№ 524.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

Элементарной Математики,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ф. Кагана.

XLIV-го Семестра № 8-й.

ОДЕССА.
Типографія Акц. Южно-Русскаго О-ва Печ. Дѣла, Пушкинская, 18.
1910.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

Выходитъ 24 раза въ годъ отдѣльными выпусками, не менѣе 24 стр. каждый,

под редакціей приватъ-доцента В. Ф. Кагана.

ПРОГРАММА ЖУРНАЛА: Оригинальныя и переводныя статьи изъ области физики и элементарной математики. Статьи, посвященныя вопросамъ преподаванія математики и физики. Опыты и приборы. Научная хроника. Разныя извѣстія. Математическія мелочи. Темы для сотрудниковъ. Задачи для рѣшенія. Рѣшенія предложенныхъ задачъ съ фамиліями рѣшившихъ. Упражненія для учениковъ. Задачи на премію. Библіографическій отдѣлъ: обзоръ спеціальныхъ журналовъ; замѣтки и рецензіи о новыхъ книгахъ.

Статьи составляются настолько популярно, насколько это возможно безъ ущерба для научной стороны дѣла.

Предыдущіе семестры были **рекомендованы**: Учен. Ком. Мин. Нар. Пр. для гимн. муж. и жен., реальн. уч., прогимн. город. уч., учит. инст. и семинарій; Главн. Упр. Воен.-Учебн. Зав.—для воен.-уч. заведеній; Учен. Ком. при Св. Синодѣ — для дух. семинарій и училищъ.

Пробный номеръ высылается за одну 7-коп. марку.

Важнѣйшія статьи, помѣщенныя въ 190⁹/₁₀ г.

42-ой семестръ.

М. Зиминъ. Приближенное вычисленіе корней квадратнаго уравненія. — *П. В. Шепелевъ.* Объ изложеніи основныхъ понятій и законовъ механики.—*Э. Пикаръ.* Успѣхи динамическаго воздухоплаванія.—Проф. *Ф. Содди.* Отецъ радія.—*К. Граффъ.* Комета Галлея и ея предстоящее возвращеніе.— *А. Долговъ.* О построеніи нитяныхъ моделей многогранниковъ Пуансо.—Проф. *Ф. Содди.* Къ вопросу о происхожденіи радія.— Прив.-доц. *В. Каганъ.* Что такое алгебра?—Проф. *К. Делтеръ.* Искусственные драгоцѣнные камни.—*Л. Видеманъ.* По поводу новаго объясненія твердости тѣлъ.—Проф. *Г. Кайзеръ.* Современное развитіе спектроскопіи.— Новое сообщеніе проф. Рамзая о превращеніи химическихъ элементовъ.—*Д. Ефремовъ.* О четырехугольникахъ.— *А. Пугаченко.* Приближенное дѣленіе угла на *n* равныхъ частей при помощи циркуля и линейки.— Опыты проф. І. І. Косоногова по изслѣдованію электролиза при помощи ультра-микроскопа.— Проф. *А. Беккеръ.* Сжиженіе газовъ.

43-ій семестръ.

Г. Пуанкаре. Новая механика. — *П. Флоровъ.* Способъ вычисленія отношенія окружности къ діаметру съ пятью десятичными знаками, пригодный для преподаванія въ среднихъ школахъ.— *И. Мессершмидтъ.* Марсъ и Сатурнъ. — *П. Лоуэль.* Марсъ. — *С. Виноградовъ.* Развитіе понятія о числѣ въ его исторіи и въ школѣ.— *Е. Григорьевъ.* О разложеніи въ ряды функцій $\sin x$ и $\cos x$.— Проф. *Д. Синцовъ.* Къ вопросу о преподаваніи математики. Я. Штейнеръ, какъ преподаватель— *Г. Урбэнъ.* Являются ли основные законы химіи точными или же лишь приближенными. — *Е. Смирновъ.* Объ ирраціональныхъ числахъ — *П. Ренаръ.* Авіація, какъ спортъ и наука. — Проф. *О. Лоджъ.* Міровой эѳиръ. — *К. Лебединцевъ.* Понятіе объ ирраціональномъ числѣ въ курсѣ средней школы. — *Э. Кроммелинъ.* Происхожденіе и природа кометъ. — *А. Филипповъ.* Дѣйствія съ періодическими дробями. — Прив.-доц. *В. Бобынинъ.* Естественные и искусственные пути возстановленія историками математики древнихъ доказательствъ и выводовъ

Условія подписки:

Подписная цѣна съ пересылкой: за годъ **6 руб.**, за полгода **3 руб**. Учителя и учительницы низшихъ училищъ и всѣ учащіеся, выписывающіе журналъ **непосредственно изъ конторы редакціи**, платятъ за годъ **4 руб.**, за полугодіе **2 руб**. Допускается разсрочка подписной платы по соглашенію съ конторой редакціи. Книгопродавцамъ 5% уступки.

Журналъ за прошлые годы по 2 р. 50 к., а учащимся и книгопродавцамъ по 2 р. за семестръ. **Отдѣльные номера** текущаго семестра по 30 к., прошлыхъ семестровъ по 25 коп.

Адресъ для корреспонденціи: **Одесса. Въ редакцію „Вѣстника Опытной Физики“.**

XLIV Сем. № 8.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 524.

Отношеніе новѣйшей физики къ механистическому міровоззрѣнію.

Рѣчь, произнесенная во второмъ общемъ засѣданіи 82 Съѣзда Общества Германскихъ Естествоиспытателей и Врачей 23 сент. 1910 г. въ Кенигсбергѣ.

М. Планка.

Высокочтимое собраніе! Городъ, въ который мы на этотъ разъ съѣхались, какъ бы самъ собою приглашаетъ насъ окинуть взоромъ новѣйшее развитіе физическихъ теорій. Я имѣю при этомъ въ виду не только великаго Кенигсбергскаго философа, который съ геніальной смѣлостью пытался подчинить физическимъ законамъ самыя первоначала нашего космоса; я напомню также и объ основателѣ теоретической физики въ Германіи Францѣ Нейманѣ, школа котораго обогатила физическую науку рядомъ наиболѣе выдающихся изслѣдователей; я напомню еще о Германѣ Гельмгольцѣ, который возвѣстилъ принципъ сохраненія энергіи: 56 лѣтъ тому назадъ онъ выяснялъ здѣсь передъ членами Физико-Экономическаго Общества тогда еще совершенно новыя понятія о потенціальной и кинетической энергіи („сила напряженія", Spannkraft и „живая сила"); онъ воспользовался для этой цѣли примѣромъ молота, поднятаго водяной силой и затѣмъ пущеннаго внизъ.

Съ того времени въ физикѣ, какъ всѣмъ извѣстно, произошли поразительныя, неожиданныя перемѣны. Если бы Гельмгольцъ теперь очутился между нами, то многое изъ того, что онъ услышалъ бы по вопросамъ физики, повергло бы его въ сильнѣйшее недоумѣніе. Первой причиной перемѣны явился блестящій прогрессъ экспериментальной техники. Завоеванія ея во многихъ отношеніяхъ были столь неожиданны, что въ настоящее время мы склонны считать доступными даже такія задачи, о рѣшеніи которыхъ немного десятилѣтій тому назадъ нельзя было и думать; и, вообще, принципіально теперь въ техникѣ врядъ ли еще можно считать что-либо абсолютно невозможнымъ. Но значительная доля отваги, развившейся у людей практики, сообщилась также и теоретикамъ; они теперь берутся за дѣло съ неслыханной для прежнихъ временъ смѣлостью; нѣтъ ни одного физическаго закона, который не подвергали бы въ настоящее время сомнѣнію; всѣ безъ исключенія физическія истины привлекаются къ суду критики. Иногда начинаешь думать, не наступили ли въ теоретической физикѣ времена первобытнаго хаоса!

Но чѣмъ настойчивѣе обступаетъ насъ обиліе запутанныхъ новыхъ фактовъ и пестрое разнообразіе новыхъ идей, тѣмъ острѣе чувствуется, съ другой стороны, потребность въ цѣльномъ всеобъемлющемъ міровоззрѣніи. Въ самомъ дѣлѣ, подобно тому, какъ успѣхъ каждаго эксперимента можетъ быть обезпеченъ лишь надлежащимъ расположеніемъ опытовъ, точно такъ же только цѣлесообразное физическое міровоззрѣніе можетъ дать намъ дѣйствительно полезную рабочую гипотезу, которая способствовала бы правильной постановкѣ вопросовъ. Эта потребность во всеобъединяющемъ міросозерцаніи имѣетъ существенное значеніе не только для физики, но и для всего естествознанія, такъ какъ переворотъ въ области физическихъ принциповъ не можетъ остаться безъ воздѣйствія на всѣ прочія естественныя науки.

Тѣмъ міросозерцаніемъ, которое до сихъ поръ оказывало физикѣ наиболѣе важныя услуги, безспорно является механическое. Какъ извѣстно, оно ставитъ себѣ цѣлью объяснить всѣ количественныя различія, въ концѣ концовъ, движеніями, и мы можемъ поэтому опредѣлить механистическое міросозерцаніе, какъ воззрѣніе, согласно которому всѣ физическія явленія могутъ быть сведены безъ остатка къ движеніямъ неизмѣняемыхъ матеріальныхъ точекъ или однородныхъ элементовъ; по крайней мѣрѣ, именно въ этомъ смыслѣ я буду говорить здѣсь о механистическомъ міросозерцаніи. Сохраняетъ ли эта гипотеза и въ современной физикѣ свое основное значеніе и осуществима ли она еще?

Издавна уже многіе физики и философы считали утвердительный отвѣтъ на этотъ вопросъ не только чѣмъ-то само собой подразумѣвающимся, но чуть ли не постулатомъ физическаго изслѣдованія. Согласно этому взгляду, задача теоретической физики состоитъ непосредственно въ томъ, чтобы свести всѣ явленія природы къ движенію. Вмѣстѣ съ тѣмъ, однако, издавна же были и болѣе скептическія натуры, которыя оспаривали фундаментальный характеръ подобной формулировки задачи и считали механистическое міровоззрѣніе слишкомъ узкимъ для того, чтобы оно могло обнять пестрое многообразіе всѣхъ явленій природы. Нельзя сказать, чтобы до сихъ поръ одно изъ этихъ двухъ противоположныхъ мнѣній одержало рѣшительный перевѣсъ. Лишь въ наши дни подготовляется, повидимому, окончательное рѣшеніе, которое явится конечнымъ результатомъ глубокаго движенія, охватившаго теоретическую физику; это движеніе имѣетъ столь радикальный, столь революціонный характеръ, что волны его ударяютъ далеко за предѣлы собственно физики въ сосѣднія области химіи, астрономіи и даже теоріи познанія, возвѣщая о грядущей научной борьбѣ, съ которой въ лѣтописяхъ мысли можетъ сравниться лишь борьба за систему Коперника. Что привело къ этой революціи и каковъ вѣроятный выходъ изъ вызваннаго ею кризиса, это я попытаюсь сейчасъ изложить.

Время расцвѣта механистическаго міросозерцанія относится къ прошлому столѣтію. Своимъ первымъ мощнымъ толчкомъ къ развитію оно обязано открытію прицина сохраненія энергіи; больше того, оно неоднократно, особенно въ первое время послѣ открытія этого принципа, даже отождествлялось съ послѣднимъ. Это недоразумѣніе обусловливалось тѣмъ обстоятельствомъ, что этотъ принципъ очень легко выводится съ точки зрѣнія механистическаго міровоззрѣнія: въ самомъ дѣлѣ, если всякая энергія — механической природы, то принципъ сохраненія энергіи по существу есть не что иное, какъ давно уже извѣстный въ механикѣ законъ живыхъ силъ. Съ этой точки зрѣнія въ природѣ существуютъ вообще только два рода энергіи, кинетическая и потенціальная, и задача сводится лишь къ тому, чтобы для даннаго вида энергіи — напримѣръ, теплоты, электричества или магнетизма — рѣшить, имѣетъ ли она кинетическую или же потенціальную природу. Такова въ точности точка зрѣнія Гельмгольца въ его первомъ открывшемъ новую эпоху мемуарѣ о сохраненіи силы. Лишь спустя нѣкоторое время поняли, что положеніе о сохраненіи энергіи еще ничего не говоритъ о самой природѣ энергіи; впрочемъ, послѣднюю мысль еще съ самаго начала отстаивалъ, какъ извѣстно, Юлій Робертъ Майеръ, который первый нашелъ механическій эквивалентъ теплоты.

По существу же упроченію механистическаго воззрѣнія содѣйствовало развитіе кинетической теоріи газовъ. Послѣднее весьма счастливымъ образомъ совпало съ направленіемъ, по которому пошло тогда химическое изслѣдованіе. Въ химіи задача объ установленіи строгаго различія между понятіями „молекула“ и „атомъ“ привела къ предложенію Авогадро, какъ наиболѣе цѣлесообразному опредѣленію газообразной молекулы; и какъ разъ это же предложеніе строго вытекаетъ, какъ оказалось, изъ кинетической теоріи газовъ, если ввести живую силу движущихся молекулъ, какъ мѣру температуры. Такимъ образомъ, оказалось возможнымъ на основаніи атомистическихъ представленій съ помощью механистическихъ соображеній выяснить достаточно подробно явленія диссоціаціи и ассоціаціи, изомеріи и оптической активности молекулъ съ такимъ же успѣхомъ, какъ и физическіе процессы тренія, диффузіи и теплопроводности, Правда, оставался неразрѣшеннымъ послѣдній и самый важный вопросъ о томъ, какъ объяснить движеніями различіе между химическими элементами. Но и въ этой области расцвѣла надежда: періодическая система ясно указывала, повидимому, на то, что, въ концѣ концовъ, существуетъ лишь одинъ родъ вещества; хотя гипотеза Пру, по которой этой первоначальной матеріей является водородъ, оказалась несостоятельной, такъ какъ атомные вѣса отнюдь не представляютъ собой цѣлыхъ кратныхъ атомнаго вѣса водорода, но все же оставалась еще возможность допустить, что первичные атомы, изъ которыхъ построены всѣ химическіе элементы, имѣютъ еще меньшую величину, и такимъ путемъ удержать мысль о единствѣ первичнаго вещества.

Одно время казалось, что атомистической теоріи грозитъ серьезная опасность съ энергетической стороны, а именно — отъ чистой термодинамики. Если уже принципъ сохраненія энергіи, какъ мы указали выше, отнюдь не требуетъ признанія механистическаго воззрѣнія, то второе начало термодинамики и его разнообразныя приложенія, въ особенности въ области физической химіи, породили даже нѣкоторое недовѣріе къ атомистикѣ. Общія предложенія, которыя съ совершенной точностью и во всей своей полнотѣ легко получаются изъ чистой термодинамики,— напримѣръ, законы о теплотѣ, законы парообразованія и плавленія, осмотическаго давленія, электролитической диссоціаціи, пониженія точки замерзанія и повышенія точки кипѣнія,— при помощи атомистическихъ представленій могли быть выведены лишь съ большимъ трудомъ и только съ извѣстнымъ приближеніемъ; особенно это замѣтно въ области жидкостей и твердыхъ тѣлъ, гдѣ атомистика вообще не пустила еще глубокихъ корней, тогда какъ термодинамика со своими методами подчинила себѣ въ равной степени всѣ три аггрегатныхъ состоянія вещества, и какъ разъ въ области жидкихъ растворовъ достигла самыхъ блестящихъ результатовъ. Для механистическаго міровоззрѣнія особенно много затрудненій представляла необратимость явленій природы, такъ какъ въ механикѣ всѣ явленія обратимы; только глубокому анализу и упорному научному оптимизму такого мыслителя, какъ Людвигъ Больцманъ, удалось не только примирить атомистику со вторымъ началомъ теоріи теплоты, но даже сдѣлать съ помощью атомистики понятной основную идею этого начала. Для приверженцевъ же чистой термодинамики всѣ эти вопросы не представляли никакой трудности или, лучше сказать, не существовали вовсе, такъ какъ они вовсе отрицали задачу о сведеніи термической и химической энергіи къ механистической, но довольствовались допущеніемъ, что существуютъ различные роды энергіи; по поводу этого обстоятельства Больцманъ какъ-то замѣтилъ съ горечью, что кинетическая теорія газовъ, какъ ему кажется, вышла уже изъ моды. Немного лѣтъ спустя онъ уже, конечно, не сказалъ бы этого, ибо какъ разъ около того времени кинетическая теорія газовъ начала дѣлать успѣхи, которые во всякомъ случаѣ не уступали всѣмъ прежнимъ завоеваніямъ ея.

Прежде всего чистая термодинамика скоро достигла своихъ естественныхъ границъ. Дѣйствительно, такъ какъ второе начало въ общемъ видѣ даетъ лишь неравенство, то равенства могутъ быть выведены изъ него лишь для состояній равновѣсія, — въ этомъ случаѣ, правда, съ полной общностью и точностью. Но какъ только мы покинемъ эту область и пожелаемъ прослѣдить ходъ физическихъ или химическихъ процессовъ во времени, второе начало можетъ указать намъ лишь направленіе, а также нѣсколько количественныхъ данныхъ для такихъ процессовъ, которые весьма мало удаляются отъ состоянія равновѣсія; но оно не даетъ доступнаго количественному опредѣленію значенія скоростей реакціи, и еще меньше мы можемъ ожидать отъ него въ смыслѣ ознакомленія съ подробной картиной соотвѣтственныхъ процессовъ. Въ этомъ отношеніи намъ могутъ помочь только атомистическія представленія, и послѣднія, дѣйствительно, во всѣхъ направленіяхъ оправдали возлагавшіяся на нихъ надежды. Особенно важное значеніе они пріобрѣли для законовъ іонизаціи и, вообще, всѣхъ тѣхъ явленій, въ которыхъ играютъ роль электроны. Достаточно будетъ простого указанія, что вообще въ такихъ обширныхъ областяхъ, какъ дисперсія, катодные и рёнтгеновы лучи, а также все ученіе о радіоактивности, явленія могутъ быть поняты вообще лишь на почвѣ кинетической атомистики.

