отсюда и Anti-Mathematik-Bewegung, въ которомъ студенты нашли союзниковъ въ профессорахъ-техникахъ и которое послужило въ Германіи толчкомъ къ возможной конкретизаціи математическаго преподаванія, къ возможно тѣсному сліянію его съ преподаваніемъ техническимъ путемъ постоянныхъ экскурсій въ область приложеній. Я лично не думаю, чтобы это само по себѣ полезное и плодотворное въ дидактическомъ смыслѣ направленіе могло существенно помочь злу, основы котораго я старался формулировать въ началѣ доклада. Основаніемъ аналитической геометріи, основаніемъ анализа со включеніемъ техники дифференцированія и интегрированія функцій и даже нѣкоторыхъ случаевъ интегрированія уравненій, основаніямъ аналитической механики, основаніямъ начертательной геометріи гораздо лучше можно научить въ математическихъ классахъ, чѣмъ на первыхъ двухъ курсахъ высшей школы при наличности той черезполосности, которая въ нихъ неизбѣжно существуетъ, и при условіи соотвѣтственной подготовки преподавателей. Если система, предлагаемая мною, будетъ проведена съ достаточной планомѣрностью и осмотрительностью (а безъ этихъ свойствъ никакая, самая стройная система не можетъ имѣть успѣха), то органически должна улучшиться и научная подготовка преподавателей средней школы. Эта послѣдняя страдаетъ у насъ отъ той же причины, которую профессоръ Клейнъ мѣтко охарактеризовалъ системой двойного забвенія: сначала, поступивъ въ высшую школу, ты долженъ забыть все, чему тебя учили въ средней; потомъ, поступивъ преподавателемъ въ среднюю, ты долженъ забыть все, чему научился въ высшей. Уничтоженіе искусственной пропасти, создавшейся между математикой средней и высшей школы, уничтоженіе вредной черезполосности, образовавшейся въ пограничныхъ областяхъ обѣихъ, созданіе свободной территоріи, на которой могла бы мысль учащаго и учащагося безпрепятственно углубиться въ величайшія созданія человѣческаго творчества, — вотъ то, чего я ожидалъ бы отъ принятія и проведенія въ жизнь защищаемыхъ мною положеній.

Я скажу еще нѣсколько словъ относительно одного возраженія, которое можетъ быть мнѣ сдѣлано, относительно опасеній ранней спеціализаціи и сокращенія общеобразовательнаго курса. Милостивые государи, наши дѣды специализировались въ гораздо болѣе раннемъ возрастѣ, и право это было не худо. Не слѣдуетъ забывать, что ранняя специализацiя нашихъ дѣдовъ происходила при условiяхъ, когда общее теченiе жизни давало гораздо менѣе стимуловъ и матерiала для поднятiя и развитiя общаго кругозора, когда не было того развитiя общественной и политической жизни, какое мы имѣемъ теперь. Не будемъ же бояться этой не ранней, а своевременной специализацiи, при которой мы дѣйствительно научимъ нашу молодежь настоящему дѣлу и дадимъ ей возможность полюбить нашу науку.

Еще одно возраженiе, которое я могу предвидѣть. Тѣ, кто разочарованъ въ нашей средней школѣ и предубѣжденъ противъ нея, могутъ высказать опасенiе, что, вручая средней школѣ обученiе основамъ высшей математики, университеты и высшiя техническiя школы разрушатъ свой фундаментъ и будутъ строить свое зданiе на пескѣ. Такiе голоса раздаваться будутъ. Позвольте обратить ваше вниманiе на то, что французская наука и французская техника не производятъ впечатлѣнiя зданiй, имѣющихъ тенденцiю рухнуть. Позвольте сказать, что то, что я осмѣливаюсь предложить, диктуется естественнымъ ходомъ историческаго процесса въ строѣ школы. Прошу васъ развернуть очень старую, но вѣчно юную книгу Lacroix. „Essay sur l'enseignement en général et celui des mathématiques en particulier", вышедшую въ началѣ XIX вѣка. Изъ нея вы узнаете, что въ расписанiи лекцiй прусскихъ университетовъ въ началѣ прошлаго столѣтiя значатся лекцiи по элементарной математикѣ — алгебрѣ, геометрiи, тригонометрiи. Германскiй университетъ ввѣрилъ затѣмъ эти дисциплины средней школѣ и не разрушился. Правда, онъ жалуется теперь на „систему двойного забвенiя", но вѣдь я именно отъ этой системы предостерегаю. Теперь наступилъ моментъ, когда пора сдѣлать то же съ новой совокупностью математическихъ идей, знанiй и навыковъ, но сдѣлать это такъ, какъ сдѣлано было сто лѣтъ назадъ, уже нельзя, не нарушая емкости общеобразовательнаго курса. Отсюда — необходимость созданiя нейтральной территорiи — специальныхъ математическихъ классовъ.

Если бы мы создали такiе классы, то спрашивается, какое мѣсто заняли бы они формально въ iерархической лѣстницѣ учебныхъ заведенiй? Я понимаю это такъ, что окончанiе шести или, если бы это оказалось необходимымъ, семи общеобразовательныхъ классовъ должно дать всѣ права окончанiя курса средней школы, кромѣ права поступленiя въ высшую. Желающiй поступить на математическое отдѣленiе физико-математическаго факультета, или въ высшую техническую школу, долженъ пройти два специальныхъ математическихъ класса.

Въ заключенiе позвольте, милостивые государи, принести извиненiе уважаемымъ членамъ Съѣзда, въ томъ, что спѣшность составленiя доклада, явившагося для меня нѣкоторой неожиданностью, не позволила мнѣ дать ему ту полноту и обработку, которую заслуживала бы избранная мною тема. Помимо тѣхъ пробѣловъ, которые мнѣ могутъ указать, я вижу многiе самъ, а одинъ въ особенности:

мнѣ слѣдовало бы предпослать настоящему докладу другой съ подробнымъ очеркомъ французской системы средняго образованія, остановиться на подробностяхъ программы. Если окажется, что основныя мысли моего доклада вызовуть интересъ и не пройдутъ незамѣченными, я постараюсь при соотвѣтственномъ случаѣ восполнить этотъ существенный пробѣлъ. Восполнить его тѣмъ болѣе для меня обязательно, что я отнюдь не являюсь слѣпымъ поклонникомъ французской школы вообще, и взялъ примѣръ ея только, какъ иллюстрацію педагогическихъ принциповъ, которымъ, какъ мнѣ кажется, мы поклоняемся въ теоріи и которые нарушаемъ на дѣлѣ.

Функціональное исчисленіе.

Ж. Гадамара.

Изобрѣтеніе исчисленія безконечно малыхъ представляетъ собой не одно только усовершенствованіе математическихъ методовъ: оно внесло коренное измѣненіе въ самое направленіе математической мысли.

Для греческой науки всякая проблема сводилась къ разысканію одного или нѣсколькихъ чиселъ, вполнѣ, хотя и неявно, опредѣляемыхъ данными задачи. Правильность этого опредѣленія очевидна по отношенію къ проблемамъ ариѳметики; но и въ области геометріи оно не менѣе правильно, такъ какъ фигуры, составлявшія предметъ изслѣдованія древнихъ (точки, прямыя, плоскости, круги и т. д.), зависѣли каждая отъ конечнаго и даже отъ очень небольшого числа параметровъ.

Изучить соотношенія между нѣкоторыми числами, которыя остаются неизмѣнными въ теченіе всего разсужденія, а также научиться пользоваться этими соотношеніями для того, чтобы вычислить одни изъ этихъ чиселъ, когда другія предполагаются данными, — вотъ какія цѣли ставили себѣ вплоть до XVII-го вѣка какъ „Новая Алгебра“ (Algèbre des Modernes), по терминологіи Декарта, такъ и „Анализъ древнихъ“.

Даже примѣръ тѣхъ древнихъ геометровъ, которые были предшественниками современнаго исчисленія безконечно малыхъ, — Евдокса и Архимеда, — не оказалъ, въ этомъ смыслѣ, никакого дѣйствія на ихъ прямыхъ преемникахъ.

Въ дѣйствительности математика вышла изъ сферы античной геометріи и получила новое оружіе лишь тогда, когда такіе люди, какъ Кавальери (Cavalieri), Ферма (Fermat), Роберваль (Roberval), Паскаль (Pascal) и другіе, вдохновляемые примѣромъ названныхъ геометровъ, въ свою очередь стали разсматривать непрерывное измѣненіе извѣстныхъ числовыхъ элементовъ (или, что, въ сущности, одно и то же, извѣстныхъ геометрическихъ элементовъ), связанныхъ между собой, и заложили основы того зданія, завершить которое суждено было Ньютону и Лейбницу.

