№ 551—552.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. ГЕРНЕТОМЪ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ф. КАГАНА.

XLVI-го семестра № 11—12-й.

ОДЕССА.
Типографія Акц. Южно-Русскаго О-ва Печ. Дѣла. Пушкинская, 18.
1911.

XLVI Сем. № 11—12.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
Элементарной Математики.

№ 551—552.

Содержаніе: Свѣтовое давленіе. *Проф. Дж. Пойнтинга.* (Окончаніе).— Зодіакальный свѣтъ *Ф. С. Архенгольда.* — О группахъ и числовыхъ системахъ. *Дж Юнга.* — Постановка преподаванія математики въ мужскихъ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ Пруссіи. *В. Лицмана.* (Продолженіе). — Первые шаги на пути къ прохожденію курса дифференціальнаго исчисленія въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ. *Е. С. Томашевича.* — Научная хроника: Образцовыя мѣры длины изъ кварца. *Н. Адамовича.* — Письмо въ редакцію. *С. Слугинова.* — Краткій отчетъ о засѣданіи Московскаго Математическаго Кружка 27 октября 1911 г. — Рецензіи: В. І. Орловскій. „Механическій отдѣлъ курса физики". *М. Л.* — Отъ редакціи. — Перечень статей, которыя будутъ въ числѣ другихъ напечатаны въ слѣдующемъ семестрѣ „Вѣстника". — Задачи №№ 474 — 479 (5 сер.). — Рѣшенія задачъ №№ 394, 395, 396, 397 и 407 (5 сер.). — Объявленія.

Свѣтовое давленіе.

Проф. Дж. Пойнтинга.

(Продолженіе).*

IV.

Опыты, иллюстрирующіе переносъ количества движенія пучкомъ свѣтовыхъ лучей.

Докторъ Барлоу и авторъ настоящаго сочиненія произвели нѣсколько опытовъ съ цѣлью показать переносъ количества движенія пучкомъ свѣтовыхъ лучей**), а профессоръ Лебедевъ***) недавно опубликовалъ работу о поглощеніи количества движенія газомъ, поглощающимъ свѣтъ. Вотъ описаніе этихъ опытовъ.

1) Когда пучекъ свѣтовыхъ лучей падаетъ наклонно на поглощающую поверхность, онъ производитъ давленіе, одна слагающая котораго направлена по касательной къ поверхности.

*) См. „Вѣстникъ", № 550.

**) „Phil. Mag." IX, 1905, p. 169 и 393. „Nature", vol. 75, Nov. 1906, p. 60.

***) „Annalen der Physik", Bd. 32, 1910, p. 411.

Пусть на поглощающую поверхность S (рис. 21) падаетъ свѣтъ или радіація по направленію AB. Его количество движенія направлено тогда по AB. Представимъ длиною AB количество движенія, приносимое лучами въ секунду. Разложимъ AB на его нормальную слагающую NB и тангенціальную TB. Если площадка S не можетъ быть перемѣщена назадъ, то NB не произведетъ никакого видимаго дѣйствія. Но, если S можетъ скользить въ своей собственной плоскости, то слагающая TB заставитъ ее передвинуться въ сторону S'.

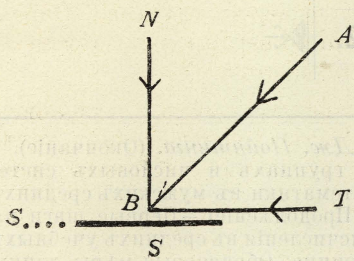


Рис. 21.

Чтобы провѣрить это на опытѣ, укрѣпили на концахъ тонкаго стекляннаго стержня длиною въ 5 *см.* два стеклянныхъ диска перпендикулярно къ стержню; одинъ изъ нихъ вычернили, а другой посеребрили; діаметръ каждаго былъ около 2 *см.* Все это было подвѣшено на кварцевой нити въ ящикѣ со стеклянными стѣнками (рис. 22). Къ стержню было приклеено зеркальце, посредствомъ котораго можно было наблюдать въ зрительную трубу отраженіе шкалы, и такимъ образомъ могло быть опредѣлено положеніе стержня.

Послѣ этого разрѣжали воздухъ въ ящикѣ до 1 – 2 *см.* ртутнаго столба и направляли на черный дискъ горизонтальный пучекъ свѣто-

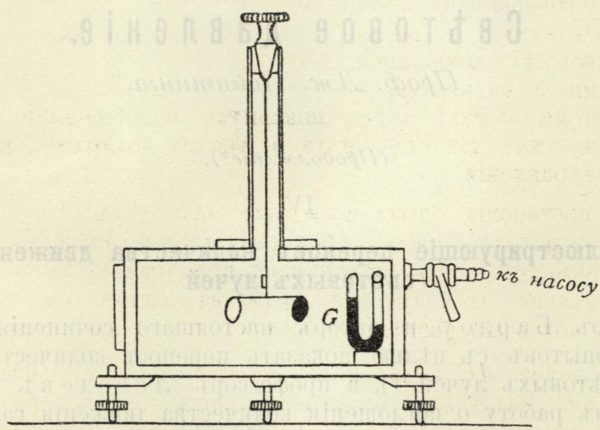


Рис. 22.

выхъ лучей отъ лампы Нернста, который образовывалъ съ нормалью къ диску уголъ въ 45⁰ (рис. 23).

Дискъ получалъ толчекъ, и стерженъ приходилъ во вращательное движеніе по направленію стрѣлки. Для измѣренія энергіи лучей ихъ направляли на вычерненную серебряную пластинку опредѣленнаго вѣса и наблюдали, съ какой скоростью повышалась ея температура. Моментъ пары, соотвѣтствующій данному отклоненію стержня, опредѣляли обыкновеннымъ путемъ. Такимъ образомъ измѣрялся дѣйствительный моментъ, который можно было сравнивать съ моментомъ, вычисленнымъ на основаніи энергіи лучей.

Такъ, напримѣръ, въ одномъ изъ опытовъ наблюденный моментъ пары былъ 21×10^{-6} *см.-динъ*, тогда какъ вычисленный равнялся 22×10^{-6} *см.-динамъ*. Но здѣсь важную роль, несомнѣнно, игралъ газъ, и такое хорошее согласіе получилось, вѣроятно, случайно. Опредѣленно можно только сказать, что вычисленное и наблюденное дѣйствія согласуются съ точностью до нѣсколькихъ процентовъ *).

Когда пучокъ направлялся на посеребренный дискъ, отклоненіе получалось, какъ это можно было ожидать, гораздо меньшее, такъ какъ отраженные лучи уносили параллельно поверхности количество движенія, которое приносили падающіе.

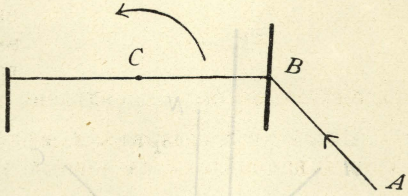


Рис. 23.

Для полученія постоянныхъ результатовъ требовалась тщательная конструкція и установка прибора; ибо, если черный дискъ виситъ не совсѣмъ вертикально, если нормаль въ его центрѣ не проходитъ какъ разъ черезъ ось подвѣса и если падающіе лучи не распредѣлены совершенно равномѣрно по всему диску, то возмущенія, вызываемыя конвекціонными потоками и радіометрическимъ дѣйствіемъ, могутъ легко повернуть подвѣшенную систему на бóльшій уголъ, чѣмъ давленіе свѣта и, весьма возможно, въ противоположномъ направленіи.

Другая постановка опыта позволяла гораздо легче получать опредѣленные и согласные между собой результаты. Вычерненный дискъ изъ слюды, діаметръ котораго равнялся приблизительно 5 *см.*, подвѣсили горизонтально на кварцевой нити въ ящикѣ съ стеклянными стѣнками, въ которомъ разрѣдили воздухъ до 1-2 *см.* ртутнаго столба.

Пучекъ лучей AB направлялся подъ угломъ 45^0 на небольшую площадь B (рис. 24) вблизи окружности диска; лучи AB находились въ плоскости, проходящей черезъ нормаль BN и перпендикулярной къ радіусу OB. Слагающая свѣтового давленія, параллельная поверхности, стремилась повернуть дискъ на уголъ, который мы обозначимъ черезъ L. Но лучи нагрѣвали дискъ, такъ что возникали конвекціонные по-

---

*) Величины, которыя даются здѣсь и въ слѣдующихъ опытахъ являются результатомъ новыхъ опредѣленій различныхъ константъ (постоянныхъ) и провѣрки вычисленій и не вполнѣ согласуются съ величинами, которыя даны въ работахъ, цитированныхъ выше въ подстрочномъ примѣчаніи.

токи и радіометрическое дѣйствіе. Послѣдніе должны были повернуть дискъ на нѣкоторый уголъ въ направленіи, зависящемъ отъ наклона диска въ B, если только послѣдній не былъ установленъ совершенно горизонтально, что на практикѣ неосуществимо. Назовемъ этотъ уголъ черезъ D. Весь уголъ вращенія былъ, значитъ, $D + L$, каковой и находили при помощи зрительной трубы, въ которую наблюдали отраженіе шкалы въ зеркалѣ подвѣшенной системы.

Тотъ же самый пучекъ лучей направляли затѣмъ подъ угломъ въ 45° съ другой стороны нормали BN по направленію CB на ту же площадь B. Количество поглощенной теплоты не измѣнялось; поэтому можно было допустить, что вслѣдствіе конвекціоннаго и радіометрическаго дѣйствій дискъ поворачивался на прежній уголъ D и въ томъ же самомъ направленіи. Но горизонтальная слагающая L свѣтового давленія принимала противоположное направленіе, такъ что въ этомъ случаѣ наблюдали уголъ $D - L$. Разность обоихъ наблюденій была $2L$, т. е. въ два раза больше угла, на который поворачивала одна только сила свѣтового давленія лучей. Такимъ образомъ исключалось дѣйствіе возмущающихъ силъ, и это исключеніе подтверждалось тѣмъ, что получалась приблизительно одна и та же величина $2L$, когда направляли лучи на разныя точки вблизи окружности.

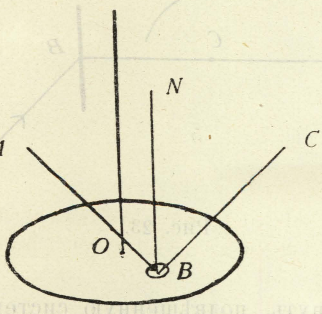


Рис. 24.

Сначала пробовали производить опыты въ воздухѣ при низкомъ давленіи въ ящикѣ. Затѣмъ воздухъ замѣнили водородомъ, съ которымъ получались гораздо болѣе согласные результаты. Въ слѣдующей таблицѣ даются моменты пары, полученные путемъ наблюденія въ цѣломъ рядѣ опытовъ при различныхъ давленіяхъ, и моменты, вычисленные по энергіи лучей.

Въ водородѣ.

Давленіе въ *см.* ртутнаго столба.	Наблюденный моментъ пары въ 10^{-6} *см.-динъ.*	Вычисленный моментъ пары въ 10^{-6} *см.-динъ.*
1,8	6,0	5,3
1,4	6,5	6,2
1,6	6,3	5,4
1,25	6,2	5,0

Дѣйствіе газа было настолько меньше и настолько правильнѣе въ опытахъ съ водородомъ, что можно было обнаружить тангенціальную слагающую давленія свѣта даже при атмосферномъ давленіи. Въ слѣдующей таблицѣ дается рядъ чиселъ, показывающихъ отклоненіе въ дѣленіяхъ шкалы, вызванное однимъ только дѣйствіемъ свѣта (т. е. уголъ обозначенный выше черезъ L).

Въ водородѣ.

Давленіе въ *см.* ртутнаго столба.	Отклоненія въ дѣленіяхъ шкалы, вызванныя давленіемъ свѣта.
0,04	5,9
0,09	6,1
0,20	5,2
0,44	5,4
0,74	5,5
1,2	5,7
2,1	5,2
3,2	5,1
6,0	5,5
10,4	5,4
22,4	5,2
47,7	5,2
73,6	4,4.

2) Когда пучекъ лучей смѣщается параллельно самому себѣ, онъ вызываетъ моментъ пары, который стремится повернуть систему, являющуюся причиной его смѣщенія.

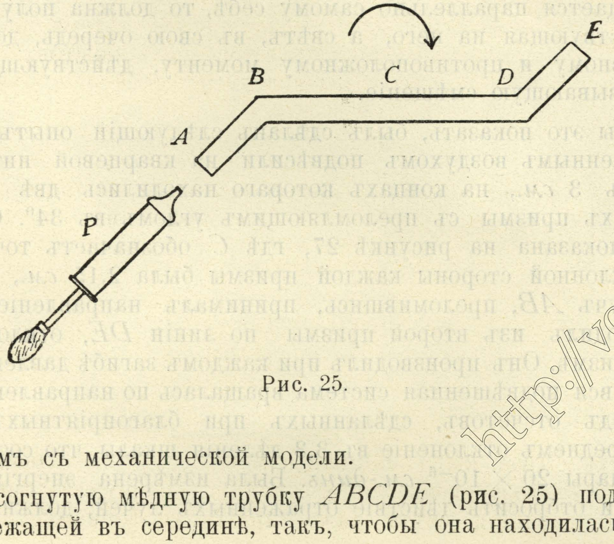


Рис. 25.

Начнемъ съ механической модели.

Если согнутую мѣдную трубку $ABCDE$ (рис. 25) подвѣсить въ точкѣ C, лежащей въ серединѣ, такъ, чтобы она находилась въ горизонтальной плоскости, и если вдувать въ трубку насосомъ P струю воздуха, то послѣдняя стремится повернуть углы B и D и при этомъ производитъ на нихъ давленіе, направленное наружу; такимъ образомъ, получаются двѣ силы, вращающія трубку въ направленіи стрѣлки.

Мы можемъ разсматривать это вращеніе слѣдующимъ образомъ. Воздухъ обладаетъ количествомъ движенія, направленнымъ сначала по линіи AB, а затѣмъ по параллельной ей линіи DE. Мы получили бы тотъ же самый результатъ, если бы у насъ была одна сила P_1, дѣйствующая въ B противъ движенія и уничтожающая количество движенія, направленное по AB, и другая, равная ей сила P_2, дѣйствующая въ D въ направленіи DE и дающая мѣсто количеству движенія по новой линіи DE (рис. 26).

P_1 и P_2 составляютъ пару силъ, дѣйствующую на воздухъ противъ часовой стрѣлки; въ такомъ случаѣ должна существовать равная и противоположная пара силъ, дѣйствующая на трубку и вращающая ее по стрѣлкѣ часовъ.

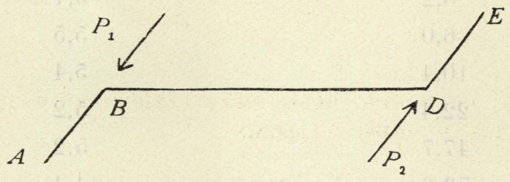


Рис. 26.

Пучокъ свѣтовыхъ лучей представляетъ собой, точно такъ же, какъ струя воздуха, потокъ количества движенія; поэтому, если пучокъ смѣщается параллельно самому себѣ, то должна получиться пара силъ, дѣйствующая на него, а свѣтъ, въ свою очередь, долженъ дать мѣсто равному и противоположному моменту, дѣйствующему на систему, вызывающую смѣщеніе.

Чтобы это показать, былъ сдѣланъ слѣдующій опытъ. Въ ящикѣ съ разрѣженнымъ воздухомъ подвѣсили на кварцевой нити стержень длиной въ 3 *см.*, на концахъ котораго находились двѣ небольшихъ стеклянныхъ призмы съ преломляющимъ угломъ въ 34^0. Схема этого прибора показана на рисункѣ 27, гдѣ C обозначаетъ точку подвѣса. Длина наклонной стороны каждой призмы была 2,15 *см.*, а высота — 1,6 *см.* Лучъ AB, преломившись, принималъ направленіе BD и затѣмъ выходилъ изъ второй призмы по линін DE, отклонившись въ каждой призмѣ. Онъ производилъ при каждомъ загибѣ давленіе извнутри наружу, и вся подвѣшенная система вращалась по направленію стрѣлки. Одинъ рядъ отсчетовъ, сдѣланныхъ при благопріятныхъ условіяхъ, далъ въ среднемъ отклоненіе въ 3,3 дѣленія шкалы, что соотвѣтствуетъ моменту пары 20×10^{-6} *см.-динъ*. Была измѣрена энергія пучка, которая, если отбросить дѣйствіе отраженныхъ лучей, должна была дать мѣсто моменту пары $20{,}3 \times 10^{-6}$ *см.-динъ*. Другія измѣренія момента, хотя и были всегда того же порядка, но не сходились такъ хорошо съ величиной момента, полученной путемъ вычисленія по энергіи.

Опыты были еще произведены съ парой меньшихъ призмъ съ тѣмъ же преломляющимъ угломъ въ 34⁰, въ которыхъ длина наклонной стороны равнялась всего 1,35 *см.*, а высота 1,05 *см.* Съ этой болѣе легкой системой и съ болѣе тонкимъ, а потому, вѣроятно, болѣе однороднымъ пучкомъ лучей я надѣялся получить болѣе согласные результаты; по эти надежды, какъ показываютъ слѣдующія четыре наблюденія,

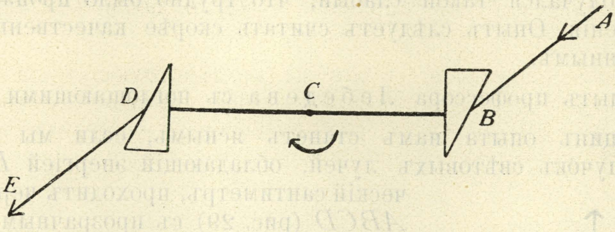


Рис. 27.

не оправдалась. Моментъ пары былъ слишкомъ малъ, чтобы можно было производить точныя измѣренія.

	Наблюденный моментъ пары въ 10^{-6} *см.-динъ*.	Вычисленный моментъ пары въ 10^{-6} *см.-динъ*.
1	7,1	7,1,
2	7,6	7,1,
3	4,6	3,0,
4	8,8	5,3.

Дѣйствіе параллельнаго смѣщенія лучей провѣряли еще другимъ путемъ. Въ ящикѣ съ разрѣженнымъ воздухомъ подвѣсили кусокъ стекла, имѣвшій форму прямоугольнаго параллелепипеда 3 *см.* $\times$ 1 *см.* $\times$ 1 *см.* такъ, чтобы его большая ось была горизонтальна; черезъ этотъ кусокъ стекла пропускали горизонтальный пучокъ свѣтовыхъ лучей (рис. 28), который выходилъ по направленію EF параллельно падающимъ лучамъ AB.

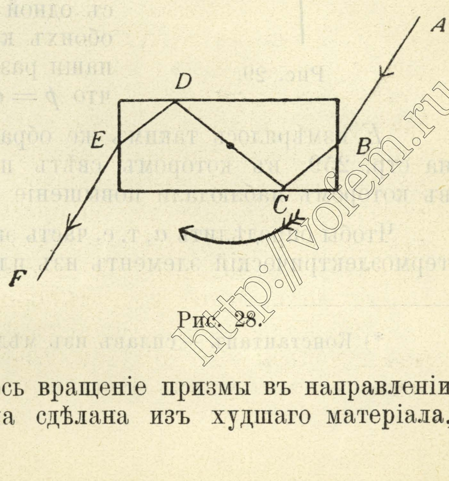


Рис. 28.