Даже въ области, которая всегда считалась безспорнымъ достояніемъ термодинамики, въ состояніяхъ равновѣсія и стаціонарныхъ состояніяхъ, кинетитеская теорія пролила свѣтъ на многіе вопросы, которыхъ чистая термодинамика не могла выяснить. Кинетическая теорія сдѣлала болѣе понятнымъ испусканіе и поглощеніе тепловыхъ лучей, а своимъ объясненіемъ такъ называемаго Броуновскаго молекулярнаго движенія*) она дала непосредственное и, такъ сказать, осязательное доказательство своей состоятельности и необходимости и такимъ образомъ совсѣмъ лишь недавно одержала свою самую блестящую побѣду. Коротко говоря, въ области ученія о теплотѣ, химіи и теоріи электроновъ кинетическая атомистика является уже не рабочей гипотезой лишь, но прочно и надолго обоснованной теоріей.

Въ какомъ же положеніи находится теперь механистическое міровоззрѣніе? Вѣдь оно не можетъ довольствоваться атомистическимъ пониманіемъ матеріи и электричества, но идетъ далѣе и требуетъ, чтобы всѣ процессы природы были истолкованы, какъ движенія матеріальныхъ точекъ.

Самый грандіозный, но и послѣдній опытъ свести принципіально всѣ явленія природы къ движенію мы находимъ въ механикѣ Генриха Герца. Стремленіе механистическаго міровоззрѣнія къ проникнутой единствомъ міровой картинѣ здѣсь получило, можно сказать, идеальное завершеніе. Механика Герца собственно есть не физика настоящаго, но физика будущаго, или, такъ сказать, своего рода физическое вѣроисповѣданіе. Она ставитъ передъ нами программу, величественную по своей послѣдовательности и гармоніи, оставляющую позади себя всѣ прежнія попытки этого рода. Герцъ не довольствуется тѣмъ, что постулируетъ возможность провести ме-

*) См. статью А. Іоллоса въ №№ 520 и 521 „Вѣстника“.

ханистическое міровоззрѣніе, основываясь на допущеніи движеній простыхъ однородныхъ матеріальныхъ точекъ, единственныхъ настоящихъ кирпичей, изъ которыхъ построена вся физическая вселенная: онъ идетъ еще дальше, чѣмъ Гельмгольцъ въ своей статьѣ о сохраненіи силы, такъ какъ онъ вмѣстѣ съ различіемъ между потенціальной энергіей и кинетической заранѣе исключаетъ всѣ тѣ проблемы, которыя имѣютъ отношеніе къ изслѣдованію спеціальныхъ видовъ энергіи. По Герцу существуетъ одинъ только видъ матеріи, матеріальныя точки, и точно такъ же одинъ только видъ энергіи, а именно —кинетическая. Всѣ другіе виды энергіи, которые мы называемъ, напримѣръ, потенціальной энергіей, электромагнитной, химической, термической, въ дѣйствительности представляютъ собой кинетическую энергію движеній невидимыхъ матеріальныхъ точекъ; столь большое различіе въ свойствахъ этихъ видовъ энергіи обусловливается исключительно неизмѣняемыми связями, которыя существуютъ въ природѣ между положеніями и скоростями соотвѣтственныхъ матеріальныхъ точекъ. Эти связи отнюдь не ослабляютъ дѣйствія принципа энергіи, такъ какъ онѣ вліяютъ только на направленіе движеній, но не на величину живыхъ силъ подобно тому, какъ желѣзнодорожные рельсы даютъ поѣзду другое направленіе, но не замедляютъ его. Такимъ образомъ, по Герцу всѣ движенія въ природѣ основаны исключительно на инертности матеріи. Хорошій примѣръ для выясненія этого представленія даетъ намъ кинетическая теорія газовъ: энергію упругости покоющихся газовыхъ частицъ, до тѣхъ поръ считавшуюся потенціальной, она замѣняетъ кинетической энергіей подвижныхъ газовыхъ частицъ. Благодаря этому радикальному упрощенію предпосылокъ предложенія механики Герца отличаются удивительной простотой и наглядностью.

Но при ближайшемъ разсмотрѣніи оказалось, что трудности не уничтожены, но лишь отодвинуты, и при томъ въ такую область, которая почти недоступна для опытной провѣрки. Герцъ самъ, должно быть, чувствовалъ это, такъ какъ онъ ни разу даже не пробовалъ указать въ какомъ-нибудь опредѣленномъ и простомъ случаѣ, какого вида введенныя имъ невидимыя движенія и ихъ своеобразныя связи: это обстоятельство отмѣтилъ также Гельмгольцъ въ своемъ предисловіи къ посмертному труду Герца. Да и въ настоящее время мы ни на одинъ шагъ не подвинулись еще въ этомъ направленіи; напротивъ, какъ мы увидимъ, развитіе физики пошло за это время по совершено другимъ путямъ, которые сильно разошлись не только съ воззрѣніями Герца, но и съ механистическимъ направленіемъ вообще. Въ самомъ дѣлѣ, какъ разъ между тѣми физическими процессами, которые изслѣдованы съ самой большой точностью, существуетъ большая группа, представляющая, повидимому, непреодолимое препятствіе для проведенія механистическаго воззрѣнія.

Я сейчасъ перехожу къ самому больному мѣсту механической теоріи: къ свѣтовому эѳиру. Стремленія объяснить свѣтовыя волны, какъ движенія чрезвычайно тонкаго вещества, заполняющаго все пространство, столь же стары, какъ волнообразная теорія Гюйгенса, и съ того времени образовался цѣлый рядъ пестрыхъ представленій, которыя имѣли своей цѣлью объяснить строеніе этой загадочной среды*). Для механистическаго міровоззрѣнія существованіе матеріальнаго свѣтового эѳира является необходимымъ постулатомъ, потому что по этому воззрѣнію тамъ, гдѣ есть энергія, должно также быть движеніе, а гдѣ есть движеніе, должно быть нѣчто, совершающее движеніе. Но тѣмъ сильнѣе бросалось въ глаза рѣзкое отличіе эѳира отъ всѣхъ другихъ веществъ, начиная хотя бы съ чрезвычайно малой плотности его въ сравненіи съ его необыкновенно большой упругостью, обусловливающей огромную скорость распространенія свѣтовыхъ волнъ. По Гюйгенсу, который считалъ свѣтовыя волны продольными, еще можно было представлять себѣ свѣтовой эѳиръ, какъ разрѣженный газъ; по Френелю же, который доказалъ поперечность колебаній, эѳиръ долженъ быть отнесенъ къ твердымъ тѣламъ, потому что въ газообразномъ эѳирѣ поперечныя свѣтовыя волны не могли бы распространяться. Хотя неоднократно дѣлались попытки объяснять поперечныя волны явленіями, которыя напоминаютъ треніе и могутъ, слѣдовательно, имѣть мѣсто и въ газахъ, однако, этотъ взглядъ оказывается непріемлемымъ уже по тому, что въ свободномъ эѳирѣ нельзя доказать ни поглощенія свѣта, ни зависимости скорости распространенія отъ цвѣта. Такимъ образомъ, пришлось допустить существованіе твердаго тѣла, обладающаго тѣмъ страннымъ свойствомъ, что небесныя тѣла проходятъ черезъ него безъ всякаго сколько-нибудь замѣтнаго сопротивленія. Но эта трудность была лишь началомъ. Каждая попытка приложить къ свѣтовому эѳиру уравненія теоріи упругости твердыхъ тѣлъ приводила къ требованію продольныхъ волнъ, которыя въ дѣйствительности не существуютъ; ихъ нельзя было открыть, по крайней мѣрѣ, несмотря на неустанные поиски, которые велись съ напряженнымъ усиліемъ и весьма разнообразными способами; отъ этихъ продольныхъ волнъ можно было избавиться только путемъ допущенія либо безконечно-малой, либо же безконечно-большой сжимаемости свѣтового эѳира. Но и при такомъ допущеніи невозможно было удовлетворить полностью всѣмъ предѣльнымъ условіямъ на раздѣльной поверхности между двумя разнородными средами.

Я не буду останавливаться здѣсь на описаніи всѣхъ болѣе или менѣе сложныхъ допущеній различнаго рода, съ помощью которыхъ изслѣдователи пытались устранить эти трудности; я укажу лишь на одинъ непріятный симптомъ, который обыкновенно сопровождаетъ безплодныя гипотезы и сильно даетъ себя чувствовать и въ настоящей проблемѣ: я имѣю въ виду возникновеніе между физиками споровъ, которые не могутъ быть разрѣшены никакими опытами. Сюда относится прежде всего знаменитый споръ между Френелемъ и Нейманомъ о зависимости между направленіемъ колебаній прямолинейно поляризованнаго свѣта и плоскостью поляризаціи.

---

*) См. О. Лоджъ, „Міровой эѳиръ“. „Вѣстникъ“, №№ 512, 514, 515, 516 518, 520, 522 и 523.

Врядъ ли въ какой-нибудь другой области физики вопросъ, въ сущности своей, повидимому, неразрѣшимый, вызвалъ когда-либо столь ожесточенную борьбу, въ которой были пущены въ ходъ всѣ роды оружія опыта и теоріи.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Тема для сотрудниковъ № 2.

Случай отысканія предѣла отношенія двухъ перемѣнныхъ величинъ, заданныхъ уравненіями въ конечныхъ разностяхъ.

П. Флорова.

Даны два положительныхъ числа m и n. Перемѣнныя величины A_r и B_r, гдѣ r—какое угодно цѣлое число, опредѣляются уравненіями:

$$A_{r+1} = (m+n)(mn)^{2^r-1} + \left(m^{2^r} + n^{2^r}\right)A_r,$$

$$B_{r+1} = (m+n+mn)(mn)^{2^r-1} + \left(m^{2^r} + n^{2^r}\right)B_r,$$

при чемъ

$$A_1 = 0, \quad B_1 = mn.$$

Показать, что предѣлъ λ, къ которому стремится отношеніе $\frac{A_r}{B_r}$ по мѣрѣ неограниченнаго возрастанія r, имѣетъ одно изъ двухъ значеній:

$$\lambda = \frac{1}{1+m} \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{1}{1+n},$$

смотря по тому, какое изъ чиселъ больше: m или n.

Для рѣшенія этой задачи нужно прежде всего установить неравенства:

$$\frac{m+n}{m+n+mn} > \frac{A_{r+1}}{B_{r+1}} > \frac{A_r}{B_r},$$

которыя покажутъ, что λ существуетъ. Затѣмъ надо вывести уравненіе:

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{m+n+mn}{m+n} = \frac{mn}{m+n} \cdot \frac{1}{S}$$

гдѣ S означаетъ предѣлъ суммы безконечнаго ряда:

$$\frac{mn}{m^2+n^2} + \frac{(mn)^3}{(m^2+n^2)(m^4+n^4)} + \frac{(mn)^7}{(m^2+n^2)(m^4+n^4)(m^8+n^8)}.$$

По отысканіи S найдется и λ.

Международная Коммиссія по преподаванію математики.

Математика на выставкѣ въ Брюсселѣ.

Съѣздъ Международной Коммиссіи по преподаванію математики 9—10-го августа и конференціи въ нѣмецкомъ отдѣлѣ 11—12-го августа н. ст.

Въ августѣ этого года состоялось въ Брюсселѣ собраніе членовъ „Международной Коммиссіи по преподаванію математики", о которомъ было сообщено въ № 514 „Вѣстника Опытной Физики". Въ числѣ немногихъ русскихъ мнѣ довелось побывать на этомъ собраніи и на примыкавшихъ къ нему конференціяхъ въ германскомъ отдѣлѣ выставки. Въ настоящее время подробный протоколъ собранія напечатанъ генеральнымъ секретаремъ Коммиссіи — женевскимъ профессоромъ Г. Феромъ (H. Fehr) на страницахъ его журнала „L'Enseignement mathématique" (t. XII, p. 353—415). Я хочу все же подѣлиться съ читателями „Вѣстника" своими впечатлѣніями, хотя и нѣсколько запоздавшими.

Гёттингенъ, гдѣ я пробылъ двѣ недѣли передъ съѣздомъ, въ настоящее время одинъ изъ оживленнѣйшихъ центровъ дѣятельности Коммиссіи: проф. Ф. Клейнъ (F. Klein), предсѣдатель Центральнаго Комитета ея и германской подкоммиссіи и душа движенія по реформѣ средняго образованія въ Германіи, всецѣло отдался организаторской и редакціонной работѣ и даже не читалъ поэтому въ лѣтній семестръ лекцій. За время моего пребыванія въ Гёттингенѣ, пользуясь присутствіемъ представителей разныхъ національностей, участвующихъ въ Коммиссіи, онъ собралъ лицъ, интересующихся работами Коммиссіи, и познакомилъ ихъ съ тѣмъ, что сдѣлано въ Германіи, успѣвшей благодаря его энергіи занять на Съѣздѣ первое мѣсто по количеству и качеству уже сдѣланнаго.

Въ Гёттингенѣ же я имѣлъ удовольствіе выслушать въ частномъ кружкѣ интересный докладъ А. Р. Кулишера о его поѣздкѣ-осмотрѣ наиболѣе типичныхъ германскихъ школъ (поѣздки за-границу, организуемыя Коммиссіей образовательныхъ экскурсій при учебномъ отдѣлѣ Общества распространенія техническихъ знаній; — спеціальная группа для изученія народнаго образованія).

Спустившись на пароходѣ по Рейну, я явился въ Брюссель 9 августа н. ст. и, устроившись благодаря любезности проф. Фера съ довольно затруднительнымъ во время выставки квартирнымъ вопросомъ, поспѣшилъ познакомиться съ городомъ, этимъ „маленькимъ Парижемъ", какъ называютъ его бельгійцы.

Днемъ въ этотъ день происходили засѣданія Центральнаго Комитета, вечеромъ состоялось предварительное собраніе для взаимнаго ознакомленія въ ресторанѣ „Aux Trois Suisses" (на Rue des Princes, противъ Théatre de la Monnaie), на которомъ выяснился приблизительный составъ участниковъ и пріѣзжіе члены могли познакомиться съ хозяевами-бельгійцами и между собою. Привѣтствовали собравшихся отъ имени бельгійцевъ, проф. Нейбергъ (Neuberg) и Виттманъ (Wittmann), секретарь Международнаго Конгресса по среднему образованію, который долженъ былъ состояться вслѣдъ за нашимъ съѣздомъ — 15-го и 16-го августа. Отъ лица собравшихся говорили проф. Ф. Клейнъ, К. Бурле (C. Bourlet), французскій делегатъ, и проф. Феръ, высказавшій пожеланіе, чтобы и въ Бельгіи, по примѣру другихъ странъ, создалось Бельгійское Математическое Общество, которое объединило бы разрозненныя теперь силы бельгійскихъ математиковъ.

Нашему почтенному секретарю пришлось, какъ онъ мнѣ потомъ разсказывалъ, на самомъ себѣ испытать результаты этой разрозненности: на него, въ сущности, и пала вся предварительная работа по организаціи съѣзда.

На другой день въ старинной „Salle Ravenstein" состоялось утромъ закрытое собраніе делегатовъ членовъ національныхъ подкомиссій. Засѣданіе открылъ привѣтственною рѣчью проф. Ф. Клейнъ представившій собранію результатъ работъ Германской Подкоммиссіи.

Проф. Ф. Клейнъ указалъ, что при значительной децентрализаціи и сравнительной свободѣ, предоставленной преподавателямъ въ Германіи, для успѣха движенія въ пользу реформы преподаванія математики въ средней школѣ необходимо убѣдить въ необходимости и цѣлесообразности реформы самихъ преподавателей. Поэтому и самъ Клейнъ, замѣтимъ, такъ энергично ведетъ лично агитацію въ пользу реформы, выступая на различныхъ съѣздахъ и собраніяхъ. Я не буду, однако, останавливаться теперь на движеніи въ Германіи, — это заслуживало бы отдѣльной и болѣе обстоятельной статьи*). Въ Германіи, какъ указалъ Клейнъ, принята была система отдѣльныхъ монографій: помимо краткихъ отчетовъ при выпускаемыхъ время отъ времени циркулярахъ Комитета, фирма Тейбнера приняла на себя печатаніе отдѣльныхъ монографій, которыя выходятъ подъ общимъ заглавіемъ „Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlasst durch die Internationale Mathematische Unterrichts-Kommission, herausgegeben von F. Klein"; издательство кстати сказать, длинное заглавіе Коммиссіи сокращаетъ по западному обычаю въ короткое IMUK. Весь матеріалъ распредѣленъ на четыре тома. Т. I: Среднія школы (Die höheren Schulen) въ Сѣверной Германіи, съ введеніемъ Ф. Клейна. Т. II: Среднія школы въ средней и Южной Германіи. Т. III: Отчеты общаго характера. Т. IV: Математика въ техническихъ школахъ. Составъ отдѣльныхъ томовъ не вполнѣ еще установленъ. Я приведу заглавія лишь тѣхъ монографій, которыя уже опубликованы и были представлены собранію проф. Ф. Клейномъ.

Томъ I.

1. W. Lietzmann. Содержаніе и методъ преподаванія математики въ сѣверо-германскихъ среднихъ школахъ на основаніи существующихъ учебниковъ (XII + 102 стр.).

*) См. статью прив.-доц. В. Ф. Кагана: „О реформѣ преподаванія математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ Франціи и Германіи", напечатанную въ книгѣ: Борель-Штеккель, „Элементарная математика", ч. I. Изд. „Mathesis".

2. W. Lietzmann. Организація преподаванія математики въ среднихъ мужскихъ школахъ Пруссіи (204 стр.).

Томъ II.

1. Преподаваніе математики въ среднихъ школахъ и подготовка преподавательскихъ силъ въ Баваріи [H. Wieleitner. (XI + 85 стр.)].

2. То же — для Саксоніи. [A. Witting (X + 76 стр.)].

3. То же — для Вюртемберга. [E. Geck. (IV + 104 стр.)].

4. То же — для Бадена. [H. Cramer. (IV + 48 стр.)].

5. То же — для Гессена. [H. Schnell. (VI + 51 стр.).

Томъ III.

1. Проф. Тимердингъ. Математика въ учебникахъ физики.

Томъ IV.