Правда, въ ихъ рукахъ введеніе этихъ совмѣстныхъ измѣненій давало мѣсто проблемамъ, аналогичнымъ по формѣ съ тѣми задачами, которыми математики занимались и раньше; я имѣю въ виду опредѣленіе извѣстныхъ ариѳметическихъ или геометрическихъ постоянныхъ: таковы задачи на minima и maxima, задачи о площадяхъ и т. д.

Но этотъ періодъ долженъ былъ очень скоро закончиться; онъ составлялъ начало той эволюціи, которая не переставала съ тѣхъ поръ идти все въ томъ же направленіи; дальше мы увидимъ, что она продолжается еще и по сей день.

Тѣ совмѣстныя измѣненія, или, какъ мы говоримъ теперь, тѣ функціи, на которыхъ сосредоточили свое вниманіе указанные выше авторы, были, въ сущности, не новы: свое опредѣленіе онѣ получали на основаніи тѣхъ самыхъ проблемъ и фигуръ, которыя изучали древніе, или же изъ проблемъ, мало отъ нихъ отличныхъ. Во всякомъ случаѣ, это опредѣленіе было извѣстно a priori*).

Иначе обстояло дѣло, когда новыя понятія, выведенныя изъ понятія о функціи, доказали свою крайнюю общность, когда они оказались, по существу, тождественными для всѣхъ извѣстныхъ функцій, по поводу которыхъ ихъ ввели**); тогда увидѣли возможность, а вслѣдъ за тѣмъ и необходимость примѣненія ихъ къ совершенно новымъ обстоятельствамъ — къ неизвѣстнымъ законамъ совмѣстнаго измѣненія.

Аналитическая геометрія сама по себѣ требовала этого. Въ томъ, что линія или поверхность имѣетъ свое собственное существованіе, въ томъ, что сама она могла быть неизвѣстной, а не быть непремѣнно данной въ какой нибудь проблемѣ — во всемъ этомъ не было ничего удивительнаго. Но, вѣдь, „линія" или „поверхность" для аналитической геометріи — синонимъ „совмѣстнаго измѣненія".

Но физическія приложенія не только показали законность этой новой точки зрѣнія, къ которой исчисленіе безконечно малыхъ впервые привело; они, болѣе того, не позволили наукѣ оставить ее въ сторонѣ. Съ тѣхъ поръ, какъ стали подробно изучать движеніе и на его законахъ строить всю физику, оказалось, что при изученіи природы нельзя больше считать единственной индивидуальностью, единственнымъ предметомъ изслѣдованій опредѣленное число или его геометрическіе эквиваленты (точку, прямую, кругъ, ...).

---

*) Авторъ хочетъ сказать этимъ, что названнымъ математикамъ не приходилось создавать какого нибудь новаго опредѣленія функціональной зависимости, такъ какъ они изслѣдовали только тѣ зависимости, какія встрѣчались въ старыхъ проблемахъ.

**) Авторъ имѣетъ въ виду образованіе производныхъ и интеграловъ отъ данныхъ функцій.

Пер.

— Однимъ словомъ, математическимъ бытіемъ перестало служить число: имъ сталъ законъ измѣненія или функція.

Математика не только обогатилась новыми методами, — она подверглась преобразованію въ своемъ существѣ.

* *
*

Это преобразованіе не совершилось сразу до конца. Выше мы воспользовались языкомъ современнаго анализа и разсматривали слово „функція", какъ переводъ словъ „совмѣстное измѣненіе". Но, какъ извѣстно, новое понятіе представлялось первымъ математикамъ, введшимъ его въ употребленіе, не совсѣмъ въ такомъ видѣ. Тогда знали нѣсколько способовъ вычисленія, приложимыхъ къ числамъ и позволяющихъ выводить одни числа изъ другихъ; таковы классическія дѣйствія ариѳметики, розысканіе показательной функціи и логариѳма, переходъ отъ дуги къ ея тригонометрическимъ линіямъ и т. д Такъ, напримѣръ, для Ивана Бернулли (J. Bernoulli) и даже для Эйлера (Euler) функціей была произвольная комбинація нѣкоторыхъ изъ этихъ дѣйствій, производимыхъ надъ однимъ или нѣсколькими произвольными числами.

Такое пониманіе, въ общемъ, замаскировывало для анализа тотъ скачекъ, который онъ вынужденъ былъ сдѣлать, и позволяло ему, такъ сказать, продолжать стоять одной ногой на томъ берегу, который онъ долженъ былъ покинуть. Тѣ операціи, которыя служили для опредѣленія неизвѣстной функціи, могли отличаться, съ одной стороны, своимъ числомъ и порядкомъ, а съ другой стороны — тѣми постоянными коэффиціентами, которые входили въ нихъ. Такимъ образомъ нахожденіе функціи данной природы сводилось къ опредѣленію извѣстнаго числа постоянныхъ*). Между поставленнымъ такимъ образомъ вопросомъ и вопросомъ о нахожденіи трехъ параметровъ, служащихъ для опредѣленія плоскости, напримѣръ, или круга на данной плоскости, ассимиляція была возможна. Единственное затрудненіе новаго рода заключалось въ томъ, чтобы выбрать изъ арсенала извѣстныхъ операцій тѣ, которыя могли найти примѣненіе въ томъ или иномъ случаѣ.

Иначе стало обстоять дѣло, когда въ рукахъ Фурье (Furier), Дирихле (Dirichlet), Коши (Cauchy), Римана (Riemann) понятіе о функціи пріобрѣло свой современный смыслъ. Функція $y = f(x)$ уже не является выраженіемъ, которое получается непремѣнно съ помощью извѣстнаго числа операцій, взятыхъ въ томъ или иномъ порядкѣ: функціей съ этихъ поръ считаютъ любое соотвѣтствіе, установленное между каждымъ значеніемъ, какое только можно приписать перемѣнному количеству x, и нѣкоторымъ значеніемъ y, которое предполагается опредѣленнымъ, лишь только дано первое значеніе (т. е. значеніе перемѣнной x); но при этомъ ничто не обязываетъ примѣнять

*) Такъ опредѣленіе цѣлой алгебраической функціи сводится къ установленію ея коэффиціентовъ.

для этой цѣли одни какіе нибудь способы опредѣленія предпочтительно передъ другими.

На этотъ разъ, новая тенденція въ наукѣ не могла не сопровождаться полнымъ самопониманіемъ. Опредѣлить произвольную функцію это значитъ опредѣлить ея значеніе для каждаго значенія перемѣнной x; если предположить, что эту функцію изображаетъ нѣкоторая линія, то эта линія, въ свою очередь, имѣетъ произвольную форму и является опредѣленной лишь тогда, когда извѣстны всѣ ея точки. Знаніе функціи или кривой равносильно, поэтому, не знанію нѣсколькихъ опредѣленныхъ чиселъ, а знанію безконечнаго множества чиселъ. Такую именно постановку приходилось давать новымъ проблемамъ.

При всемъ томъ между прежнимъ пониманіемъ функціи и новымъ существовалъ переходъ, позволявшій сравнить тѣ условія, въ которыхъ математическая мысль находилась прежде и теперь. Число операцій, которыя разсматривалъ Эйлеръ, и число входившихъ въ нихъ постоянныхъ можно было взять неопредѣленно большимъ. Но если воспользоваться этой возможностью, то оба пониманія функціи оказываются практически равнозначащими, хотя и не имѣютъ, какъ мы теперь знаемъ, вполнѣ одинаковой степени общности. Существовало, между прочимъ, два выраженія, позволявшихъ представить въ сходной формѣ самыя разнообразныя функціи. Однимъ изъ нихъ является рядъ Тэйлора, другимъ — рядъ Фурье. Первое изъ этихъ выраженій является болѣе частнымъ и, въ виду этого, во многихъ случаяхъ оказывается недостаточнымъ; но классъ аналитическихъ функцій, обнимаемый рядомъ Тэйлора, содержитъ не только всѣ комбинаціи, какія только первые аналисты могли себѣ представить, но также рѣшенія всѣхъ тѣхъ проблемъ, которыя они себѣ ставили. Что же касается тригонометрическихъ рядовъ*) съ которыми мы продолжаемъ связывать имя Фурье, то можно сказать, что они способны дать опредѣленіе, если и не всѣхъ возможныхъ функцій, то во всякомъ случаѣ всѣхъ тѣхъ функцій, какія только можетъ понадобиться вводить на практикѣ.