И въ этомъ опытѣ наблюдалось вращеніе призмы въ направленіи стрѣлки; но, такъ какъ нить была сдѣлана изъ худшаго матеріала, то отклоненіе получалось очень маленькое. Для полученія лучшаго эффекта пучокъ лучей посылался лишь съ перерывами. Закручивая нить, систему заставляли колебаться въ горизонтальной плоскости. При каждомъ колебаніи, когда грань B удалялась отъ источника, посылали пучокъ лучей, который прекращался, когда она приближалась. Колебанія вслѣдствіе этого постепенно усиливались. Затѣмъ поступали наоборотъ; паденіе лучей возобновляли, когда грань B приближалась къ источнику и прекращали, когда B удалялось отъ него. Колебанія тогда постепенно затухали. Моментъ пары, полученный путемъ наблюденія, былъ того же порядка, что и вычисленный по энергіи лучей, но эффектъ получался такой слабый, что трудно было производить точныя измѣренія. Опытъ слѣдуетъ считать скорѣе качественнымъ, чѣмъ количественнымъ.

3) Опытъ профессора Лебедева съ поглощающими газами.

Принципъ опыта намъ станетъ яснымъ, если мы вообразимъ себѣ, что пучокъ свѣтовыхъ лучей, обладающій энергіей E на кубическій сантиметръ, проходитъ черезъ камеру $ABCD$ (рис. 29) съ прозрачными стѣнками AB и CD, въ которой находится поглощающій газъ. Мы предполагаемъ, что лучи какъ разъ наполняютъ камеру. Если газъ поглощаетъ часть энергіи лучей a, онъ поглощаетъ такую же часть a количества движенія, которое переноситъ съ собой пучокъ. Такъ какъ количество движенія, приносимое въ секунду на 1 *кв. см.*, есть E, то поглощаемое количество движенія равно aE. Послѣднее должно быть уравновѣшено стѣнкой CD, которая производитъ на газъ большее давленіе, чѣмъ стѣнка AB. Иначе говоря, давленіе газа вблизи CD превосходитъ давленіе вблизи AB на величину aE.

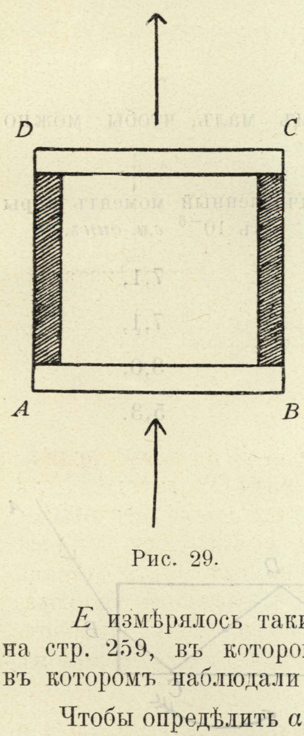


Рис. 29.

Итакъ, намъ нужно измѣрить E и a, съ одной стороны, и разность давленія p на обоихъ концахъ камеры, съ другой, и, если наши разсужденія вѣрны, мы должны найти, что $p = aE$.

E измѣрялось такимъ же образомъ, какъ въ опытѣ, описанномъ на стр. 259, въ которомъ свѣтъ падалъ на небольшой калориметръ, въ которомъ наблюдали повышеніе температуры.

Чтобы опредѣлить a, т. е. часть энергіи E поглощенной газомъ, одинъ термоэлектрическій элементъ изъ платины и константана*) помѣщался

*) Константанъ — сплавъ изъ мѣди (60%) и никкеля (40%).

Пер.

передъ стѣнкой AB, а другой такой же элементъ сзади стѣнки CD. Второй элементъ нагрѣвался меньше перваго, и на основанiи этого можно было опредѣлить величину a. Стѣнки состояли изъ пластинокъ плавиковаго шпата, которыя дѣлали насколько возможно прозрачными тѣмъ, что помѣщали толстую пластинку плавиковаго шпата передъ источникомъ свѣта — лампой Нернста. Эта пластинка задерживала лучи, которые были бы поглощены стѣнками, и послѣднiя становились прозрачными для пучка, прошедшаго черезъ толстую пластинку.

Для измѣренiя p приборъ устанавливался приблизительно такъ, какъ показано на рисункахъ 30 (схема) и 31 (вертикальный разрѣзъ). Въ G находилась высѣченная въ кускѣ мѣди камера для газа, черезъ которую проходили лучи на протяженiи 7 *мм.*; сѣченiе представляло собою прямоугольникъ 4 *мм.* $\times$ 3 *мм.*; $w\,w$ обозначаютъ стѣнки изъ плавиковаго шпата, а I — входъ для газа. Оба конца газовой камеры сообщались съ боковой цилиндрической полостью, просверленной въ кускѣ, дiаметръ которой равнялся 3,25 *мм.* Въ послѣднюю входилъ

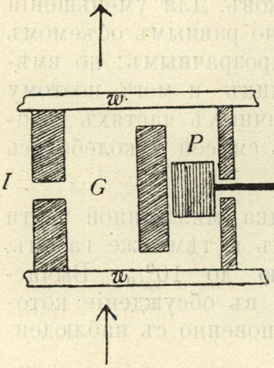


Рис. 30.

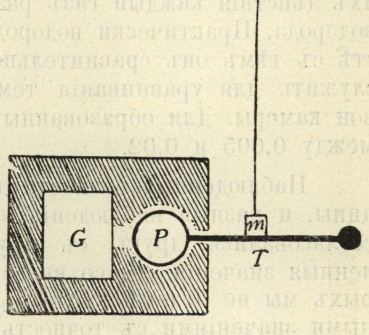


Рис. 31.

поршень P съ дiаметромъ въ 2,85 *мм.*, укрѣпленный на концѣ вращающагося стержня, подвѣшеннаго на кварцевой нити въ точкѣ T, гдѣ находилось зеркальце. При помощи послѣдняго отклоненiе отсчитывалось посредствомъ зрительной трубы на шкалѣ, помѣщенной на разстоянiи 5 *м.* отъ зеркала. Въ цилиндрической камерѣ была сдѣлана сбоку небольшая щель, которая была какъ разъ настолько широка, что стержень могъ въ ней свободно двигаться. Весь приборъ, представленный на рисункахъ, помѣщался въ сосудѣ, непроницаемомъ для газа.

Если бы поршень плотно входилъ въ цилиндрическую полость и былъ бы совершенно свободенъ отъ тренiя, то при прохожденiи лучей черезъ G возникала бы разность давленiй p (которую нужно опредѣлить) на оба конца поршня, и послѣднiй отталкивался бы до тѣхъ поръ, пока закрученная нить не вызвала бы пары силъ, равной и противоположной парѣ, возникавшей вслѣдствiе разности давленiй p. Но этого, очевидно, невозможно было достигнуть. Приходилось, значитъ, устраивать такъ, чтобы поршень могъ свободно двигаться; иначе имѣло бы мѣсто тренiе о стѣнки. Вслѣдствiе этого газъ проходилъ черезъ узкую цилиндрическую щель и циркулировалъ въ обѣихъ камерахъ. Разность давленiй на оба конца была поэтому меньше p на извѣстную величину. Послѣдняя опредѣлялась вспомогательнымъ опытомъ, на которомъ мы не будемъ останавливаться.

Величина, соотвѣтствующая отклоненiю на одно дѣленiе шкалы, была найдена обыкновеннымъ путемъ на основанiи времени колебанiя закрученнаго стержня съ нагрузкой и безъ нея.

Для опыта были взяты слѣдующiе сильно поглощающiе газы: двуокись углерода (CO_2), метанъ (CH_4), этиленъ (C_2H_4), ацетиленъ (C_2H_2), пропанъ (C_3H_8) и бутанъ (C_4H_{10}). Поглощенiе свѣта вызывало нагрѣванiе газа, температура котораго была, несомнѣнно, нѣсколько выше въ передней части камеры, чѣмъ въ задней. Кромѣ того, наблюдалось еще мѣстное нагрѣванiе, вызванное тѣмъ, что приходилось концентрировать лучи вмѣсто того, чтобы дѣлать ихъ параллельными. Это вело къ возникновенiю конвекцiонныхъ потоковъ. Для уменьшенiя ихъ дѣйствiя каждый газъ разбавляли обыкновенно равнымъ объемомъ водорода. Практически водородъ можно считать прозрачнымъ; но вмѣстѣ съ тѣмъ онъ сравнительно хорошiй проводникъ и могъ поэтому служить для уравниванiя температуры въ различныхъ частяхъ газовой камеры. Для образованныхъ такимъ образомъ смѣсей a колебалось между 0,005 и 0,02.

Наблюденныя разности давленiя были порядка миллiонной части дины, и разныя наблюденiя, сдѣланныя съ однимъ и тѣмъ же газомъ, согласовались другъ съ другомъ съ точностью до 10%. Вычисленныя значенiя aE со внесенными поправками, въ обсужденiе которыхъ мы не будемъ входить, согласовались обыкновенно съ наблюденными значенiями съ точностью до 20%.

Если мы представимъ себѣ, какъ ничтожно мала величина одной миллiонной дины на сантиметръ — одной миллiонъ-миллiонной (триллiонной) атмосферы — намъ останется только восхищаться искусствомъ экспериментатора, которому удалось произвести согласующiяся между собой измѣренiя и этимъ доказать, что существуетъ хоть приблизительное согласiе между теорiей и опытомъ.

V.

Давленiе свѣта въ астрономiи. Нѣкоторыя возможныя слѣдствiя.

Силы, вызываемыя давленiемъ свѣта, такъ малы, а пертурбацiи со стороны воздуха въ сравненiи съ ними такъ велики, что здѣсь, на поверхности земли, находясь въ окружающей ее атмосферѣ, мы не можемъ надѣяться на полученiе замѣтныхъ результатовъ этого давленiя за исключенiемъ тѣхъ случаевъ, когда приходится имѣть дѣло съ тщательно поставленными лабораторными опытами.

Но въ пространствѣ, въ которомъ планеты вращаются вокругъ солнца, гдѣ разрѣженіе матеріи должно быть куда больше, чѣмъ въ такъ называемомъ вакуумѣ, который мы въ состояніи производить, давленіе свѣта можетъ безпрепятственно развиваться, и результаты его дѣйствія могутъ быть весьма значительны.

Мы не имѣемъ возможности обнаружить какое-нибудь дѣйствіе на большія тѣла нашей системы. Такъ, напримѣръ, все давленіе солнечнаго свѣта, падающаго на землю, достигло бы, если бы онъ весь былъ поглощенъ, лишь 74 000 тонъ приблизительно*). Это кажется большой силой, но въ сравненіи съ силой, съ которой солнце притягиваетъ землю, съ силой въ 47 милліоновъ милліоновъ разъ бо́льшею, это просто ничто. Итакъ, отталкивая землю своимъ свѣтомъ, солнце одновременно тянетъ ее къ себѣ безмѣрно сильнѣе благодаря тяготѣнію.

Но, если размѣры тѣла, подвергающагося дѣйствію лучей, меньше, то отношеніе давленія свѣта къ силѣ тяготѣнія становится больше. Представимъ себѣ, что землю разбили на равные шары, и пусть радіусъ каждаго изъ нихъ равняется половинѣ земного радіуса. Такихъ шаровъ получилось бы восемь. Если бы эти восемь шаровъ были поставлены противъ солнца, какъ указано на рисункѣ 32**), то вмѣстѣ

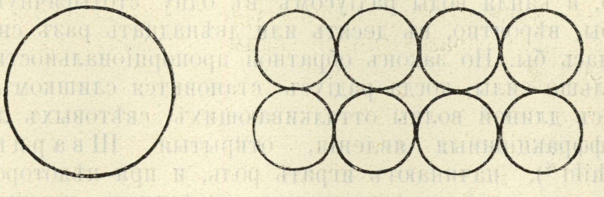


Рис. 32.

взятые они подвергались бы дѣйствію той же силы тяготѣнія, но площадь, на которую дѣйствовалъ бы солнечный свѣтъ, а, слѣдовательно, и давленіе свѣта, была бы въ два раза больше. Сила тяготѣнія оказалась бы поэтому только въ $23^1/_2$ милліона милліоновъ разъ больше свѣтового давленія. Если бы каждый изъ этихъ малыхъ шаровъ былъ бы снова разбитъ на восемь равныхъ сферъ вдвое меньшаго радіуса, то поверхность снова удвоилась бы, и сила тяготѣнія была бы въ $11^3/_4$ милліона милліоновъ разъ больше свѣтового давленія. Словомъ, для каждой сферы отношеніе свѣтового давленія къ силѣ тяготѣнія во столько разъ увеличивается, во сколько радіусъ уменьшается. Если бы мы продолжали разбивать землю на равныя сферы до тѣхъ поръ, пока радіусъ каждой не оказался бы въ 47 милліоновъ милліоновъ разъ меньше радіуса земли, то полное давленіе свѣта было бы равно полной силѣ тяготѣнія, и, если бы каждая сфера имѣла ту же среднюю

*) Здѣсь и въ другихъ мѣстахъ я принимаю энергію солнечнаго свѣта на разстояніи земли равной 2,5 калоріи въ минуту на 1 *кв. см.*

*) Надо представить себѣ, что солнечные лучи перпендикулярны къ плоскости чертежа.

плотность, что и земля, т. е. 5,5, то это равенство имѣло бы мѣсто для каждой сферы въ отдѣльности. Радіусъ каждой изъ нихъ равнялся бы тогда приблизительно 13,5 милліонной *см.* Если бы радіусъ уменьшился еще больше, то давленіе солнечнаго свѣта взяло бы верхъ надъ силой тяготѣнія, и солнце отталкивало бы сферу.

Если отталкиваніе сильнѣе притяженія на одномъ какомъ-нибудь разстояніи отъ солнца, то оно будетъ сильнѣе его въ томъ же отношеніи на любомъ другомъ, такъ какъ давленіе свѣта, какъ и сила тяготѣнія, обратно пропорціонально квадрату разстоянія, такъ что по мѣрѣ удаленія частицы и то и другое одинаково уменьшается. Если допустить, что плотность сферы равна плотности воды, т. е. въ $5^1/_2$ разъ меньше плотности земли, то давленіе будетъ равно притяженію при радіусѣ, въ $5^1/_2$ раза бо́льшемъ, т. е. при радіусѣ, равномъ приблизительно 75 милліоннымъ *см.*; это представляетъ собою приблизительно длину волны крайнихъ красныхъ лучей свѣта.

Поглощающія сферы плотности воды и такого радіуса не подвергались бы со стороны солнца ни притяженію, ни отталкиванію. Меньшія сферы подвергались бы отталкиванію, и, въ концѣ концовъ, были бы совершенно удалены изъ солнечной системы. Если бы онѣ были въ состояніи отражать немного свѣтъ, отталкиваніе возросло бы вслѣдствіе этого, и капля воды радіусомъ въ одну стотысячную *см.* отталкивалась бы, вѣроятно, въ десять или двѣнадцать разъ сильнѣе, чѣмъ притягивалась бы. Но законъ обратной пропорціональности радіусу не имѣетъ больше силы, когда радіусъ становится слишкомъ малымъ въ сравненіи съ длиной волны отталкивающихъ свѣтовыхъ лучей. Нѣкоторыя диффракціонныя явленія, открытыя Шварцшильдомъ (Schwarzschild*), начинаютъ играть роль, и при нѣкоторомъ радіусѣ, немного отличающемся отъ только-что указаннаго, отношеніе давленія къ притяженію начинаетъ быстро уменьшаться.

Если, слѣдовательно, въ солнечной системѣ имѣются пылинки, величина которыхъ порядка одной стотысячной сантиметра, а плотность не больше плотности воды, то онѣ будутъ подвергаться сильному отталкиванію и, наконецъ, будутъ удалены изъ нашей системы.

Образованіе кометныхъ хвостовъ, которые идутъ почти всегда по направленію отъ солнца и приблизительно по прямой линіи, приписывалось давленію свѣта.

Эйлеръ (Euler) уже давно пользовался свѣтовымъ давленіемъ для объясненія существованія хвостовъ у кометъ, но у него не было яснаго доказательства, что свѣтъ производитъ давленіе. Нѣсколько лѣтъ послѣ того, какъ Максвеллъ опубликовалъ свою теорію давленія, Фицджеральдъ (Fitzgerald**) воскресилъ это объясненіе, примѣнивъ его къ допущенію, что хвостъ состоитъ изъ газообразныхъ веществъ. Но какъ разъ въ этомъ случаѣ свѣтовымъ давленіемъ совершенно невозможно объяснить образованіе хвоста, что впослѣдствіи***)

*) Kgl. Bayer. Ak. d. Wiss., XXXI, 293 (1901).

**) Scientific Writings, p. 108.

***) Scientific Writings, p. 531.

призналъ самъ Фитцджеральдъ, потому что ни одинъ газъ не поглощаетъ достаточнаго количества движенія, чтобы пріобрѣсти скорость, которая наблюдается въ развернувшемся хвостѣ.

Вскорѣ послѣ опубликованія Фитцджеральдомъ своей гипотезы Лебедевъ*) занялся изслѣдованіемъ давленія, производимаго на маленькія поглощающія частицы, и нашелъ, что, отталкиваніе преодолѣвало бы притяженіе, если бы частицы были достаточно малы, и что такимъ образомъ могли бы быть объяснены движенія, наблюдаемыя въ хвостахъ нѣкоторыхъ кометъ, при допущеніи, что они состоятъ изъ частицъ требуемой малости. Арреніусъ (Arrhenius**) изслѣдовалъ этотъ вопросъ болѣе подробно и построилъ гипотезу, объясняющую нѣкоторыми электрическими дѣйствіями, исходящими отъ солнца, самосвѣченіе хвоста, которое несомнѣнно имѣетъ мѣсто рядомъ со свѣченіемъ, вызываемымъ падающими на него солнечными лучами.

Если наблюдать ту часть головы кометы, которая обращена къ солнцу, то получается впечатлѣніе — можетъ быть, это и есть одно лишь впечатлѣніе — что въ различныхъ направленіяхъ съ одинаковой приблизительно скоростью выбрасывается впередъ матерія, которая дѣлаетъ затѣмъ поворотъ и продолжаетъ свой путь далеко назадъ; все это похоже на фонтанъ, выбрасывающій капли воды, которыя поднимаются на небольшую высоту и затѣмъ падаютъ внизъ. Если съ кометами дѣйствительно такъ обстоитъ дѣло, если передняя часть или „корона“ ядра, обращенная къ солнцу, дѣйствительно представляетъ изъ себя нѣчто въ родѣ фонтана, то можно вычислить, какъ относится къ силѣ тяготѣнія сила отталкиванія, которая сперва уничтожаетъ скорость, направленную впередъ, а затѣмъ гонитъ матерію назадъ, образуя хвостъ. Въ однѣхъ кометахъ отталкиваніе въ двадцать и сорокъ разъ сильнѣе притяженія, тогда какъ въ другихъ разница между обѣими силами весьма мала. У нѣкоторыхъ кометъ бываетъ по нѣскольку хвостовъ, и въ каждомъ изъ нихъ отношеніе отталкиванія къ притяженію, видимо, иное. Въ случаяхъ, подобныхъ только-что описаннымъ, наблюдаемыя явленія можно было бы объяснить давленіемъ свѣта, если сдѣлать предположеніе, что при приближеніи кометы къ солнцу ядро выбрасываетъ облака пыли, а, можетъ быть, капель одинаковой величины, обладающихъ одной и той же скоростью. Но относительно кометы Моргоуза (Morehouse) 1908 года Идингтонъ (Edington***) находитъ, что для видимыхъ траекторій струящейся матеріи отталкиваніе должно быть въ сотни разъ сильнѣе притяженія, а это можетъ быть объяснено давленіемъ свѣта съ большой лишь натяжкой.