H. Grünbaum. Преподаваніе математики въ среднихъ спеціальныхъ школахъ машинной промышленности (XVI + 99 стр.).

Изъ этихъ монографій особенное вниманіе присутствующихъ обращалъ проф. Ф. Клейнъ, во-первыхъ, на работы Лицмана. Въ первой авторъ пересмотрѣлъ главнѣйшія изъ руководствъ*) и характеризуетъ ихъ какъ со стороны содержанія, такъ и со стороны статистической. Не буду, однако, останавливаться на этой интересной книжкѣ, — было бы интересно и полезно ознакомить русскую публику болѣе подробно какъ съ содержаніемъ этой, такъ и другихъ монографій той же серіи. И въ высшей степени было бы полезно, если бы и у насъ нашлись люди, которые для русскихъ учебниковъ средней школы продѣлали бы ту же работу, которую для Пруссіи сдѣлалъ Лицманъ. Замѣчу лишь, что, въ противоположность Франціи и Италіи, сильно еще въ Пруссіи то разобщеніе университетской математики и средней школы, противъ котораго такъ борется проф. Ф. Клейнъ, и мало профессоровъ интересуется вопросами преподаванія въ средней школѣ. Во второй своей работѣ Лицманъ характеризуетъ общую организацію преподаванія въ среднихъ мужскихъ учебныхъ заведеніяхъ, переходитъ къ планамъ преподаванія математики и, наконецъ, въ последней части переходитъ къ вліянію на преподаваніе того движенія, во главѣ котораго стоитъ проф. Клейнъ и наиболѣе яркимъ выраженіемъ котораго являются такъ называемыя Меранскія и Штутгард-

*) Пользуясь при этомъ математическою лекторіей Геттингенскаго университета, гдѣ благодаря проф. Клейну имѣется и хорошій педагогическій отдѣлъ, и библіотекою „Königlich-preussische Auskunftstelle der höheren Unterrichtswesen“ въ Берлинѣ, — учрежденіемъ заслуживающимъ большого вниманія. Указатель — оффиціальный — учебниковъ, принятыхъ въ Пруссіи, составленъ Горномъ (Horn) (1-е изд. 1900, 2-е изд. 1906).

скія предложенія*). Авторъ не сомнѣвается въ конечномъ успѣхѣ движенія, имѣющаго цѣлью ввести основныя начала анализа безконечно-малыхъ и аналитической геометріи въ кругъ преподаванія средней школы. Онъ отмѣчаетъ ту относительную свободу, которая предоставлена преподавателю въ прусской школѣ, и въ ней видитъ залогъ дальнѣйшаго развитія.

Изъ монографій второго тома проф. Ф. Клейнъ обратилъ наше вниманіе на монографію Е. Гекка (E. Geck) о положеніи преподаванія математики въ Вюртембергѣ, гдѣ оно сильно отличается отъ другихъ нѣмецкихъ государствъ. На развитіе преподаванія вліяли какъ историческія условія, религіозность швабовъ, придававшая большое значеніе духовной карьерѣ, доступъ къ которой открывался черезъ конкурсный Landexamen для поступленія въ духовныя семинаріи, которому подвергались въ Штутгартѣ 14-тилѣтніе мальчики, стекавшіеся со всѣхъ концовъ Вюртемберга. На планы низшихъ и среднихъ классовъ гимназій, прогимназій и народныхъ школъ оказывали поэтому давленіе всѣ измѣненія въ требованіяхъ этого конкурснаго экзамена. При этомъ въ Вюртембергѣ до сихъ поръ еще сохранилась та система, которая у насъ существуетъ въ начальной школѣ и въ городскихъ училищахъ по положенію 1872 г. Въ Вюртембергѣ только поздно рѣшились заводить преподавателей по спеціальностямъ, и до сихъ поръ до четвертаго класса гимназіи математику преподаетъ классный преподаватель, по образованію, большею частью, филологъ-классикъ; въ среднихъ классахъ математику часто преподаетъ учитель безъ университетскаго образованія — народный учитель, кончившій учительскую семинарію и сдавшій экзаменъ на званіе учителя средней школы. Въ настоящее время, впрочемъ, въ Вюртембергѣ подготовляются новые планы по математикѣ, которые несомнѣнно внесутъ новыя измѣненія, подобно реформамъ 1891, 1899 и 1902 годовъ.

Изъ остальныхъ монографій проф. Клейнъ остановился еще на монографіи проф. Тимердинга (Timerding) — „Математика въ учебникахъ физики“. Эта любопытная работа на основаніи пересмотра нѣмецкихъ учебниковъ физики для средней школы показываетъ, какъ физики, которымъ невозможно обойтись безъ основныхъ понятій высшей математики, вынуждены обходиться ея суррогатами, которые при ближайшемъ разсмотрѣніи оказываются тѣми методами, которыми математика пользовалась до изобрѣтенія анализа безконечно-малыхъ.—

Проф. Клейнъ, который выступалъ не только въ закрытомъ засѣданіи членовъ Коммиссіи, но и въ публичномъ и на конференціяхъ въ германскомъ отдѣлѣ выставки и рѣчи котораго я невольно объединяю теперь, указалъ затѣмъ на то сочувствіе, которое дѣятельность Коммиссіи встрѣтила со стороны прусскаго правительства, ассигновавшаго на расходы ея значительную субсидію, позволившую Коммиссіи не только пріобрѣтать отъ фирмы Тейбнера 75 экз. для разсылки делега-

*) См. A. Gutzmer. „Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aerzte“. Leipzig, 1908. Этому движенію будетъ посвящена въ изданіяхъ IMUK особая монографія Р. Шиммака (R. Schimmack).

тамъ, но и выдавать субсидіи на командировки лицамъ, взявшимъ на себя рефераты, для объѣзда школъ того или другого типа. Понятна важность этого пріема,—ибо одной разсылки опросныхъ листковъ слишкомъ мало, и, напримѣръ, Лицманъ могъ воспроизводить на страницахъ 64—74 своей второй работы уроки Шверинга*) (Schwering) именно благодаря подобнымъ объѣздамъ.

Полною противоположностью Германіи оказалась на съѣздѣ, какъ и во всемъ, Франція. Представитель ея К. Бурле (C. Bourlet), проф. механики въ „Conservatoire National des Arts et Métiers", въ длинной рѣчи сообщилъ о состояніи работъ во Франціи. Организаціонная работа была задержана тѣмъ обстоятельствомъ, что различные типы учебныхъ заведеній находятся въ вѣдѣніи различныхъ министерствъ. Въ настоящее время подготовительныя работы закончены. Весь матеріалъ распредѣленъ на пять томовъ, которые печатаются книгоиздательствомъ Hachette; отдѣльные рефераты должны быть представлены въ октябрѣ нынѣшняго года, и томы будутъ выпускаться не отдѣльными тетрадями, а полностью. Первый томъ подъ редакціей Сентъ-Жермена (Saint-Germain) посвящается высшему образованію, второй—математикѣ въ лицеяхъ и колледжахъ для мальчиковъ—подъ редакціей Ф. Маротта (F. Marotte**), третій—подъ редакціей Лефевра (Lefevre)—математикѣ въ первоначальномъ обученіи, четвертый—подъ редакціей Ролле (Rollet)—будетъ посвященъ преподаванію математики въ техническихъ школахъ различныхъ типовъ, и пятый—подъ редакціею M-lle Аміё (Amieux)—преподаванію математики въ женскихъ учебныхъ заведеніяхъ (начальныхъ школахъ, лицеяхъ и профессіональныхъ школахъ). Въ особенности остановился ораторъ какъ на особенностяхъ французскаго техническаго образованія, на écoles nationales d'arts et métiers, которыя имѣютъ цѣлью создавать интеллигентныхъ рабочихъ, способныхъ завѣдывать мастерской; онъ остановился также на замѣчательномъ учрежденіи „Conservatorie National des Arts et Métiers", при которой, помимо нагляднаго обученія въ музеѣ на коллекціяхъ существуетъ и устное преподаваніе,—для котораго существуютъ 22 каѳедры, изъ которыхъ 15 посвящены наукамъ въ приложеніи къ искусствамъ, и искусству въ приложеніи къ ремесламъ. Курсы эти имѣютъ цѣлью знакомить со всѣми преобразованіями въ промышленности и съ самыми новѣйшими усовершенствованіями. Такъ, самъ Бурле читалъ въ прошломъ году спеціальный курсъ, посвященный авіаціи.

Ораторъ отмѣтилъ, наконецъ, реформы послѣднихъ лѣтъ въ области женскаго образованія, значительно повысившія его уровень, благодаря чему Франція, такъ долго отстававшая въ этой области, можетъ съ честью выступить передъ кэмбриджскимъ конгрессомъ со своимъ отчетомъ о постановкѣ женскаго математическаго образованія.

---

*) Директоръ гимназіи въ Кёльнѣ; анонимно выпущенная имъ брошюра: „Ist die Mathematik Hexerei"? Von einem preussisshen Schulmeister — обратила на себя вниманіе педагогическаго міра Германіи.

**) Редакторъ журнала „Revue de l'enseignement des sciences".

За рѣчью проф. К. Бурле послѣдовали довольно оживленныя пренія. Онъ сказалъ, между прочимъ, въ своей рѣчи,— чтобы охарактеризовать крайнюю централизацію во Франціи,— что тамъ по всей странѣ во всѣхъ лицеяхъ въ одинъ и тотъ же часъ доказывается одна и та же теорема однимъ и тѣмъ же способомъ. Проф. Ф. Клейнъ сейчасъ же подхватилъ эту фразу, и сказалъ, что въ Германіи какъ разъ наоборотъ: можно поручиться, что ни въ одной школѣ ни одна теорема не излагается однимъ и тѣмъ же способомъ. Въ отвѣтъ представитель Франціи поспѣшилъ ограничить свое первое заявленіе, указавъ, что при всей централизаціи и регламентаціи учителямъ предоставляется полная свобода въ методахъ и способахъ изложенія, и въ качествѣ примѣра отсутствія застоя сослался на свою собственную алгебру, которая 15 лѣтъ назадъ была смѣлой, почти революціонной попыткой, а теперь считается уже устарѣвшей.

Изъ представителей другихъ странъ интересно отмѣтить лишь сообщенія Уптона (Upton, Соединенные Штаты) и Грингиля (Greenhill, Англія).

Первый указалъ, что въ Соединенныхъ Штатахъ работа поставлена на широкую ногу. Делегація изъ 3-хъ лицъ — Смитъ (D. E. Smith), Озгудъ (W. F. Osgood) и Юнгъ (G. W.-A. Joung) окружила себя Совѣтомъ, состоящимъ подъ предсѣдательствомъ Брауна (E. E. Brown), „United States Commissioner of Education“, изъ президентовъ трехъ главныхъ американскихъ университетовъ: Гарварда, Колумбія и Чикаго, изъ бывшихъ и настоящаго предсѣдателей Американскаго Математическаго Общества и президента Американской Федераціи преподавателей математическихъ и естественныхъ наукъ. Въ каждомъ изъ главнѣйшихъ штатовъ организованы подкоммиссіи, которыя должны были дать отчеты, возможно полные, по отдѣльнымъ штатамъ и группамъ школъ, не стѣсняясь возможностью повтореній. Отчеты должны быть обсуждены въ собраніяхъ преподавателей и математиковъ, чтобы дать точное отраженіе мнѣній преподавательскаго корпуса и ученыхъ силъ страны. Эти предварительные отчеты уже составлены и въ теченіе лѣта просмотрѣны делегатами. Въ болѣе или менѣе полномъ видѣ они будутъ напечатаны въ различныхъ журналахъ. На основаніи ихъ составляется общій отчетъ, который будетъ опубликованъ заботами „Bureau of Education“, предсѣдатель котораго М. Е. Браунъ гарантировалъ делегаціи самое широкое содѣйствіе „Bureau“.

Сэръ Дж. Грингиль (Sir George Greenhill) отмѣтилъ трудности, стоявшія передъ англійской делегаціей, ибо въ Англіи нѣтъ никакой организаціи: „Boord of Education“ есть учрежденіе скорѣе характера статистическаго. Рядъ отчетовъ о постановкѣ преподаванія будетъ представленъ и напечатанъ въ началѣ 1911 г.

Сообщить о положеніи дѣла въ Россіи пришлось мнѣ, и я сообщилъ, что, какъ отчасти уже извѣстно читателямъ „Вѣстника“ отчеты

---

*) D. E. Smith, иніціаторъ всего дѣла IMUK, къ сожалѣнію, не присутствовалъ на съѣздѣ.

по отдѣльнымъ типамъ школъ распредѣлены въ засѣданіи подкомиссіи въ ноябрѣ прошлаго года между отдѣльными докладчиками. Они должны быть готовы къ 1 октября этого года.

Въ настоящее время два изъ этихъ отчетовъ уже отпечатаны: о преподаваніи математики въ университетахъ, петербургскихъ высшихъ техническихъ заведеніяхъ и военныхъ школахъ, принадлежащій перу проф. К. А. Поссе*), и составленный финляндскою коммиссіей отчетъ о преподаваніи математическихъ наукъ въ финляндскихъ школахъ**).

Проф. Д. Синцовъ.

(Окончаніе слѣдуетъ).

О гиряхъ.

Новое рѣшеніе стараго вопроса.

Условимся называть для краткости грузомъ p грузъ, котораго вѣсъ равенъ p, и гирей p — гирю вѣса p. Подъ взвѣшиваніемъ груза p мы будемъ разумѣть только слѣдующій процессъ: либо на одну чашку вѣсовъ кладутъ грузъ p, а на другую чашку уравновѣшивающія его гири b_1, b_2, ..., b_h и узнаютъ такимъ образомъ, что

$$p = b_1 + b_2 + \cdots + b_h,$$

либо на одну чашку вѣсовъ кладутся грузъ p и нѣкоторыя гири c_1, c_2, ..., c_g, а на другую чашку вѣсовъ кладутся гири b_1, b_2, ..., b_h, уравновѣшивающія первую чашку, и тогда узнаютъ, что

$$p = (b_1 + b_2 + \cdots + b_h) - (c_1 + c_2 + \cdots + c_g). \tag{1}$$

Выраженію $c_1 + c_2 + \cdots + c_g$ мы условимся приписать опредѣленное численное значеніе также и при $g = 0$, а именно мы будемъ считать это выраженіе равнымъ нулю при $g = 0$. Тогда равенство (1) будетъ содержать въ себѣ предшествующее ему равенство, какъ частный случай.

Положимъ теперь, что у насъ имѣются n гирь

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n. \tag{2}$$

---

*) „Rapport sur l'enseignement mathématique dans les Universités, les Ecoles techniques Supérieures et quelques unes des Ecoles militaires en Russie", par C. Possé. St.-Pt. 8°, IV + 100 p.".

**) „Rapport sur l'enseignement des mathématiques dans les écoles de Finlande". Rédigé par une Commission instituée par le Sénat Impérial de Finlande. Helsingfors. 8°, 52 p.".

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что при помощи всѣхъ или нѣкоторыхъ изъ этихъ гирь грузъ p можно будетъ взвѣсить въ томъ и только въ томъ случаѣ, когда число p можетъ быть представлено въ формѣ (1), гдѣ $b_1, b_2, \ldots, b_h, c_1, c_2, \ldots, c_g$ суть $h+g$ чиселъ изъ ряда (2). Если изъ чиселъ (2) составить всевозможныя выраженія типа (1) (при чемъ уменьшаемое $b_1+b_2+\cdots+b_h$ постоянно должно быть больше вычитаемаго $c_1+c_2+\cdots+c_g$), то мы получимъ численныя величины всѣхъ тѣхъ грузовъ, какіе могутъ быть взвѣшены n гирями (2). Отсюда слѣдуетъ, что наибольшее число (назовемъ его u_n) различныхъ по вѣсу грузовъ, какіе могутъ быть взвѣшены при помощи n гирь, соотвѣтствуетъ тому случаю, когда среди выраженій (1), составленныхъ изъ чиселъ (2) и имѣющихъ положительныя значенія, нѣтъ равныхъ. Мы будемъ говорить, что гири (2) составляютъ особенную систему гирь въ томъ и только въ томъ случаѣ, когда число различныхъ по вѣсу грузовъ, какіе могутъ быть взвѣшены при помощи этой системы гирь, равно u_n, т. е. число этихъ грузовъ есть maximum.

Слѣдствіе первое. Особенная система гирь не содержитъ гирь, равныхъ по вѣсу.

Слѣдствіе второе. Часть особенной системы гирь есть особенная система гирь.

Наряду съ особенной системой гирь (2) будемъ также разсматривать систему гирь

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \tag{3}$$

которая, какъ часть системы (2), представляетъ поэтому также особенную систему изъ $n-1$ гирь. Если q означаетъ произвольный грузъ, который можетъ быть взвѣшенъ при помощи гирь (3), то число значеній q равно u_{n-1}. Присоединяя къ системѣ (3) гирю a_n [т. е. возвращаясь къ системѣ гирь (2)], мы сверхъ u_{n-1} грузовъ q можемъ взвѣсить еще только слѣдующіе грузы:

1 грузъ a_n,

u_{n-1} грузовъ a_n+q,

u_{n-1} грузовъ $|a_n-q|$,

гдѣ знакъ $|\ |$ означаетъ абсолютную величину. Всѣ эти грузы, числомъ $2u_{n-1}+1$, отличны другъ отъ друга и отъ каждаго изъ u_{n-1} грузовъ q, ибо система (2) предполагается особенной. Числа u_n и u_{n-1} удовлетворяютъ поэтому соотношенію

$$u_n = 3u_{n-1}+1.$$

Замѣняя здѣсь n на $n-1$, $n-2$, ..., 3, 2 и замѣчая, что одною гирею можно взвѣсить одинъ и только одинъ грузъ, мы будемъ имѣть рядъ равенствъ:

$$
\begin{aligned}
u_n &= 3u_{n-1} + 1, \\
u_{n-1} &= 3u_{n-2} + 1, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
u_3 &= 3u_2 + 1, \\
u_2 &= 3u_1 + 1, \\
u_1 &= 1.
\end{aligned}
$$

Помножая эти равенства, начиная съ перваго, соотвѣтственно на 3^0, 3^1, 3^2, ..., 3^{n-1} и складывая полученныя такимъ образомъ равенства, мы найдемъ, что

$$u_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} = \tfrac{1}{2}(3^n - 1).$$

Такимъ образомъ, система n гирь будетъ особенной тогда и только тогда, когда при помощи гирь этой системы можно взвѣсить $\frac{1}{2}(3^n - 1)$ различныхъ по вѣсу грузовъ.

Каждая отдѣльная гиря есть особенная система, состоящая изъ одной гири. Легко показать, что, если система, состоящая изъ k гирь a_1, $a_2, \ldots, a_k$, будетъ особенная и

$$s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k,$$

то при $a_{k+1} > 2s_k$ система гирь

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ a_{k+1}$$

также будетъ особенная.