Такимъ образомъ снова пришли къ опредѣленію выраженій заранѣе извѣстнаго типа, такъ что отысканіе ихъ сводилось къ нахожденію фигурирующихъ въ нихъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ; но только на этотъ разъ число этихъ коэффиціентовъ было безконечно

*) Тригонометрическими рядами называются разложенія слѣдующаго вида:

$$f(x) = A_0 + A_1 \cos x + B_1 \sin x + A_2 \cos 2x + B_2 \sin 2x + \cdots +$$
$$+ A_n \cos nx + B_n \sin nx + \cdots,$$

гдѣ A_0, A_1, B_0, ..., означаютъ постоянные коэффиціенты. Подробнѣе о нихъ см. Ф. Клейнъ „Вопросы элементарной и высшей математики" I. Одесса. „Mathesis" 1912. Замѣтимъ, что въ третьемъ отдѣлѣ этой книги подробно развиты всѣ идеи, намѣченныя въ настоящей статьѣ.

Пер.

велико. Однако, такая безконечность не была непрерывной, какими являются безконечности, образуемыя всѣми значеніями какой нибудь функціи или всѣми точками какой нибудь кривой. Это было то, что мы теперь называемъ исчислимой*) безконечностью, ибо всѣ неизвѣстные коэффиціенты были перенумерованы. Они соотвѣтствовали значеніямъ индекса, который пробѣгалъ рядъ всѣхъ цѣлыхъ чиселъ. При этихъ условіяхъ послѣдовательное вычисленіе коэффиціентовъ оказывалось настолько сходнымъ съ вычисленіемъ конечнаго числа количествъ, насколько это вообще возможно.

* *
*

Достаточно резюмировать послѣдовательные этапы той эволюціи, картину которой мы только что набросали, чтобы предугадать ея логическое продолженіе.

Числа, разсматриваемыя сперва, какъ извѣстныя и постоянныя, подвергаются различнымъ операціямъ алгебраическаго исчисленія. Затѣмъ научаются смотрѣть на нихъ, какъ на неизвѣстныя, и выбирать ихъ такимъ образомъ, чтобы эти самыя операціи, будучи выполненъ надъ этими неизвѣстными, давали результаты, указанные заранѣе.

Наконецъ, эти числа разсматриваютъ, какъ измѣняющіяся непрерывнымъ образомъ и приходятъ въ концѣ концовъ къ понятію о функціи.

Функцію, въ свою очередь, подвергаютъ не только операціямъ алгебраическаго исчисленія, но также основнымъ операціямъ исчисленія безконечно-малыхъ. И вотъ, какъ мы уже говорили, существованіе этихъ двухъ важныхъ операцій, приложимыхъ къ самымъ разнообразнымъ функціямъ, и приводитъ къ тому, что съ функціей начинаютъ поступать такъ, какъ до тѣхъ поръ поступали съ числомъ.

Съ этой точки зрѣнія, дифференціальныя уравненія и уравненія въ частныхъ производныхъ представляютъ настоящіе аналоги обыкновенныхъ алгебраическихъ уравненій, которыми опредѣляютъ числа. Неизвѣстная функція подвергается операціямъ дифференцированія,— и вотъ именно результатъ этихъ операцій, произведенныхъ въ опредѣленномъ порядкѣ, и долженъ имѣть напередъ заданное значеніе.

Но до сихъ поръ мы все еще разсуждаемъ относительно нѣкоторой вполнѣ опредѣленной функціи, даже тогда, когда она намъ неизвѣстна. Больше того, — ее подвергаютъ операціямъ вполнѣ опредѣленнаго типа, а именно операціямъ алгебраическаго исчисленія и исчисленія безконечно малыхъ; при этомъ до самыхъ послѣднихъ лѣтъ въ тѣхъ случаяхъ, когда операціи должны быть произведены надъ

*) Совокупность, состоящая изъ безконечнаго числа элементовъ, называется исчислимой, если всѣ ея элементы можно расположить въ одинъ рядъ, такъ что всякому элементу будетъ отвѣчать опредѣленный номеръ, показывающій его мѣсто въ ряду. Подробнѣе объ этомъ см. въ той же книгѣ Клейна.

Пер.

неизвѣстными функціями, примѣнялись однѣ только операціи дифференціальнаго исчисленія.

Если мы пожелаемъ идти, по отношенію къ функціямъ, дальше по тому самому пути, какой мы уже прошли, исходя отъ чиселъ, то намъ остается:

1-е. Разсматривать функцію не какъ разъ на всегда выбранную, но какъ непрерывно измѣняющуюся;

2-е. Подвергнуть ее не только двумъ или тремъ опредѣленнымъ операціямъ, но также болѣе или менѣе произвольнымъ операціямъ.

Вѣтвь математики, объектъ которой опредѣленъ такимъ образомъ, и есть то, что теперь называютъ „функціональнымъ исчисленіемъ".

Изъ предыдущихъ разсужденій слѣдуетъ, что въ этой новой дисциплинѣ надо видѣть естественное продолженіе и результатъ самого исчисленія безконечно-малыхъ и того потока идей, который порожденъ имъ.

* *

*

Но то, что сказано выше, не въ достаточной мѣрѣ доказываетъ полезность новой теоріи и важность посвящаемыхъ ей усилій *).

Для этого, дѣйствительно, недостаточно одной изъ тѣхъ аналогій, которыя слишкомъ часто украшаютъ именемъ логики. Разсужденія, подобныя приведеннымъ выше, могутъ, правда, наводить на тѣ или иныя идеи; но сами по себѣ они не позволяютъ утверждать, что эти идеи важны и плодотворны. Необходимо, чтобы проблемы, пришедшія извнѣ и выдвинутыя приложеніями, показали необходимость того движенія, о которомъ безъ этого можно только сказать, что оно, пожалуй, представляется уму натуральнымъ. Часто новая теорія при самомъ своемъ зарожденіи находитъ наилучшій случай доказать свое право на существованіе.

Такъ было и съ той теоріей, которая насъ теперь занимаетъ. Начиная съ конца XVII-го столѣтія, рядъ вопросовъ, обязанныхъ своимъ происхожденіемъ, главнымъ образомъ, механикѣ, — хотя первый изъ нихъ, а именно вопросъ о кратчайшемъ пути между двумя точками, былъ такъ же старъ, какъ и сама геометрія, — привелъ къ созданію первой главы функціональнаго исчисленія — такъ называемаго варіаціоннаго исчисленія.

---

*) Ничто не мѣшало бы, въ будущемъ, обобщить и функціональное исчисленіе подобно тому, какъ послѣднее является обобщеніемъ классическаго Анализа. Но ни одинъ математикъ не грезитъ о такомъ обобщеніи, такъ какъ ни одна существующая проблема не даетъ мѣста подобному изслѣдованію.

Авторъ.

Немного лѣтъ спустя, это исчисленіе поглотило не только нѣкоторые спеціальные вопросы механики, но даже всю аналитическую механику цѣликомъ(а позже и энергетику).

Дѣйствительно, рѣшеніе вопросовъ о равновѣсіи, а вслѣдъ за этимъ, благодаря принципу Даламбера и рѣшеніе вопросовъ о движеніи было сведено къ вопросамъ о максимумѣ и о минимумѣ. А съ другой стороны, многія изъ этихъ проблемъ (проблемы статики, относящіяся къ измѣняемымъ тѣламъ, и всѣ проблемы динамики) заключали въ себѣ, въ видѣ неизвѣстныхъ, функціи или линіи. Вопросы же о максимумахъ и минимумахъ количествъ, зависящихъ отъ произвольныхъ функцій, какъ разъ составляютъ предметъ варіаціоннаго исчисленія.

Такимъ образомъ, проблема подверглась преобразованію въ направленіи той самой эволюціи, о которой мы говорили выше. Вмѣсто того, чтобы разсматривать опредѣленную систему неизвѣстныхъ функцій и подвергать именно ее дифференцированію, для полученія тѣхъ дифференціальныхъ уравненій, которымъ должна удовлетворять упомянутая система функцій, эти неизвѣстныя функціи разсматривали, какъ произвольно измѣняющіяся.

Могло казаться, что это должно вести къ увеличенію трудности; однако, теперь установлено, что во всѣхъ изслѣдованіяхъ, относящихся къ разсматриваемымъ дифференціальнымъ уравненіямъ, идетъ ли рѣчь объ ихъ интегрированіи, или о качественномъ изученіи интегральныхъ кривыхъ (какъ въ извѣстныхъ работахъ Пуанкаре), или же наконецъ, о томъ, чтобы, переступивъ черезъ рамки классической механики, преобразовать ее съ цѣлью приспособленія къ новымъ потребностямъ физики, — всегда и вездѣ начало наименьшаго дѣйствія должно служить руководящимъ принципомъ. Благодаря этимъ открытіямъ варіаціонное исчисленіе, а вмѣстѣ съ нимъ и функціональное исчисленіе окончательно утвердились въ наукѣ.