Итакъ, теорія свѣтового давленія недостаточна для объясненія движеній, которыя какъ-будто наблюдаются въ нѣкоторыхъ случаяхъ.

---

*) „Annalen der Physik und Chemie“ XLV, 1892.

**) Lehrbuch der Kosmischen Physik, 1903, или Worlds in the Making (1908), chap. IV.

***) „Monthly Notices R. A. S.“, March 1910.

Но эта теорія обаятельна и при томъ единственная, которая пытается дать объясненіе образованію кометныхъ хвостовъ и ихъ движенію по опредѣленнымъ траекторіямъ. Электрическое объясненіе является въ настоящее время смутнымъ; и, хотя мы можемъ быть почти увѣренными, что самосвѣченіе хвоста есть явленіе электрическое, всякія разсужденія о природѣ послѣдняго представляютъ собой пока одну лишь гипотезу. Со временемъ мы, можетъ быть, найдемъ, что здѣсь играютъ роль и свѣтовое давленіе, и электрическое дѣйствіе.

Оставляя въ сторонѣ вопросъ объ образованіи кометныхъ хвостовъ, какъ неразрѣшимую пока загадку, займемся другой группой тѣлъ, которыя можно вполнѣ сравнить съ частицами, отбрасываемыми солнцемъ, и вмѣстѣ съ тѣмъ отчасти съ планетами, группой тѣлъ, которыя изобилуютъ въ солнечной системѣ и проявляютъ себя, когда попадаютъ въ нашу атмосферу, гдѣ они погибаютъ въ видѣ падающихъ звѣздъ. Судя по интенсивности свѣта, испускаемаго ими при сгораніи, они должны быть, вообще, невелики; многія изъ нихъ представляютъ собой лишь крупинки матеріи.

Предположимъ, что одно изъ этихъ тѣлецъ вращается вокругъ солнца по окружности и на такомъ же приблизительно разстояніи отъ него, какъ земля. Въ такомъ случаѣ оно представляетъ собой во всѣхъ отношеніяхъ маленькую планету. Пусть оно будетъ чернаго цвѣта и такимъ образомъ поглощаетъ весь падающій на него солнечный свѣтъ.

Если оно отражаетъ часть лучей, то эффектъ, съ котораго намъ придется начать наше изслѣдованіе, получится нѣсколько большій, чѣмъ въ случаѣ чернаго тѣла.

Допустимъ, что радіусъ шарика 1 *см.*, а плотность равна плотности земли $5^1/_2$. Отталкиваніе его солнечнымъ свѣтомъ будетъ уменьшать общее притяженіе приблизительно на 1/74 000. А изъ этого слѣдуетъ, что ему нѣтъ надобности вращаться съ точно такой же большой скоростью, какъ земля, чтобы не упасть на солнце. Скорость его меньше на 1/2 . 74 000, вслѣдствіе чего его годъ больше нашего на 1/148 000, или, приблизительно, на 210 секундъ $= 3^1/_2$ минуты. Если бы радіусъ частицы былъ 1/1000 *см.*, то ея годъ увеличился бы на 58 часовъ или, приблизительно, на $2^1/_2$ дня.

Если бы имѣлась группа частицъ меньше одного *см.* въ діаметрѣ, которыя были бы разбросаны въ пространствѣ такъ рѣдко, что можно было бы пренебречь дѣйствіемъ ихъ другъ на друга, то онѣ постепенно распредѣлились бы такъ, что большія частицы были впереди, а меньшія сзади, и, въ концѣ концовъ, онѣ образовали бы кольцо вокругъ солнца.

Всѣ эти разсужденія остаются въ силѣ и въ томъ случаѣ, когда орбита, по которой движутся частицы, представляетъ собой эллипсъ, а не простую окружность, какъ мы это предположили.

Если орбита — эллипсъ, то имѣетъ мѣсто еще другой эффектъ свѣтового давленія, который мы можемъ назвать „абсорбціоннымъ (поглощательнымъ) эффектомъ Допплера“ (Doppler Reception Effect).

Пусть PAQ (рис. 33) будетъ орбита. Когда частица проходитъ черезъ P по направленію къ перигелію A и ея разстояніе отъ солнца такимъ образомъ уменьшается, она идетъ навстрѣчу потоку количества движенія, идущему отъ солнца; поэтому она получаетъ ежесекундно больше количества движенія и подвергается большему давленію солнечнаго свѣта, чѣмъ въ томъ случаѣ, когда она въ покоѣ или вращается по орбитѣ, имѣющей форму окружности. Когда же частица прошла черезъ перигелій A и движется по направленію отъ солнца къ точкѣ Q, напримѣръ, то она идетъ нѣкоторое время вмѣстѣ съ потокомъ количества движенія, исходящаго отъ солнца, и получаетъ такимъ образомъ каждую секунду меньше количества движенія, чѣмъ въ томъ случаѣ если она въ покоѣ или вращается по окружности. Мы можемъ разсматривать силы, вызываемыя избыткомъ или недостаткомъ количества движенія, какъ добавочныя силы, которыя присоединяются къ силѣ, подчиняющейся закону обратной пропорціональности квадрату разстоянія. Въ точкѣ P добавочная сила направлена по SP и представляетъ собою сопротивленіе укорачиванію SP, а въ Q она направлена по QS и представляетъ собой сопротивленіе удлиненію SQ. Результатомъ всего этого является сопротивленіе измѣненію разстоянія отъ солнца, т. е. стремленіе сдѣлать эллиптическую орбиту менѣе эллиптической и болѣе круговой.

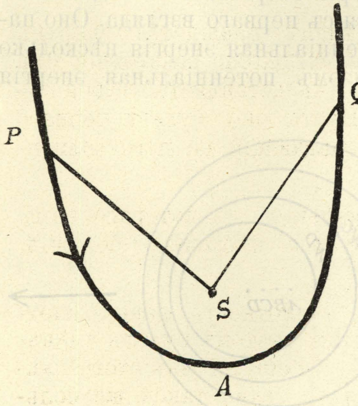


Рис. 33.

Если группа частицъ разной величины движется по эллипсу, то послѣдній принимаетъ форму, приближающуюся все болѣе и болѣе къ окружности. Но за данный промежутокъ времени это дѣйствіе сильнѣе для меньшихъ частицъ, чѣмъ для большихъ; это ведетъ къ сортировкѣ ихъ, такъ какъ для первыхъ эллиптичность уменьшается быстрѣе, чѣмъ для вторыхъ.

Есть еще третье дѣйствіе давленія свѣта на маленькую частицу, которое мы можемъ назвать „эмиссіоннымъ" (испускательнымъ) эффектомъ Допплера (Doppler Emission Effect) и которое должно проявляться, какъ сила, всегда сопротивляющаяся движенію частицы. Солнце нагрѣваетъ послѣднюю съ той стороны, которая обращена къ нему, и, если она достаточно мала, то теплота проникаетъ во всѣ части довольно быстро, такъ что практически температура ея всюду одна и та же. Если она находится на такомъ же разстояніи отъ солнца, какъ земля, и если она поглощаетъ всѣ падающіе на нее лучи, то температура ея будетъ приблизительно равна средней температурѣ на поверхности земли, а именно около 15° C. При этой температурѣ она испускаетъ столько же лучистой энергіи, сколько поглощаетъ. Но волны, которыя она посылаетъ въ направленіи своего движенія короче волнъ, посылаемыхъ ею въ боковыхъ направленіяхъ, а послѣднія, въ свою очередь, короче волнъ, идущихъ назадъ. Это видно изъ рисунка 34, на которомъ A, B, C, D обозначаютъ послѣдовательныя положенія частицы, а W_A, W_B, W_C, W_D — положенія въ данный моментъ волнъ, посылаемыхъ частицой, когда она находится въ A, B, C, D. Изъ доказаннаго въ первой главѣ слѣдуетъ, что болѣе короткія волны спереди обладаютъ большей энергіей, чѣмъ болѣе длинныя сзади, и что поэтому давленіе больше спереди, чѣмъ сзади; разность представляетъ собой силу, прямо противоположную движенію. Вычисленія показываютъ, что эта сила пропорціональна излученію солнца, поперечному сѣченію частицы и ея скорости. Результатомъ ея дѣйствія является то, что частица теряетъ всегда энергію. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ она испускаетъ всегда лучистую энергію въ большемъ количествѣ, чѣмъ получаетъ, то ея расходъ больше прихода, и она постоянно заимствуетъ изъ своего капитала, изъ своего собственнаго запаса энергіи, чтобы сводить концы съ концами.

Когда вращающееся вокругъ солнца тѣло подвергнуто дѣйствію слабой силы сопротивленія, вызывающей потерю энергіи, то его движеніе не замедляется, какъ это можетъ показаться съ перваго взгляда. Оно падаетъ по направленію къ солнцу, и его потенціальная энергія нѣсколько уменьшается. Но потерянная такимъ образомъ потенціальная энергія больше той, которая теряется благодаря силѣ сопротивленія; разность превращается въ кинетическую энергію, и частица движется быстрѣе, чѣмъ раньше. Результатомъ этого сопротивленія движенію является, слѣдовательно, увеличеніе скорости при все уменьшающейся орбитѣ.

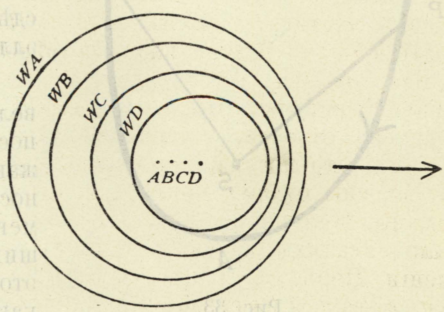


Рис. 34.

Вычисленія показываютъ, что сфера плотности земли, черная настолько, чтобы поглощать всѣ падающіе на нее солнечные лучи, и имѣющая радіусъ въ 1 *см.*, приблизится въ первый годъ къ солнцу, если она находится отъ него на такомъ же разстояніи, какъ земля, приблизительно на 820 метровъ. При слѣдующихъ оборотахъ, для совершенія которыхъ требуется все меньше и меньше времени, приближеніе тѣла будетъ все больше и больше уменьшаться; если же будемъ брать послѣдовательно періоды, равные нашему году, то приближеніе будетъ увеличиваться. Если бы можно было допустить, что тѣло движется приблизительно по круглой спирали, все время укорачивающей его разстояніе по одному и тому же закону, то оно достигло бы солнца по истеченіи приблизительно 90 000 000 лѣтъ.

Съ меньшими частицами явленіе происходитъ быстрѣе, и частица радіусомъ въ $^1/_{1000}$ *см.* можетъ пройти разстояніе отъ земли до солнца въ 90 000 лѣтъ.

Резюмируемъ сказанное о дѣйствіяхъ свѣтового давленія. Во-первыхъ, наблюдается отталкиваніе чрезвычайно малыхъ частицъ, которыя могутъ быть совершенно удалены изъ нашей системы, если онѣ достаточно малы. Тѣла большихъ размѣровъ, для которыхъ сила тяготѣнія превосходитъ давленіе свѣта, испытываютъ дѣйствіе трояксго рода:

1. Увеличеніе періода обращенія.

2. Стремленіе придать орбитѣ болѣе круглую форму.

3. Превращеніе траекторіи въ спираль, которая раньше или позже оканчивается на солнцѣ.

За промежутокъ времени, съ которымъ намъ приходится имѣть дѣло, невозможно опредѣлить величину этихъ дѣйствій на такія большія тѣла, какъ планеты; но дѣйствія, производимыя на тѣла, радіусъ которыхъ меньше 1 *см.*, могли бы быть измѣрены. Изъ этого можно сразу вывести слѣдующее заключеніе. Наша система теперь полна такихъ тѣлъ, если вѣрно предположеніе, что многія изъ падающихъ звѣздъ представляютъ изъ себя маленькія частицы. Какой бы возрастъ мы ни приписывали солнцу, онъ долженъ быть несравненно больше времени, необходимаго для того, чтобы притянуть къ себѣ всѣ подобнаго рода частицы, которыя первоначально находились въ его системѣ. Запасъ частицъ долженъ былъ, слѣдовательно, безпрерывно возобновляться, а это ведетъ насъ къ вѣроятному, по крайней мѣрѣ, заключенію, что онъ возобновляется изъ пространства, находящагося внѣ нашей системы. Имѣются нѣкоторыя данныя допустить, что мы черпаемъ отчасти, по крайней мѣрѣ, изъ кометъ, и если мы предположимъ, что послѣднія состоятъ изъ большихъ массъ такихъ частицъ, мы должны будемъ принять, что разсмотрѣнныя нами здѣсь дѣйствія должны постепенно повести къ ихъ уничтоженію, если бы даже не было никакихъ другихъ причинъ, дѣйствующихъ въ томъ же направленіи. Первымъ дѣломъ меньшія частицы обнаружили бы стремленіе задерживаться въ своей орбитѣ. Затѣмъ, всѣ частицы,—меньшія раньше, чѣмъ большія,—начали бы двигаться по орбитамъ все менѣе и менѣе эллиптическимъ. У всѣхъ было бы, кромѣ того, стремленіе уменьшать свои орбиты и упасть, въ концѣ концовъ, на солнце. Есть очень вѣсскія основанія предполагать, что нѣкоторые періодическіе метеорные дожди представляютъ собою разрушенныя кометы, которыя носятся по своимъ орбитамъ. Кромѣ того, мы можемъ, повидимому, допустить, что мы присутствуемъ при дальнѣйшемъ разрушеніи кометъ, частицы которыхъ движутся по орбитамъ, сильно отличающимся отъ первоначальныхъ, когда по небу проносится метеоръ, который не можетъ быть причисленъ къ какой-нибудь опредѣленной группѣ.

Но все ведетъ къ одному. Солнце не можетъ допустить присутствія пыли. Самыя мелкія частицы оно совершенно удаляетъ изъ своей системы, производя на нихъ давленіе своимъ свѣтомъ. Теплотой своей оно нагрѣваетъ большія частицы. Послѣднія испускаютъ, въ свою очередь, эту теплоту и вмѣстѣ съ ней часть своей энергіи, которая даетъ имъ возможность сопротивляться притяженію. Мало-помалу солнце притягиваетъ ихъ къ себѣ; наконецъ, онѣ соединяются съ нимъ, и ихъ отдѣльное существованіе прекращается.

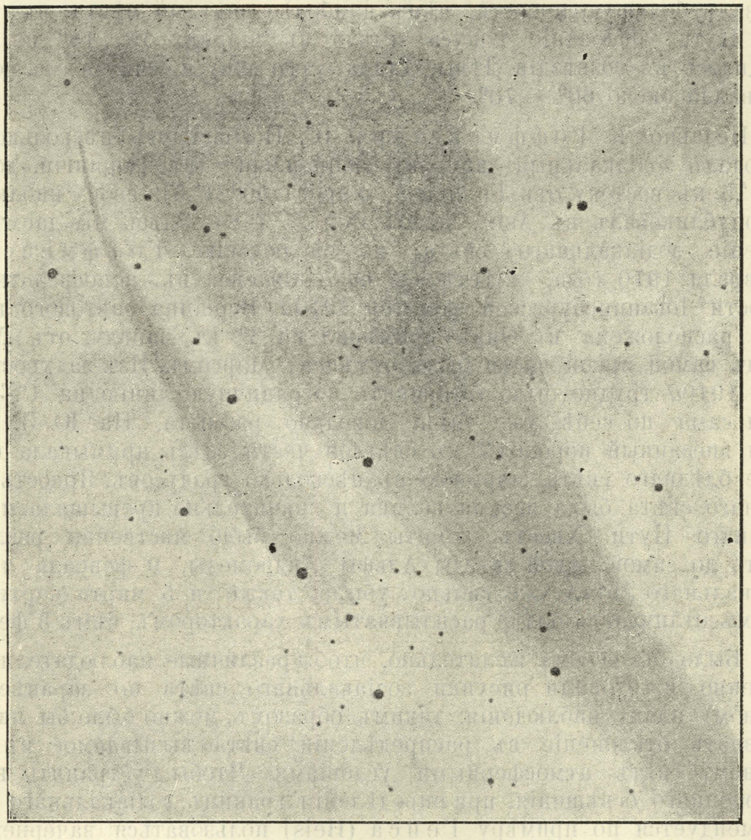
Зодіакальный свѣтъ

Ф. С. Архенгольдъ.

Въ среднихъ широтахъ зодіакальный свѣтъ представляется въ видѣ очень мягкаго, слабаго пирамидальнаго пучка, видимаго невооруженнымъ глазомъ лучше всего въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ горизонтъ не затуманенъ пылью и не озаренъ искусственнымъ свѣтомъ. Этотъ чрезвычайно слабый свѣтъ подымается въ видѣ пирамиды надъ горизонтомъ подъ различными углами, смотря по положенію эклиптики, и тянется незадолго до восхода солнца на восточной части неба и короткое время послѣ заката — на западѣ, простираясь до области Плеядъ. Съ высокихъ горъ или подъ тропиками, а при благопріятныхъ условіяхъ и въ среднихъ широтахъ, можно замѣтить еще и другой свѣтъ, гораздо болѣе слабый и простирающійся на меньшую длину, какъ разъ противъ солнца; это такъ называемый „отблескъ“ или противосіяніе. Если атмосфера особенно чиста, то можно даже замѣтить слабое соединеніе пирамидальнаго зодіакальнаго свѣта съ „отблескомъ“ вдоль всей эклиптики; это соединеніе наблюдалось впервые Александромъ фонъ-Гумбольдтомъ въ 1803 г.

Многочисленные фотографическіе снимки зодіакальнаго свѣта, изготовленные проф. Вольфомъ (Wolf) при помощи чрезвычайно сильнаго объектива (кварцевая линза съ отверстіемъ въ 37 *мм.* и фокальнымъ разстояніемъ всего въ 25 *мм.*) такъ называемаго Schnittphotometer, фотометра, показали, что главная ось зодіакальнаго свѣта лежитъ не въ эклиптикѣ, но сдвинута относительно нея на уголъ въ 7^0; это обстоятельство говоритъ въ пользу гипотезы, что кольцо зодіакальнаго свѣта расположено въ плоскости солнечнаго экватора. Еще раньше Маршану (Marchand) удалось на Pic du Midi вывести изъ ряда надежныхъ наблюденій, что ось зодіакальнаго свѣта лежитъ вблизи одного изъ большихъ круговъ, который наклоненъ къ эклиптикѣ подъ угломъ отъ 6^0 до 7^0; восходящій узелъ этого круга имѣетъ долготу въ 70^0. Такъ какъ наклонъ солнечнаго экватора къ эклиптикѣ тоже составляетъ 7^0, и восходящій узелъ плоскости солнечнаго экватора имѣетъ долготу приблизительно въ 74^0, то представляется вѣроятнымъ, что ось зодіакальнаго свѣта совпадаетъ съ плоскостью солнечнаго экватора. Въ такомъ случаѣ мы въ правѣ предположить, что масса зодіакальнаго свѣта была извержена у экватора солнцемъ въ прежнюю стадію его развитія. О природѣ частицъ, порождающихъ зодіакальный свѣтъ, мы не можемъ сказать ничего опредѣленнаго.

Спектроскопическими изслѣдованіями съ несомнѣнностью установлено лишь, что спектръ зодіакальнаго свѣта сходенъ съ солнечнымъ, и что такъ называемая свѣтлая линія сѣвернаго сіянія въ желтозеленой части спектра замѣтна также и здѣсь. Но весьма возможно, что эта линія происходитъ не отъ самого зодіакальнаго свѣта, но отъ сѣверныхъ сіяній, которыя случайно были видимы въ томъ же мѣстѣ, что и зодіакальный свѣтъ.