Дѣйствительно, намъ нужно только показать, что, если q есть грузъ, который можетъ быть взвѣшенъ при помощи гирь изъ ряда $a_1, a_2, \ldots, a_k$, то всѣ числа a_{k+1}, $a_{k+1} + q$ и $|a_{k+1} - q|$ отличны другъ отъ друга, а также отъ каждаго изъ чиселъ q. По допущенію,

$$a_{k+1} > 2s_k = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \geqslant 2q > q.$$

Отсюда, между прочимъ, слѣдуетъ, что $|a_{k+1} - q| = a_{k+1} - q$. Очевидно также, что при любыхъ значеніяхъ q_1 и q_2 числа q имѣютъ мѣсто неравенства:

$$a_{k+1} - q_1 < a_{k+1} < a_{k+1} + q_2.$$

Остается только показать, что $a_{k+1} - q_1 \mp q_2$ и $a_{k+1} + q_1 \mp q_2$. Но $s_k \geqslant q_1$, $s_k \geqslant q_2$, поэтому $a_{k+1} > 2s_k \geqslant q_1 + q_2$; слѣдовательно:

$$a_{k+1} - q_1 > q_2 \text{ и a fortiori } a_{k+1} + q_1 > q_2,$$

что и требовалось доказать.

Беря $a_1 = 1$, $a_{k+1} = 2s_k + 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, мы получимъ замѣчательную особенную систему гирь:

$$1, \ 2.1 + 1 = 3, \quad 2.(1+3)+1 = 9, \quad 2(1+3+9)+1 = 27, \ldots \tag{4}$$

Члены этого этого ряда суть члены прогрессіи

$$1, \ 3, \ 3^2, \ 3^3, \ldots,$$

Это очевидно для первыхъ четырехъ членовъ. Но, если мы допустимъ, что это вѣрно для k первыхъ членовъ ряда (4), то наше утвержденіе будетъ вѣрно и для $(k+1)$-го члена этого ряда, ибо, согласно допущенію, мы будемъ имѣть:

$$a_{k+1} = 2(1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{k-1}) + 1 = 2\,\frac{3^k - 1}{2} + 1 = 3^k.$$

Такимъ образомъ, имѣя n гирь

$$1, \ 3, \ 3^2, \ \ldots, \ 3^{n-1}, \tag{5}$$

дѣйствительно можно будетъ взвѣсить $\frac{1}{2}(3^n - 1)$ различныхъ по вѣсу грузовъ, которые, очевидно, выражаются въ цѣлыхъ положительныхъ числахъ; наибольшій изъ нихъ выражается числомъ

$$1 + 3 + \cdots + 3^{n-1} = \tfrac{1}{2}(3^n - 1).$$

Отсюда слѣдуетъ, что при помощи n гирь системы (5) можно будетъ взвѣсить всѣ грузы, вѣса которыхъ выражаются натуральными числами:

$$1, \ 2, \ 3, \ \ldots, \ \tfrac{1}{2}(3^n - 1).$$

Особенную систему n гирь мы будемъ называть *натуральною*: если съ помощью гирь этой системы можно взвѣсить грузъ, выражаемый *любымъ натуральнымъ числомъ*, не превосходящимъ числа $\frac{1}{2}(3^n - 1)$. Послѣдующими разсужденіями мы имѣемъ въ виду доказать, что система гирь (5) есть единственная натуральная система гирь.

Положимъ, что система n гирь (2) есть натуральная система и что p есть цѣлое число, удовлетворяющее неравенствамъ $0 < p \leqslant \frac{1}{2}(3^n - 1)$. Грузъ p можно будетъ взвѣсить при помощи гирь (2) и, слѣдовательно,

$$p = (b_1 + b_2 + \cdots + b_h) - (c_1 + c_2 + \cdots + c_g),$$

гдѣ $b_1, b_2, \ldots, b_h, c_1, c_2, \ldots, c_g$ имѣютъ указанныя на стр. 199 значенія. Обозначая черезъ $b_{h+1}, b_{h+2}, \ldots, b_n$ числа, находящіяся въ ряду (2), но отличныя отъ чиселъ $b_1, b_2, \ldots, b_h$, и принимая во вниманіе, что $b_1 + b_2 + \cdots + b_h + b_{h+1} + \cdots + b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$, мы будемъ имѣть:

$$p = \tfrac{1}{2}(3^n - 1) - (c_1 + c_2 + \cdots + c_g + b_{h+1} + b_{h+2} + \cdots + b_n).$$

Обозначая черезъ P любое цѣлое число, удовлетворяющее соотношеніямъ $0 \leqslant P < \frac{1}{2}(3^n - 1)$, мы можемъ положить $p = \frac{1}{2}(3^n - 1) - P$, и предыдущее равенство преобразуется въ равенство:

$$P = c_1 + c_2 + \cdots + c_g + b_{h+1} + b_{h+2} + \cdots + b_n. \tag{6}$$

Полагая здѣсь $P = 1$, мы найдемъ, что при этомъ значеніи P одно изъ слагаемыхъ второй части есть 1, а остальныя равны нулю. А такъ какъ всѣ числа c и b находятся среди чиселъ a, то отсюда вытекаетъ предложеніе:

Каждая натуральная система гирь содержитъ гирю 1. Это есть гиря наименьшаго вѣса въ каждой натуральной системѣ. Докажемъ теперь слѣдующую лемму.

Если

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 3^2, \ldots, \quad a_k = 3^{k-1}, \quad a_{k+1}, \quad a_{k+2}, \ldots, \quad a_n \tag{7}$$

есть натуральная система изъ n гирь, гдѣ $n > k \geqslant 1$, то

$$a_{k+1} = 3^k.$$

Доказательство. Положивъ

$$a_{k+1} < a_{k+2} < \ldots < a_n,$$

мы не ограничиваемъ общности сужденій, ибо среди гирь $a_{k+1}, \ldots, a_n$ нѣтъ равныхъ по вѣсу (стр. 200). Замѣчая же, что всѣ грузы, вѣса которыхъ q выражаются числами $1, 2, 3, \ldots, \frac{1}{2}(3^k - 1)$, могутъ быть взвѣшены при помощи гирь:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \ldots, \quad a_k = 3^{k-1}, \tag{8}$$

образующихъ натуральную систему изъ k гирь, мы заключаемъ, что не только $a_{k+1} > \frac{1}{2}(3^k - 1)$, но и $a_{k+1} - \frac{1}{2}(3^k - 1) > \frac{1}{2}(3^k - 1)$, ибо величина выраженія $a_{k+1} - (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) = a_{k+1} - \frac{1}{2}(3^k - 1)$, содержащаго a_{k+1}, есть вѣсъ груза p, отличнаго отъ каждаго изъ грузовъ $1, 2, 3, \ldots, \frac{1}{2}(3^k - 1)$ и потому превосходящаго грузъ $\frac{1}{2}(3^k - 1)$. Отсюда вытекаетъ, что $a_{k+1} > 3^k - 1$ и, слѣдовательно,

$$a_{k+1} \text{ не } < 3^k. \tag{9}$$

Полагая же въ равенствѣ (6) $P = 3^k$, мы увидимъ, что въ правой части равенства

$$3^k = c_1 + c_2 + \cdots + c_g + b_{h+1} + b_{h+2} + \cdots + b_n \tag{10}$$

не можетъ быть ни одного слагаемаго, которое больше, чѣмъ 3^k. Если бы тамъ не было и слагаемаго 3^k, то каждое изъ чиселъ c_1, $c_2, \ldots, c_g, b_{h+1}, b_{h+2}, \ldots, b_n$ было бы однимъ изъ чиселъ (8), а такъ какъ въ равенствѣ (10) числа c суть различныя числа изъ ряда $1, 3, 3^2, \ldots, 3^{k-1}$ и то же относится къ числамъ b, то имѣли бы мѣсто соотношенія

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_g \leqslant 1 + 3 + \cdots + 3^{k-1} = \tfrac{1}{2}(3^k - 1),$$

$$b_{h+1} + b_{h+2} + \cdots + + b_n \leqslant \tfrac{1}{2}(3^k - 1).$$

Складывая эти неравенства и принимая во вниманіе равенство (10), придемъ къ нелѣпому соотношенію $3^k \leqslant 3^k - 1$.

Отсюда слѣдуетъ, что правая часть равенства (10) содержитъ слагаемое 3^k, а это значитъ, что система гирь (7) содержитъ гирю 3^k. Если бы этой гирей была одна изъ гирь $a_{k+2}, \ldots, a_n$, то имѣло бы мѣсто неравенство $a_{k+1} < 3^k$, что невозможно въ силу соотношенія (9). Такимъ образомъ, $a_{k+1} = 3^k$.

Мы видѣли, что гиря 1 входитъ въ составъ каждой натуральной системы гирь. Если теперь

$$1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n$$

есть натуральная система гирь, то, примѣняя $n-1$ разъ нашу лемму, найдемъ послѣдовательно, что $a_2 = 3$, $a_3 = 3^2, \cdots, a_n = 3^{n-1}$, и, слѣдовательно, система гирь

$$1,\ 3,\ 3^2,\ \ldots,\ 3^{n-1}$$

есть единственная натуральная система гирь изъ n гирь.

Допустимъ, что имѣется система гирь

$$1,\ 3,\ 3^2,\ \ldots,\ 3^{n-1} \tag{5}$$

и грузъ, коего вѣсъ p есть цѣлое число, не превосходящее числа $\frac{1}{2}(3^n - 1)$. Спрашивается, какъ расположить гири системы (5) на чашкахъ вѣсовъ, чтобы взвѣсить грузъ p. Совершимъ для этой цѣли надъ числомъ p тотъ рядъ операцій, который въ ариѳметикѣ предписывается для изображенія числа p по троичной системѣ счисленія и при томъ при помощи цифръ 0, -1 и 1. Мы дѣлимъ число p на 3. Остатокъ ε_1 этого дѣленія будетъ либо 0, либо 1, либо 2; въ послѣднемъ случаѣ увеличимъ частное на 1, тогда остатокъ будетъ -1. Итакъ, предполагая, что остатокъ ε_1 есть одно изъ чиселъ -1, 0, 1, обозначимъ частное черезъ q_1. Это частное вновь дѣлимъ на 3, при чемъ получимъ остатокъ ε_2, равный одному изъ чиселъ -1, 0, 1, и частное q_2. Частное q_2 опять дѣлимъ на 3 и т. д. до тѣхъ поръ, пока получимъ частное $q_k = 1$. Тогда имѣемъ рядъ равенствъ:

$$
\begin{aligned}
p &= 3q_1 + \varepsilon_1,\\
q_1 &= 3q_2 + \varepsilon_2,\\
q_2 &= 3q_3 + \varepsilon_3,\\
&\cdots\cdots\\
q_{k-1} &= 3q_k + \varepsilon_k,\\
q_k &= 1.
\end{aligned}
$$

Помножая эти равенства соотвѣтственно на 3^0, 3^1, 3^2, ..., 3^k и складывая полученныя такимъ образомъ равенства, найдемъ, что

$$p = 3^k + \varepsilon_k \,.\, 3^{k-1} + \varepsilon_{k-1} \,.\, 3^{k-2} + \cdots + \varepsilon_3 \,.\, 3^2 + \varepsilon_2 \,.\, 3 + \varepsilon_1. \qquad (11)$$

Такъ какъ каждое изъ чиселъ ε есть либо -1, либо 0, либо 1, то

$$\varepsilon_k \,.\, 3^{k-1} + \varepsilon_{k-1} \,.\, 3^{k-2} + \cdots + \varepsilon_2 \,.\, 3 + \varepsilon_1 \geqq -3^{k-1} - 3^{k-2} - \cdots - 3 - 1 =$$

$$= -\tfrac{1}{2}(3^k - 1);$$

поэтому

$$\tfrac{1}{2}(3^n - 1) \geqq p \geqq 3^k - \tfrac{1}{2}(3^k - 1) = \tfrac{1}{2}(3^k + 1);$$

слѣдовательно,

$$3^n - 1 \geqq 3^k + 1 \quad \text{или} \quad 3^k(3^{n-k} - 1) \geqq 2,$$

откуда вытекаетъ, что $n - k \geqq 1$ и $k \leqq n - 1$.

Пусть теперь $3^k + 3^{k_1} + 3^{k_2} + \cdots$ будетъ сумма тѣхъ членовъ правой части равенства (11), для которыхъ коэффиціенты ε равны 1. Пусть далѣе $3^l + 3^{l_1} + \cdots$ будетъ сумма абсолютныхъ величинъ тѣхъ членовъ правой части равенства (11), которые входятъ въ него со знакомъ минусъ. Тогда

$$p = (3^k + 3^{k_1} + 3^{k_2} + \cdots) - (3^l + 3^{l_1} + 3^{l_2} + \cdots).$$

Всѣ числа k и l различны, ни одно изъ нихъ не больше $n - 1$ и каждое есть цѣлое число, не меньшее нуля; слѣдовательно, для того, чтобы взвѣсить грузъ p при помощи гирь 1, 3, 3^2, ..., 3^{n-1}, необходимо и достаточно положить гири 3^k, 3^{k_1}, ... на одну чашку вѣсовъ, а гири 3^l, 3^{l_1}, ... на другую чашку вѣсовъ.

П р и м ѣ р ъ. При помощи гирь системы 1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, коихъ сумма вѣсовъ равна $\frac{1}{2}(3^6 - 1) = 364$, требуется отвѣсить 168 единицъ вѣса. Частное отъ дѣленія 168 на 3 равно 56 и остатокъ $\varepsilon_1 = 0$; частное отъ дѣленія 56 на 3 есть 19, а остатокъ $\varepsilon_2 = -1$. Затѣмъ находимъ частное 6, остатокъ $\varepsilon_3 = 1$, потомъ частное 2 и остатокъ $\varepsilon_4 = 0$. Дѣля 2 на 3 получаемъ остатокъ $\varepsilon_5 = -1$ и частное 1; поэтому

$$168 = 3^5 - 1 \,.\, 3^4 + 0 \,.\, 3^3 + 1 \,.\, 3^2 - 1 \,.\, 3 + 0 =$$

$$= (3^5 + 3^2) - (3^4 + 3).$$

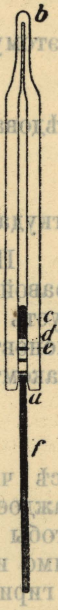
Чтобы отвѣсить 168 фунтовъ, необходимо и достаточно положить на одну чашку вѣсовъ гири 3^5 и 3^2, а на другую 3^4 и 3. Гири 1 и 3^3 въ этомъ случаѣ не нужны.

Н. С.

Опыты и приборы.

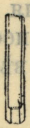
Простой аппаратъ для сжиженія газовъ.

Для сжиженія большинства газовъ достаточно даже вблизи критической температуры давленія не больше 100 атм. Напримѣръ, для CO_2 критическое давленіе составляетъ около 73 атм. Слѣдующимъ образомъ можно устроить маленькій аппаратъ для полученія такихъ давленій.



Фиг. 1.

Толстостѣнная стеклянная трубка, съ просвѣтомъ около 1,1 *мм.* и около 15 *см.* длины, снизу немного расширена (фиг. 1), а вверху оттянута, такъ что получается толстостѣнный же кусокъ 1 — 1,5 *см.* длины и 0,2 — 0,3 *см.* ширины. Газъ, — напримѣръ, CO_2 — прогоняется черезъ трубку (для полнаго удаленія воздуха), которая затѣмъ запаивается въ *b*. При *c* газъ отдѣляется маленькимъ столбикомъ ртути (ее вводятъ, опрокинувъ трубку и просовывая булавку, которая даетъ газу нѣсколько выйти). Чтобы ввести больше газу, трубку при наполненіи лучше держать охлажденной. Поршень, который долженъ держать атмосферъ 100 (при данныхъ размѣрахъ это соотвѣтствуетъ давленію на него около 1 *кг.*), устраивается такъ.



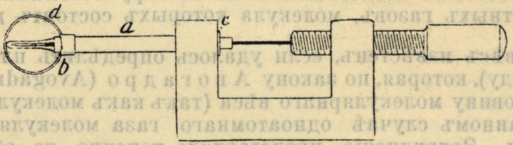
Фиг. 2.

Изъ тонкой кожи около 1 *мм.* толщины, пропитанной смѣсью воска съ вазелиномъ или чѣмъ-нибудь подобнымъ, нарѣзаютъ желѣзной трубочкой [пробочной или просто просверленной стальной проволокой и послѣ закаленной (фиг. 2)] маленькія кружечки діаметра, равнаго внутреннему діаметру трубки. Затѣмъ изъ твердаго матеріала (напримѣръ, тонкая фибровая пластинка) вырѣзаютъ кружечки нѣсколько меньшіе, легко входящіе въ трубку. Теперь ихъ поочереди вдвигаютъ въ трубку — одинъ мягкій (*d*) и одинъ твердый (*e*), — такъ, 3 — 4 каждаго сорта, сначала (на ртуть) — кожаный (*d*); наконецъ, кусокъ прямой стальной проволоки *f* (длиной, какъ сама трубка).

Въ такомъ видѣ аппаратъ готовъ: легкаго давленія концомъ пальца на проволоку достаточно, чтобы вдавить поршень и такимъ образомъ суженную часть трубки надъ мениском ъ ртути наполнить жидкой углекислотой или инымъ газомъ.

Благодаря твердымъ прокладкамъ кожаныя прокладки совершенно запираютъ трубку, такъ что не проходитъ никакихъ слѣдовъ ртути. Несмотря на значительное треніе, давленіе сжиженнаго газа достаточно, чтобы, по освобожденіи поршня отъ внѣшняго давленія, опять вытолкнуть его до полнаго испаренія жидкости. Опасность взрыва благодаря малымъ размѣрамъ аппарата совершенно исключена. Если увеличить давленіе еще послѣ полнаго сжиженія всего газа, то трубка, конечно, разобьется.

Для демонстраціи критическихъ явленій приспособляется обыкновенный деревянный зажимъ (фиг. 3). Въ направленіи винта онъ просверливается, туда вставляется латунная трубка *a*, суженная въ *b* и *c* и снабженная припаяннымъ флянцемъ. Стеклянная трубка вдвигается туда и ея узкій конецъ (нитью) выходитъ наружу. Вращеніемъ винта легко менискъ вылить въ капилляръ и медленно тамъ передвигать. Для проектированія (коротко-фокусный объективъ) лучше всего узкій конецъ помѣстить въ плоскій сосудикъ *d*, наполненный глицериномъ. Сосудъ дѣлается изъ куска латунной трубки. Глицеринъ



Фиг. 3.