* *
*

Проблемы ученій объ электричествѣ и теплотѣ не менѣе тѣсно связаны съ идеями функціональнаго исчисленія.

Напримѣръ, одна изъ основныхъ такихъ проблемъ, проблема Дирихле, состоитъ въ опредѣленіи рѣшенія классическаго уравненія Лапласа, когда предполагается извѣстнымъ распредѣленіе значеній искомой функціи на границѣ разсматриваемой области *).

---

*) Уравненіемъ Лапласа называютъ дифференціальное уравненіе въ частныхъ производныхъ 2-го порядка, имѣющее слѣдующій видъ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{(уравненіе Лапласа на плоскости)}$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{(уравненіе Лапласа въ пространствѣ).}$$

(Прод. см. на оборотѣ).

Здѣсь вводятся, слѣдовательно, какъ данныя:

1°. Форма линіи или поверхности, ограничивающей часть плоскости или пространства.

2°. Совокупность числовыхъ значеній (значеній искомой функціи), принадлежащихъ точкамъ этой линіи или поверхности.

Можно сказать, что рѣшеніе этой проблемы получается при помощи извѣстныхъ функціональныхъ операцій, производимыхъ надъ этими данными; такъ дѣйствительно, называютъ всякое вычисленіе, результаты котораго зависятъ отъ формы извѣстныхъ функцій.

Въ настоящемъ случаѣ данныя второго рода (значенія неизвѣстной функціи) входятъ простымъ образомъ: можно даже, при помощи одного классическаго пріема (употребленіе такъ называемой „функціи Грина“) сдѣлать такъ, что они не будутъ болѣе произвольны, но будутъ зависѣть только отъ двухъ или трехъ константъ (смотря по тому, оперируемъ ли мы на плоскости или же въ пространствѣ).

Иначе обстоитъ съ формой границы: она вліяетъ на вычисленіе глубокимъ и сложнымъ образомъ. Если считать, что функціональная операція прилагается къ одной только этой части данныхъ, — что возможно, благодаря функціи Грина, — то эта операція оказывается крайне сложной: ея природа оставалась почти неизвѣстной до самаго послѣдняго времени.

Если Нейманъ (Neumann) и Фредгольмъ (Fredholm) восторжествовали надъ этими затрудненіями и сумѣли не только доказать существованіе рѣшенія, но даже выяснить его зависимость отъ данныхъ, то они достигли всего этого, идя въ сущности какъ разъ по тому пути, который мы намѣтили выше. Для этого, прежде всего, надо было не убояться ввести такое уравненіе, въ которомъ неизвѣстная функція подлежитъ операціямъ, хотя уже и ранѣе употреблявшимся въ анализѣ, но отличнымъ отъ тѣхъ, какія фигурируютъ въ тѣхъ уравненіяхъ (обыкновенныхъ дифференціальныхъ или въ частныхъ производныхъ), которыя разсматривали до тѣхъ поръ. А именно, въ такомъ уравненіи неизвѣстная функція находится подъ знакомъ интеграла.

Проблема, о которой идетъ рѣчь, заключается въ опредѣленіи такой функціи $u(x, y)$ или $u(x, y, z)$, которая удовлетворяетъ уравненію Лапласа во всѣхъ точкахъ внутри даннаго замкнутаго контура или данной замкнутой поверхности и принимаетъ въ точкахъ самого контура или поверхности напередъ заданныя значенія. Значеніе этой проблемы для математической физики объясняется тѣмъ, что уравненію Лапласса $\Delta u = 0$ (такъ символически изображаютъ написанныя выше уравненія) удовлетворяетъ, напримѣръ, температура точекъ пластинки, находящейся въ тепловомъ равновѣсіи; этому же уравненію долженъ удовлетворять электрическій потенціалъ въ статическомъ полѣ и т. д.

Пер.

Съ другой стороны, чтобы рѣшить такое интегральное уравненіе*) Фредгольмъ становится на точку зрѣнія функціональнаго исчисленія: онъ замѣняетъ данное уравненіе системой уравненій первой степени подобныхъ тѣмъ, какія разсматриваетъ элементарная алгебра, но только содержащихъ безконечное число неизвѣстныхъ, представляющихъ послѣдующія значенія искомой функціи.

Замѣчательно при этомъ то, что разсматриваемыя съ такой точки зрѣнія, интегральныя уравненія Фредгольма представляются болѣе простыми, въ сущности, чѣмъ дифференціальныя уравненія, разсмотрѣніемъ которыхъ ограничивался до тѣхъ поръ анализъ. Здѣсь имѣетъ мѣсто то важное обстоятельство, что классъ операцій, которымъ подвергаютъ неизвѣстную функцію образуетъ группу; это значитъ, что можно комбинировать любыя двѣ (или нѣсколько) операцій этого рода и въ результатѣ всегда получается нѣкоторая третья операція той же природы, что и первыя двѣ; а это не имѣетъ мѣсто для лѣвыхъ частей дифференціальныхъ уравненій, если ограничиваться опредѣленнымъ порядкомъ ихъ.

Благодаря этому обстоятельству, рѣшеніе уравненія сводится къ образованію такой операціи, которая также принадлежитъ къ разсматриваемой категоріи и является обратной по отношенію къ той операціи, которая фигурируетъ въ лѣвой части уравненія.

Прибавимъ, что, еще раньше математической физики, теорія функцій дала поводъ къ примѣненію функціональнаго исчисленія. Дѣйствительно, теорія функцій фатально должна была придти къ этому. Невозможно было бы продолжать столь глубокія изслѣдованія, какими являются изслѣдованія предпринятыя въ нашемъ вѣкѣ относительно свойствъ аналитическихъ функцій, и бороться съ препятствіями, выдвигаемыми такимъ изученіемъ, если бы не старались, съ помощью подходящимъ образомъ подобранныхъ функціональныхъ преобразованій, перейти отъ простого къ сложному, отъ извѣстнаго къ неизвѣстному. И дѣйствительно, извѣстное число наиболѣе важныхъ результатовъ можно было установить только такимъ образомъ.

* *
*

---

*) Интегральными называются уравненія, въ которыхъ неизвѣстная функція находится подъ знакомъ интеграла; такъ какъ, однако, рѣшенія этого рода уравненій представляютъ почти непреодолимыя трудности, то въ настоящее время ограничиваются изученіемъ частнаго случая этого вида уравненій, къ которымъ естественно приводятъ задачи, о которыхъ говоритъ авторъ въ текстѣ; это суть уравненія такого вида:

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = \psi(x) \quad (0 \leqq x \leqq 1).$$

Здѣсь $\psi(x)$ и $K(x, y)$ означаютъ данныя непрерывныя функціи, $\varphi(x)$ есть искомая непрерывная функція, которую надо такъ опредѣлить, чтобы она удовлетворяла этому уравненію (въ промежуткѣ $0 \ldots 1$), λ — постоянная.

Пер.

Не смотря на то, что функціональное исчисленіе столь существенно важно для будущаго прогресса науки, — мы полагаемъ, что показали это выше, — огромныя трудности, связанныя съ нимъ, до сихъ поръ не выяснены, если не считать очень незначительнаго числа пунктовъ; и это — не смотря на то, что въ этой области работали такіе геометры, какъ Вольтерра (Volterra), Пинкерле (Pincherle), Бурле (Bourlet), Фреше (Fréchet), Муръ (Moore) и др.

Достигнутые до сихъ поръ результаты касаются, въ большинствѣ случаевъ, линейныхъ операцій. Этотъ случай подвергся преимущественной разработкѣ не только потому, что онъ проще, чѣмъ общій случай, но и потому, что онъ имѣетъ съ этимъ общимъ случаемъ важныя соотношенія, а именно тѣ самыя, которыя дифференціальное исчисленіе вскрыло для тѣхъ функцій, которыя обыкновенно разсматриваютъ въ анализѣ.

Для этихъ послѣднихъ, какими бы сложными онѣ не казались, когда ихъ изучаютъ въ конечной области, оказывается, что ихъ безконечно малое измѣненіе или дифференціалъ представляетъ линейное количество по отношенію къ дифференціаламъ независимыхъ перемѣнныхъ *).