Зодіакальный свѣтъ и комета 1910 *a*. 3 февраля 1910 г., 7 час. 3 мин. Sonneberg: h: 11° 10′,5, φ: + 50° 21′,5.

Колебанія яркости, наблюдавшіяся Кассини (Cassini) еще въ концѣ XVII столѣтія, нельзя пока считать вполнѣ установленными; ихъ можно объяснять неодинаковой прозрачностью нашей атмосферы.

До сихъ поръ не установлено, также вызывается ли зодіакальный свѣтъ только отраженными солнечными лучами или же также электрическимъ дѣйствіемъ солнечныхъ пятенъ. Теперь важно прежде всего, чтобы производилось возможно больше наблюденій зодіакальнаго свѣта; въ этомъ отношеніи существенную услугу могутъ оказать все учащающіеся полеты на воздушныхъ шарахъ. Такъ, А. Ганскій во время ночного полета на воздушномъ шарѣ, предпринятаго въ Парижѣ 15 ноября 1898 г., съ цѣлью наблюденія падающихъ звѣздъ (Леонидъ), сдѣлалъ рисунокъ зодіакальнаго свѣта. Въ это время года зодіакальный свѣтъ изъ нижнихъ слоевъ атмосферы виденъ лишь съ трудомъ. Онъ имѣлъ форму конуса, ось котораго была направлена къ Регулу, самой яркой звѣздѣ въ созвѣздіи Льва, и въ своей срединѣ обнаруживалъ большую яркость, чѣмъ наиболѣе свѣтлыя мѣста въ Млечномъ Пути. Основаніе конуса имѣло въ ширину отъ 15° до 20° и находилось въ созвѣздіи Дѣвы. Длина всего конуса, считая отъ солнца, составляла около 60° — 70°.

Недавно К. Гоффмейстеръ (C. Hoffmeister) нѣсколько разъ наблюдалъ зодіакальный свѣтъ въ Зонненбергѣ (въ Тюрингіи, долгота 11°10′,5 къ востоку отъ Гринвича, широта 50°21′,5); свои наблюденія онъ опубликовалъ въ Astr. Nachrichten № 4484. Здѣсь мы даемъ изображеніе зодіакальнаго свѣта, по наблюденію Гоффмейстера 3 февраля 1910 года, вмѣстѣ съ находившейся въ непосредственной близости Іоганнисбургской кометой 1910*a*. Вершина свѣтового конуса была расположена въ Овнѣ примѣрно на 3° къ западу отъ Марса; конецъ самой яркой части былъ отмѣченъ Марсомъ. Изъ-за хвоста кометы 1910*a* трудно было установить пограничную линію на С.-З., которая сама по себѣ уже была довольно размыта. На Ю-З. замѣчался внезапный переходъ: къ свѣтлой части здѣсь примыкала полоса болѣе блѣднаго свѣта шириною въ нѣсколько градусовъ. Яркость зодіакальнаго свѣта была весьма велика и значительно превышала яркость Млечнаго Пути. Хвостъ кометы можно было явственно различить вплоть до самой яркой звѣзды Альфы Андромеды. 9 февраля яркость зодіакальнаго свѣта уже сильно убыла; также и 5 марта картина въ общемъ отличалась болѣе расплывчатымъ характеромъ, чѣмъ 3 февраля.

Было бы весьма желательно, чтобы различные наблюдатели одновременно изготовили рисунки зодіакальнаго свѣта по заранѣе условленному плану наблюденія; такимъ образомъ, можно было бы явственно узнать отклоненіе въ распредѣленіи свѣта вызываемое въ зодіакальномъ свѣтѣ атмосферными условіями. Чтобы устранить вліяніе посторонняго освѣщенія, при опредѣленіи границъ зодіакальнаго свѣта, рекомендуется по примѣру Гейса (Heis) пользоваться зачерненнымъ извнутри цилиндромъ изъ картона. Достаточно, если цилиндръ имѣетъ въ длину и въ діаметрѣ около 30 *см*.

Въ особенности важно установить, идутъ ли болѣе свѣтлыя мѣста внутри зодіакальнаго круга рука объ руку съ вращеніемъ солнечныхъ пятенъ, — электрическихъ центровъ возмущенія на солнцѣ. Такимъ способомъ очень хорошо можно будетъ провѣрить, дѣйствительно ли зодіакальный свѣтъ обусловливается слабыми очень маленькими тѣльцами, которыя обращаются вокругъ солнца въ плоскости земной орбиты или солнечнаго экватора, и насколько далеко простирается это загадочное свѣтовое кольцо.

О группахъ и числовыхъ системахъ*).

Дж. Юнга.

Классъ и операція.

Понятіе о классѣ или совокупности объектовъ является основнымъ не только въ математикѣ, но и въ логикѣ. Настоящая статья посвящена изученію классовъ, въ которыхъ установлены такъ называемыя „операціи“.

Данъ классъ **C**; обозначимъ его элементы буквами a, b, ... Что слѣдуетъ понимать подъ операціей, производимой надъ элементами этого класса? Мы говоримъ, что операція **о** надъ элементами a и b опредѣлена, если даннымъ элементамъ a и b и опредѣленной ихъ послѣдовательности (порядку) соотвѣтствуетъ опредѣленная третья вещь c. Это значитъ, что каждымъ двумъ элементамъ, взятымъ въ опредѣленной послѣдовательности, мы относимъ нѣкоторый третій объектъ. Новая вещь c, которую мы ассоціируемъ съ данными элементами — или, которая соотвѣтствуетъ даннымъ элементамъ, — при данномъ порядкѣ ихъ, называется результатомъ операціи, и мы пишемъ $a\text{o}b = c$ или $b\text{o}a = c'$, смотря по тому, даны ли элементы въ порядкѣ a, b или въ порядкѣ b, a. Если, напримѣръ, данными элементами являются числа 3 и 5, а именно первый элементъ 3, второй 5, и дана операція дѣленія, то соотвѣтствующимъ результатомъ будетъ число $^3/_5$. Если бы элементы и операція оставались тѣ же, но порядокъ элементовъ былъ обратный, то результатъ получился бы иной, а именно $^5/_3$. Если бы данной операціей было сложеніе, то результаты были бы одинаковы при одномъ и при другомъ порядкѣ элементовъ. Въ самомъ дѣлѣ, $3 + 5 = 8$ и $5 + 3 = 8$. Если результатъ $a\text{o}b$ равенъ результату $b\text{o}a$, то операцію **о** называютъ коммутативной или перемѣстительной (по отношенію къ элементамъ a и b).

Результатъ c можетъ принадлежать или не принадлежать классу **C** данныхъ элементовъ a и b. Въ предыдущихъ примѣрахъ, если за классъ **C** принять классъ всѣхъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, то результатъ $3 + 5$ принадлежитъ тому же классу, что и первые элементы (3 и 5), но результаты $^3/_5$ и $^5/_3$ этому классу не принадлежатъ, и необходимо выйти за предѣлы даннаго класса, чтобы найти элементъ c, составляющій результатъ операціи.

Опредѣленіе группы.

Въ тѣсной связи съ идеей операціи находится понятіе о группѣ по отношенію къ нѣкоторой операціи. Условимся говорить, что классъ **C** представляетъ группу по отношенію къ нѣкоторой операціи **о**, которую по предположенію можно произвести надъ любыми

*) Глава изъ сочиненія J. W. Young „Lectures on fundamental concepts of Algebra and Geometry“. Сочиненіе будетъ издано въ русскомъ переводѣ.

двумя элементами класса **C**, если удовлетворены слѣдующія четыре допущенія:

G_1. Если a и b принадлежатъ классу **C**, то $a\mathbf{o}b$ тоже принадлежитъ **C**.

G_2. Если a, b, c, ..., суть элементы класса **C**, то результатъ разсматриваемой операціи, выполненной надъ элементами a и $b\mathbf{o}c$, въ указанномъ порядкѣ, одинаковъ съ результатомъ той же операціи надъ $a\mathbf{o}b$ и c, въ указанномъ порядкѣ. Другими словами,

$$a\mathbf{o}(b\mathbf{o}c) = (a\mathbf{o}b)\mathbf{o}c.$$

Это такъ называемый ассоціативный (или сочетательный) законъ.

G_3. Въ классѣ **C** существуетъ такой элементъ i, что $a\mathbf{o}i = i\mathbf{o}a = a$ для всякаго элемента a класса **C**.

G_4. Всякому элементу a класса **C** соотвѣтствуетъ такой элементъ a' того же класса, что $a\mathbf{o}a' = i$.

Элементъ i называютъ тождествомъ или тождественнымъ элементомъ данной группы. Элементъ a' называютъ обратнымъ по отношенію къ элементу a.

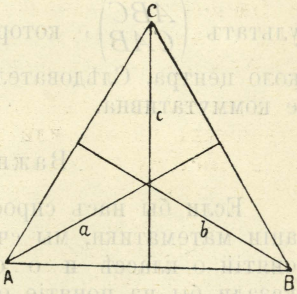
Если въ качествѣ класса **C** принять систему обыкновенныхъ вещественныхъ чиселъ или же систему раціональныхъ чиселъ или, наконецъ, систему всѣхъ цѣлыхъ чиселъ, а подъ операціей **o** понимать дѣйствіе сложенія, то окажется, что всѣ эти допущенія удовлетворены. Въ самомъ дѣлѣ, если a, b, c, ..., суть элементы класса **C**, то 1^0 $a + b$ заключается въ **C**, 2^c $a + (b + c) = (a + b) + c$, 3^0 существуетъ такое число (0), что $a + 0 = 0 + a = a$ и 4^0 всякому числу a въ классѣ **C** соотвѣтствуетъ такое другое число a', тоже въ **C**, что $a + a' = 0$, другими словами — всякому числу въ **C** соотвѣтствуетъ другое число, обратное по отношенію къ первому. Поэтому совокупность вещественныхъ чиселъ, совокупность раціональныхъ чиселъ и совокупность всѣхъ цѣлыхъ чиселъ образуютъ, каждая, группу по отношенію къ операціи сложенія. Принимая за классъ **C** систему вещественныхъ чиселъ, а за операцію **o** дѣйствіе умноженія, мы найдемъ, что и въ этомъ случаѣ условія для группы выполнены, кромѣ одного только частнаго случая. Произведеніе двухъ чиселъ класса **C** всегда есть нѣкоторое число того же класса, ассоціативный законъ имѣетъ мѣсто, существуетъ число, соотвѣтствующее тождественному элементу i, а именно — число 1, такъ какъ $1 \times a = a \times 1 = a$. Каждому числу a въ этомъ классѣ отвѣчаетъ другое такое число a', что $aa' = 1$, за исключеніемъ числа 0. Не существуетъ такого числа, которое, будучи умножено на 0, даетъ 1.

Исходя изъ этихъ допущеній легко показать, что во всякой группѣ существуетъ только одинъ тождественный элементъ i, а также что для каждаго элемента существуетъ только одинъ ему обратный элементъ. Нетрудно видѣть, что допущеніе существованія двухъ тождественныхъ или двухъ обратныхъ элементовъ приводитъ къ противорѣчію. (См. примѣчаніе 1° въ концѣ статьи).

Операція, не коммутативная вообще, можетъ быть таковой въ отдѣльныхъ случаяхъ. Дѣленіе, напримѣръ, не коммутативно, если элементы a и b не равны, такъ какъ a/b не равно b/a. Но если a и b равны и отличны отъ нуля, то операція дѣленія одного изъ такихъ элементовъ на другой коммутативна, такъ какъ она всегда приводитъ къ одному и тому же результату, а именно къ 1. Группа, въ которой операція **o** коммутативна для всякихъ двухъ элементовъ, называется сама коммутативной.

Одна геометрическая группа.

Разсмотримъ въ качествѣ примѣра группы, въ которой встрѣчаются некоммутативныя операціи, вращенія равносторонняго треугольника ABC около его центра и около его осей симметріи, которыя преобразовываютъ треугольникъ въ себя самого. Подъ преобразованіемъ треугольника въ себя самого мы понимаемъ такое передвиженіе треугольника, при которомъ вершины A, B, C принимаютъ прежнія положенія, если не считать возможной перестановки буквъ A, B, C. Въ этомъ случаѣ элементами класса **C** являются три вращенія треугольника въ его плоскости около его центра на углы въ 120^0, 240^0 и 360^0 *) и три вращенія треугольника около его медіанъ на уголъ въ 180^0 (см. черт.).



Послѣ каждаго изъ этихъ вращеній треугольникъ налагается на самого себя или совпадаетъ со своимъ прежнимъ положеніемъ. Если мы примемъ, за доказанный тотъ фактъ, что эти шесть движеній являются единственно возможными движеніями, преобразовывающими треугольникъ въ себя самого, то мы сразу убѣдимся въ томъ, что если два такихъ вращенія совершить послѣдовательно одно за другимъ, то результатъ будетъ равносиленъ одному простому вращенію, принадлежащему къ тому же классу. Такимъ образомъ, наши шесть вращеній удовлетворяютъ первому изъ постулатовъ, необходимыхъ для того, чтобы классъ вращеній представлялъ группу по отношенію къ операціи, состоящей въ комбинированіи вращеній. Ассоціативный законъ также имѣетъ мѣсто. Тождественный элементъ представленъ вращеніемъ около центра на 360^0. Для каждаго вращенія существуетъ обратный ему элементъ; каждому вращенію около центра на уголъ въ a^0 соотвѣтствуетъ вращеніе около той же точки на уголъ въ $(360 - a)^0$, которое въ соединеніи съ первымъ вращеніемъ эквивалентно тождественному элементу или вращенію на 360^0. Каждому изъ трехъ переворачиваній треугольника на 180^0

---

*) Всѣ вращенія совершаемъ противъ часовой стрѣлки.

соотвѣтствуетъ, въ качествѣ обратнаго элемента, повтореніе того же самаго переворачиванія, которое вмѣстѣ съ первымъ вращеніемъ приводитъ треугольникъ въ первоначальное положеніе. Но легко видѣть, что наша операція, вообще, не коммутативна. Обозначимъ медіаны, проходящія черезъ точки A, B, C, буквами a, b, c. Вращеніе на 180^0 около a переноситъ B въ C, C въ B и A въ A. Этотъ результатъ можно условно обозначить символомъ $\begin{pmatrix} ABC \\ ACB \end{pmatrix}$. Подобное же вращеніе около c переноситъ A въ B, B въ A и C въ C и можетъ быть обозначено символомъ $\begin{pmatrix} ABC \\ BAC \end{pmatrix}$. Результатъ послѣдовательнаго совершенія этихъ двухъ вращеній состоитъ въ переносѣ A въ B, B въ C и C въ A или, короче, эквивалентенъ подстановкѣ $\begin{pmatrix} ABC \\ BCA \end{pmatrix}$, которая, очевидно, эквивалентна вращенію около центра на 120^0. Если же мы измѣнимъ порядокъ вращеній, а именно сперва выполнимъ вращеніе около c, а затѣмъ уже вращеніе около a, то получимъ результатъ $\begin{pmatrix} ABC \\ CAB \end{pmatrix}$, который эквивалентенъ простому вращенію на 240^0 около центра. Слѣдовательно, операція комбинированія этихъ вращеній не коммутативна.

Важность понятія о группѣ.

Если бы насъ спросили, какое изъ понятій, лежащихъ въ основаніи математики, мы считаемъ наиболѣе важнымъ послѣ основныхъ понятій о классѣ и о сопряженіи элементовъ двухъ классовъ, то мы указали бы на понятіе о группѣ. Совокупность всѣхъ движеній твердаго тѣла въ пространствѣ образуетъ группу. Это значитъ, что всякое такое движеніе въ соединеніи съ любымъ другимъ движеніемъ такого же рода, происходящимъ вслѣдъ за первымъ, равносильно одному движенію твердаго тѣла. Эта группа играетъ центральную роль въ элементарной геометріи. Но въ данномъ случаѣ мы ввели понятіе о группѣ съ другой цѣлью: при помощи этого понятія мы хотимъ опредѣлить, что слѣдуетъ понимать подъ числовой системой въ абстрактномъ и наиболѣе общемъ смыслѣ. Позже мы увидимъ, въ какомъ отношеніи надо сузить понятіе о всеобщей числовой системѣ, чтобы получить систему чиселъ, употребляемыхъ въ обыкновенной алгебрѣ.

Опредѣленіе числовой системы.

Числовая система представляетъ нѣкоторый классъ **N**, въ которомъ имѣютъ мѣсто двѣ операціи, не подлежащія дальнѣйшему опредѣленію, обозначаемыя знаками $+$ и $\times$ и удовлетворяющія слѣдующимъ тремъ условіямъ:

N_1. **N** представляетъ группу по отношенію къ операціи $+$. Обозначимъ тождественный элементъ по отношенію къ $+$ черезъ i_+ или 0.

N_2. **N** представляетъ группу по отношенiю къ операцiи $\times$, съ тѣмъ однако исключенiемъ, что не требуется существованiе элемента, обратнаго по отношенiю къ 0. Тождественный элементъ по отношенiю къ $\times$ обозначимъ черезъ $i_\times$ или 1.

Третье условiе устанавливаетъ связь между обѣими операцiями и обыкновенно носитъ названiе дистрибутивнаго или распредѣлительнаго закона:

N_3. Если a, b, c представляютъ какiе-либо три элемента класса **N**, то всегда

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c \text{ и } (b + c) \times a = b \times a + c \times a.$$

Замѣтимъ, что въ этомъ опредѣленiи ничего не говорится о числѣ элементовъ, составляющихъ числовую систему. Число элементовъ можетъ быть конечнымъ или безконечнымъ. Существуютъ числовыя системы обоихъ родовъ. Мы не сказали также относительно операцiй $+$ и $\times$ ничего такого, изъ чего можно было бы заключить, что онѣ коммутативны или не коммутативны. Существуютъ классы, удовлетворяющiе предыдущимъ условiямъ и, слѣдовательно, образующiе числовыя системы въ этомъ абстрактно-обобщенномъ смыслѣ, для которыхъ операцiи $+$ и $\times$ не коммутативны. Такая числовая система, въ которой обѣ операцiи $+$ и $\times$ коммутативны, называется коммутативной числовой системой.

Классъ всѣхъ рацiональныхъ чиселъ образуетъ группу по отношенiю къ сложенiю ($+$); онъ представляетъ также группу по отношенiю къ умноженiю ($\times$), за тѣмъ исключенiемъ, что не существуетъ числа, обратнаго числу 0. Дистрибутивный законъ (N_3) также имѣетъ мѣсто. Поэтому рацiональныя числа образуютъ числовую систему въ только-что опредѣленномъ смыслѣ. Кромѣ того, ясно, что эта числовая система коммутативна.

Надо замѣтить что обратныя операцiи вычитанiя (—) и дѣленiя (:) можно опредѣлить при посредствѣ операцiй $+$ и $\times$ соотвѣтственно. Въ самомъ дѣлѣ, элементъ $a - b$ опредѣляютъ какъ такой элементъ x, что $b + x = a$; элементъ $a : b$ ($b \neq 0$) опредѣляютъ, какъ такой элементъ y, что $b \times y = a$. Можно показать, что такiе элементы x и y всегда существуютъ въ классѣ **N**, удовлетворяющемъ условiямъ N_1 и N_2 (см. примѣчанiе 2-ое въ концѣ статьи).

Примѣръ конечной числовой системы.