имѣетъ близкій къ стеклу коэффиціентъ преломленія — проекція трубки дѣлается очень хорошей. Второе преимущество такого сосуда съ глицериномъ слѣдующее: при показываніи сгущенія углекислоты необходимъ въ проекціонномъ фонарѣ защитный охлаждающій сосудъ. При комнатной температурѣ сгущеніе идетъ. Показавъ это, вынимаютъ изъ фонаря защитный сосудъ; тогда глицеринъ, сильно поглощающій длинныя тепловыя волны быстро нагрѣвается до критической температуры углекислоты (31^0), и никакое сгущеніе болѣе невозможно.

Е. Б.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Новости о радіи. На состоявшемся въ сентябрѣ международномъ конгрессѣ радіологіи и электричества въ Брюсселѣ г-жа Кюри (Curie) сообщила подробности о полученіи ею совмѣстно съ Дебьерномъ (Debierne) чистаго металлическаго радія. Находящіеся въ употребленіи препараты радія, какъ извѣстно, представляютъ изъ себя не чистый металлъ радій, а радіевую соль — бромистый или хлористый радій. Методомъ для выдѣленія радія изъ такой соли послужилъ способъ, примѣнявшійся раньше для выдѣленія барія изъ хлористаго барія, такъ какъ радій вообще въ химическомъ отношеніи проявляетъ наибольшее сходство именно съ баріемъ. Растворъ чистаго хлористаго радія былъ подвергнутъ электролизу, при чемъ анодъ состоялъ изъ платины, а катодъ — изъ ртути. Выдѣлявшійся у катода металлическій радій соединялся съ ртутью, образуя амальгаму. Въ растворѣ было немного болѣе одного дециграмма хлористаго радія, который и былъ разложенъ почти цѣликомъ. Количество ртути было 10 *гр.* Полученная при этихъ условіяхъ амальгама была вполнѣ жидкая. Она быстро портилась въ соприкосновеніи съ воздухомъ. Ее высушили, затѣмъ быстро перелили въ чашечку изъ чистаго желѣза и помѣстили въ кварцевую трубку, соединенную съ воздушнымъ насосомъ. Трубка наполнялась чистымъ водородомъ, и въ атмосферѣ этого газа при подходящемъ давленіи изъ амальгамы путемъ нагрѣванія выгонялась ртуть. Большая часть ртутныхъ паровъ перегонялась при 270°. При 700° уже не было замѣтно дальнѣйшаго выдѣленія ртутныхъ паровъ, — ртуть уже не осаждалась въ холодныхъ частяхъ прибора; зато началъ улетучиваться уже оставшійся чистый металлъ — радій, пары котораго сильно дѣйствовали на кварцевыя стѣнки. Перегонка была пріостановлена, и въ желѣзной чашечкѣ остался бѣлый блестящій металлъ, крѣпко прилипающій къ желѣзу, т. е. обнаруживающій магнитныя свойства. На воздухѣ металлическій радій быстро чернѣетъ, воду онъ энергично разлагаетъ, растворяясь въ ней. Кусочекъ металла, упавшій на листъ бѣлой бумаги, оставилъ на ней черный слѣдъ, подобный обжогу.

Интересное непосредственное опредѣленіе атомнаго вѣса эманаціи радія было предпринято Рамзаемъ (Ramsay) и Грэемъ (Gray). Эманація радія по своимъ химическимъ свойствамъ и по спектру несомнѣнно принадлежитъ къ группѣ инертныхъ газовъ, молекула которыхъ состоитъ изъ одного атома.

Атомный вѣсъ извѣстенъ, если удалось опредѣлить плотность (по отношенію къ водороду), которая, по закону Авогадро (Avogadro), представляетъ собой также половину молекулярнаго вѣса (такъ какъ молекулярный вѣсъ водорода = 2). Въ данномъ случаѣ одноатомнаго газа молекулярный и атомный вѣсъ совпадаютъ. Затрудненіе представляло конечно то обстоятельство, что количество эманаціи, которое можетъ быть въ распоряженіи экспериментатора, чрезвычайно мало. Наиболѣе достовѣрное опредѣленіе удѣльнаго и атомнаго вѣса эманаціи, сдѣланное Дебьерномъ, поэтому основано не на простомъ взвѣшиваніи, а на сравненіи времени истеченія эманаціи и другихъ газовъ черезъ маленькое отверстіе. (Плотность газовъ приблизительно обратно пропорціональна квадрату скорости истеченія черезъ узкое отверстіе). Дебьернъ получилъ для атомнаго вѣса эманаціи число около 220, съ колебаніями до 3%. Рамзай поставилъ себѣ цѣлью опредѣлить плотность эманаціи непосредственно взвѣшиваніемъ на вѣсахъ. Для этого ему пришлось построить спеціальные вѣсы, самые чувствительные, которые когда-либо употреблялись, позволяющіе опредѣлять еще милліонную долю милиграмма. Вѣсы эти находились подъ колоколомъ воздушнаго насоса. Коромысло состояло изъ тонкой нити плавленнаго кремнія. Вмѣсто разновѣсокъ служила маленькая колбочка, наполненная извѣстнымъ количествомъ атмосфернаго воздуха, вѣсъ которой можно было варіировать путемъ измѣненія давленія въ окружающемъ ее и находящемся подъ колоколомъ насоса воздухѣ. (Измѣняется та потеря вѣса, которую испытываетъ колбочка въ окружающемъ воздухѣ по принципу Архимеда). На этихъ вѣсахъ было произведено 5 отдѣльныхъ опредѣленій вѣса извѣстнаго объема эманаціи. Эманація сперва взвѣшивалась въ запаянной капилярной трубочкѣ; затѣмъ трубочка открывалась, эманація выкачивалась насосомъ и опредѣлялся вѣсъ пустой (точнѣе: наполненной сильно разрѣженнымъ воздухомъ) трубочки. Объемъ эманаціи при этихъ 5-ти опытахъ, отнесенный къ нормальнымъ условіямъ давленія и температуры (760 *мм.* и 0°), равнялся всего 60—70 тысячныхъ *кб. мм.*, а найденный вѣсъ равнялся 600—700 милліонныхъ миллиграмма. Атомный вѣсъ эманаціи полученъ равнымъ 216—227, а среднимъ числомъ — 220, въ достаточномъ согласіи съ результатами Дебьерна и др., а также съ теоріей послѣдовательнаго превращенія радія. По этой теоріи атомъ радія превращается въ атомъ эманаціи, теряя (излучая) одну α-частицу. Послѣдняя же есть не что иное, какъ заряженный положительнымъ электричествомъ атомъ гелія. Атомный вѣсъ радія равенъ 226,5; атомный вѣсъ гелія — 4. Путемъ вычитанія получаемъ 222,5, что и есть, повидимому, точный атомный вѣсъ эманаціи радія. Рамзай предлагаетъ дать эманаціи радія, какъ достаточно охарактеризованному химическому элементу, собственное имя и назвать ее, въ виду ея свойства фосфоресценціи, Нитономъ (Niton), отъ греческаго слова, значащаго „блестѣть", а сокращенно писать ее Nt.

Важное событіе въ области радіологіи представляетъ фактъ, что лондонскій радіологическій институтъ изготовилъ первые полграмма радія изъ руды, добываемой въ Корнваллисѣ. До сихъ поръ радій получался исключительно изъ урановой руды, добываемой въ Іоахимсталѣ, и производство его поэтому составляло монополію Австріи. Теперь наряду съ австрійскимъ появился англійскій источникъ этого драгоцѣннаго матеріала, а въ будущемъ могутъ объявиться и другія мѣстонахожденія. Что касается Россіи, то на послѣднемъ Московскомъ Съѣздѣ Русскихъ естествоиспытателей была избрана спеціальная Коммиссія для изслѣдованія радіоактивныхъ богатствъ нашего отечества. Судя даже по скуднымъ и случайнымъ свѣдѣніямъ, которыя имѣются до сихъ поръ, надо полагать, что и у насъ, особенно вѣроятно въ Азіатской Россіи, такихъ богатствъ кроется не мало.

А. Іоллосъ.

РЕЦЕНЗІИ.

В. Мрочекъ и Ф. Филипповичъ. *Педагогика математики.* Историческіе и методическіе этюды. Томъ I. Книгоиздательство О. Богдановой. С.-Петербургъ, 1910 г. Ц. 1 р. 50 к.

Книга эта ставитъ себѣ очень широкую задачу — изложить существенныя черты новой методики математики въ связи съ тѣми данными исторіи, философіи, психологіи и педагогики, на которыхъ эта новая методика обоснована, и такимъ образомъ дать руководящія указанія преподавателямъ для реформы нынѣ дѣйствующей системы. Нѣтъ надобности указывать, какъ велика потребность въ подобномъ сочиненіи у преподавателей средней и низшей школы, тѣмъ болѣе, что въ русской педагогической литературѣ до сихъ поръ не было аналогичныхъ попытокъ; но разбираемая книга, насколько можно судить по вышедшему нынѣ первому тому, весьма плохо удовлетворяетъ этой настоятельной потребности.

Книга эта представляетъ компилятивную работу по иностраннымъ источникамъ, но это обстоятельство само по себѣ еще не говоритъ противъ нея; если бы авторы дали сжатое, умѣлое и объективное изложеніе того, къ чему стремятся сторонники новыхъ теченій въ преподаваніи математики, и того, что уже достигнуто въ этомъ отношеніи на Западѣ и въ Америкѣ,— то и тогда ихъ трудъ имѣлъ бы большую цѣнность для русской школы. Но бѣда въ томъ, что авторы плохо разобрались въ излагаемомъ ими матеріалѣ, не отличаютъ въ немъ существеннаго отъ маловажнаго, и наряду съ безспорными данными излагаютъ съ такой же увѣренностью и весьма сомнительныя положенія. Кардинальныя положенія современной методики — необходимость конкретно-индуктивнаго изложенія всѣхъ отдѣловъ математики и систематизаціи изученнаго матеріала въ концѣ курса, необходимость тѣсной связи между школьной математикой и жизнью, необходимость возможно болѣе полнаго развитія самодѣятельности учащихся, — тонутъ въ цѣломъ морѣ цитатъ, собственныхъ именъ и полемическихъ выпадовъ. Подробная критика содержанія разбираемаго труда потребовала бы составленія длинной статьи; здѣсь достаточно будетъ привести нѣсколько наиболѣе характерныхъ примѣровъ.

Въ главѣ IV, гдѣ излагаются свѣдѣнія изъ психологіи, проводится мысль, будто современная экспериментальная психологія даетъ уже достаточный матеріалъ для построенія системы педагогики на прочномъ научномъ основаніи. Правильнѣе было бы, конечно, сказать, что въ настоящее время дѣлаются попытки научнаго обоснованія отдѣльныхъ истинъ педагогики, съ примѣненіемъ экспериментальнаго метода; но отсюда до возможности построенія системы педагогики на основаніи экспериментальныхъ данныхъ еще очень далеко.

Въ этой же главѣ, по вопросу о развитіи памяти, мы встрѣчаемся съ двумя исключающими другъ друга сужденіями: на стр. 95 говорится, что въ возрастѣ 8 — 13 лѣтъ „слѣдуетъ развивать память, пользуясь ея временной податливостью“, а на стр. 99 объявляется, что „общая воспріимчивость памяти неизмѣнна, она не поддается развитію“. На той же стр. 99 авторы утверждаютъ буквально слѣдующее: „слабая память и слабое вниманіе является результатомъ болѣзней носа и слизистой оболочки горла“. Казалось бы, изъ того обстоятельства, что указанныя заболѣванія иногда бываютъ причиной ослабленія памяти и вниманія, еще не слѣдуетъ, что они являются единственной причиной такой слабости.

Въ заключеніе той же гл. IV авторы дѣлаютъ выводъ, что единственно правильнымъ методомъ преподаванія математики, отвѣчающимъ всѣмъ даннымъ психологіи, является такъ называемый лабораторный (авторы пишутъ „лабораторная метода“), при которомъ дается наибольшій просторъ самодѣятельности учащихся. Между тѣмъ въ гл. V (стр. 118) говорится, что „никогда нельзя удовольствоваться въ школѣ одной методой: умѣлое пользованіе нѣсколькими методами есть залогъ наибольшаго успѣха въ преподаваніи“, а на стр. 119 дается перечень этихъ методовъ (числомъ 7), при чемъ оказывается, что, кромѣ лабораторнаго метода, существуетъ еще три другихъ, признаваемыхъ авторами за вполнѣ цѣлесообразные; изъ нихъ „генетическій“ признается особенно цѣннымъ для прохожденія началъ математики.

Въ гл. IX, гдѣ говорится объ основныхъ вопросахъ методики ариѳметики, находимъ цѣлый рядъ несообразностей. Авторы говорятъ о „правильности“ и „неправильности“ терминовъ и условныхъ обозначеній въ курсѣ цѣлыхъ чиселъ, тогда какъ въ данномъ случаѣ можетъ идти рѣчь только объ ихъ удобствѣ или неудобствѣ, и предлагаемая авторами новая терминологія нисколько не цѣлесообразнѣе прежней. Совершенно бездоказательно утвержденіе, будто „дѣленіе существуетъ только одно, какъ въ наукѣ, такъ и въ жизни, а именно — дѣленіе по содержанію“ (стр. 224); конечно, здѣсь можетъ идти рѣчь не о „существованіи“ двоякаго дѣленія, а о цѣлесообразности такой классификаціи; но, вѣроятно, и всякій способный ученикъ знаетъ, что при дѣлени отвлеченныхъ чиселъ въ извѣстныхъ случаяхъ удобнѣе и цѣлесообразнѣе представлять себѣ процессъ дѣленія въ формѣ дѣленія по содержанію (напримѣръ, 369 : 123), въ иныхъ же случаяхъ — въ формѣ разложенія дѣлимаго на равныя слагаемыя, т. е дѣленія на части (напримѣръ, 219 : 3). На той же стр. 224 находимъ категорическое указаніе, что „никакими этикетками снабжать числа при дѣйствіяхъ надъ ними нельзя“ (т. е. что при письменномъ производствѣ дѣйствій надъ числами отнюдь не слѣдуетъ проставлять наименованій чиселъ); между тѣмъ на стр. 252 рекомендуется запись такого рода: „2 четверти + 3 четверти = 5 четвертей“ (четвертямъ?).

Вообще изъ всего отдѣла, гдѣ говорится о курсѣ цѣлыхъ чиселъ, читатель можетъ почерпнуть лишь одно существенное указаніе, а именно, что изученіе именованныхъ чиселъ не слѣдуетъ выдѣлять въ особую главу съ особыми правилами, а должно проходить чисто практически и наряду съ курсомъ отвлеченныхъ чиселъ; но это и безъ того извѣстно всякому педагогу, слѣдящему за методикой своего предмета.

Не лучше обстоитъ дѣло тамъ, гдѣ говорится о курсѣ дробей. Авторы требуютъ не болѣе и не менѣе, какъ исключенія всего курса простыхъ дробей, мотивируя это разными соображеніями; между тѣмъ оказывается, что всѣ существенныя части курса простыхъ дробей имѣются на лицо въ ихъ программѣ подъ курьезнымъ названіемъ „нѣсколько штриховъ о дробяхъ“ (стр. 251). На той же страницѣ авторы возстаютъ противъ извѣстнаго опредѣленія умноженія на дробь: „умножить — значитъ изъ множимаго составить новое число такъ, какъ множитель составленъ изъ единицы“ на томъ основаніи, что оно не подчиняется закону перманентности; откуда это слѣдуетъ, не сказано, да и мудрено было бы это доказать; о томъ же, что приведенное опредѣленіе страдаетъ неясностью (способовъ „составленія“ чиселъ изъ единицы можно указать нѣсколько) и является въ данномъ мѣстѣ курса слишкомъ общимъ, — не упомянуто вовсе.

По мнѣнію авторовъ, достаточно сказать просто: „подъ произведеніемъ двухъ дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ мы будемъ разумѣть дробь $\frac{ab}{cd}$“ (*sic*! слѣдуетъ читать, вѣроятно, $\frac{ac}{bd}$; такая же опечатка и на слѣдующей страницѣ) и затѣмъ дать графическую иллюстрацію вопроса; тутъ же приводится объясненіе умноженія $^4/_5$ на $^2/_3$. Послѣ этого читаемъ: „старые способы построенія умноженія и дѣленія на задачахъ: найти часть отъ числа и по данной части отыскать число — искусственны и неудобны“, — какъ будто предлагаемый авторами новый способъ объясненія не сводится къ тому же нахожденію двухъ третей отъ $^4/_5$! А какъ быть, если какой-либо любознательный ученикъ спроситъ о цѣли, ради которой введено вышеуказанное условіе относительно перемноженія дробей, — не сказано ни слова.

По вопросу о періодическихъ дробяхъ и задачахъ на такъ называемыя „правила“ (тройное, процентовъ и т. д.) находимъ только то, что извѣстно по этому поводу русскимъ педагогамъ уже много лѣтъ. Еще въ 1895 г. была напечатана въ „Педагогическомъ Сборникѣ“ статья Н. Соколова подъ названіемъ „Остатки схоластики въ современныхъ учебникахъ ариѳметики“, въ которой вопросъ о задачахъ на „правила“ былъ разобранъ болѣе основательно, чѣмъ въ настоящемъ трудѣ.

Подобныя же несообразности находимъ и въ главахъ, посвященныхъ преподаванію алгебры. Въ главѣ XII, которая вся посвящена изложенію вопроса объ отрицательныхъ числахъ, авторы подробно говорятъ о правилѣ знаковъ при умноженіи и приводятъ цѣлый рядъ цитатъ изъ разныхъ руководствъ, пытавшихся такъ или иначе объяснить или доказать это правило (при этомъ видно, что авторы плохо поняли нѣкоторыя цитируемыя ими книги, такъ какъ, напримѣръ, Борель въ своемъ учебникѣ вовсе не даетъ доказательства правила знаковъ, а лишь конкретную мотивировку); въ заключеніе указывается, что правило это не можетъ быть доказано на основаніи раньше принятыхъ условій, и должно быть разсматриваемо, какъ новое условіе (по этому поводу приводится мнѣніе Клейна). Но при всемъ томъ остается невыясненнымъ основной вопросъ: считаютъ ли авторы цѣлесообразнымъ, чтобы это условіе излагалось догматически (хотя бы и съ иллюстраціями), или признаютъ желательнымъ сопровождать его той или иной мотивировкой.