Варіаціонное исчисленіе является по отношенію къ функціональнымъ операціямъ тѣмъ, чѣмъ дифференціальное исчисленіе является для функцій. Подобно послѣднему, варіаціонное исчисленіе доставляетъ для варіаціи количествъ, опредѣляемыхъ самыми простыми функціональными операціями, которыя представились на первыхъ порахъ, выраженія линейныя по отношенію къ варіаціямъ функцій, подчиняемыхъ этимъ операціямъ: Вольтерра научилъ распространять эти выраженія на гораздо болѣе общія операціи.

Но только здѣсь слово „линейный“ не имѣетъ болѣе того простого значенія, какое оно необходимо получаетъ, когда его прилагаютъ къ функціямъ конечнаго числа независимыхъ перемѣнныхъ. Когда говорятъ, что нѣкоторая функціональная операція линейна, то это значитъ только, что эта операція, будучи приложена къ суммѣ $f_1 + f_2$ двухъ функцій, даетъ всегда результатъ, равный суммѣ тѣхъ результатовъ, какіе получатся, если приложить ту же операцію послѣдовательно къ обоимъ слагаемымъ f_1 и f_2 **).

Если бы мы замѣнили въ этомъ опредѣленіи слова „функціональная операція“ и „функція“ соотвѣтственно словами „функція“ и

---

*) Авторъ имѣетъ въ виду равенство:

$$df(x_1 y_1 \cdots t) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \cdots + \frac{\partial f}{\partial t} dt.$$

Пер.

**) Если обозначимъ какую нибудь линейную операцію символовъ D, то всегда должно быть:

$$D(f_1 + f_2) = Df_1 + Df_2.$$

Пер.

„число“, то изъ него вытекало бы, что удовлетворяющая ему функція, предполагаемая непрерывной, отъ конечнаго числа перемѣнныхъ представляетъ по отношенію къ нимъ однородный многочленъ первой степени, разсматриваемый въ элементарной алгебрѣ *).

Въ функціональной области дѣло обстоитъ менѣе просто. Линейная операція, въ только что опредѣленномъ смыслѣ, можетъ принимать довольно разнообразныя формы. Одна изъ наиболѣе простыхъ такихъ операцій состоитъ въ томъ, чтобы разсматривать значеніе произвольной функціи или же одну изъ ея производныхъ при опредѣленномъ значеніи аргумента, входящаго въ эту функцію. Количество $f(a)$, гдѣ a есть данная постоянная, зависитъ отъ формы функціи f линейнымъ образомъ **). Другимъ количествомъ, удовлетворяющимъ тому же условію, является опредѣленный интегралъ:

$$\int_a^b f(x) K(x)\, dx,$$

каковы бы ни были функція $K(x)$ и постоянныя a и b ***).

Тѣ линейныя функціональныя операціи, къ которымъ приводитъ, какъ мы уже говорили, варіаціонное исчисленіе — по крайней мѣрѣ въ тѣхъ примѣрахъ, которые были изслѣдованы до сихъ поръ, — представляютъ комбинаціи символовъ только двухъ указанныхъ видовъ. Но въ настоящее время извѣстно, что этимъ не исчерпываются всѣ линейныя функціональныя операціи, если не пользоваться понятіемъ опредѣленнаго интеграла въ нѣсколько болѣе общихъ и сложныхъ условіяхъ, чѣмъ тѣ условія, при какихъ его обыкновенно разсматриваютъ.

Въ этихъ изслѣдованіяхъ въ области функціональнаго исчисленія, аналогично тому, какъ было въ предшествующихъ фазахъ изученія

---

*) Это слѣдуетъ изъ теоремы:

Если функція $f(x, y, z)$ непрерывна и всегда удовлетворяетъ уравненію называемому функціональнымъ:

$$f(x + x', y + y', z + z') = f(x, y, z) + f(x', y', z'),$$

то

$$f(x, y, z) = ax + by + cz,$$

гдѣ a, b, c — нѣкоторыя постоянныя числа. *Пер.*

**) Если f и φ — двѣ какія нибудь функціи и $F(x) = f(x) + \varphi(x)$, то, въ частности,

$$F(a) = f(a) + \varphi(a).$$ *Пер.*

***) Здѣсь функціональная операція, производимая надъ $f(x)$, состоитъ въ образованіи указаннаго интеграла. Линейность же этой операціи слѣдуетъ изъ очевиднаго равенства:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] K(x)\, dx = \int_a^b f_1(x) K(x)\, dx + \int_a^b f_2(x) K(x)\, dx.$$

Пер.

функцій, возможны двѣ упомянутыя выше точки зрѣнія, и дѣйствительно, каждая изъ нихъ была принята.

Первая точка зрѣнія состоитъ въ томъ, что полагаютъ, что функція, къ которой примѣняютъ операцію, опредѣляется совокупностью всѣхъ коэффиціентовъ ея разложенія либо въ рядъ Тэйлора, либо въ тригонометрическій рядъ. Этимъ пріемомъ пользовался между прочимъ, Пинкерле и его послѣдователи, прилагая его къ аналитическимъ функціямъ, для которыхъ первое разложеніе (т. е. рядъ Тэйлора) всегда приложимъ (если только начало и область разложенія выбраны надлежащимъ образомъ).

Но во многихъ случаяхъ оперируютъ, напротивъ, непосредственно надъ значеніями самой функціи. Такъ именно поступаютъ въ варіаціонномъ исчисленіи. Для полученія варіацій разсматриваемыхъ въ немъ выраженій нѣтъ необходимости прибѣгать непремѣнно къ какому либо разложенію въ рядъ, напротивъ, разъ эта варіація написана, Эйлеръ и Лагранжъ, варьируя индивидуально извѣстныя значенія неизвѣстной функціи и оставляя безъ перемѣны другія, выводятъ необходимыя и достаточныя условія максимума и минимума.

Изъ вполнѣ аналогичной точки зрѣній исходятъ, какъ мы сказали, тѣ вычисленія, съ помощью которыхъ Фредгольмъ рѣшаетъ свое интегральное уравненіе.

* *
*

Въ недавнее время пришли, однако, къ такому вопросу: не является ли необходимымъ нѣкоторое предварительное изслѣдованіе совершенно иной природы, прежде чѣмъ переходить къ изученію тѣхъ вопросовъ, о которыхъ мы говорили выше?

Чтобы показать необходимость такого предварительнаго изслѣдованія, воспользуемся снова нашимъ сравненіемъ съ обыкновенными функціями.

Предположимъ, для примѣра, что рѣчь идетъ о функціи одной перемѣнной x; эта перемѣнная предполагается произвольной по крайней мѣрѣ въ нѣкоторомъ промежуткѣ. Если имѣемъ функцію отъ двухъ перемѣнныхъ, то послѣднія можно разсматривать, какъ координаты точки, которая, напримѣръ, можетъ произвольно перемѣщаться внутри извѣстной части плоскости. Точка будетъ свободно подвижна въ нѣкоторомъ объемѣ, если функція зависитъ отъ трехъ перемѣнныхъ, и т. д. Однимъ словомъ, функція представляетъ количество, связанное съ положеніемъ точки, которая описываетъ линейное, поверхностное или пространственное протяженіе.

Если классическія понятія, относящіяся къ функціямъ, могли быть созданы безъ особеннаго труда, то объясняется это тѣмъ, что свойства непрерывныхъ протяженій, о которыхъ идетъ рѣчь были намъ уже раньше знакомы и казались очевидными, даже тѣ изъ нихъ, которыя, какъ мы теперь знаемъ, приводятъ къ непреодолимымъ трудностямъ, когда пытаются доказать ихъ съ помощью разсужденій.

За одни только послѣдніе годы канторовская теорія совокупностей обнаружила передъ нами, въ самомъ линейномъ континуумѣ, множество свойствъ и обстоятельствъ, о которыхъ мы раньше не имѣли ни малѣйшаго понятія.

Правда, эти особенныя обстоятельства дѣйствительно встрѣчаются въ нѣкоторыхъ главахъ теоріи функцій. Но ихъ не приходилось разсматривать съ самаго начала, когда эта теорія создавалась и это позволило ей развиваться.

Теперь мы можемъ понять, какое огромное затрудненіе встрѣчаетъ функціональное исчисленіе.

Оно находится въ такихъ же условіяхъ, въ какихъ находилась бы теорія функцій, если бы свойства континуума были совершенно неизвѣстны намъ.

Дѣйствительно, континуумъ функцій — другими словами, многообразіе, получаемое при непрерывномъ варіированіи функціи всѣми возможными способами, — не вызываетъ въ нашемъ умѣ никакого простого образа. Геометрическая интуиція ничему насъ не научаетъ, a priori, на его счетъ?