Пусть классъ **N** состоитъ изъ пяти слѣдующихъ чиселъ:

$$0, 1, 2, 3, 4.$$

Назовемъ „суммой" ($+$) любыхъ двухъ изъ этихъ элементовъ обыкновенную сумму этихъ двухъ чиселъ, если послѣдняя меньше 5; если же она равна или больше 5, то будемъ подъ „суммой“ понимать наименьшій остатокъ (положительный или нулевой), получаемый при дѣленіи обыкновенной суммы на 5. Такимъ образомъ

$$1 + 2 = 3, \quad 0 + 3 = 3,$$

$$1 + 4 = 2 + 3 = 0, \quad 2 + 4 = 1 \text{ и т. д.}$$

Опредѣлимъ далѣе „произведеніе“ ($\times$) любыхъ двухъ изъ этихъ элементовъ, какъ обыкновенное произведеніе, если послѣднее меньше 5; если же оно равно или больше 5, то замѣнимъ его, какъ выше, наименьшимъ остаткомъ, получаемымъ при дѣленіи на 5. Напримѣръ,

$$1 \times 3 = 3, \quad 2 \times 2 = 4,$$

$$2 \times 3 = 1, \quad 4 \times 4 = 1, \quad 3 \times 3 = 4.$$

При такихъ опредѣленіяхъ выполняются всѣ условія для того, чтобы нашъ классъ представлялъ собой числовую систему. Что касается существованія обратнаго элемента, то мы можемъ, напримѣръ, сказать, что по отношенію къ сложенію для 1 обратный элементъ есть 4, такъ какъ $1 + 4 = 0$. По отношенію къ умноженію обратнымъ для 4 элементомъ служитъ 4, ибо $4 \times 4 = 1$.

Такая числовая система называется модулярной, при чемъ модулемъ въ данномъ случаѣ служитъ 5. Подобнымъ же образомъ можно опредѣлить модулярную числовую систему для всякаго другого модуля, представляющаго собой простое число.

Выводы изъ опредѣленія числовой системы.

Представляется интереснымъ выяснить, къ какимъ ближайшимъ слѣдствіямъ приводятъ установленныя выше свойства числовой системы вообще. Прежде всего обратимъ вниманіе на то обстоятельство, что единственными элементами, существованіе которыхъ непосредственно постулируется, являются элементы 0 и 1, тождественные по отношенію къ сложенію и къ умноженію соотвѣтственно. Но кромѣ нихъ для удовлетворенія постулатовъ числовой системы нѣтъ необходимости ни въ одномъ дальнѣйшемъ элементѣ. Дѣйствительно, если принять, что $1 + 1 = 0$, $0 \times 1 = 1 \times 0 = 0$, то всѣ постулаты окажутся удовлетворенными. Въ самомъ дѣлѣ, эта числовая система представляетъ попросту модулярную систему съ модулемъ 2. Но оставимъ этотъ частный случай въ сторонѣ. Такъ какъ числовая система должна представлять группу по отношенію къ сложенію, то элементы $1 + 1$, $(1 + 1) + 1$, $[(1 + 1) + 1] + 1, \cdots$, должны находиться въ числѣ ея элементовъ. Допустимъ, что всѣ элементы, получаемые такимъ образомъ при помощи послѣдовательнаго прибавленія элемента 1, различны между собой, и обозначимъ ихъ обычными символами

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

Въ такомъ случаѣ классъ **N** оказывается безконечнымъ. Далѣе, изъ того факта, что всякому изъ этихъ элементовъ соотвѣтствуетъ обратный по отношенію къ сложенію элементъ, заключаемъ, что **N** содержитъ также тѣ элементы, которые обыкновенно обозначаютъ черезъ

$$-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ \ldots$$

Теперь нашъ классъ удовлетворяетъ первому требованію: онъ представляетъ группу по отношенію къ сложенію.

Второе условіе требуетъ, чтобы нашъ классъ представлялъ группу по отношенію къ умноженію, съ тѣмъ исключеніемъ, что не требуется существованіе элемента обратнаго 0. Первыя три изъ условій, опредѣляющихъ группу, удовлетворены, если понимать операцію $\times$, какъ обыкновенное умноженіе. Но четвертое условіе требуетъ существованія для каждаго изъ написанныхъ выше символовъ (кромѣ нуля) элемента, обратнаго по отношенію къ умноженію. Это приводитъ къ необходимости существованія элементовъ обыкновенно обозначаемыхъ такъ:

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots \text{ и } -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \ldots,$$

а отсюда уже слѣдуетъ существованіе символовъ, соотвѣтствующихъ всѣмъ раціональнымъ числамъ. Но мы уже видѣли, что послѣднія образуютъ сами по себѣ числовую систему. Поэтому, для того, чтобы охарактеризовать вполнѣ, въ ея абстрактной формѣ, обыкновенную числовую систему алгебры, необходимы още дополнительныя условія. Теперь мы въ состояніи весьма простымъ образомъ установить постулаты, абстрактно характеризующіе обыкновенную систему вещественныхъ чиселъ.

Система обыкновенныхъ вещественныхъ чиселъ.

Обыкновенная система вещественныхъ чиселъ есть классъ **R**, въ которомъ имѣютъ мѣсто отношеніе линейнаго расположенія $<$ и двѣ операціи $+$ и $\times$ и который удовлетворяетъ слѣдующимъ постулатамъ:

RN_1. Классъ **R** есть неограниченный линейный континуумъ по отношенію къ символу $<$.

RN_2. Классъ **R** представляетъ коммутативную числовую систему по отношенію къ операціямъ $+$ и $\times$.

RN_3. Если a, x, y суть какіе-либо элементы класса **R** и $x<y$, то всегда $x+a<y+a$.

RN_4. Если a, b — какіе-нибудь два элемента класса **R** и $0<a$, $0<b$, то $0<a\times b$.

Постулаты RN_3 и RN_4 служатъ для установленія связи между отношеніемъ $<$ и операціями $+$ и $\times$. Всѣ основные законы алгебры можно вывести формальнымъ путемъ изъ этихъ четырехъ постулатовъ.

Примѣчанія.

1⁰. Допустимъ, въ самомъ дѣлѣ, что нѣкоторая группа имѣетъ два тождественныхъ элемента i и j. Въ такомъ случаѣ, съ одной стороны, $i\mathrm{o}j=i$, такъ какъ i есть тождественный элементъ, а съ другой $i\mathrm{o}j=j$, такъ какъ j есть тождественный элементъ. А такъ какъ, по предположенію, операція o однозначна, т. е. $a\mathrm{o}b$ представляетъ всегда одинъ вполнѣ опредѣленный элементъ, то необходимо должно быть $i=j$.

Предположимъ далѣе, что нѣкоторому элементу a соотвѣтствуютъ два обратныхъ элемента a' и a'', т. е. что

$$a\mathrm{o}a'=i \text{ и } a\mathrm{o}a''=i.$$

Такъ какъ

$$a=i\mathrm{o}a=(a\mathrm{o}a')\mathrm{o}a=a\mathrm{o}(a'\mathrm{o}a),$$

то $(a'\mathrm{o}a)$ есть тождественный элементъ и, слѣдовательно, $a'\mathrm{o}a=i$.

Въ такомъ случаѣ изъ тожества

$$(a'\mathrm{o}a)\mathrm{o}a''=a'\mathrm{o}(a\mathrm{o}a'')=a'\mathrm{o}i=a'$$

заключаемъ, что $a''=a'$, такъ какъ $(a'\mathrm{o}a)\mathrm{o}a''=i\mathrm{o}a''=a''$.

Итакъ, оба элемента a' и a'' тождественны между собой.

2⁰. Обозначимъ черезъ b' элементъ, обратный элементу b по отношенію къ сложенію:

$$b+b'=0.$$

Обозначимъ далѣе черезъ x элементъ $(b'+a)$. Тогда

$$b+x=b+(b'+a)=(b+b')+a=0+a=a,$$

т. е. нашъ элементъ $x=a-b$.

Послѣдній трудъ, посвященный Евклиду.

Проф. Д. Синцова.

T. L. Heath «The thirteen books of Euklid's elements, translated from the text of Heiberg with introduction and commentary». Vol. I. X+424 p., II. VI+436 p. III. VI+554. 1908. Cambridge, Univers. Press.

Кембриджская университетская типографія выпустила въ 1908 году новое капитальное изданіе, а Гисъ (Heath) увѣнчалъ свои прежніе труды по переводу и изданію греческихъ математиковъ (Діофантъ 1885, Аполлоній 1896, Архимедъ 1897) переводомъ тринадцати книгъ Евклидовыхъ „Началъ". Изданіе это настолько важно и интересно, что на немъ слѣдуетъ остановить вниманіе русскихъ читателей, хотя со времени его появленія прошло уже три года. Оно, какъ видно изъ самаго заглавія и объема, не простой переводъ: весь первый томъ въ 424 стр. занятъ болѣе, чѣмъ на одну треть (стр. 1 — 150) введеніемъ, а затѣмъ переводомъ и примѣчаніями на первыя двѣ книги. — Можно почти сказать, что самый текстъ Евклида исчезаетъ за примѣчаніями,—въ такой степени эти примѣчанія не только затрагиваютъ, а во многихъ случаяхъ прямо исчерпываютъ всѣ вопросы, такъ или иначе связанные съ Евклидомъ. Достаточно для характеристики огромности труда, исполненнаго Гисомъ, остановиться на содержаніи перваго тома. Оно начинается «Введеніемъ», въ которомъ въ девяти главахъ трактуются по порядку слѣдующіе вопросы: 1. Евклидъ и связанныя съ нимъ преданія. 2. Другія сочиненія Евклида, какъ дошедшія до нашего времени, такъ и не дошедшія. 3. Греческіе комментаторы Евклида (Геронъ, Порфирій, Паппъ, Симплицій), кромѣ Прокла, которому посвящена особая 4-ая глава, въ которой разбирается также и вопросъ объ источникахъ, которыми онъ пользовался (Евдемъ, Геминъ, Аполлоній Пергійскій, Посидоній). 5-я глава посвящена исторіи текста Евклида, 6-я схоліямъ, которыя въ изданіи Гейберга приложены въ концѣ текста и занимаютъ весь V-й томъ „Началъ". 7-я глава даетъ исторію Евклида у арабовъ, 8-я знакомитъ съ важнѣйшими переводами и изданіями, здѣсь указаны и русскіе переводы, которыхъ Гисъ знаетъ впрочемъ лишь три: И. Астарова 1739 — съ латинскаго, Р. Суворова и І. Никитина 1789 г. — съ греческаго и Ващенко-Захарченко 1880 г., — опущенъ такимъ образомъ переводъ Ѳ. Петрушевскаго 1819 г. съ греческаго. Глава 9-я — самая обширная во „Введеніи" (она одна занимаетъ 40 страницъ) подходитъ ближе къ самому содержанію „Началъ": она говоритъ о природѣ и характерѣ ихъ, о предшественникахъ ихъ, о первыхъ принципахъ: опредѣленіяхъ, постулатахъ и аксіомахъ, и, наконецъ, объясняетъ нѣкоторые техническіе термины и понятія, какъ-то: данныя, лемма, поризмъ, приведеніе къ нелѣпости, анализъ и синтезъ; Аристотелевы взгляды на опредѣленіе. — Только послѣ того начинаются самыя „Начала". Первая книга сопровождается обширнѣйшими комментаріями: за двумя страницами опредѣленій и постулатовъ этой книги слѣдуетъ 85 страницъ примѣчаній, въ томъ числѣ одному 5-ому постулату посвящено 19 страницъ убористой печати, на которыхъ дана сжатая исторія попытокъ доказательства знаменитаго постулата; примѣчанія къ аксіомамъ даютъ систему аксіомъ Hilbert'а, принципъ непрерывности и постулатъ Дедекинда. На послѣдующихъ 130 страницахъ даны 48 предложеній первой книги, съ примѣчаніями, напримѣръ, 47-е предложеніе (теорема Пиѳагора) сопровождается 13 страницами комментарій. Послѣднія 50 страницъ занимаетъ 2-я книга. Второй томъ даетъ на 436 страницахъ книги 3 — 9, комментированныя сравнительно съ первыми двумя болѣе сжато. Но и здѣсь опредѣленіямъ 5-ой книги посвящается 20 стран. (ученіе о пропорціональности), опредѣленіямъ 7-ой книги — 17 стр. — Больше половины третьяго тома (259 стр.) занимаетъ 10-я книга, которой предпослана вступительная замѣтка о понятіи несоизмѣримости и несоизмѣримаго числа. Остальныя три книги занимаютъ почти столько же. Въ заключеніе два прибавленія посвящены присоединяемымъ 14-ой (гипсикловой) и такъ называемой 15-ой книгамъ; они даютъ обзоръ содержанія этихъ книгъ.

Таково въ общихъ чертахъ содержаніе обширнаго труда Гиса. Только въ Англіи, гдѣ еще живы традиціи преподаванія по Евклиду, возможно такое любовное къ нему отношеніе. Конечно, это сочиненіе не для большой публики, но каждому желающему серьезно изучать Евклида нельзя будетъ обойтись безъ капитальнаго труда Гиса.

Международная Коммиссія по преподаванію математики.

Постановка преподаванія математики въ мужскихъ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ Пруссіи.

В. Лицмана.

(Продолженіе).*

3. Реформированныя учебныя заведенія.

Реформированныя учебныя заведенія имѣютъ цѣлью по возможности отодвинуть раздѣленіе средней школы на различные типы, перенести его съ низшихъ классовъ какъ можно выше. Способности отдѣльныхъ учениковъ проявляются болѣе или менѣе ясно не на 9-мъ году жизни, а большею частью значительно позже, — по мнѣнію психологовъ, даже лишь въ пору возмужалости. Поэтому то необходимы подобныя реформированныя учебныя заведенія, коль скоро мы отъ школы требуемъ, чтобы «образовательная работа (отдѣльныхъ типовъ школы), опредѣляемая ихъ организаціей, соотвѣтствовала также особымъ дарованіямъ учениковъ» (Кершенштейнеръ, Kerschensteiner). И дѣйствительно, это движеніе проявляется не въ какомъ-либо одномъ государствѣ; подобныя стремленія встрѣчаются въ школьной политикѣ почти всѣхъ странъ.

Въ Пруссіи заговорили о такихъ планахъ, какъ только наряду съ гимназіей, — которая до того времени одна только пользовалась правами, — появились реальныя учебныя заведенія. Уже въ 1849-мъ году этимъ вопросомъ занялась прусская школьная конференція педагоговъ подъ предсѣдательствомъ Кортюма (Kortüm). Она высказалась за трехклассную прогимназію съ латинскимъ языкомъ въ качествѣ нижней ступени; на ней надстраивается, съ одной стороны, пятиклассная гимназія, а, съ другой, реальная гимназія безъ латыни (или съ необязательной латынью). Эти предложенія, однако, не получили осуществленія даже въ видѣ опыта.

Въ 1873 году на октябрьскомъ съѣздѣ, состоявшемъ какъ изъ педагоговъ такъ и изъ лицъ другого общественнаго положенія, Остендорфъ (Ostendorf) предложилъ слѣдующій планъ школы**).

|III| → |II| → |I| (Англійскій яз.) Реальн. училище.
|VI| → |V| → |IV| (Французскій языкъ)
|UIII| → |OIII| (Латынь).
|UII| → |OII| → |UI| → |OI| (Греческій яз.) Гимназія.
|UII| → |OII| → |UI| → |OI| (Англійскій яз.) Реальная гимназія.

Планъ Остендорфа.

*) См „Вѣстникъ", № 549.

**) Нижеслѣдующія схематическія изображенія слѣдуетъ читать такъ: |____| означаетъ классъ, имѣющій при нормальныхъ условіяхъ годичный курсъ; внутри этого прямоугольника помѣщается обычное, сокращенное обозначеніе даннаго класса; → означаетъ переходъ изъ одного класса въ другой по направленію стрѣлки.

Основной чертой различныхъ плановъ реформы школы является то, что они всѣ продиктованы исключительно только интересами преподаванія языковъ; особенно характерно для всѣхъ разсматриваемыхъ здѣсь типовъ то, что первымъ иностраннымъ языкомъ выбранъ одинъ изъ новыхъ язковъ.

Проектъ Остендорфа вначалѣ оставался лишь на бумагѣ (ср., впрочемъ, схему Франкфуртской системы). Первый практическій опытъ въ духѣ реформированныхъ заведеній былъ сдѣланъ Шлее (Schlee) въ Альтонѣ Альтонская система ограничивается тѣмъ, что для высшаго реальнаго училища и реальной гимназіи устанавливаютъ общіе низшіе классы. Этотъ типъ былъ неоднократно испытанъ на практикѣ, — только въ отдѣльныхъ случаяхъ измѣнялась послѣдовательность введенія англійскаго и французскаго языковъ; но въ послѣднее время эта система почти совершенно вымерла. Въ настоящее время существуетъ только шесть учебныхъ заведеній альтонской системы, изъ которыхъ четыре, въ томъ числѣ въ самой Альтонѣ, находятся въ переходномъ состояніи къ Франкфуртской системѣ.

UIII → OIII → UII → OII → UI → OI
(Латынь). Реальная гимназія.

VI → V → IV
(Франц. яз.). (Англ.)

III → II → I
Реальное училище.

Альтонская система.

Характернымъ для альтонскаго плана является раннее введеніе аглійскаго языка: планъ этотъ возникъ на прибрежьи Сѣвернаго моря, гдѣ происходятъ правильныя сношенія съ Англіей и тамъ, главнымъ образомъ, и примѣнялся.

Учебные планы 1882-го года подвинули впередъ идею реформированныхъ учебныхъ заведеній, такъ какъ они устанавливаютъ для гимназіи и реальной гимназіи въ трехъ низшихъ классахъ одинаковый учебный матеріалъ; такимъ образомъ сталъ возможнымъ свободный переходъ изъ школы одного типа въ школы другого типа.

Въ 1886-мъ году возникло «Германское Общество сторонниковъ единой школы» (Deutscher Einheitsschulverein). Цѣлью его было сліяніе гимназій и реальныхъ гимназій, при чемъ, впрочемъ, эта единая школа должна была сохранить греческій языкъ. Предполагалось введеніе англійскаго языка, усиленіе математики; съ другой стороны — сокращеніе латыни. Наряду съ этой такъ называемой единой школой должны были и впредь существовать реальныя училища безъ латыни. Когда же были намѣчены учебные планы 1892 года и стало извѣстно, что развитіе средней школы пойдетъ не этимъ путемъ, то это общество закрылось (1891 г.).

Въ настоящее время вопросъ о единствѣ школы обсуждается еще довольно часто, но преимущественно тѣми кругами, которые мало или вовсе не соприкасаются со средней школой, и при томъ обсуждается больше по общественнымъ, чѣмъ педагогическимъ основаніямъ.

Большее значеніе, чѣмъ «Общество сторонниковъ единой школы», имѣло основанное въ 1889 году «Общество школьной реформы» (Verein für Schulreform), которое стремилось «къ единству нижней ступени и, насколько возможно, также средней». Во всякомъ случаѣ, оно еще не достигло своей конечной цѣли, состоящей въ слѣдующемъ: «Первые шесть классовъ современной девятиклассной школы должны получить одинаковыя программы и объединяются въ самостоятельныя промежуточныя школы (Mittelschulen); остальные же три годичныхъ курса должны сохраниться отдѣльно подъ тѣми же названіями: гимназіи, реальныя гимназіи, высшее реальное училище». Больше того: это общество ни разу не имѣло возможности примѣнить этотъ планъ на практикѣ. Здѣсь имѣется въ виду такая школьная реформа, часто обозначаемая также именемъ единой школы (но не въ узкомъ смыслѣ сторонниковъ полнаго единства школы), образцомъ для которой послужило новѣйшее развитіе школьнаго дѣла въ сѣверныхъ странахъ (Норвегія съ 1896 года, Данія съ 1903 года, Швеція съ 1905 года). Въ Швеціи, напримѣръ, строеніе школы до реформы было слѣдующее:

1 → 2 → 3 →
- 4 → 5 → 6a → 6b → 7a → 7b
  Безъ латыни: Реальн. учил.
- 4 → 5 (Съ латынью.) →
  - 6a → 6b → 7a → 7b
    Съ греческимъ: Гимназія.
  - 6a → 6b → 7a → 7b
    Безъ греч.: Реальная гимн.