Въ послѣдней главѣ затрагивается вопросъ о несоизмѣримыхъ числахъ. Понятіе о несоизмѣримомъ числѣ авторы совѣтуютъ вводить на конкретномъ примѣрѣ, именно при помощи задачи о вычисленіи гипотенузы равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника (иначе говоря, діагонали квадрата). Этотъ путь, дѣйствительно, самый лучшій; но порядокъ разсужденія, указанный авторами, никакъ не можетъ быть признанъ логичнымъ: они сперва употребляютъ обозначеніе „$\sqrt{2}$“ въ цѣломъ рядѣ записей, и лишь въ концѣ разсужденія указываютъ, что $\sqrt{2}$ есть число особаго рода, намъ неизвѣстнаго; точно такъ же лишь въ концѣ объясненія поднятъ вопросъ о томъ, что несоизмѣримыя числа „дѣйствительно возможны, что они соотвѣтствуютъ реальнымъ объектамъ“, и авторы пытаются пояснить учащимся эту возможность при помощи аксіомы Кантора, которая здѣсь совершенно неумѣстна и ничего пояснить не можетъ.

Подобныхъ примѣровъ можно было бы найти еще не мало, но и этихъ достаточно для того, чтобы судить о характерѣ работы. Конечно, въ книгѣ высказано много такихъ мыслей о преподаваніи математики, подъ которыми подпишется всякій сторонникъ реформы. Но это какъ разъ тѣ мысли, которыя не принадлежатъ авторамъ книги, и лучше знакомиться съ ними по первоисточникамъ. Единственное достоинство разбираемаго труда, которое должно быть отнесено на счетъ самихъ авторовъ, — это обширный литературный указатель, приложенный въ концѣ каждаго отдѣла; этотъ указатель составленъ съ должной полнотой и можетъ сослужить хорошую службу для лицъ, интересующихся новыми теченіями въ педагогикѣ и методикѣ; но, конечно, нѣсколько неудобно давать заголовокъ „особенно интересныхъ книгъ“ списку тѣхъ сочиненій, среди которыхъ приводится собственный курсъ тригонометріи одного изъ авторовъ.

К. Л.

Къ этой рецензіи редакторъ позволяетъ себѣ прибавить нѣсколько словъ. Редакторъ раздѣляетъ почти всѣ сдѣланныя здѣсь критическія замѣчанія;

онъ даже считаетъ нужнымъ подчеркнуть, что увлеченіе результатами експериментальной психологіи въ практическомъ отношеніи онъ считаетъ вреднымъ. И вообще, книга написана мѣстами, мы сказали бы, въ слишкомъ легкомъ, мѣстами въ слишкомъ самоувѣренномъ тонѣ. Но было бы очень жаль, если бы читатель сдѣлалъ отсюда заключеніе, что книга не заслуживаетъ вниманія. У насъ литература по методикѣ математики чрезвычайно бѣдна, а въ послѣднее время и совсѣмъ почти не появлялось серьезныхъ сочиненій по этому предмету. Книга гг. Мрочека и Филипповича знакомитъ читателя съ различными теченіями, господствующими теперь на Западѣ, и эта литература изучена авторами обстоятельно. Независимо отъ того, всегда ли можно согласиться съ ихъ выводами, пишущій эти строки читалъ эту книгу съ интересомъ и полагаетъ, что ее слѣдуетъ — при полномъ признаніи указанныхъ недостатковъ — рекомендовать русскому читателю.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей приватъ-доцента Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 348 (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^5 + ax^3 + bx^2 + \frac{b^5}{a^5} = 0.$$

Л. Богдановичъ (Ярославль).

№ 349 (5 сер.). Доказать, что уравненіе

$$x^3 + 3px + 1 = 0$$

не можетъ имѣть раціональныхъ корней при p цѣломъ и не равномъ нулю.

Б. Двойринъ (Одесса).

№ 350 (5 сер.). Углы нѣкотораго четырехугольника образуютъ ариѳметическую прогрессію, разность которой (въ радіантахъ) равна $\frac{\pi}{5}$. Доказать, что каждый изъ угловъ этого четырехугольника можетъ быть раздѣленъ съ помощью циркуля и линейки на три равныя части.

П. Безчеревныхъ (Козловъ).

№ 351 (5 сер.). Пусть a, b, c суть соотвѣтственно середины сторонъ BC, CA, AB нѣкотораго треугольника ABC, и пусть H и h суть соотвѣтственно точки встрѣчи высотъ треугольниковъ ABC и abc. Доказать, что общiй центръ тяжести G обоихъ треугольниковъ ABC и abc лежитъ на прямой Hh и что $GH = 2Gh$.

В. Тюнинъ (Уфа).

№ 352 (5 сер.). Доказать, что число

$$10^n + 18n - 28$$

при всякомъ цѣломъ и не отрицательномъ значенiи n дѣлится на 27 безъ остатка.

Р. Витвинскiй (Одесса).

№ 353 (5 сер.). Рѣшить систему уравненiй

$$x + y + x^2 + y^2 = 1,$$

$$x^2 + y^2 + x^4 + y^4 = 1.$$

(Заимств.).

РѢШЕНIЯ ЗАДАЧЪ.

№ 240 (5 сер.). *Доказать, что каждый изъ многочленовъ*

$$(x + y)^{6n+1} - x^{6n+1} - y^{6n+1}, \quad (x + y)^{6n+4} + x^{6n+4} + y^{6n+4}$$

дѣлится на

$$(x^2 + xy + y^2)^2.$$

Найдемъ прежде всего необходимыя и достаточныя условiя дѣлимости каждаго изъ многочленовъ

$$(x + y)^k - x^k - y^k, \quad (x + y)^k + x^k + y^k$$

на трехчленъ $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$, гдѣ k — цѣлое положительное число, не меньшее двухъ. Съ этой цѣлью замѣнимъ въ разсматриваемыхъ многочленахъ x черезъ $x - a + a$, или, полагая $x - a = t$, черезъ $a + t$. Тогда, примѣняя формулу бинома, получимъ тождества:

$$(x + y)^k - x^k - y^k = (a + y + t)^k - (a + t)^k - y^k = (a + y)^k +$$

$$+ k(a+y)^{k-1} t + t^2\varphi(t) - a^k - ka^{k-1} t - t^2\psi(t) - y^k = t^2[\varphi(t) - \psi(t)] + \quad (1)$$

$$+ t[k(a + y)^{k-1} - ka^{k-1}] + [(a + y)^k - a^k - y^k],$$

$$(x + y)^k + x^k + y^k = t^2[\varphi(t) + \psi(t)] + t[k(a + y)^{k-1} + ka^{k-1}] + \quad (2)$$

$$+ [(a + y)^k + a^k + y^k],$$

въ которомъ $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ обозначаютъ нѣкоторые цѣлые относительно t многочлены, при чемъ въ формулахъ (1) и (2) подъ t всюду подразумѣвается $x-a$. Записавъ тождество (1) въ видѣ:

$$(x+y)^k - x^k - y^k = (x-a)^2\left[\varphi(x-a) - \psi(x-a)\right] +$$
$$+(x-a)\left[k(a+y)^{k-1} - ka^{k-1}\right] + \left[(a+y)^k - a^k - y^k\right],$$

гдѣ $\varphi(x-a)$ и $\psi(x-a)$ суть результаты подстановки въ многочлены $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ вмѣсто t разности $x-a$, мы видимъ, что для дѣлимости перваго изъ разсматриваемыхъ многочленовъ на $(x-a)^2$ необходимо и достаточно, чтобы многочленъ

$$(x-a)\left[k(a+y)^{k-1} - ka^{k-1}\right] + \left[(a+y)^k - a^k - y^k\right] \qquad (3)$$

обращался тождественно по отношенію къ x въ нуль; но для этого необходимо, чтобы коэффиціентъ $k(a+y)^{k-1} - ka^{k-1}$ при x въ этомъ многочленѣ равнялся нулю, а такъ какъ при этомъ весь многочленъ (3) сводится къ своему свободному члену $(a+y)^k - a^k - y^k$, то и послѣдній долженъ равняться нулю. Такъ какъ равенства

$$k(a+y)^{k-1} - ka^{k-1} = 0, \quad (a+y)^k - a^k - y^k = 0 \qquad (4)$$

также и достаточны для того, чтобы многочленъ (3) обращался тождественно въ нуль, то они даютъ необходимыя и достаточныя условія для обращенія многочлена (3) тождественно въ нуль, а потому равенства (4) даютъ также необходимыя и достаточныя условія дѣлимости многочлена $(x+y)^k - x^k - y^k$ на $(x-a)^2$. Точно такъ же изъ тождества (2) вытекаетъ, что равенства

$$k(a+y)^{k-1} + ka^{k-1} = 0, \quad (a+y)^k + a^k + y^k = 0 \qquad (5)$$

представляютъ собою необходимыя и достаточныя условія дѣлимости многочлена $(x+y)^k + x^k + y^k$ на $(x-a)^2$. Замѣчая, что при $k=1$ первый изъ многочленовъ $(x+y)^k - x^k - y^k$, $(x+y)^k + x^k + y^k$ дѣлится на $(x-a)^2$, а второй не дѣлится на $(x-a)^2$ и что при $k=1$ условія (4) выполняются, а условія (5) не выполняются, мы видимъ, что условія (4) и (5) суть соотвѣтственно условія дѣлимости на $(x-a)^2$ многочленовъ $(x+y)^k - x^k - y^k$ и $(x+y)^k + x^k + y^k$ при всякомъ цѣломъ и положительномъ значеніи k. Разлагая на множителей трехчленъ z^2+z+1, получимъ:

$$z^2+z+1 = (z-\alpha)(z-\beta), \qquad (6)$$

гдѣ α и β суть мнимые неравные корни уравненія

$$u^2+u+1=0; \qquad (7)$$

вмѣстѣ съ тѣмъ α и β суть мнимыя значенія корня кубическаго изъ единицы, какъ это легко видѣть изъ уравненія $u^3-1=0$, представляя его въ видѣ $(u-1)(u^2+u+1)=0$. Полагая въ тождествѣ (6) $z=\dfrac{x}{y}$ и умножая обѣ части на y^2, получимъ тождество $x^2+xy+y^2=(x-\alpha y)(x-\beta y)$, откуда, возвышая обѣ части въ квадратъ, находимъ:

$$(x^2+xy+y^2)^2 = (x-\alpha y)^2(x-\beta y)^2. \qquad (8)$$

Покажемъ теперь, что многочленъ $(x+y)^{6n+1} - x^{6n+1} - y^{6n+1}$ дѣлится при n цѣломъ и неотрицательномъ на $(x-\alpha y)^2$; для этого достаточно доказать, что равенства (4) выполняются при $k=6n+1$ и $a=\alpha y$. Дѣйствительно, такъ какъ a удовлетворяетъ уравненію (7), то $a+1=-a^2$ и, кромѣ того, $a^3=1$. Поэтому [см. (4)]:

$$(6n+1)(ay+y)^{6n}-(6n+1)a^{6n}y^{6n}=(6n+1)y^{6n}[(a+1)^{6n}-a^{6n}]=$$

$$=(6n+1)y^{6n}[(-a^2)^{6n}-a^{6n}]=(6n+1)y^{6n}(a^{12n}-a^{6n})=$$

$$=(6n+1)y^{6n}[(a^3)^{4n}-(a^3)^{2n}]=(6n+1)y^{6n}(1-1)=0,$$

$$(ay+y)^{6n+1}-(ay)^{6n+1}-y^{6n+1}=y^{6n+1}[(a+1)^{6n+1}-a^{6n+1}-1]=$$

$$=y^{6n+1}[(-a^2)^{6n+1}-a^{6n+1}-1]=y^{6n+1}[-a^2(-a^2)^{6n}-a^{6n}.a-1]=$$

$$=-y^{6n+1}(a^2.a^{12n}+a^{6n}.a+1)=-y^{6n+1}(a^2.1+a.1+1)=$$

$$=-y^{6n+1}(a^2+a+1)=0.$$

Подобнымъ же образомъ, полагая въ равенствахъ (5) $k=6n+4$, гдѣ n — цѣлое положительное число, и $a=ay$, получимъ, основываясь по прежнему на равенствахъ $a+1=-a^2$ и $a^3=1$:

$$(6n+4)(ay+y)^{6n+3}+(6n+4)a^{6n+3}y^{6n+3}=(6n+4)y^{6n+3}[(a+1)^{6n+3}+a^{6n+3}]=$$

$$=(6n+4)y^{6n+3}[(-a^2)^{6n+3}+a^{6n+3}]=(6n+4)y^{6n+3}[-(a^3)^{4n+2}+(a^3)^{2n+1}]=$$

$$=(6n+4)y^{6n+3}(1-1)=0,$$

$$(ay+y)^{6n+4}+(ay)^{6n+4}+y^{6n+4}=y^{6n+4}[(a+1)^{6n+4}+a^{6n+4}+1]=$$

$$=y^{6n+4}[(-a^2)^{6n+4}+a^{6n+4}+1]=y^{6n+4}[(a^3)^{4n+2}.a^2+(a^3)^{2n+1}.a+1]=$$

$$=y^{6n+4}(a^2+a+1)=0.$$

Итакъ, многочленъ $(x+y)^{6n+4}+x^{6n+4}+y^{6n+4}$ тоже дѣлится на $(x-ay)^2$ при n цѣломъ и положительномъ. Подобнымъ же образомъ докажемъ, полагая $a=\beta y$, что каждый изъ многочленовъ $(x+y)^{6n+1}-x^{6n+1}-y^{6n+1}$ и $(x+y)^{6n+4}+x^{6n+4}+y^{6n+4}$ дѣлится на $(x-\beta y)^2$. Такъ какъ $a\neq\beta$, то многочлены $(x-ay)^2$ и $(x-\beta y)^2$ суть взаимно-простые многочлены (т. е. ихъ общій наибольшій дѣлитель равенъ выраженію, не зависящему отъ x,— напримѣръ, единицѣ), а потому каждый изъ многочленовъ $(x+y)^{6n+1}-x^{6n+1}-y^{6n+1}$, $(x+y)^{6n+4}+x^{6n+4}+y^{6n+4}$, дѣлясь на взаимно-простые многочлены $(x-ay)^2$ и $(x-\beta y)^2$, дѣлится и на ихъ произведеніе, т. е. [см. (8)] на $(x^2+xy+y^2)^2$. Такъ какъ коэффиціенты при x въ каждомъ изъ данныхъ многочленовъ суть цѣлые относительно y многочлены съ цѣлыми коэффиціентами и такъ какъ коэффиціентъ высшаго члена дѣлителя $(x^2+xy+y^2)^2$ относительно x есть единица, то частное отъ дѣленія каждаго изъ изъ данныхъ многочленовъ на $(x^2+xy+y^2)^2$ есть цѣлый относительно x и y многочленъ съ цѣлыми коэффиціентами.

Замѣчанія. 1°. Если бы мы желали избѣгнуть въ концѣ рѣшенія ссылки на общую теорему о взаимно-простыхъ многочленахъ, то мы могли бы доказать ее для разсматриваемаго частнаго случая, а именно въ видѣ такого предложенія: если нѣкоторый цѣлый относительно x многочленъ $f(x)$ дѣлится на $(x-ay)^2$ и на $(x-\beta y)^2$, при чемъ $a\neq\beta$, то онъ дѣлится и на $(x-ay)^2(x-\beta y)^2$. Полагая $y\neq 0$, имѣемъ $ay\neq\beta y$; вводя обозначенія $ay=a$ и $\beta y=b$, имѣемъ, такимъ образомъ, $a\neq b$ при $y\neq 0$. По условію

$f(x) = (x - a)^2 \varphi_1(x)$, $f(x) = (x - b)^2 \varphi_2(x)$, гдѣ $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ суть цѣлые по отношенію къ x многочлены; помноживъ эти равенства соотвѣтственно на $(x - b)^2 (2x + b - 3a)$ и на $(x - a)^2 (2x + a - 3b)$, вычитая изъ второго результата первый и основываясь на тождествѣ $(x - a)^2 (2x + a - 3b) - (x - b)^2 (2x + b - 3a) = (a - b)^3$, получимъ:

$$(a-b)^3 f(x) = (x-a)^2 (x-b)^2 [\varphi_2(x)(2x+a-3b) - \varphi_1(x)(2x+b-3a)] = (x-a)^2 (x-b)^2 F(x),$$

гдѣ $F(x)$ есть нѣкоторый цѣлый многочленъ, откуда видно, что $f(x)$ дѣлится (такъ какъ $a \neq b$) на произведеніе $(x - a)^2 (x - b)^2 = (x - \alpha y)^2 (x - \beta y)^2$ при всякомъ y, неравномъ нулю, т. е. имѣетъ мѣсто тождество

$$f(x) = (x - \alpha y)^2 (x - \beta y)^2 f_1(x), \tag{9}$$

гдѣ $f_1(x)$ есть цѣлый относительно x многочленъ. Тождество (9) можетъ имѣть мѣсто лишь при почленномъ равенствѣ лѣвой и правой части, а потому дѣлимость каждаго изъ многочленовъ $(x + y)^{6n+1} - x^{6n+1} - y^{6n+1}$ и $(x + y)^{6n+4} + x^{6n+4} + y^{6n+4}$ на $(x - \alpha y)^2 (x - \beta y)^2$ сохраняется и при $y = 0$; это легко непосредственно провѣрить, полагая $y = 0$.

Вспомогательное предложеніе можно доказать также и съ помощью теоремы Б е з у. Многочленъ $f(x)$, дѣлясь на $(x - b)^2$, дѣлится и на $x - b$, а потому $f(b) = [(x - a)^2 \varphi_1(x)]_{x=b} = (b - a)^2 \varphi_1(b) = 0$, откуда (такъ какъ $b \neq a$) $\varphi_1(b) = 0$. Значитъ, $\varphi_1(x)$ дѣлится на $x - b$, т. е. $\varphi_1(x) = (x - b) \psi_1(x)$, гдѣ $\psi_1(x)$ — цѣлый относительно x многочленъ, а потому

$$f(x) = (x - a)^2 (x - b) \psi_1(x). \tag{10}$$

Такъ какъ

$$\frac{f(x)}{(x-b)^2} = \frac{(x-a)^2 (x-b) \psi_1(x)}{(x-b)^2} = \frac{(x-a)^2 \psi_1(x)}{x-b} = \varphi_2(x),$$

гдѣ $\varphi_2(x)$ есть цѣлый относительно x многочленъ, то, по теоремѣ Б е з у, $(b - a)^2 \psi_1(b) = 0$, т. е. $\psi_1(b) = 0$; значитъ, $\psi_1(x)$ дѣлится на $x - b$, т. е. $\psi_1(x) = (x - b) \psi(x)$, откуда [см. (10)] $f(x) = (x - a)^2 (x - b)^2 \psi(x)$, гдѣ $\psi(x)$ есть цѣлый относительно x многочленъ, т. е. $f(x)$ дѣлится на $(x - a)^2 (x - b)^2$.