Мы вынуждены помочь этому невѣдѣнію и можемъ сдѣлать это только аналитическимъ путемъ, создавая особую главу теоріи совокупностей для примѣненія функціональнаго континуума.

Такое изслѣдованіе уже предпринялъ одинъ молодой геометръ, Фреше (Fréchet). Результаты, полученные имъ относительно этого новаго коптинуума, значительно разнятся отъ тѣхъ, къ которымъ мы привыкли въ обыкновенномъ пространствѣ. Такъ, напримѣръ, понятіе предѣла можно охарактеризовать различнаго рода свойствами; и вотъ оказывается, что эти свойства, будучи равносильны для нашего обыкновеннаго пространства, перестаютъ быть таковыми въ области функціональнаго континуума*).

*) Недавно опубликованныя работы Мура прокладываютъ мостъ между изслѣдованіями Фреше и тѣми, о которыхъ мы говорили выше. Исходя, какъ и Фреше, изъ функціональнаго континуума или даже изъ континуумовъ еще болѣе общаго типа, Муръ (при помощи необходимыхъ гипотезъ) прилагаетъ къ нимъ не только теорію совокупностей, но также основныя операціи исчисленія, какъ, напримѣръ, образованіе сходящихся рядовъ.

Съ другой стороны, функціональное исчисленіе получило весьма важныя усовершенствованія въ диссертаціи, защищаемой передъ парижскимъ университетомъ Полемъ Леви (Paul Lévy). Но принятое въ этой работѣ направленіе отлично отъ только что упомянутаго; оно исходитъ изъ точки зрѣнія Вольтерра и изъ соображеній, приведенныхъ выше на стр. 115 – 116.

Прим. автора.

Эти работы должны быть продолжены. Далеко не легкой задачей представляется вопросъ о томъ, какія обстоятельства будутъ имѣть мѣсто только въ болѣе сложныхъ случаяхъ, — подобно совершеннымъ, но не непрерывнымъ (parfaits non continus) совокупностямъ въ теоріи функцій, — и какія обстоятельства будутъ, напротивъ, представляться на каждомъ шагу.

Упомянутыя только что изслѣдованія быть можетъ болѣе другихъ способны дать намъ почувствовать, какія затрудненія должны мы встрѣтить въ функціональномъ исчисленіи. Но какъ бы велики они ни были, это исчисленіе имѣетъ столь жизненную важность для будущности анализа, что мы не можемъ отъ нихъ отказаться.

Первый Всероссійскій Съѣздъ преподавателей математики.

(Окончаніе).*

V. Обзоръ резолюцій Съѣзда.

Заканчивая въ № 554 отчетъ о Съѣздѣ, я обѣщалъ сдѣлать еще обзоръ резолюцій. Однако, приступая къ составленію этого послѣдняго обзора, я убѣдился, что далъ обѣщаніе нѣсколько поспѣшно. Чѣмъ больше вчитываешься въ резолюціи, тѣмъ больше убѣждаешься, что онѣ написаны съ достаточной опредѣленностью и нуждаются не въ комментаріяхъ, а въ разработкѣ.

Я ограничусь поэтому въ настоящей заключительной замѣткѣ только немногими указаніями.

Первыя двѣ резолюціи явно представляютъ собой дань, отданную реформистскимъ теченіямъ, — осторожное, но опредѣленное къ нимъ пріобщеніе. Конечно, какъ и во всѣхъ резолюціяхъ, разработка еще впереди. Четвертая резолюція поддерживаетъ тенденціи профессоровъ К. А. Поссе и В. Б. Струве, которыя на Съѣздѣ встрѣтили наибольшее сочувствіе. Ихъ доклады уже напечатаны въ «Вѣстникѣ» и намъ нѣтъ надобности къ нимъ возвращаться. Нѣсколько подробнѣе остановимся на 5-ой резолюціи, требующей, чтобы университетъ безъ ущерба для главнаго своего назначенія служить наукѣ и научному образованію усилилъ свое преподаваніе элементами, необходимыми для будущаго преподавателя средней школы. Этотъ пунктъ вызывалъ возраженія въ самомъ Организаціонномъ Комитетѣ. Среди русскихъ ученыхъ, какъ извѣстно, очень сильны тенденціи придать университету чисто научный характеръ, совершенно чуждый какимъ бы то ни было утилитарнымъ задачамъ. Въ Петербургѣ эти взгляды, быть можетъ, болѣе сильны, чѣмъ гдѣ бы то ни было. Поэтому 5-ый пунктъ вызвалъ возраженія среди тѣхъ членовъ Комитета, которые полагали, что онъ во всякомъ случаѣ уже придаетъ университетскому преподаванію математики нѣсколько утилитарный характеръ. На это возражали, однако, что ни о какихъ спеціально педагогическихъ курсахъ въ универси-

---

*) См. „Вѣстникъ“ №№ 553, 554.

тетѣ не можетъ быть рѣчи, — что и сторонники этого пункта далеки отъ того, чтобы навязывать университету чуждыя ему дидактическія задачи; но есть предметы чисто теоретическаго характера, интересные и важные не только для будущаго учителя, но и для всякаго образованнаго математика и въ то же время безусловно необходимые будущему преподавателю математики; таковы исторія математики вообще, а элементарной въ особенности, теоретическая ариѳметика, основанія геометріи и т. п. Вотъ эти то предметы, которые въ настоящее время на Западѣ всюду читаются, должны войти въ составъ университетскаго преподаванія и у насъ. Такъ понимали 5-й пунктъ лица, его проводившія.

Пунктъ 8-ой требуетъ, чтобы наиболѣе одаренные въ математическомъ отношеніи учащіеся могли найти въ учебномъ заведеніи удовлетвореніе своимъ запросамъ, а также организованное руководительство со стороны учебнаго персонала. Исторія этого пункта такова. Какъ было изложено выше, на Съѣздѣ раздавалось много предложеній о расширеніи курса математики въ смыслѣ введенія въ курсъ средней школы началъ теоріи чиселъ, геометрографіи, неевклидовой геометріи и т. п. само собою разумѣется, что пойти этимъ тенденціямъ на встрѣчу въ смыслѣ введенія этихъ предметовъ въ общеобязательную программу Съѣздъ не могъ. Но это не значитъ, что и всякая мысль о введеніи этихъ предметовъ въ среднюю школу въ той или иной формѣ совершенно исключена. Въ перечисленныхъ дисциплинахъ есть дѣйствительно много элементарнаго и для юношей, питающихъ къ математикѣ особыя симпатіи можно было бы сдѣлать доступными отдѣлы, выходящіе изъ рамокъ установившейся программы. Это можно было бы сдѣлать, какъ въ реформированныхъ школахъ въ Германіи*), путемъ групповыхъ занятій и дополнительныхъ часовъ. Не предрѣшая поэтому формы, въ которой это можетъ быть осуществлено, Съѣздъ выразилъ пожеланіе, чтобы одаренные ученики могли найти въ школѣ удовлетвореніе своимъ запросамъ.

Остальныя резолюціи врядъ ли нуждаются въ какихъ бы то ни было поясненіяхъ. Повторяемъ въ резолюціяхъ Съѣзда несомнѣнно содержится цѣльная и довольно широкая программа реформы преподаванія математики. Эту программу необходимо детально разработать и отъ тѣхъ, на кого это возложено, зависитъ подготовить ее къ проведенію въ жизнь. Нужно только приступить къ этой работѣ неотложно, не теряя ни одного мѣсяца.

На Московскій Математическій Кружокъ возложена трудная, отвѣтственная, но за то и весьма почтенная задача. Исполать ему!

В. Каганъ.

---

*) См. статью Лицмана „Постановка преподаванія математики въ мужскихъ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ Пруссіи“ №№ 548, 549, 551 — 552 „Вѣстника“.

БИБЛІОГРАФІЯ.

II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ.

Авторы, переводчики и редакторы новыхъ сочиненій приглашаются присылать для этого отдѣла, извѣстнаго въ германской литературѣ подъ названіемъ: „Selbstanzeigen", краткія сообщенія о выпущенныхъ ими сочиненіяхъ, объ ихъ характерѣ и объ ихъ назначеніи. Къ этимъ сообщеніямъ долженъ быть приложенъ экземпляръ сочиненія. Помѣщая эти сообщенія, редакція сохраняетъ, однако, за собою право помѣстить и независимую рецензію.

Ф. Клейнъ, профессоръ. *Вопросы элементарной и высшей математики.* Лекціи, читанныя въ Гёттингенскомъ университетѣ. Часть I. „Ариѳметика, алгебра и анализъ. Переводъ съ нѣмецкаго Д. А. Крыжановскаго подъ редакціей привать-доцента В. Ф. Кагана. Изд. „Mathesis". Одесса, 1912. Стр. XXII + 487 8°. Ц. 3 р.