Шведская система до реформы 1905 года.

Реформа 1905-го года установила 5 классовъ общихъ, за которыми идетъ бифуркація по слѣдующей схемѣ:

1 → 2 → 3 → 4 → 5 →
- 1 → 2 → 3 → 4
  Безъ древн. язык.: Реальная гимназія.
- 6
  Реальное училище.
- 1 → 2 → 3 → 4
  Съ латынью (иногда и греч.): Гимназія.

Шведская система послѣ реформы 1905 года.

Такъ далеко, какъ въ сѣверныхъ странахъ, приверженцы той же идеи въ Пруссіи идти не могли; — нѣкоторые изъ нихъ, впрочемъ, прибавили бы слова: «до сихъ поръ» — до сихъ поръ не могли идти. У насъ, напротивъ, удовлетворились планомъ, который почти покрывается шведской схемой до реформы, частью же приближается къ проекту Остендорфа.

Эта Франкфуртская система, къ практическому испытанію которой приступилъ въ 1892 году К. Рейнгардтъ (K. Reinhardt) во Франкфуртѣ на Майнѣ, имѣетъ то важное преимущество передъ Альтонской системой, что и въ основу гимназіи также положенъ общій фундаментъ съ реальными школами. Схема эта, въ томъ, напримѣръ, видѣ, какъ она проведена въ точности въ школѣ имени Лейбница въ Ганноверѣ, такова:

| VI | → | V | → | IV | ⟨ | UIII | → | OIII | → | UII | → | OII | → | UI | → | OI |
(Англійскій яз.) Высш. реальн. уч.

(Французскій яз.). ⟨ | UIII | → | OIII | ⟨ | UII | → | OII | → | UI | → | OI |
(Греч. яз.) Реформированная гимн.

(Латынь). ⟨ | UII | → | OII | → | UI | → | OI |
(Англійскій яз.) Реформ. реальн. гимн.

Франкфуртская система 1-го вида.

Школа Лейбница въ Ганноверѣ.

Въ большинствѣ школъ съ Франкфуртской системой, — какъ, напримѣръ, въ самомъ Франкфуртѣ на Майнѣ въ гимназіи имени Гёте и въ «Образцовой школѣ» (реальная гимназія), — эта схема не вполнѣ точно проведена. Уже средняя ступень (UIII и OIII) въ обоихъ развѣтвленіяхъ нѣсколько различается тѣмъ, что реформированная гимназія уже имѣетъ больше латыни (10 вмѣсто 8 часовъ въ каждомъ классѣ) и меньше французскаго (въ UIII только 3 вмѣсто 4, въ OIII только 2 вмѣсто 4 часовъ). Сюда присоединяются незначительныя различія и въ другихъ предметахъ. Если принять въ разсчетъ эти не очень глубокія различія, то получается слѣдующая схема:

⟨ | UIII | → | OIII | → | UII | → | OII | → | UI | → | OI |
(Англійскій яз.) Высш. Реальн. уч.

| VI | → | V | → | IV | → | UIII | → | OIII | → | UII | → | OII | → | UI | → | OI |
(Латынь, греческій яз.) Реформир. гимн.

⟨ | UIII | → | OIII | → | UII | → | OII | → | UI | → | OI |
(Латынь, англійскій яз.) Реформ. реальн. гимн.

Франкфуртская система 2-го вида.

Гимназія Гёте и „Образцовая школа“ во Франкфуртѣ на Майнѣ.

Школьная конференція 1900-го года высказалась въ пользу дальнѣйшихъ испытаній реформированныхъ учебныхъ заведеній, но сочла благоразумнымъ воздержаться еще отъ введенія ихъ повсюду; между тѣмъ декабрьская конференція 1890-года большинствомъ 28 голосовъ противъ 15 отвѣтила отрицательно на вопросъ: желателенъ ли вообще общій фундаментъ для гимназіи и для школъ, не имѣющихъ латыни?

Тѣмъ временемъ число реформированныхъ учебныхъ заведеній по Франкфуртской системѣ чрезвычайно возросло и особенно число реформированныхъ реальныхъ гимназій. Лѣтомъ 1909-го года, если причислить сюда учебныя заведенія, возникшія въ томъ же году, насчитывалось:

Реформированныхъ	Гимназій	22	25
	Прогимназій	3	
	Реальныхъ гимназій . .	65	82
	Реальныхъ прогимназій .	17	
	Всего . . .	107	

4. Болѣе свободная постановка преподаванія на верхней ступени.

Сравнительно недавно появились попытки, — да и то не прямыя, — поставить верхнюю ступень средней школы въ болѣе свободныя условія по матеріалу и по методу преподаванія, чѣмъ остальные классы. Подъ верхней ступенью разумѣютъ два послѣднихъ года обученія. Вниманіе широкихъ круговъ было привлечено къ этому вопросу главнымъ образомъ статьей г. А. Маттіаса (A. Matthias *), появившейся въ началѣ 1905-го года. За этой статьей послѣдовало потомъ много другихъ. Изъ рѣчи министра, сказанной въ прусскомъ ландтагѣ и очень часто цитируемой, выяснилось, что министръ готовъ допустить подобныя попытки. Я приведу здѣсь эти слова, такъ какъ въ нихъ ясно выразился взглядъ министра на программы прусскихъ школъ. «Что касается, далѣе, желанія и возможности большей свободы дѣйствій въ учебномъ дѣлѣ, то я твердо держусь того мнѣнія, что учительскія коллегіи еще далеко не использовали той свободы, которой они фактически располагаютъ. Нѣкоторыя коллегіи учителей чувствуютъ себя стѣсненными безъ всякихъ къ тому основаній; вѣдь учебныя программы надо понимать только, какъ основныя руководящія идеи, а не какъ буквальныя предписанія».

Хорошую сводку всѣхъ подходящихъ сюда начинаній можно найти въ подробномъ рефератѣ г. Ф. Крамера (F. Cramer): «Желательно ли болѣе свободное примѣненіе учебныхъ программъ въ старшихъ классахъ средне-учебныхъ заведеній? Къ какимъ формамъ болѣе свободнаго ихъ примѣненія слѣдуетъ преимущественно стремиться, и какія формы осуществимы съ помощью тѣхъ средствъ, которыми располагаетъ школа **).

---

*) А. Маттіасъ. „Новогоднія размышленія". (A. Matthias „Neujahrsbetrachtungen"). „Monatsschrift für höhere Schulen". 4 (1905), 1.

**) Труды 9-го съѣзда директоровъ въ Рейнской провинціи 1907 года. Verhandlungen der IX. Directorenversammlung in der Rheinprovinz 1907. Berlin (Weidmann) 1907. Вопросъ о болѣе свободной постановкѣ занятій вообще неоднократно обсуждался въ съѣздахъ директоровъ. Изъ трудовъ съѣздовъ директоровъ въ провинціяхъ Прусскаго королевства (Berlin-Weidmann) особенно важны еще слѣдующіе: т. 72-й „доклады Юнга и Циммерманна"; т. 73-й „докладъ Пульса"; т. 75-й, „доклады Маркса и фонъ-Больтенштерна"; т. 76-й, „доклады Шварца, Верманна и Бёше".

Нельзя, впрочемъ, обойти молчаніемъ того факта, что и противъ свободной постановки преподаванія раздаются иногда авторитетные голоса. Такіе взгляды приходилось слышать во время дебатовъ на третьемъ съѣздѣ «Союза германскихъ учителей, обладающихъ высшимъ образованіемъ». Съѣздъ происходилъ въ Брауншвейгѣ въ 1908 году. Еще недавно въ томъ же смыслѣ высказался Р. Леманнъ (R. Lehmann) въ докладѣ на 50-мъ собраніи нѣмецкихъ филологовъ и педагоговъ въ Грацѣ въ 1909 году. Леманнъ настойчиво указывалъ, что цѣль воспитанія анти-индивидуальна или, лучше сказать, сверхъ-индивидуальна. Зато онъ стоялъ на томъ, чтобы сдѣлать болѣе эластичными размѣръ и характеръ требованій, предъявляемыхъ къ ученикамъ, особенно въ домашнихъ работахъ.

Домашнія работы даютъ широкую возможность освободиться отъ узкихъ рамокъ программы, а въ соотвѣтственныхъ случаяхъ съ отдѣльными учениками выйти и за предѣлы этой программы. Ниже мы вернемся къ этому вопросу и разсмотримъ его спеціально въ отношеніи къ математикѣ. Здѣсь же мы разберемъ только тѣ начинанія, которыя непосредственно затрагиваютъ постановку дѣла въ самихъ учебныхъ заведеніяхъ. Сначала я разсмотрю нѣкоторыя мѣры, которыя проводятся въ рамкахъ дѣйствующихъ программъ; затѣмъ обращусь къ тѣмъ реформамъ, которыя болѣе или менѣе отступаютъ отъ оффиціальнаго учебнаго плана.

1. Свободные дни для частныхъ занятій.

а) Свободные дни для частныхъ занятій (Studientage) не являются вполнѣ новымъ учрежденіемъ. Въ извѣстной гимназіи «Пфорта» (Pforta) они существуютъ давно; они тамъ легко получаютъ осуществленіе благодаря интернатной системѣ и органически связаны со всей постановкой дѣла въ учебномъ заведеніи.

«Каждую рабочую недѣлю, не прерывающуюся каникулами или праздникомъ, ученикамъ предоставляется день, и именно поочередно вторникъ, четвергъ или пятница для частныхъ занятій. Только 4-ый и 5-ый классы (O III и U III) имѣютъ въ этотъ день по одному уроку математики, а 8-ой классъ (U I) одинъ урокъ по біологіи».

Матеріалъ для чтенія въ этихъ частныхъ занятіяхъ выбирается изъ латинскихъ, греческихъ, также и французскихъ авторовъ. Такимъ образомъ, математика, повидимому, теперь не извлекаетъ изъ этой мѣры никакой пользы, — если не считать упомянутыхъ уроковъ въ 4-мъ и 5-омъ классахъ. Раньше дѣло обстояло иначе; на это указываютъ, по крайней мѣрѣ, темы нѣкоторыхъ спеціальныхъ работъ. Работы эти были, напримѣръ, слѣдующія:

1884 годъ. Уравненіе второй и высшихъ степеней. — Построить шаръ, a) проходящій черезъ четыре точки, b) касающійся четырехъ плоскостей, c) касающійся четырехъ шаровъ.

1885 г. Данную шаровую поверхность покрыть сѣтью одинаковыхъ и подобныхъ сферическихъ многоугольниковъ, образуемыхъ дугами большихъ круговъ. — О центрѣ тяжести.

1889 г. Теорія трансверсалей и замѣчательныя точки треугольника.

b) Въ нѣкоторыхъ другихъ учрежденіяхъ такіе свободные дни теперь только вводятъ. Въ этомъ отношеніи для соотвѣтствующихъ учебныхъ заведеній установлены слѣдующія основныя положенія:

1. Въ полугодіе приблизительно 14 дней предоставлены для частныхъ занятій. Даты этихъ дней опредѣляются въ началѣ каждаго полугодія, при чемъ въ этотъ рядъ входятъ всѣ дни недѣли въ правильной очереди. Въ эти дни ученики двухъ старшихъ классовъ занимаются частнымъ образомъ въ школѣ той отраслью знанія, къ которой они чувствуютъ особую склонность, и которая соотвѣтствуетъ ихъ способностямъ.

2. Учреждается естественно-математическая и историко-филологическая группы, руководить которыми и оказывать поддержку охотно приглашаются преподаватели двухъ старшихъ классовъ, а если это окажется необходимымъ, то и другіе члены учительской коллегіи.

Кому-нибудь изъ преподавателей, участвующихъ въ группѣ, должно быть сообщено, какой матеріалъ ученики собираются разрабатывать. Этотъ преподаватель, съ вѣдома и согласія директора, рѣшаетъ вопросъ о цѣлесообразности этого матеріала и предоставляетъ индивидуальнымъ стремленіямъ ученика столько свободнаго времени, сколько это возможно въ виду научныхъ и воспитательныхъ задачъ средне-учебнаго заведенія.

4. Болѣе крупныя работы, обнаруживающія извѣстную самостоятельность, могутъ быть присоединены къ актамъ экзаменаціонной коммиссіи по испытаніямъ зрѣлости, въ качествѣ отчетовъ, свидѣтельствующихъ о результатахъ этихъ свободныхъ дней для частныхъ занятій, а также въ качествѣ свидѣтельствъ о духовныхъ особенностяхъ ученика. Эта коммиссія можетъ рекомендовать принимать эти работы въ соображеніе при рѣшеніи вопроса о зрѣлости абитуріента.

Привожу здѣсь темы нѣкоторыхъ такихъ работъ за $190^8/_9$ учебный годъ, содержаніе которыхъ взято изъ математики. Въ реальной гимназіи Вёлера въ естественно-математической группѣ главнымъ образомъ представлены работы по физикѣ; изъ математическихъ назову: ученіе о касательной въ старой и новой геометріи.—Замѣчательныя точки треугольника.—О графическомъ изображеніи, особенно о его практическомъ примѣненіи.

Въ гимназіи имени Гёте цѣлый рядъ работъ падаетъ уже въ область дифференціальнаго исчисленія: Теорія maxima, minima и точекъ перегиба.—Вычисленіе неопредѣленныхъ выраженій, съ примѣрами.—Безконечные ряды и ихъ примѣненіе къ изображенію функцій.—Краткое изложеніе теоріи дифференціальнаго исчисленія и рѣшеніе избранныхъ задачъ. Наряду съ этими находятся прикладныя темы: «Форма эклиптики и т. п.».

(Продолженіе слѣдуетъ).

Первые шаги на пути къ прохожденію курса дифференціальнаго исчисленія въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ*).

Е. С. Томашевича.

Цѣль настоящей замѣтки — показать, что потребность въ принципахъ, положенныхъ въ основаніе дифференціальнаго исчисленія, можетъ появиться въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ сравнительно рано, а именно — при прохожденіи механической части физики, т. е. главы о движеніи.

Прежде всего матеріалъ для изученія движенія можетъ быть добытъ самимъ учащимся, если, напримѣръ, онъ, сидя въ вагонѣ движущагося поѣзда, станетъ съ часами въ рукахъ замѣчать моменты прохожденія вагона мимо того или другого верстового столба (или камня съ отмѣтками сотенъ саженей). Полученная запись моментовъ и соотвѣтствующихъ разстояній должна быть подвергнута изслѣдованію, если мы пожелаемъ изучить характеръ движенія и выразить его математическими формулами. Вообще говоря, характеръ наблюденнаго движенія можетъ оказаться довольно сложнымъ, и для того, чтобы научиться его изслѣдованію, надо взять сначала самые простые примѣры, хотя бы придуманные.

Приведенныя таблицы даютъ, по моему мнѣнію, матеріалъ вполнѣ достаточный для того, чтобы ученикамъ, знакомымъ съ квадратными уравненіями, можно было дать ясное понятіе о первой и второй производной, о дифференціалѣ, о способѣ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, о способѣ нахожденія максимальнаго значенія функціи (таблица 4-ая съ отрицательнымъ g), можетъ быть даже объ интегралѣ (зная, что $\frac{ds}{dt} = \mathrm{const}$, или $\frac{dv}{dt} = \mathrm{const}$, выразимъ s въ функціи t) и т. д.

Я не стану останавливаться здѣсь на графическомъ способѣ изслѣдованія вопроса, но замѣчу, что его геометрическая интерпретація можетъ послужить отличною иллюстраціей къ аналитическому его изслѣдованію.

Въ качествѣ образцовъ я позволю себѣ предложить 4 таблицы (см. ниже).

Столбцы S и T таблицы I содержатъ въ себѣ, такъ сказать, матеріалъ, полученный изъ наблюденія: моментамъ T соотвѣтствуютъ масштабныя отмѣтки S. Выбираемъ болѣе удобныя начала для счета разстояній и времени, т. е. беремъ $s = S - 10$ и $t = T - 11$ ч. 15 м. Тогда появятся столбцы s и t, обработка которыхъ состоитъ въ нахожденіи промежуточныхъ разностей, названныхъ для краткости ds и dt, хотя можетъ быть правильнѣе было бы ввести въ этихъ случаяхъ общеупотребительныя $\triangle s$ и $\triangle t$. Въ каждой изъ таблицъ dt имѣетъ свою постоянную величину. Затѣмъ составляется таблица частныхъ $\frac{ds}{dt}$, которыя отмѣчаются буквою v (средняя скорость).

*) Краткое изложеніе доклада, прочитаннаго въ засѣданіи Московскаго Математическаго Кружка, 22 апрѣля 1911 года.

Въ таблицѣ I скорость остается неизмѣнной, и движеніе называется равноскорымъ или равномѣрнымъ; при этомъ $s = 2t$.

I.							II.						
S	T	s	t	ds	dt	$v = \dfrac{ds}{dt}$	s	t	ds	dt	v	dv	$g = \dfrac{dv}{dt}$
10	11 ч. 15 м.	0	0				0	0					
				6	3	2			5	2	2,5		
16	11 ч. 18 м.	6	3				5	2				2	1
				6	3	2			9	2	4,5		
22	11 ч. 21 м.	12	6				14	4				2	1
				6	3	2			13	2	6,5		
28	11 ч. 24 м.	18	9				27	6				2	1
									17	2	8,5		
							44	8					

III.						IV.			
s	t	ds	dt	v	$dv = g$	s	t	$v = ds$	$g = dv$
2,4	4					16	2		
		5,1	1	5,1				5	
7,5	5				3	21	3		-2
		8,1	1	8,1				3	
15,6	6				3,6	24	4		-2
		11,7	1	11,7				1	
27,3	7				4,2	25	5		-2
		15,9	1	15,9				-1	
43,2	8					24	6		

Въ таблицѣ II столбцы S и T уже не даны. Средняя скорость здѣсь измѣняется скачками, но измѣненіе скорости, разсчитанное на единицу времени, т. е. $\dfrac{dv}{dt}$, иначе ускореніе g, постоянно равно 1. Это движеніе равноускоренное. Если характеръ его въ дальнѣйшемъ сохраняется, то, заполняя таблицу въ направленіи, обратномъ ея составленію, т. е. идя отъ g къ s, мы легко найдемъ, что моменту $t = 10$ будетъ соотвѣтствовать $s = 65$. Нетрудно также интерполировать таблицу, напримѣръ, найти s для момента $t = 3$, но гораздо интереснѣе найти такъ называемое уравненіе движенія. Въ этомъ случаѣ на помощь приходитъ способъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ. Написавъ $s = a + bt + ct^2$, мы при помощи таблицы составляемъ 3 уравненія и изъ нихъ находимъ искомые коэффиціенты a, b и c. Для таблицы II находимъ: $s = {}^3/_2\, t + {}^1/_2\, t^2$ и, если пожелаемъ, провѣряемъ это уравненіе для тѣхъ значеній s и t, которыми при нахожденіи a, b и c не воспользовались.