2^0. Условія 4) и 5) дѣлимости разсматриваемыхъ многочленовъ на $(x - a)^2$ суть лишь частные случаи слѣдующей теоремы, извѣстной изъ элементовъ высшей алгебры: необходимое и достаточное условіе дѣлимости цѣлаго многочлена $f(x)$ на $(x - a)^2$ заключается въ одновременномъ выполненіи равенствъ $f(a) = 0$, $f'(a) = 0$, гдѣ $f'(x)$ обозначаетъ производную многочлена $f(x)$.

А. Д. (Лодзь); *А. Фрумкинъ* (Одесса); *И. Чижевскій* (Александрія); *И. Чемисовъ* (Никольскъ-Уссурійскій); *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *В. Богомоловъ* (Шацкъ); *С. Сейгель* (Кіевъ); *Б. Двойринъ* (Одесса).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

КАТАЛОГЪ ОТДѢЛЬНЫХЪ ИЗДАНІЙ

„Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики."

Цѣна

№ 9. **Э. Шпачинскій.** О землетрясеніяхъ . . . . 50 к.

№ 34. **Н. Успенскій.** О гальванопластикѣ . . . . 10 к.

№ 37. **Ѳ. Мацонъ.** Именованныя величины въ школьномъ преподаваніи и историческое развитіе ученія о нихъ. . . . 85 к.

№ 39. **Б. Голицынъ.** О газообразномъ и жидкомъ состояніи тѣлъ . . . . 1 р. —

№ 44. **Д. Ефремовъ.** Проэктивные ряды съ общимъ основаніемъ . 10 к.

№ 50. **О. Пергаментъ.** Краткій историческій очеркъ развитія ученія объ электричествѣ . . . . 60 к.

№ 58. Таблицы четырехзначныхъ логариѳмовъ и антилогариѳмовъ 25 к.

№ 64. **Проф. Г. де-Метцъ.** Hermann von Helmholtz. Рѣчь, произнесенная въ торжественномъ засѣданіи Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей . . . . 15 к.

№ 73. **А. Мануйловъ.** Основы ученія о величинахъ . . . . 30 к.

№ 107. Систематическій указатель статей, помѣщенныхъ въ первыхъ пятнадцати семестрахъ „Вѣстника" . . . . . . 50 к.

№ 109. **Проф. Н. Пильчиковъ.** Изъ введенія въ курсъ механической теоріи теплоты. Основные принципы энергетики . . . . 15 к.

№ 133. **А. Бравэ.** Изслѣдованіе о многогранникахъ симметрической формы. Переводъ Я. Самойлова . . . . 30 к.

№ 135. **Проф. В. Оствальдъ.** Побѣда надъ научнымъ матеріализмомъ. Переводъ съ нѣмецкаго В. Гернета . . . . 15 к.

№ 136. **Б. Чихановъ.** О логариѳмахъ Непера . . . . 5 к.

№ 140. **П. Свѣшниковъ.** Опредѣленіе maximum и minimum простѣйшихъ выраженій, зависящихъ отъ двухъ перемѣнныхъ . 10 к.

№ 143. **Проф. Б. Меншуткинъ.** Гелій . . . . 15 к.

№ 144. **И. Точидловскій.** Машина Л. Торре для рѣшенія уравненій . 20 к.

№ 145. **Прив.-доц. Б. П. Вейнбергъ.** О величинѣ молекулъ . . 20 к.

№ 146. **И. Точидловскій.** Къ теоріи машины Wimshurst'a . . 10 к.

№ 147. Элементарная теорія эллипса . . . . 50 к.

№ 152. **Проф. П. Фанъ-деръ-Флитъ.** Замѣтка объ изотермѣ пара . 5 к.

№ 154. **Н. Флоровъ.** Построеніе корней тригонометрическихъ уравненій . . . . 20 к.

№ 157. **С. Шатуновскій.** О нѣкоторыхъ методахъ рѣшенія задачъ тригонометріи на плоскости . . . . 40 к.

№ 158. **Проф. Н. Пильчиковъ.** Радій и его лучи. Съ приложеніемъ двухъ радіографій . . . . 30 к.

№ 159. **Прив.-доц. Б. Вейнбергъ.** Къ вопросу о прерывности твердаго и жидкаго состояній . . . . 25 к.

№ 160. **Прив.-доц. В.Каганъ.** Новое доказательство трансцендентности чиселъ π и e. Доказательство Ѳ. Валена . . . . . 30 к.

№ 161. **Ш. Гильомъ.** Жизнь вещества. Переводъ съ французскаго М. Вейнбергъ . . . . 15 к.

№ 162. **Проф. Н. Гезехусъ.** Радіометръ Крукса съ катодными лучами 5 к.

№ 163. **Г. Пфлаумъ.** Нѣсколько опытовъ съ новымъ электроскопомъ 5 к.

№ 164. **Прив.-доц. Б. Вейнбергъ.** Впечатлѣнія отъ перваго международнаго физическаго конгресса . . . . 5 к.

№ 165. **Проф. Н. Пильчиковъ.** О маятникѣ Фуко . . . . 10 к.

№ 166. **А. Вольфензонъ.** Аккумуляторы въ физическихъ кабинетахъ среднихъ учебныхъ заведеній . . . . 10 к.

№ 167. **Прив.-доц. А. Орбинскій.** Одесское Отдѣленіе Николаевской Главной Астрономической Обсерваторіи . . . . . . 10 к.

№ 168. **К. Покровскій.** Строеніе вселенной . . . . 10 к.

№ 169. **В. Оболенскій.** Изслѣдованіе сплавовъ никкеля и желѣза 10 к.

№ 170. **W. Spring,** профессоръ въ Лютихѣ. Свойства твердыхъ тѣлъ подъ давленіемъ, диффузія твердаго вещества, внутреннія движенія въ твердомъ веществѣ. Переводъ съ французскаго Д. Шора . . . . 30 к.

№ 171. **S. Arrhenius,** профессоръ въ Стокгольмѣ. О причинѣ полярныхъ сіяній. Переводъ съ нѣмецкаго Д. Шора . . . 40 к.

№ 172. **А. Веребрюсовъ.** О числѣ рѣшеній неопредѣленныхъ уравненій 1-й степени . . . . 15 к.

№ 173. **М. Зиминъ.** О наименьшемъ кругѣ, вмѣщающемъ данную систему точекъ на плоскости . . . . 20 к.

№ 174. **O. Wiener,** профессоръ въ Лейпцигѣ. Расширеніе нашихъ чувствъ. Переводъ съ нѣмецкаго Д. Шора . . . . 40 к.

№ 175. **А. Галлардо.** Математика и біологія. Переводъ съ франц. . 10 к.

№ 177. **A. Slaby,** профессоръ въ Берлинѣ. Новѣйшіе успѣхи въ области телеграфированія безъ проводовъ. Переводъ съ нѣмецкаго Д. Шора. . . . . 35 к.

№ 178. **И. Т.** Памяти Остроградскаго . . . . 10 к.

№ 179. **Проф. И. Занчевскій.** Замѣтка по атомистической теоріи строенія тѣлъ . . . . 10 к.

№ 180. **Проф. Д. Зейлигеръ.** Двѣ задачи . . . . 10 к.

№ 182. **Проф. С. Танатаръ.** Термохимическія работы Бертло 10 к.

№ 183. **Проф. Д. Гольдгаммеръ.** Столѣтіе физики. Рѣчь, произнесенная на 3-ьемъ Общемъ Собраніи XI-го Съѣзда русскихъ естествоиспытателей и врачей . . . . 25 к.

№ 184. **Проф. И. Слешинскій.** Жизнь и труды Н. Абеля. Рѣчь, произнесенная въ годичномъ засѣданіи Общества Естествоиспытателей при Новороссійскомъ Университетѣ 14 марта 1903 года . . . . 30 к.

№ 185. **Проф. Д. Зейлигеръ.** Объ ускореніи равномѣрнаго движенія по окружности . . . . 5 к.

ВИХЕРТЪ, Э. проф. **Введеніе въ геодезію** *). Перев. съ нѣмецк. 80 стр. 16⁰. Съ 14 рисунк. 1907. *(Распродано)*
Излагаетъ основы низшей геодезіи, имѣя въ виду пользованіе ею въ школѣ въ качествѣ практическаго пособія... Изложеніе очень сжато, но полно и послѣдовательно.
Вопросы Физики.

ТРОМГОЛЬТЪ, С. **Игры со спичками.** Задачи и развлеченія. Пер. съ нѣм. 146 стр. 16⁰. Свыше 250 рис. и черт. 1907. Ц. 50 к.

УШИНСКІЙ, Н. проф. **Лекціи по бактеріологіи.** VIII+135 стр. 8⁰. Съ 34 черными и цвѣтными рисунками. 1908. Ц. Р. 1. 50 к.

ВЕТГЭМЪ, В. проф. **Современное развитіе физики** *). Пер. съ англ. подъ ред. проф. *Б. П. Вейнберга* и прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.* Съ прилож. рѣчи *А. Бальфура*: **Нѣсколько мыслей о новой теоріи вещества.** VIII+319 стран. 8⁰. Съ 5 портрет., 6 таблиц. и 33 рисунк. Ц. Р. 2. —
Старается представить въ стройной и глубокой системѣ всѣ явленія физическаго опыта и рисуетъ читателю дѣйствительно захватывающую картину грандіозныхъ завоеваній человѣческаго генія. *Современный Міръ.*

РИГИ, А. проф. **Современная теорія физическихъ явленій** *) (іоны, электроны, радіоактивность). Пер. съ 3-го итальянск. изданія. VIII+146 стр. 8⁰. Съ 21 рис. 1910. *Второе изданіе.* Ц. 90 к.
Книгу Риги можно смѣло рекомендовать образованному человѣку, какъ лучшее имѣющееся у насъ изложеніе новѣйшихъ взглядовъ на обширную область физическихъ явленій.
Педагогическій Сборникъ.

КЛОССОВСКІЙ, А. проф. **Физическая жизнь нашей планеты на основаніи современныхъ воззрѣній** *). 46 стран. 8⁰. *2-е изданіе*, испр. и дополн. 1908. Ц. 40 к.
Рѣдко можно встрѣтить изложеніе, въ которомъ въ такой степени соединялась бы высокая научная эрудиція съ картинностью и увлекательностью рѣчи.
Педагогическій Сборникъ.

ЛАКУРЪ, П. и **АППЕЛЬ**, Я. **Историческая физика** *). Пер. съ нѣм. подъ ред. „*Вѣстн. Оп. Физики и Элемент. Матем.*“ Въ 2-хъ том. большого формата, 892 стр. Съ 799 рис. и 6 отдѣльными цвѣтными таблицами. 1908. Ц. Р. 7. 50 к.
„Нельзя не привѣтствовать этого интереснаго изданія... Книга читается легко; содержитъ весьма удачно подобранный матеріалъ и обильно снабжена хорошо выполненными рисунками. Переводъ никакихъ замѣчаній не вызываетъ“... *Ж. М. Н. Пр.*

АРРЕНІУСЪ, СВ. проф. **Образованіе міровъ** *). Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *К. Д. Покровскаго.* VIII+200 стр. 8⁰. Съ 60 рис. 1908. Ц. Р. 1.75 к.
Книга чрезвычайно интересна и богата содержаніемъ. *Педагог. Сборн.*

КАГАНЪ, В. прив.-доц. **Задача обоснованія геометріи въ современной постановкѣ**. Рѣчь, произнесенная при защитѣ диссертаціи на степень магистра чистой математики. 35 стр. 8⁰. Съ 11 чертеж. 1908. Ц. 35 к.

ЦИММЕРМАНЪ, В. проф. **Объемъ шара, шарового сегмента и шарового слоя.** 34 стр. 16⁰. Съ 6 черт. 1908. Ц. 25 к.
Распространеніе подобнаго рода элементарныхъ монографій среди учащихся весьма желательно. *Русская Школа.*

РИГИ, А. проф. **Электрическая природа матеріи** *). Вступительная лекція. Пер. съ итальянскаго подъ ред. „*Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат.*“ 28 стр. 8⁰. *2-е изд.* 1911. Ц. 30 к.
Эта прекрасная рѣчь обладаетъ всѣми преимуществами многочисленныхъ популярныхъ сочиненій знаменитаго проф. Болоньскаго университета. *Ж. М. Н. Пр.*

ЛЕМАНЪ, О. проф. **Жидкіе кристаллы и теоріи жизни.** Пер. съ нѣмецк. *П. В. Казанецкаго.* VIII+43 стр. 8⁰. Съ 30 рис. 1908. Ц. 40 к.
.....весьма кстати является краткая сводка главныхъ фактовъ, сдѣланная проф. Леманомъ.
Педагогическій Сборникъ.

ГЕЙБЕРГЪ, І. проф. **Новое сочиненіе Архимеда** *). Посланіе Архимеда къ Эратосѳену о нѣкоторыхъ вопросахъ механики. Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ предисл. прив.-доц. *И. Ю. Тимченко.* XV+27 стр. 8⁰. Съ 15 рис. 1909. Ц. 40 к.
Математикамъ... будетъ весьма интересно познакомиться съ новой драгоцѣнной научной находкой... *Образованіе.*

ВЕЙНБЕРГЪ, Б. П. проф. **Снѣгъ, иней, градъ, ледъ и ледники** *) IV+127 стр. 8⁰. Съ 138 рис. и 2 фототип. табл. 1909. Ц. Р. 1.
Mathesis можетъ гордиться этимъ изданіемъ. *Ж. М. Н. Пр.*

РАМЗАЙ, В. проф. **Благородные и радіоактивные газы.** Пер. подъ ред. „*Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат.*“ 37 стр. 16⁰. Съ 16 рис. 1909. Ц. 25 к.

КОВАЛЕВСКІЙ, Г. проф. **Введеніе въ исчисленіе безконечно-малыхъ** *). Перев. съ нѣмецкаго подъ редакц. и съ прим. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.* VIII+140 стр. 8⁰. Съ 18 черт. 1909. Ц. Р. 1.
Книга проф. Ковалевскаго, несомнѣнно, прекрасное введеніе въ высшій анализъ... *Русская Школа.*

ТОМПСОНЪ, СИЛЬВАНУСЪ, проф. **Добываніе свѣта** *). Общедоступная лекція для рабочихъ, прочит. на собраніи Британск. Ассоціаціи 1906. Перев. съ англ. VIII+88 стр. 16⁰. Съ 28 рис. 1909. Ц. 50 к.
Въ этой весьма интересно составленной рѣчи собранъ богатый матеріалъ по вопросу добыванія свѣта. *Ж. М. Н. Пр.*

СЛАБИ, А, проф. **Резонансъ и затуханіе электрическихъ волнъ.** Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣстн. Опыт. Физ. и Элемент. Матем."*. 41 стр. 8⁰. Съ 36 рис. Ц. 40 к.

СНАЙДЕРЪ, К. проф. **Картина міра въ свѣтѣ современнаго естествознанія.** Перев. съ нѣм. подъ ред. проф. *В. В. Завьялова.* VIII+193 стр. 8⁰. Съ 16 отдѣльными портретами. 1909. Ц. Р. 1. 50 к.
Книга касается интереснѣйшихъ вопросовъ о природѣ. *Педагог. Сборникъ.*

БРУНИ, К. проф. **Твердые растворы***). Пер. съ итал. подъ ред. *„Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат."* 37 стр. 16⁰. 1909. Ц. 25 к.

БОЛЛЪ, Р. С. проф. **Вѣка и приливы.** Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.* VIII+104 стр. 8⁰. Съ 4 рис. и 1 табл. 1909. Ц. 75 к.
.....настоящее изданіе „Mathesis" слѣдуетъ привѣтствовать, наравнѣ съ прочими, какъ почтенный, заслуживающій распространенія и серьезнаго вниманія, вкладъ въ русскую науку. *Русская Школа.*

СЛАБИ, А. проф. **Безпроволочный телефонъ.** Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат."* 28 стр. 8⁰. Съ 23 рис. 1909. Ц. 30 к.

ЛИНДЕМАНЪ, Ф. проф. **Спектръ и форма атомовъ.** Рѣчь ректора Мюнхенскаго универ. Перев. съ нѣм. 23 стр. 16⁰. Изд. 2-ое. 1909. Ц. 15 к.

КУТЮРА, Л. Алгебра логики. Перев. съ французскаго съ прибавленіями проф. *И. Слешинскаго.* IV+107+XIII стр. 8⁰. 1909. Ц. 90 к.

ВЕБЕРЪ, Г. и **ВЕЛЬШТЕЙНЪ, I.,** проф. **Энциклопедія элементарной геометріи.** Томъ II, книга I. **Основанія геометріи.** Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ примѣч. прив.-доц. *В. Ф. Кагана.* XII+362 стр. 8⁰. Съ 144 черт. и 5 рис. 1909. Ц. Р. 3.

ЛОРЕНЦЪ, Г. проф. **Курсъ Физики.***) Пер съ нѣм. подъ ред. проф. *Н. П. Кастерина*
Т. I. VIII+348 стр. больш. 8⁰. Съ 236 рис. 1910. Ц. Р. 2. 75 к.
Т. II. VIII+466 стр. больш. 8⁰. Съ 257 рис. 1910. Ц. Р. 3. 75 к.
Съ появленіемъ этого перевода русская литература обогатилась превосходнымъ курсомъ физики. *Ж. М. Н. Пр.*

ГЕРНЕТЪ, В. А. Объ единствѣ вещества. 46 стр. 16⁰. Ц 25 к.

ЗЕЕМАНЪ, П. проф. **Происхожденіе цвѣтовъ спектра.** Съ прил. статьи *В. Ритца.* **„Линейные спектры и строеніе атомовъ"**. 50 стр. 16⁰. Ц. 30 к.

НЬЮКОМЪ, С. проф. **Теорія движенія Луны.** (Исторія и современное состояніе этого вопроса). 26 стр. 16⁰. Ц. 20 к.