Лекціи, первую часть которыхъ мы выпускаемъ въ настоящее время въ свѣтъ на русскомъ языкѣ, были читаны профессоромъ Ф. Клейномъ въ Гёттингенѣ въ 1907 — 1908 уч. году для будущихъ учителей среднихъ учебныхъ заведеній. Организація этого курса находится въ тѣсной связи съ дѣятельностью Клейна, направленной въ послѣдніе десять лѣтъ къ реформированію преподаванія математики въ средней школѣ. Въ чемъ заключается эта реформа, какъ она намѣчается и какъ осуществляется, объ этомъ мы помѣстили подробную статью въ предисловіи къ I-ой части сочиненія Бореля-Штеккеля „Элементарная Математика" *).

Лекціи Клейна представляютъ собой, несомнѣнно, рѣдкій вкладъ въ учебную математическую литературу. Нѣкоторыя главы представляютъ собой настоящіе перлы, тѣмъ болѣе цѣнные, что ни въ какомъ другомъ сочиненіи ихъ въ подобной обработкѣ нельзя найти: многое заимствовано непосредственно изъ научныхъ мемуаровъ, изъ обширныхъ историческихъ сочиненій, малодоступныхъ или даже вовсе недоступныхъ тому читателю, для котораго назначены лекціи Клейна. Мало того, книга интересна отнюдь не только для учителя, а мѣстами, пожалуй, и вовсе не для учителя. Она интересна для всякаго лица, заканчивающаго высшее математическое образованіе: она даетъ ему такой обзоръ руководящихъ идей, проникающій всѣ отдѣлы современной математики, какого онъ не найдетъ нигдѣ.

Но два замѣчанія мы должны къ этому прибавить. Во первыхъ, книга имѣетъ эту цѣнность лишь для того, кто подойдетъ къ ней съ надлежащими требованіями, такъ сказать, съ надлежащей стороны, и съ надлежащей подготовкой. Во вторыхъ, не всѣ части сочиненія достаточно уравновѣшены. На той и другой сторонѣ дѣла намъ необходимо остановиться нѣсколько подробнѣе.

Точное названіе лекцій Клейна такое: „Элементарная математика съ высшей точки зрѣнія". Понятіе объ „элементарной математикѣ" вообще очень растяжимое; но Клейнъ имѣетъ на это совершенно особенный взглядъ. Въ указанной выше статьѣ „О реформѣ преподаванія математики" мы привели принадлежащую Клейну критику различныхъ опредѣленій элементарной математики, вѣрнѣе, его соображенія, въ силу которыхъ онъ считаетъ,

---

*) Профессоръ Э. Борель. Ариѳметика и Алгебра. Въ обработкѣ профессора П. Штеккеля. Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей прив.-доц. В. Ф. Кагана и съ приложеніемъ его статьи: „О реформѣ преподаванія математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ Германіи и Франціи".

что ни одно изъ извѣстныхъ ему опредѣленій не выдерживаетъ критики. Онъ самъ признаетъ лишь слѣдующее опредѣленіе: элементарно все то, что доступно юношѣ школьнаго возраста. Но подойдемъ ли мы именно съ этой или съ какой бы то ни было другой точки зрѣнія на элементарную математику, даже „съ высшей“. какъ сказано въ заглавіи книги, мы должны будемъ признать, что не только многія части сочиненія, а — пожалуй — и большая часть ихъ не можетъ быть признана элементарной. Ни ученіе о кватерніонахъ въ его связи съ механикой, ни уравненія и группы многогранниковъ въ ихъ связи съ Римановыми поверхностями, ни ученія о малыхъ колебаніяхъ, о рядахъ Фурье, объ интерполяціи не могутъ быть признаны элементарными. Это отнюдь не уменьшаетъ достоинства книги для тѣхъ, кому эти вопросы доступны. Но намъ казалось, что сохранить заглавіе книги значитъ ввести читателя, а главное, покупателя въ заблужденіе; тѣмъ болѣе, что это заблужденіе прикрывалось бы громкимъ и популярнымъ у насъ именемъ „Клейна“. Мы сочли поэтому болѣе правильнымъ, болѣе отвѣчающимъ содержанію книги озаглавить ее: „Вопросы элементарной и высшей математики“.

Далѣе, обращаясь къ характеру изложенія матеріала, мы должны лишній разъ подчеркнуть то, что объ этомъ говоритъ самъ авторъ: лекціи не содержатъ систематическаго и догматическаго изложенія соотвѣтственныхъ дисциплинъ; онѣ содержатъ только общій обзоръ относящихся сюда ученій, онѣ имѣютъ въ виду ярко освѣтить ихъ основные моменты, сущность задачъ, ихъ трудности, слабыя мѣста, спорные вопросы. Учиться той или иной дисциплинѣ по этой книгѣ нельзя; для этого существуютъ руководства, лучшія изъ которыхъ авторъ всегда указываетъ на своемъ мѣстѣ. Но въ качествѣ дополненія къ руководствамъ эти лекціи особенно цѣнны въ слѣдующемъ отношеніи. Авторы догматическихъ сочиненій стараются побѣдить тѣ трудности, съ которыми связано точное изложеніе дисциплины. Удается ли имъ это или нѣтъ, — въ результатѣ наиболѣе спорные пункты всегда остаются скрытыми, сглаженными. И даже въ тѣхъ случаяхъ, когда удается довести ту или иную теорію до полной точности, учащійся часто недоумѣваетъ, для чего автору понадобился тотъ или иной сложный аппаратъ, тѣ или иныя громоздкія разсужденія Вотъ эти именно вопросы Клейнъ и старается освѣтить; онъ старается выяснить идею въ свѣтѣ ея историческаго развитія, въ сопоставленіи попытокъ ея разрѣшенія. Но ясно вмѣстѣ съ тѣмъ, что тотъ, кто станетъ читать эту книгу безъ предварительнаго знакомства съ этими вопросами, не найдетъ въ ней того, что ищетъ.

Теперь остановимся на отдѣльныхъ частяхъ настоящаго перваго тома. Первая часть представляетъ собой обзоръ современной теоретической ариѳметики. Кромѣ 3-ей части IV главы („Умноженіе кватерніоновъ и преобразованія поворотнаго растяженія въ пространствѣ“), здѣсь все очень доступно и можетъ въ такой же мѣрѣ служить введеніемъ въ теоретическую ариѳметику, какъ и дополненіемъ къ ней. Читатель долженъ только помнить, что доказательства нигдѣ не доводятся до конца, что авторъ выясняетъ лишь руководящія ихъ идеи.

Иначе обстоитъ дѣло со второй частью — съ „Алгеброй“. Хотя отнесенныя сюда авторомъ вещи принадлежатъ къ числу изящныхъ перловъ математической литературы, мы считаемъ, что выборъ сдѣланъ Клейномъ — въ виду назначенія этихъ лекцій — весьма неудачно. Изъ обширнаго матеріала, который представляетъ Алгебра для бесѣды съ будущими учителями, Клейнъ выбралъ вопросы, составлявшіе, главнымъ образомъ, предметы его собственныхъ работъ. Это дѣлаетъ изложеніе мѣстами довольно труднымъ, и потому редакторъ нашелъ необходимымъ присоединить къ книгѣ 2 статьи, служащія для разъясненія трактуемыхъ въ этомъ отдѣлѣ вопросовъ.

Въ третьей части, посвященной анализу, Клейнъ вновь возвращается къ основнымъ вопросамъ и трактуетъ ихъ въ высшей степени доступно. Это на нашъ взглядъ, лучшая часть сочиненія. Такъ же, какъ и первую часть, мы не можемъ не рекомендовать ее всѣмъ, изучающимъ математику съ дѣйствительнымъ интересомъ къ дѣлу.

Переводъ былъ сдѣланъ съ перваго изданія и былъ уже почти отпечатанъ, когда появилось второе нѣмецкое изданіе Какъ видно изъ предисловія автора ко второму изданію, текстъ остался почти безъ измѣненія; но ко второму изданію приложенъ рядъ дополненій, которыя всѣ внесены въ настоящее русское изданіе.

В. Каганъ.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей привать-доцента Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

ОТДѢЛЪ I.

№ 13 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^4-2(2R+r)x^3+(p^2+4Rr+r^2)x^2-2p^2rx+p^2r^2=0,$$

гдѣ p, R, r суть соотвѣтственно полупериметръ и радіусы круговъ описаннаго и вписаннаго нѣкотораго треугольника.