Въ таблицѣ III измѣняется g, и потому для полученія уравненія движенія придется взять членъ съ 3 ей степенью t, т. е. отыскивать 4 коэффиціента уравненія $s = a + bt + ct^2 + dt^3$. Отвѣтомъ будетъ $s = 0{,}1\, t^3 - t$.

Уравненіе движенія для таблицы IV, въ которой ускореніе постоянно, но отрицательно, будетъ $s = 10t - t^2$.

Имѣя уравненіе движенія, составляемъ выраженіе $\frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{ds}{dt}$ сначала въ конечныхъ разностяхъ, соотвѣтствующихъ табличнымъ, а затѣмъ переходимъ къ передѣлу, т. е. полагаемъ:

$$t_1 - t = dt = 0.$$

Учащійся познакомится при этомъ, во-первыхъ, съ понятіемъ скорости въ данный моментъ движенія и, во-вторыхъ, съ первою производною алгебраической функціи.

Если мы составимъ на основаніи уравненія движенія таблицы II выраженіе $\frac{v_1 - v}{t_1 - t}$, то найдемъ постоянное число, независящее отъ t, и потому переходъ къ предѣлу $dt = 0$ ничего новаго не внесетъ, но все же получится 2-ая производная, выражающая собою ускореніе.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Образцовыя мѣры длины изъ кварца. Слабое расширеніе плавленнаго кварца (fused silica) обратило на себя вниманіе англійской національной физической лабораторіи, которая нашла его матеріаломъ, подходящимъ для воспроизведенія образцовой мѣры длины (эталона). Иридистая платина, которая до настоящаго времени примѣнялась для этой цѣли, какъ извѣстно, расширяется при нагрѣваніи на 1° Ц. на 0,000009, а кварцъ — только на 0,0000004, т. е. почти въ 20 разъ меньше. Правда, существуетъ сплавъ, называемый инваромъ (invar) и состоящій изъ 36% никкеля и 64% стали, который по малости своего коэффиціента расширенія (около 0,000001) также представляетъ собою нѣкоторыя удобства для изготовленія рабочихъ мѣръ длины большой точности. Только благодаря этому обстоятельству современныя геодезическія измѣренія, произведенныя инварными проволоками, даютъ столь огромную точность (до одной пятимилліонной измѣряемаго базиса и болѣе), о которой раньше не могли и думать. Однако, инваръ имѣетъ и нежелательныя качества: инварныя мѣры не сохраняютъ своей длины постоянною, при чемъ эти измѣненія происходятъ не вполнѣ пропорціонально времени, какъ это принимается въ практикѣ. Въ смыслѣ постоянства длины и ничтожнаго ея измѣненія съ температурой эталоны изъ плавленнаго кварца имѣютъ для метеорологіи огромный интересъ. Современные методы полученія и обработки кварца настолько усовершенствованы, что оказалось возможнымъ изготовить кварцевый штриховой метръ — эталонъ. Онъ имѣетъ видъ трубки, по концамъ которой припаяны двѣ плоскопараллельныя кварцевыя платинированныя пластинки, на которыхъ и находятся штрихи, опредѣляющіе длину мѣры. Отчетъ объ этой весьма деликатной работѣ, выполненной ассистентомъ англійской національной физической лабораторіи въ Теддингтонѣ G. W. Kaye, былъ доложенъ ея директоромъ R. T. Glazebrook'омъ Лондонскому Королевскому Обществу въ іюнѣ 1911 г.

Н. Адамовичъ.

ПИСЬМО ВЪ РЕДАКЦІЮ.

М. Г. господинъ редакторъ!

Не безъ удивленія прочиталъ я на-дняхъ рецензію на свои брошюры *) и въ виду ея крайней тенденціозности долженъ на нее отвѣтить.

Посмотримъ, что мнѣ преподноситъ г. С. В. подъ видомъ рецензіи. „Обѣ названныя брошюры не вносятъ какихъ-либо усовершенствованій въ обычное изложеніе разсматриваемыхъ вопросовъ, имѣющееся во всѣхъ курсахъ элементарной алгебры". Читаю и недоумѣваю: или авторъ не понялъ содержанія моихъ брошюръ или недостаточно прочелъ ихъ. Я, начинающій русскій писатель, и пока еще не брался и не берусь открывать новыя теоріи, что по плечу Ньютону, Лагранжу, Пуанкаре, — но сказать, что въ моихъ брошюрахъ ничего нѣтъ новаго все-таки нельзя. Новымъ я считаю въ нихъ тѣ принципы, которыми я руководствуюсь въ своемъ изложеніи. Въ первой брошюрѣ „Теорія радикаловъ" я ставлю во главу угла „принципъ прямой и обратной операціи", а во второй — „принципъ алгебраической взаимности". Зачатки принципа „алгебраической взаимности" мы находимъ въ алгебрѣ К. Комберуза (стр. 629). Далѣе, авторъ рецензіи упоминаетъ о какихъ-то якобы „явныхъ промахахъ". Онъ говоритъ, что въ первой брошюрѣ смѣшиваются термины „ариѳметическое значеніе корня" и „реальное значеніе корня". Пусть авторъ рецензіи остается при своемъ мнѣніи, но я настаиваю на своей фразѣ „мы беремъ только ариѳметическое значеніе корня, т. е. реальное значсніе корня" (стр. 4). Что касается введенія мною символа $a^{\frac{1}{n}}$ безъ поясненій, какъ говоритъ г. С. В., то тотъ же упрекъ онъ можетъ, если осмѣлится, поставить и великому Коши („Алгебраическій анализъ" стр. 390). Не понимаю я также и того, зачѣмъ мнѣ авторъ „почтенной рецензіи" навязываетъ Дедекинда. Вѣдь и я съ своей стороны могу, если угодно, привести тысячи именъ и играть ими какъ мнѣ выгодно, благо теперь появились почти на всѣхъ языкахъ обширныя библіографическія работы. При составленіи заключенія моей первой брошюры я пользовался не Дедекиндомъ, а не менѣе знаменитымъ К. Жорданомъ („Cours d'Analyse," t. 1, p, 1, 2), у котораго учились такіе корифеи науки, какъ С. Ли и Ф. Клейнъ. — Наконецъ, что касается возраженія противъ второй брошюры, я вижу не возраженіе по существу, а 2, 3 голословныя фразы и только. Авторъ говоритъ, напримѣръ, „на стр. 28 приводится сомнительное построеніе ряда". Никакъ не могу понять этой фразы?! О какомъ рядѣ говоритъ г. С В.? Въ заключеніе замѣчу, что рецензія г. С. В. представляетъ собою 3, 4 случайно вырванныхъ фразы и два общихъ мѣста и на этомъ-то фундаментѣ рецензентъ строитъ свое обвиненіе.

Прив.-доц. Императорскаго Казанскаго Университета

С. Слугиновъ.

---

*) См. „Вѣстникъ", № 538, стр. 268.

Отъ редактора.

Помѣщенная въ № 538 „Вѣстника“ рецензія вызвала въ авторѣ раздраженіе. Она заканчивается слѣдующей фразой: „Чтеніе брошюръ оставляетъ впечатлѣніе, что авторъ недостаточно продумалъ то, что хотѣлъ передать читателямъ“.

Я всегда придерживался правила, что рецензія должна относиться къ книгѣ и не касаться автора. Я поэтому очень сожалѣю, что эта фраза попала въ текстъ отзыва.

Что же касается отзыва по существу, то, просмотрѣвъ внимательно всѣ указанія, сдѣланныя рецензентомъ, я долженъ сказать, что я вполнѣ съ ними согласенъ. Рецензія дѣйствительно написана слишкомъ кратко; но если г. Слугиновъ будетъ на этомъ настаивать, то и авторъ рецензіи и я готовы дать подробный отчетъ.

Ред.

Краткій отчетъ о засѣданіи Московскаго Математическаго Кружка 27 октября 1911 года.

1. Обсуждался вопросъ объ изданіи журнала Математическаго Кружка, при чемъ постановлено приступить съ 1912 года къ изданію собственнаго органа подъ названіемъ „Математическое образованіе“. Журналъ главнымъ образомъ предположено посвятить разработкѣ вопросовъ преподаванія математики, которые въ послѣднее время привлекаютъ къ себѣ усиленное вниманіе въ Россіи и за-границей. Онъ будетъ выходить ежемѣсячно, въ объемѣ до 3 печатныхъ листовъ, кромѣ 4 лѣтнихъ мѣсяцевъ. Цѣна — 3 руб. въ годъ съ пересылкою. Отвѣтственнымъ редакторомъ избранъ секретарь Кружка, преподаватель Московскихъ Высшихъ Женскихъ Курсовъ І. И. Чистяковъ. Правленію Кружка поручено хлопотать о разрѣшеніи изданія предъ Московскою администраціей.

2. А. А. Волковъ сдѣлалъ сообщеніе: „Объ относительной ошибкѣ табличнаго логариѳма“ слѣдующаго содержанія: Выраженіе производной десятичнаго логариѳма имѣетъ видъ: $\dfrac{d\lg_{10}x}{dx}=\dfrac{\lg_{10}e}{x}$, или, если пользоваться пятизначными таблицами, $\dfrac{d\lg_{10}x}{dx}=\dfrac{0{,}43\,429}{x}$. Такъ какъ при увеличеніи числа на единицу приращенія логариѳмовъ (въ извѣстныхъ предѣлахъ) пропорціональны приращеніямъ чиселъ, то отношеніе дифференціаловъ можетъ быть замѣнено отношеніемъ приращеній:

$$\frac{\triangle\lg_{10}x}{\triangle x}=\frac{0{,}43\,429}{x},$$

откуда

$$\frac{\triangle\lg_{10}x}{0{,}43\,429}=\frac{\triangle x}{x}.$$

Принимая во вниманіе, что табличная мантисса разнится отъ того истиннаго значенія, которое она приближенно выражаетъ, менѣе, чѣмъ на 0,000 005 и замѣняя этимъ числомъ $\triangle\lg x$, получимъ:

$$\frac{\triangle x}{x}=\frac{0{,}000\,005}{0,\,43\,429}=0{,}000\,012.$$

Но $\frac{\triangle x}{x}$ представляетъ верхній предѣлъ той относительной варіаціи числа, соотвѣтствующаго логариѳму, при которой логариѳмъ остается неизмѣннымъ. Такимъ образомъ, табличный пятизначный логариѳмъ опредѣляетъ соотвѣтственное ему число съ относительной ошибкой, не превышающей $0{,}0012^0/_0$.

3. Э. Ю. Лейнѣкъ сдѣлалъ докладъ: „Объ элементарномъ построеніи стороны правильнаго 17-угольника". Докладчикъ изложилъ методъ Т. Валена (Th. Vahlen) для вывода основныхъ уравненій въ Гауссовой теоріи правильнаго 17-угольника. Сущность упомянутаго метода состоитъ въ томъ, что квадратныя уравненія, связывающія неизвѣстныя величины, получаются геометрическимъ путемъ изъ разсмотрѣнія фигуры, являющейся обобщеніемъ извѣстнаго построенія для механическаго дѣленія угла на 3 равныя части.

РЕЦЕНЗІИ.

В. І. Орловскій. *Механическій отдѣлъ курса физики.* Для среднихъ учебныхъ заведеній. Стр. II + 70. Цѣна 50 коп.

Учебникъ г. Орловскаго предназначенъ для VIII класса мужскихъ гимназій и VII класса реальныхъ училищъ. Авторъ стремится изложить этотъ курсъ болѣе научно, чѣмъ въ большинствѣ употребляемыхъ въ средней школѣ учебниковъ, „не выходя изъ предѣловъ развитія средняго ученика". Дѣйствительно, нужно признать, что курсъ механики изложенъ у г. Орловскаго и научнѣе и систематичнѣе, но для средняго ученика онъ слишкомъ труденъ, даже принимая оговорку автора, что учебникъ носитъ конспективный характеръ. Можно допустить, что онъ годится для конкурсныхъ испытаній (какъ предполагаетъ авторъ); его можно, пожалуй, также рекомендовать наиболѣе выдающимся и успѣвающимъ ученикамъ класса.

Нѣсколько замѣчаній можно сдѣлать относительно самаго изложенія. Въ §§ 11—13, посвященныхъ законамъ Ньютона, авторъ говоритъ, что приводитъ ихъ въ формулировкѣ Ньютона; между тѣмъ формулировка автора не является переводомъ формулировки Ньютона. Относительно второго закона допущено даже серьезное измѣненіе. Авторъ говоритъ: „сила пропорціональна произведенію массы движущагося тѣла на ускореніе и направлена въ сторону ускоренія" (стр. 12), между тѣмъ у Ньютона онъ высказанъ такъ: „измѣненіе движенія пропорціонально приложенной движущей силѣ и имѣетъ одинаковое съ ней направленіе" (цитирую по Хвольсону). Такимъ образомъ у автора математическое выраженіе 2 закона дано въ видѣ $f = kmw$, тогда какъ по Ньютону оно должно быть представлено въ видѣ $f = kw$. Конечно, введя понятіе о массѣ, мы получимъ для силы выраженіе $f = kmw$, но авторъ опредѣляетъ массу словами: „все, что насъ окружаетъ, матеріально, опредѣленная часть матеріи, заключающаяся въ тѣлѣ, называется его массой" (стр. 11), тогда какъ лучше было бы ввести здѣсь понятіе о массѣ въ зависимости отъ силы и ускоренія. Серьезное недоумѣніе вызываетъ § 15, посвященный центробѣжной силѣ. Авторъ полагаетъ, что когда велосипедистъ ѣздитъ по кругу, то существуетъ только центростремительная сила, но не центробѣжная, такъ какъ „ее не къ чему приложить", вслѣдствіе этого „для кругового движенія не всегда удовлетворяется третій законъ Ньютона". Исходя изъ такого разсужденія, авторъ дѣлаетъ слѣдующее странное заключеніе: „такъ какъ во всѣхъ остальныхъ случаяхъ движенія всѣ законы Ньютона даютъ слѣдствія, вполнѣ подтверждаемыя опытомъ, то, не нарушая общности всей теоріи механики, будемъ считать, что третій законъ Ньютона всегда приложимъ" (стр. 14). Законъ сохраненія энергіи былъ впервые высказанъ не Гельмгольцемъ, какъ указываетъ авторъ (стр. 65), а Робертомъ Майеромъ. Неудачно выраженіе: „ясно также, что геометрическая сумма всегда меньше алгебраической, и что, если направленія векторовъ совпадаютъ, геометрическая сумма равна алгебраической“ (стр. 4).

М. Л.

Отъ редакціи.

Вслѣдствіе отъѣзда редактора на І-ый Всероссійскій Съѣздъ Преподавателей Математики и связанныхъ со Съѣздомъ работъ настоящій номеръ выпущенъ съ опозданіемъ. Первый номеръ слѣдующаго семестра будетъ выпущенъ 1-го февраля.

Перечень статей, которыя будутъ въ числѣ другихъ напечатаны въ слѣдующемъ семестрѣ.

1 Отчетъ о II-мъ Менделѣевскомъ Съѣздѣ въ СПБ. *М. Якобсона.* — 2. Отчетъ о І-омъ Всероссійскомъ Съѣздѣ Преподавателей Математики въ СПБ. *В. Кагана.* — 3. Математическое и Философское образованіе въ средней школѣ. *Проф. А. Васильева.* — 4. Функціональныя исчисленія. *Як. Адамара.* — 5. О максимальныхъ и минимальныхъ величинахъ въ геометріи. *Д. Крыжановскаго.* — 6. X книга Евклида. *В. Кагана.* — 7. Я. Вантъ-Гоффъ и его творенія. *Дж. Бруни.* — 8. Единицы радіоактивности. *Е. Ретгерфорда.* — 9. Нѣкоторыя новыя проблемы въ теоріи тепла. *В. Нернста.* — 10. Современная космогонія. *Т. Си.* — 11. Математика и теорія познанія. *Ф. Энрикеса.* — 12. О преобразованіи многогранниковъ. *В. Кагана.* — 13. Историческій очеркъ развитія понятія о функціи. *С. Бернштейна.* — 14. Постановка преподаванія математики въ мужскихъ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ Пруссіи. *В. Лицмана.* — 15 Постановка преподаванія математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ Франціи и Англіи. *Ю. Р.* — 16. Редакціонныя руководящія статьи по всѣмъ вопросамъ, намѣченнымъ Первымъ Всероссійскимъ Съѣздомъ Преподавателей Математики.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей приватъ-доцента **Е. Л. Буницкаго.**

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе

№ 474 (5 сер.). На сторонахъ даннаго угла A даны точки B и C, и внѣ угла точка D. Черезъ точки A и D провести окружность, пересѣкающую стороны AB и AC угла въ точкахъ X и Y такъ, чтобы отношеніе $BX : CY$ было данной величины.

И. Александровъ (Москва, гимназія Поливанова).

№ 475 (5 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$x^2 - y = a(xy - 1),$$
$$y^2 - x = b(xy - 1).$$

Проф. В. Ермаковъ (Кіевъ).

№ 476 (5 сер.). Доказать тожество

$$\frac{b^2 - c^2}{r_b - r_c} + \frac{c^2 - a^2}{r_c - r_a} + \frac{a^2 - b^2}{r_a - r_b} = 4(R + r),$$

гдѣ a, b, c, R, r, r_a, r_b, r_c суть соотвѣтственно стороны и радіусы круговъ описаннаго, вписаннаго и внѣвписанныхъ.

Л. Богдановичъ (Ярославль),

№ 477 (5 сер.) Доказать, что сумма квадратовъ пяти послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ не можетъ быть точнымъ квадратомъ.

Р. Витвинскій (Одесса).

№ 478 (5 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$\operatorname{tg} x = a \operatorname{tg} 2y, \quad \operatorname{tg} y = b \operatorname{tg} 2x.$$

Г. Варкентинъ (Петербургъ).

№ 479 (5 сер.). Найти предѣлъ суммы n членовъ ряда

$$\frac{2^2}{1.2.3.4} + \frac{3^2}{2.3.4.5} + \ldots + \frac{n^2}{(n-1)n(n+1)(n+2)} + \ldots$$

при безконечномъ возрастаніи n.

С. Слугиновъ (Казань).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 394 (5 сер.). *Доказать, что число*

$$6^{n+1} - 125n^3 + 300n^2 - 205n - 6$$

кратно 3750 *при всякомъ цѣломъ и неотрицательномъ значеніи* n.

Представивъ данное выраженіе въ видѣ:

$$(6^{n+1} - 126n^3 + 300n^2 - 204n - 6) + n^3 - n,$$

мы замѣчаемъ, что выраженіе, заключенное въ скобки, кратно 6-ти при всякомъ цѣломъ и неотрицательномъ значеніи n; выраженіе же $n^3 - n$ тоже кратно 6-ти при всякомъ цѣломъ значеніи n, такъ какъ оно равно произведенію

$(n-1)n(n+1)$ трехъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ. Поэтому данное выраженіе кратно 6-ти при всякомъ цѣломъ и неотрицательномъ значеніи n. Записавъ членъ 6^{n+1} въ видѣ $(1+5)^{n+1}$ и разлагая его по формулѣ бинома, находимъ:

$$(1+5)^{n+1} = 1 + (n+1) \cdot 5 + \frac{(n+1)n}{2} \cdot 5^2 + \frac{(n+1)n(n-1)}{6} \cdot 5^3 + k \cdot 5^4,$$

или

$$(1+5)^{n+1} = 6 + 5n + \frac{n^2+n}{2} \cdot 25 + \frac{n^3-n}{6} \cdot 125 + 625k, \qquad (1)$$

гдѣ k есть нѣкоторое надлежащее цѣлое число. Прибавивъ къ обѣимъ частямъ даннаго выраженія по $(-125n^3+300n^2-205n-6)$, находимъ:

$$6^{n+1} - 125n^3 + 300n^2 - 205n - 6 = -200n + \frac{n^2+n}{2} \cdot 25 + 300n^2 +$$

$$+ \frac{n^3-n}{6} \cdot 125 - 125n^3 + 625k = 25\left(-8n + \frac{n^2+n}{2} + 12n^2 + \frac{5n^3-5n}{6} - 5n^3\right) +$$

$$+ 625k = \frac{25(-48n + 3n^2 + 3n + 72n^2 + 5n^3 - 5n - 30n^3)}{6} + 625k =$$

$$= \frac{25(-25n^3 + 75n^2 - 50n)}{6} + 625k = \frac{625(-n^3+3n^2-2n)}{6} + 625\,k.$$

Такъ какъ данное выраженіе при неотрицательномъ и цѣломъ n есть число цѣлое, а k тоже цѣлое число, то [см. (2)] выраженіе $\frac{(625-n^3+3n^2-2n)}{6}$ есть также цѣлое число; но 625 и 6 суть числа взаимно простыя, а потому множитель $(-n^3+3n^2-2n)$ дѣлится нацѣло на 6. Итакъ, данное выраженіе при n цѣломъ и неотрицательномъ можетъ быть представлено въ видѣ $625\left[\frac{-n^3+3n^2-2n}{6} + 625k\right]$, гдѣ членъ $\frac{-n^3+3n^2-2n}{6}$ есть цѣлое число, а потому оно дѣлится на 625. Дѣлясь на взаимно простыя числа 6 и 625, данное выраженіе дѣлится при n цѣломъ и неотрицательномъ на ихъ произведеніе 3750.

А. Фрумкинъ (Одесса); *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *М. Пистракъ* (Варшава); *В. Моргулевъ* (Одесса); *М. Рыбкинъ* (Ейскъ).

№ 395 (5 сер). *Дано, что число*

$$a^n b^n (x^{2n} + y^{2n})$$

дѣлится на $xy(a^2+b^2) - ab(x^2+y^2)$; *доказать, что и число*

$$x^n y^n (a^{2n} + b^{2n})$$

дѣлится на того же дѣлителя $xy(a^2+b^2) - ab(x^2+y^2)$. *(Числа* a, b, x, y *— цѣлыя,* n *— цѣлое положительное число).*

Такъ какъ

$$a^n b^n (x^{2n} + y^{2n}) - x^n y^n (a^{2n} + b^{2n}) = (a^n b^n x^{2n} - x^n y^n a^{2n}) + (a^n b^n y^{2n} - x^n y^n b^{2n}) =$$

$$= a^n x^n (b^n x^n - y^n a^n) - b^n y^n (b^n x^n - a^n y^n) = (a^n x^n - b^n y^n)(b^n x^n - a^n y^n) =$$

$$= -\left[(ax)^n - (by)^n\right]\left[(ay)^n - (bx)^n\right],$$

при чемъ сомножители, заключенные въ квадратныя скобки, кратны соотвѣтственно разностей $ax - by$ и $ay - bx$, то разность чиселъ $a^n b^n (x^{2n} + y^{2n})$ и $x^n y^n (a^{2n} + b^{2n})$ кратна произведенія

$$(ax - by)(ay - bx) = xy(a^2 + b^2) - ab(x^2 + y^2).$$

Поэтому, если число $a^n b^n (x^{2n} + y^{2n})$ кратно этого произведенія, то и число $x^n y^n (a^{2n} + b^{2n})$ также кратно этого произведенія.

А. Фрумкинъ (Одесса); *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *М. Пистракъ* (Варшава).

№ 396 (5 сер.). *Доказать тожество*

$$\mathrm{abc}\, l_a l_b l_c = 8 r_a r_b r_c\, a'b'c',$$

гдѣ a, b, c — *стороны,* l_a, l_b, l_c — *биссектрисы,* r_a, r_b, r_c — *радіусы внѣвписанныхъ круговъ нѣкотораго треугольника, а* a', b', c' — *три несмежныхъ отрѣзка, опредѣляемыхъ биссектрисами на сторонахъ угла.*

Пользуясь извѣстными формулами

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bc(p-a)}\,, \quad l_b = \frac{2}{c+a}\sqrt{ca(p-b)}\,, \quad l_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{ab(p-c)}\,;$$

$$r_a = \frac{s}{p-a}, \quad r_b = \frac{s}{p-b}, \quad r_c = \frac{s}{p-c}; \quad s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,,$$

$$a' = \frac{ab}{b+c}, \quad b' = \frac{bc}{c+a}, \quad c' = \frac{ca}{a+b} \quad \Bigg(\text{или } a' = \frac{ca}{a+c}, \quad b' = \frac{ab}{c+a},$$

$$c' = \frac{bc}{a+b}, \text{ при чемъ въ обоихъ случаяхъ } a'b'c' = \frac{a^2b^2c^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}\Bigg),$$

гдѣ p и s суть соотвѣтственно полупериметръ и площадь треугольника, имѣемъ:

$$abc\, l_a l_b l_c = \frac{8a^2b^2c^2\sqrt{p^3(p-a)(p-b)(p-c)}}{(a+b)(b+c)(c+a)} =$$

$$= \frac{8a^2b^2c^2 p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{8a^2b^2c^2 ps}{(a+b)(b+c)(c+a)},$$

$$8 r_a r_b r_e\, a' b' c' = 8 \cdot \frac{s^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} \cdot \frac{a^2b^2c^2}{(a+b)(b+c)(c+a)} =$$

$$= \frac{8ps^3}{p(p-a)(p-b)(p-c)} \cdot \frac{a^2b^2c^2}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{8ps^3}{s^2} \cdot \frac{a^2b^2c^2}{(a+b)(b+c)(c+a)} =$$

$$= \frac{8a^2b^2c^2 ps}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Слѣдовательно,

$$abc\,l_a l_b l_c = 8 r_a r_b r_c\, a'b'c'.$$

А. Масловъ (Москва); *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *В. Моргулевъ* (Одесса).

№ 397 (5 сер), *По даннымъ разстояніямъ основаній биссектрисъ внутреннихъ угловъ треугольника отъ его сторонъ вычислить его площадь и стороны.*

Назовемъ разстоянія основаній A', B', C' биссектрисъ AA', BB' CC', треугольника ABC отъ сторонъ его соотвѣтственно черезъ α, β, γ. Опустивъ изъ точки A' перпендикуляры $A'M$ и $A'N$ на стороны AB и AC, имѣемъ: $A'M = A'N = \alpha$. Называя черезъ a, b, c, S соотвѣтственно стороны и площадь треугольника, имѣемъ:

$$2 \text{ площ. } ABA' + 2 \text{ площ. } ACA' = \alpha c + \alpha b = \alpha(b+c) = 2s,$$

откуда

$$b + c = \frac{2s}{\alpha}, \quad c + a = \frac{2s}{\beta}, \quad a + b = \frac{2s}{\gamma}. \tag{1}$$

Рѣшая систему уравненій (1) обычнымъ путемъ относительно a, b, c, получимъ:

$$a + b + c = s\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right), \tag{2}$$

$$a = s\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\alpha}\right), \quad b = s\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\beta}\right), \quad c = s\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\right), \tag{3}$$

откуда [см. (1), (3)]

$$b + c - a = s\left(\frac{3}{\alpha} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\right), \tag{4}$$

$$a + c - b = s\left(\frac{3}{\beta} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\gamma}\right), \tag{5}$$

$$a + b - c = s\left(\frac{3}{\gamma} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right). \tag{6}$$

Изъ извѣстной формулы $16s^2 = (a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$ вытекаетъ [см. (2), (4), (5), (6)], равенство

$$16s^2 = s^4\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{3}{\alpha} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{3}{\beta} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{3}{\gamma} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right),$$

откуда

$$s = \frac{4}{\sqrt{\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{3}{\alpha} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{3}{\beta} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{3}{\gamma} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)}}, \tag{7}$$

Затѣмъ изъ формулъ (3) находимъ:

$$a = \frac{4\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\right)}{P}, \quad b = \frac{4\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta}\right)}{P}, \quad c = \frac{4\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right)}{P},$$

гдѣ P — знаменатель правой части равенства (7).

А. Фрумкинъ (Одесса); *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *М. Добровольскій* (Сердобскъ); *А. Масловъ* (Москва).

№ 407 (5 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$(x+1)^6 + (x-1)^6 = a(x^6+1).$$

(Заимств. изъ *Ćasopis*).

Представивъ данное уравненіе въ видѣ:

$$[(x+1)^2]^3 + [(x-1)^2]^3 = a[(x^2)^3+1],$$

разлагаемъ лѣвую и правую части на множителей. Тогда получимъ:

$$[(x+1)^2+(x-1)^2][(x+1)^4-(x+1)^2(x-1)^2+(x-1)^4] =$$

$$= a(x^2+1)(x^4-x^2+1),$$

или

$$2(x^2+1)(x^4+14x^2+1) = a(x^2+1)(x^4-x^2+1).$$

Итакъ, данное уравненіе распадается на два уравненія:

$$x^2+1=0 \quad \text{и} \quad (2-a)x^4+(28+a)x^2+(2-a)=0,$$

рѣшая которыя находимъ шесть корней даннаго уравненія:

$$x_{1,2} = \pm i \quad (\text{гдѣ } i=\sqrt{-1}),$$

$$x_{3,4,5,6} = \pm\sqrt{\frac{-28-a\pm\sqrt{(32-a)(24+3a)}}{4-2a}}.$$

Е. Доманицкій (Каменецъ-Подольскъ); *Р. Ковальскій*; *А. Фрумкинъ* (Одесса); *В. Моргулевъ* (Одесса); *М. Рыбкинъ* (Одесса); *Н. Уварова* (Верхотурье); *Г. Варкентинъ* (Петербургъ).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

1) А. П. Охитовичъ. Геометрія круга (циклометрія).

Рѣшеніе проблемы о геометрическомъ раздѣленіи дуги и угла на части пропорціональныя и равныя. Стран. XI+114+6=131. Цѣна 1 руб

2) А. П. Охитовичъ. Новый (неопредѣленный) методъ рѣшенія алгебраическихъ уравненій.

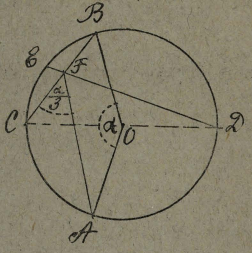
Часть 1-ая. Общее рѣшеніе уравненій первой степени: неопредѣленныхъ и опредѣленныхъ. Стран. II+XI+302+18=333. Цѣна 2 р 50 коп.

3) А. П. Охитовичъ. Доказательство великой теоремы Фермата. 51 стран. Цѣна 50 коп.

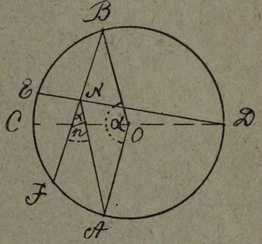
4) Alexander Ochitowitsch. Beweis des grossen Fermatschen Satzes. 50 Seiten. Preis 1 Mark.

ОБРАЩАТЬСЯ ВЪ КНИЖНЫЕ МАГАЗИНЫ:

„Новаго Времени“ (СПБ., Москва, Харьковъ, Саратовъ), н.н. Карбасникова (СПБ., Москва), Вольфа (СПБ.), Т-ства „Общественная Польза“ (СПБ.), Т-ства Сытина (Москва), Бельке (Кіевъ), Оглоблина (Кіевъ), Башмаковыхъ (Казань), „Современникъ“ (Саратовъ), „Волжанинъ“ (Самара), Филимонова (Москва), Дредеръ (Харьковъ) и друг.



$\smile AC=\smile CB; \smile AD=\smile DB; \smile CE=\smile EB$



$\smile AC=\smile CB; \smile AD=\smile DB;$
$\smile CE=\smile \frac{CB}{n-1}; \smile EF=\smile EB.$

ПРИНИМАЕТСЯ ПОДПИСКА на 1911—12 годъ

(съ сентября 1911 по сентябрь 1912 г.) (Годъ пятый).

НА ЕЖЕМѢСЯЧНЫЙ ЖУРНАЛЪ

(ОРГАНЪ ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ РЕФОРМЫ)

„Свободное Воспитаніе“

подъ редакціей *И. Горбунова-Посадова,*

для городскихъ и сельскихъ учителей и для родителей.

Цѣль журнала: разработка вопросовъ о такомъ воспитаніи и образованіи, которое основано на самодѣятельности, на удовлетвореніи свободныхъ запросовъ дѣтей и юношества и на производительномъ трудѣ, какъ необходимой основѣ жизни.

ПРОГРАММА ЖУРНАЛА:

1) Статьи по вопросамъ умственнаго, нравственнаго и физическаго воспитанія, образованія и самообразованія; 2) изъ семейной, школьной и общественной жизни съ точки зрѣнія интересовъ воспитанія и образованія; 3) о материнствѣ и воспитаніи ребенка въ первые годы жизни; 4) по вопросамъ защиты дѣтей отъ жестокости и эксплоатаціи; 5) о свободно-образовательныхъ начинаніяхъ для трудового населенія; 6) по ручному труду (земледѣльческому, ремесленному и т. д.); 7) по природовѣдѣнію, устройству экскурсій и т. д. 8) по вопросамъ гигіены дѣтства и юношества; 9) „Изъ книги и жизни“: обзоръ журналовъ, книгъ и газетъ по вопросамъ воспитанія и образованія; 10) переписка между лицами, интересующимися вопросами реформы воспитанія и образованія; 11) вопросы и отвѣты читателей; 12) Библіографія.

Подписная цѣна: на 1 годъ съ пересылкой **3 р.**, на полгода—**1 р. 50 к.**, за границу **3 р. 60 к.** Для сельскихъ учителей **2 р.**, на полгода **1 р.** Подписка принимается: Москва, Дѣвичье поле, Трубецкой пер., 8, редакція журнала „Свободное Воспитаніе“.

Издатель *А. Н. Коншинъ*. Редакторъ *И. Горбуновъ-Посадовъ.*

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

Выходитъ 24 раза въ годъ отдѣльными выпусками, въ 24 и 32 стр. каждый,

подъ редакціей приватъ-доцента В. Ф. Кагана.

ПРОГРАММА ЖУРНАЛА: Оригинальныя и переводныя статьи изъ области физики и элементарной математики. Статьи, посвященныя вопросамъ преподаванія математики и физики. Опыты и приборы. Научная хроника. Разныя извѣстія. Математическія мелочи. Темы для сотрудниковъ. Задачи для рѣшенія. Рѣшенія предложенныхъ задачъ съ фамиліями рѣшившихъ. Упражненія для учениковъ. Задачи на премію. Библіографическій отдѣлъ: обзоръ спеціальныхъ журналовъ; замѣтки и рецензіи о новыхъ книгахъ.

Статьи составляются настолько популярно, насколько это возможно безъ ущерба для научной стороны дѣла.

Предыдущіе семестры были **рекомендованы**: Учен. Ком. Мин. Нар. Пр. для гимн. мужск. и женск., реальн. уч., прогимн., городск. уч., учит. инст. и семинарій; Главн. Упр. Военно-Учебн. Зав. — для военно-уч. заведеній; Учен. Ком. при Св. Синодѣ — для дух. семинарій и училищъ.

Пробный номеръ высылается за одну 7-коп. марку.

Важнѣйшія статьи, помѣщенныя въ 1911 г.

45-ый семестръ.

Проф. Ф. Клейнъ. О преподаваніи геометріи. *Т. Ниттгаммеръ.* Методы и новѣйшіе результаты опредѣленія силы тяжести. *Н. Васильевъ.* Объ устойчивости велосипеда въ движеніи. *В. Даватцъ.* О построеніи кривой $x^y=y^x$. *А. Филипповъ.* Умноженіе натуральныхъ чиселъ. *Э. Маундеръ.* „Каналы" Марса. *Проф. Б. Донатъ.* Волчокъ и его будущее въ техникѣ. *І. И. Чистяковъ.* Рѣшеніе одного трансцендентнаго уравненія. *Проф. Э. Конъ.* Пространство и время съ точки зрѣнія физики. *А. Іоллосъ.* Наблюденіе іоновъ въ микроскопѣ и опредѣленіе элементарнаго электрическаго заряда. *К. Гагге.* Построеніе правильнаго семнадцатиугольника. *Прив.-доц. В. В. Бобынинъ.* Исторія первоначальнаго развитія счисленія дробей. *С. Гоу.* Задачи точной астрономіи. *Проф. І. Ценнекъ.* Утилизація атмосфернаго азота при помощи вольтовой дуги. *І. Левинъ.* Нѣкоторыя соотношенія въ прямоугольномъ треугольникѣ. *Ф. Генкель.* Эволюція звѣздъ и теорія захвата. *А. Виттингъ.* Между дѣломъ и шуткой въ области чиселъ.

46-ой семестръ.

Проф. О. Д. Хвольсонъ. Современное положеніе вопроса объ эѳирѣ. *Прив.-доц. В. Каганъ.* О представленіи цѣлаго числа въ видѣ суммы одинаковыхъ степеней цѣлыхъ чиселъ. *В. Рамзай.* Опредѣленія безконечно малыхъ количествъ вещества. *В. Лицманъ.* Постановка преподаванія математики въ мужскихъ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ Пруссіи. *Проф. Пойнтингъ.* Свѣтовое давленіе. *Проф. Д. М. Синцовъ.* Съѣздъ въ Миланѣ 5—7 сент. 1911 г. *Проф. Рётгерфордъ.* Единицы радіоактивности. *Прив.-доц. С. О. Шатуновскій.* Объ одномъ рядѣ, служащемъ для вычисленія π^2. *Проф. Д. М. Синцовъ.* Послѣдній трудъ, посвященный Евклиду. *Проф. Беккерель.* Эволюція вещества и міровъ. *П. Пюизе.* Мѣсто солнца между звѣздами. *Н. Васильевъ.* Объ осяхъ инерціи въ твердомъ тѣлѣ. *К. Л.* Новая серія книгъ по методикѣ точнаго знанія. *Э. Фишеръ.* Новѣйшіе успѣхи и задачи химіи. *Г. Пуанкаре.* Эволюція законовъ. *Б. Цомакіонъ.* Варіанты доказательствъ нѣкоторыхъ теоремъ элементарной геометріи. *Ф. Генкель.* Джорджъ Дарвинъ и его творенія. *К. Крюзе.* Точка пересѣченія высотъ треугольника. *Н. Влодаверъ.* Варіанты доказательства теоремы Пиѳагора. *О. Перронъ.* Объ истинѣ и заблужденіи въ математикѣ. *Проф. Д. Синцовъ.* Первый Всероссійскій Съѣздъ преподавателей математики.

Условія подписки:

Подписная цѣна съ пересылкой: за годъ **6 руб.**, за полгода **3 руб.** Учителя и учительницы низшихъ училищъ и всѣ учащіеся, выписывающіе журналъ **непосредственно изъ конторы редакціи**, платятъ за годъ **4 руб.**, за полугодіе **2 руб.** Допускается разсрочка подписной платы по соглашенію съ конторой редакціи. Книгопродавцамъ 5% уступки.

Журналъ за прошлые годы по 2 р. 50 к., а учащимся и книгопродавцамъ по 2 р. за семестръ. **Отдѣльные номера** текущаго семестра по 30 к., прошлыхъ семестровъ по 25 к.

Адресъ для корреспонденцій: **Одесса. Въ редакцію „Вѣстника Опытной Физики".**