Л. Богдановичъ (Ярославль).

№ 14 (6 сер). Въ треугольникѣ ABC высота BH дѣлится пополамъ въ точкѣ пересѣченія съ другой высотой. Найти наименьшее значеніе, которое можетъ имѣть уголъ B этого треугольника.

Г. Варкентинъ (Петербургъ).

№ 15 (6 сер.). Найти необходимое и достаточное условіе для того, чтобы уравненіе

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

приводилось къ виду

$$(x^2+m)(x+n)=0,$$

и указать простѣйшій способъ полученія корней такого уравненія.

С. Адамовичъ (Варшава).

№ 16 (6 сер.). Пусть $ABCD$ четыреугольникъ, вписанный въ полуокружность діаметра AD; найти соотношеніе, которому должны удовлетворять углы $BAD=\beta$ и $CAD=\gamma$ для того, чтобы на прямой AD можно было найти точку, равно отстоящую отъ сторонъ AB, BC, CD. Показать, что это соотношеніе равносильно условію $AB+CD=AD$.

Р. Витвинскій (Одесса).

ОТДѢЛЪ II.

Задачи на изслѣдованіе хода и свойствъ функцій.

№ 7) Съ помощью четырехъ данныхъ чиселъ a, b, c, d составляемъ выраженія:

$$A = (d - a)(b - c),\quad B = (d - b)(c - a),\quad C = (d - c)(a - b).$$

1°. Показать, что C выражается черезъ A и B.

2°. Полагая

$$\lambda_1 = -\frac{A}{B},\ \lambda_2 = -\frac{B}{A},\ \lambda_3 = -\frac{C}{A},\ \lambda_4 = -\frac{A}{C},\ \lambda_5 = -\frac{C}{B},\ \lambda_6 = -\frac{B}{C},$$

показать, что количества λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, λ_6 выражаются въ функціи отъ λ_1; въ дальнѣйшемъ положимъ:

$$\lambda_i = \varphi_i(\lambda_1)\ (i = 2, 3, 4, 5, 6),$$

а также обозначимъ черезъ $\varphi_1(\lambda)$ функцію, тожественно сводящуюся къ λ.

3°. Условившись называть функціональнымъ произведеніемъ функцій $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ сложную функцію $f[g(\lambda)]$, вычислить попарныя функціональныя произведенія функцій $\varphi_i(\lambda)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ и показать, что въ данномъ случаѣ функціональное умноженіе не подлежитъ перемѣстительному закону

4°. Шесть чиселъ λ_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ вообще различны; можетъ ли случиться, что два изъ нихъ становятся равны, и что тогда дѣлается съ остальными числами?

5°. Выразить черезъ λ_1 сумму

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2.$$

Что произойдетъ съ этимъ выраженіемъ, если замѣнить въ немъ λ_1 черезъ $\varphi_4(\lambda_1)$?

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 437 (5 сер.). *Опредѣлить сумму* n *членовъ ряда*

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) + 4\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) + 6\left(\frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6}\right) + \cdots$$

и вычислить предѣлъ этой суммы въ томъ случаѣ, когда $|x| > 1$.

Разсмотримъ выраженіе s, опредѣляемое равенствомъ:

$$s = 2a + 4aq + 6aq^2 + \cdots + 2naq^{n-1}, \tag{1}$$

въ которомъ $q \neq 1$. Умножая обѣ части на q, получимъ:

$$sq = 2aq + 2aq^2 + \cdots + 2(n-1)aq^{n-1} + 2naq^n. \quad (2)$$

Вычитая изъ равенства (2) равенство (1), находимъ:

$$s(1-q) = 2a\left[1 + (q + q^2 + \cdots + q^{n-1})\right] - 2naq^n = \frac{2a(1-q^n)}{1-q} - 2naq^n,$$

откуда послѣ обычныхъ преобразованій получимъ:

$$s = \frac{2a\left[1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}\right]}{(1-q)^2}. \quad (3)$$

Полагая въ равенствѣ (1) $a = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$, $q = \frac{1}{x^2}$, находимъ съ помощью равенства (3), что сумма n членовъ даннаго ряда s_n выражается формулой:

$$s_n = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\frac{\left(1 - \frac{n+1}{x^{2n}} + \frac{n}{x^{2n+2}}\right)}{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2}, \quad (4)$$

или

$$s_n = \frac{2(x+1)\left[x^{2n+2} - (n+1)x^2 + n\right]}{x^{2n}(x^2-1)^2}.$$

Если $|x| > 1$, то $|x| = 1 + \alpha$, гдѣ $\alpha > 0$, а потому, при $n > 1$, имѣемъ согласно съ формулой бинома

$$0 < \frac{n+1}{x^{2n}} = \frac{n+1}{1 + 2n\alpha + n(2n-1)\alpha^2 + \beta} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{(2n-1)\alpha^2 + 2\alpha + \frac{\beta+1}{n}},$$

гдѣ β есть надлежащее положительное число. Такъ какъ $1 + \frac{1}{n} < 2$, то $0 < \frac{n+1}{x^{2n}} < \frac{2}{(2n-1)\alpha^2}$, а потому выраженіе $\frac{n+1}{x^{2n}}$ стремится къ нулю при безконечномъ возрастаніи n. Точно также при $|x| > 1$ и $n > 1$ имѣемъ:

$$0 < \frac{n}{x^{2n+2}} = \frac{n}{1 + (2n+2)\alpha + (n+1)2n\alpha^2 + \beta'} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1+\beta'}{n} + \left(2 + \frac{2}{n}\right)\alpha + (n+1)2\alpha^2} < \frac{1}{2(n+1)\alpha^2},$$

гдѣ $\beta' > 0$, а потому при безконечномъ возрастаніи n выраженіе $\frac{n}{x^{2n+2}}$ также стремится къ нулю. Итакъ, $\lim\limits_{n=\infty} \frac{n+1}{x^n} = 0$ и $\lim\limits_{n=\infty} \frac{n}{x^{2n+2}} = 0$ при $|x| > 1$. Значитъ [см. (4)] при $|x| > 1$

$$\lim_{n=\infty} s_n = \frac{2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2} = \frac{2(x+1)x^2}{(x^2-1)^2}.$$

С. Кудинъ (Москва).

№ 441 (5 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$2^{5x} - 2^{4x+1} - 2^{3(x+1)} + 2^{2(x+2)} + 2^{x+4} - 2^5 = 0.$$

Полагая

$$2^x = y, \tag{1}$$

приводимъ данное уравненіе къ виду:

$$y^5 - 2y^4 - 2y^3 + 4y^2 + 16y - 32 = 0,$$

или, разлагая лѣвую часть на множителей, къ виду:

$$(y-2)^3(y+2)^2 = 0,$$

откуда $y = 2$, или $y = -2$. Поэтому [см. (1)] $2^x = 2$ или $2^x = -2$, откуда $x_1 = 2$, а второй корень — мнимый, опредѣляемый равенствомъ $x_2 = \frac{\lg(-2)}{\lg 2}$. Полагая основаніе логариѳмовъ равнымъ e (основаніе натуральныхъ или неперовыхъ логариѳмовъ), находимъ $x_2 = \frac{\lg 2 + \lg(-1)}{\lg 2} = \frac{\lg 2 + (2k+1)\pi i}{\lg 2}$, гдѣ k — произвольное цѣлое число, а $i = \sqrt{-1}$. Точно также и первый корень можетъ имѣть безчисленное множество значеній, согласно съ формулой $x_1 = \frac{\lg 2 + 2k\pi i}{\lg 2}$, гдѣ k — произвольное цѣлое число. Итакъ, первый корень имѣетъ дѣйствительное значеніе при $k = 0$, а второй имѣетъ лишь мнимыя значенія (общія выраженія для x_1 и x_2 выводятся изъ соотношенія $e^{\pi i} = -1$, вытекающаго изъ извѣстной формулы Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$).

М. Пистракъ (Лодзь); *М. Марголисъ* (Петербургъ); *Л. Альбертъ* (Николаевскій городокъ); *А. Чекалкинъ* (Тверь); *Н. Шемяновъ* (Владиміръ); *М. Черняевъ* (Москва); *И. Лурье* (Смоленскъ). *М. Рыбкинъ* (Ейскъ); *В. Моргулевъ* (Одесса); *С. Слугиновъ* (Казань); *С. Розенблатъ* (Армавиръ); *Т. Тикуновъ* (Козловъ); *Е. Доманицкій* (Каменецъ-Подольскъ).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
ищется

Обложка
пщется