КЛОССОВСКІЙ, А. проф. **Основы метеорологіи.***) XVI + 527 стр. больш. 8⁰. Съ 199 рис, 2 цвѣтн. и 3 черн. табл. 1910. Ц. Р. 4.
Честь и слава „Mathesis" за изданіе этой прекрасной книги, которою можетъ гордиться русская наука! *Ж. М. Н. Пр.*

КЭДЖОРИ, Ф. проф. **Исторія элементарной математики** (съ нѣкоторыми указаніями для препод.)*) Перев. съ англ. подъ ред. и съ примѣч. прив.-доц. *И. Ю. Тимченко.* VIII+368 стр. 8⁰. Съ рис. 1910. Ц. Р. 2. 50 к.
Книга читается съ большимъ интересомъ и весьма полезна... Мы настоятельно рекомендуемъ „Исторію элемент. мат." Кэджори. *Вѣстн. Воспит.*

РАМЗАЙ, В. проф. **Введеніе въ изученіе физической химіи.** Перев. съ англ. подъ ред. проф. *П. Г. Меликова.* VIII+76 стр. 16⁰. 1910. Ц. 40 к.

РОУ, С. Геометрическія упражненія съ кускомъ бумаги. Пер. съ англ. XVI+173 стр. 16⁰. Съ 87 рис. и чертежами. 1910. Ц. 90 к.

ТОМСОНЪ, Дж. Дж. проф. **Корпускулярная теорія вещества.** Переводъ съ англійск. *I. Левинтова,* подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат."*. VIII+162 стр. 8⁰. Съ 29 рис. 1910. Ц. Р. 1. 20 к.

ГРАФФЪ, К. Комета Галлея.*) Пер. съ нѣм. VIII+71 стр. 16⁰. Съ 13 рис. и 2 отд. табл. Изданіе второе исправл. и дополненное 1910. Ц. 30 к.
Брошюра Граффа хорошо выполняетъ свое назначеніе. *Педагог. Сборникъ.*

НИМФЮРЪ, Р., Воздухоплаваніе.*) Научныя основы и техническое развитіе. Пер. съ нѣм. VIII+161 стр. 8⁰. Съ 52 рис. 1910. Ц. 90 к.

Галлеева Комета въ 1910 году. *Общедоступное изданіе.* Содержаніе: О вселенной — О кометахъ — О кометѣ Галлея. 32 стр. 8⁰. Съ 12 иллюстраціями 1910. Ц. 12 к.

КАЙЗЕРЪ, Г. проф. **Развитіе современной спектроскопіи.***) Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣстн. Оп. Физ.* и *Эл. Мат“* 45 стр. 16⁰ 1910. Ц. 25 к.

ГАМПСОНЪ-ШЕФЕРЪ. Парадоксы природы.*) Книга для юношества, объясняющая явленія, которыя находятся въ противорѣчіи съ повседневнымъ опытомъ. Пер. съ нѣм. VIII+193 стр. 8⁰ Съ 67 рис. Ц. Р. 1. 20 к.

КАГАНЪ В. прив.-доц. **Что такое алгебра?***) 72 стр. 16⁰. Ц. 40 к.

ВЕБЕРЪ и **ВЕЛЬШТЕЙНЪ**, проф. **Энциклопедія элементарной математики***). Т. II, кн. 2 и 3. **Тригонометрія, аналитическая геометрія и стереометрія.** Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *В. Кагана.* VIII+321 стр. 8⁰. Съ 109 рис. 1910. Ц. Р. 2. 50 к.

ПУАНКАРЕ, Г. проф. **Наука и Методъ.** Пер. съ франц. И. Брусиловскаго подъ ред. прив.-доц. *В. Кагана.* VIII+384 стр. 16⁰. 1910. Ц. Р. 1. 50 к.

ЛЁБЪ. Динамика живого вещества. Переводъ съ нѣм. подъ ред. проф. *В. В. Завьялова.* VIII+352 стр 8⁰. Съ 64 рис. 1910. Ц. Р. 2. 50 к.

АДЛЕРЪ, А. Теорія геометрическихъ построеній. Перев. съ нѣмецкаго подъ ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго* XXIV+325 стр. 8⁰. Съ 177 рис. 1910. Ц. Р. 2. 25 к.

СОДДИ, Ф. проф. **Радій и его разгадка.** Пер. съ англ. подъ ред. лаборанта Новоросс. универс. *Д. Хмырова.* VII+190 стр. 8⁰. Съ 31 рис. 1910. Ц. Р. 1. 25 к.

СМИТЪ, А. проф. **Введеніе въ неорганическую химію.** Пер. съ англ. подъ ред. проф. *П. Г. Меликова.* Вып. I. VI+400 стр. 8⁰. Съ рис. 1911. Ц. Р. 2.—

КОВАЛЕВСКІЙ Г., проф. **Основы дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій.** Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.* VIII+503 стр. 8⁰. 1911. Ц. Р. 3. 50 к.

БОРЕЛЬ, Э. проф. **Элементарная математика.** Ч. I. Ариѳметика и Алгебра. Въ обработкѣ проф. *П. Штэккеля.* Пер. съ нѣмецк. подъ ред. прив.-доц. *В. Ф. Кагана.* Съ приложеніемъ его статьи „О реформѣ преподаванія математики“. LXIV+434 стр. 8⁰. 1911. Ц. Р. 3.—

ВИНЕРЪ, О. проф. **О цвѣтной фотографіи** и родственныхъ ей естественно-научныхъ вопросахъ Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *Н. П. Кастерина.* VI+69 стр. 8⁰. Съ 3 цвѣтн. таблицами. 1911. Ц. 60 к.

МАРКОВЪ, А. акад. **Исчисленіе конечныхъ разностей.** Въ двухъ частяхъ. Изд. 2-ое исправл. и дополненное. VIII+274 стр. 8⁰. 1911. Ц. Р. 2. 25 к.

ФУРЬЕ ДАЛЬБЪ Э. Два новыхъ міра (Инфра-міръ. Супра-міръ). Пер. съ англ. VIII+119 стр. 8⁰. Съ 1 рис. и 1 табл. 1911. Ц. 80 к.

БРАУНЪ, Ф проф. **Мои работы по безпроволочной телеграфіи и по электрооптикѣ.** Рѣчь, произнесенная по случаю полученія Нобелевской преміи, съ дополн. автора. Пер. съ рукописи *Л. Мандельштама* и *Н. Папалекси*, со вступит. статьей переводчиковъ. XXIV+92 стр. 16⁰ Съ 25 рис. и портретомъ автора. 1911. Ц. 70 к.

ШУБЕРТЪ, Г. проф. **Математическія развлеченія и игры.** Пер. съ нѣм. *І. Левинтова.* Подъ ред., съ приб. и прим. „В. Оп. Ф. и Эл. Мат.“. XII+354 стр. 16⁰. Со мног. табл. 1911. Ц. Р. 1. 40 к.

Имѣются на складѣ:

МУЛЬТОНЪ, Ф. проф. **Эволюція солнечной системы.** Перев. съ англійск. IV+82 стр. 16⁰. Съ 12 рис. 1908. Ц. 50 к.
Изложеніе планетезимальной гипотезы образованія солнечной системы изъ спиральной туманности съ попутной критикой космогонической теоріи Лапласа.

ЕФРЕМОВЪ, Д. кандид. матем. наукъ. **Новая геометрія треугольника.** 334+XIII стр. 8⁰. 1902 Ц. Р. 2.—

Печатаются и готовятся къ печати:

КЛЕЙНЪ. Лекціи по элементарной математикѣ для учителей. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *В. Кагана.*

ТРЕЛЬСЪ-ЛУНДЪ. Небо и міровоззрѣніе въ круговоротѣ временъ. Пер. съ нѣмецкаго.

ЛОВЕЛЛЬ, П. Обитаемость Марса. Пер. съ англ. Со мног. рис.

АНДУАЙЕ, проф. **Курсъ астрономіи.** Переводъ съ французскаго.

УСПѢХИ ФИЗИКИ. Сборникъ статей подъ ред. *„Вѣстн. Опытн. Физ. и Элемент. Мат.“* Выпускъ второй.

МАМЛОКЪ, Л. проф. **Стереохимія.** Переводъ съ нѣмецкаго подъ ред. проф. *П. Меликова.*

ГАССЕРТЪ, проф. **Изслѣдованія полярныхъ странъ.** Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *Г. Танфильева.*

ПЛАНКЪ, М. Отношеніе новѣйшей физики къ механистическому міровоззрѣнію. Пер. съ нѣм. подъ ред. *Вѣсстн. Опытн. Физ. и Элем Мат.*

РУДІО. Архимедъ, Гюйгенсъ, Лагранжъ и Ламбертъ о квадратурѣ круга Пер. съ нѣм.

ЛОДЖЪ, Оливеръ, проф. **Міровой эѳиръ.** Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. Новороссійскаго университета *Д. Хмырова.*

МОРЭНЪ, проф. **Физическія состоянія вещества.** Переводъ съ французскаго.

ДЗІОБЕКЪ, проф. **Курсъ аналитической геометріи.** Въ 2 част. Пер. съ нѣм. подъ ред. преподав. С.П.Б Высш. Женск. Курсовъ *В. І. Шиффъ.*

Русская математическая библіографія въ 1908 г. Подъ ред. проф. *Д. Н. Синцова.*

КЛАРКЪ, А. Исторія астрономіи XIX столѣтія. Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. С.П.Б. университета *В. Серафимова.*

ШТОКЪ-ШТЕЛЕРЪ. Практическое руководство по количественному неорганическому анализу. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *П. Меликова.*

ВЕРИГО, Б. Ф. проф. **Основы общей біологіи** Около 30 печатныхъ листовъ.

ГРОТЪ, проф. **Введеніе въ химическую кристаллографію.** Пер. подъ ред. проф. *М. Д. Сидоренко.*

ЛАГРАНЖЪ Ж. Дополненія къ „элементамъ алгебры“ Эйлера. Неопредѣленный анализъ. Пер. съ фр. подъ ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновкаго.*

БОЛЬЦАНО, Б. Парадоксы безконечнаго. Пер. съ нѣмец. подъ ред. проф. *И. В. Слешинскаго.*

БАХМАНЪ, проф. **Основы новѣйшей теоріи чиселъ.** Пер съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.*

Выписывающіе изъ главнаго склада изданій „Матезисъ“ (Одесса, Новосельская 66) на сумму 5 р. и больше за пересылку не платятъ.

Подробный каталогъ высылается по требованію безплатно.

Отдѣленія склада изданій „Матезисъ“:

Въ **Москвѣ**—Книжн. магазинъ *„Образованіе“*, Кузнецкій мостъ 11.
Въ **С.-Петербургѣ**—Книжн. магаз. *Г. С. Цукермана*, Алексан.пл. 5.
Въ **Варшавѣ**—Книжный магазинъ *„Оросъ“*, Новый Свѣтъ 70.
Въ **Кіевѣ**—Книж. магазинъ *В. А. Просяниченко*, Фундуклеевская.

ЛАКУРЪ, П. и АППЕЛЬ, Я.

ИСТОРИЧЕСКАЯ ФИЗИКА.

Переводъ съ нѣмецкаго подъ ред. „Вѣстника Опытн. Физ. и Элемент. Математ.“

Въ 2 томахъ большого формата 8°, 892 страницы. Съ 799 рисунками и 6 отдѣльными таблицами. Цѣна **7** р. **50** к.

Содержаніе I тома: Мірозданіе — Свѣдѣнія и открытія до 1630 г. Свѣтъ — Отъ древнѣйшихъ временъ до Ньютона. Сила — Движеніе. Энергія. Жидкости. Воздушный океанъ. Мірозданіе — Свѣдѣнія и открытія послѣ 1630 г. Звукъ. Природа свѣта. Спектральный анализъ. Указатель. Таблица I: Неподвижныя звѣзды сѣвернаго неба. Таблица II: Спектры.

Содержаніе II тома: Теплота. Магнитизмъ. Электричество до 1790 г. Электрическій токъ. Погода. Прибавленіе: Радіоактивность. Указатель. Карты: Изотермы января — Изотермы іюля — Изобары января — Изобары іюля.

Учен. Ком. М. Н. Пр. признана заслуживающею вниманія при пополненіи ученическихъ библіотекъ среднихъ учебныхъ заведеній.

ИЗЪ ОТЗЫВОВЪ. „Такія книги, какъ „Историческая физика“, представляютъ собой рѣдкое явленіе въ міровой учебной литературѣ, какъ по широтѣ замысла, такъ и по мастерству выполненія. Авторы обнаружили много вкуса и критическаго чутья въ выборѣ изъ необозримой груды историческихъ фактовъ наиболѣе подходящаго матеріала и много искусства въ его распланированіи. Имъ удалось въ каждой эпохѣ развитія естествознанія подмѣтить тѣ стороны, которыя имѣли наибольшій теоретическій или практическій интересъ, дать рядъ яркихъ характеристикъ корифеевъ науки, детально выяснить взаимоотношеніе между развитіемъ физики и техники и вмѣстѣ съ тѣмъ, въ увлекательной и общедоступной формѣ, изложить тѣ свѣдѣнія изъ области физики, астрономіи и метеорологіи, которыя составляютъ содержаніе элементарныхъ учебниковъ. Благопріятное впечатлѣніе усиливается легкой и изящной манерой изложенія, свойственной почти исключительно французскимъ авторамъ, и удачнымъ подборомъ иллюстрацій, относящихся къ культурамъ всѣхъ временъ и народовъ“.

Н. Томилинъ. *Русская Школа.* Мартъ 1909.

ЛОРЕНЦЪ, Г. А., проф.

КУРСЪ ФИЗИКИ.

Разрѣшенный и дополненный авторомъ переводъ съ нѣмецкаго подъ ред. проф. Н. П. Кастерина. 1910.

Томъ I. VIII+348 стр. больш. 8°. 236 рис. Цѣна **2** р. **75** к.
Томъ II. VIII+466 стр. больш. 8°. Съ 257 рис. Цѣна **3** р. **75** к.

Содержаніе I тома: главы I — VIII: Движеніе и силы. — Работа и энергія. — Твердыя тѣла неизмѣнной формы. — Равновѣсіе и движеніе жидкостей и газовъ. — Свойства газовъ. — Принципы термодинамики. — Свойства твердыхъ тѣлъ. — Свойства жидкостей и паровъ. — Именной и предметный указатель.

Содержаніе II тома: главы IX — XVIII: Колебательное движеніе тѣлъ. — Распространеніе колебаній. — Отраженіе и преломленіе свѣта. — Природа свѣта. — Поляризованный свѣтъ. — Электростатика. — Электрическіе токи. — Дѣйствіе магнитнаго поля. — Электрическія колебанія. — Распространеніе электромагнитныхъ нарушеній равновѣсія. — Явленія, объясняемыя при помощи теоріи электроновъ. — Задачи. Таблицы. Именной и предметный указатель.

ИЗЪ ОТЗЫВОВЪ. „Авторъ этой книги, Г. Лоренцъ (H. Lorentz), знаменитый основатель электронной теоріи, занимаетъ нынѣ, послѣ смерти лорда Кельвина и Больцманна, первое мѣсто среди физиковъ всѣхъ странъ. Какъ видно изъ краткаго предисловія къ первому тому „Курса физики“, эта книга составилась изъ лекцій по элементарной физикѣ, читанныхъ авторомъ, главнымъ образомъ, для студентовъ медиковъ. Выходящее за эти предѣлы отмѣчено болѣе мелкимъ шрифтомъ. Описанію приборовъ и методовъ наблюденій отведено лишь немного мѣста; равнымъ образомъ, авторъ почти не затрагиваетъ ни историческаго развитія физики, ни ея практическихъ приложеній. Распредѣленіе матеріала необычайное, но въ то же время весьма цѣлесообразное и интересное. Достаточно отмѣтить, что отдѣльнаго ученія о теплотѣ вовсе нѣтъ. Тепловыя явленія изучаются попутно при разсмотрѣніи свойствъ твердыхъ, жидкихъ и газообразныхъ тѣлъ. Переводъ, подъ редакціей столь компетентнаго лица, какъ проф. Н. П. Кастеринъ, никакихъ замѣчаній не вызываетъ. Съ появленіемъ этого перевода русская литература обогатилась превосходнымъ курсомъ физики“. О. Хвольсонъ. *Журн. М. Нар. Пр.*, іюнь 1910.

КЭДЖОРИ, Ф., проф.

ИСТОРІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

съ указаніями на методы преподаванія.

Переводъ съ англ. подъ ред. и съ примѣч. и прибавл. прив.-доц. **И. Ю. Тимченко.**
VIII+368 стр. 8°. Съ рисунками. 1910. Цѣна **2** руб. **50** коп.

Содержаніе: Древній періодъ: Системы счисленія и числовые знаки. — Ариѳметика и алгебра: Египетъ, Греція, Римъ. — Геометрія и тригонометрія: Египетъ и Вавилонія, Греція, Римъ. Средніе вѣка: Ариѳметика и алгебра: Индусы, Арабы, Европа въ средніе вѣка. Новое время: Ариѳметика: Ея развитіе, какъ науки и искусства. Англійскіе мѣры и вѣса. Развитіе школы коммерческой ариѳметики въ Англіи. Причины задержки развитія теоретической ариѳметики въ Англіи. Реформы въ преподаваніи ариѳметики. Ариѳметика въ Соединенныхъ Штатахъ. „Вопросы для забавы и развлеченія“. — Алгебра: Возрожденіе. Послѣдніе три вѣка. — Геометрія и тригонометрія: Изданія Евклида. Раннія изслѣдованія. Начала современной синтетической геометріи. Современная элементарная геометрія. Прибавленія редактора.

Учен. Ком. М. Н. Пр. признана заслуживающей вниманія при пополненіи ученическихъ библіотекъ среднихъ учебныхъ заведеній.

ИЗЪ ОТЗЫВА. „...къ числу которыхъ [достоинствъ книги] можно отнести: 1) простоту, ясность и живость изложенія, 2) массу свѣдѣній, 3) удачное расположеніе матеріала, 4) установленіе связи фактовъ изъ исторіи науки съ общей исторіей культуры, 5) замѣчанія, относящіяся къ методамъ преподаванія, 6) указанія на литературу того или другого вопроса.

Все это, вмѣстѣ взятое, дѣлаетъ „Исторію элементарной математики“ проф. Ф. Кэджори, во-первыхъ, интересной и для тѣхъ, кто смотритъ на такого рода книги не только, какъ на собраніе справокъ о происхожденіи и первоначальномъ значеніи формулъ и теоремъ изъ различныхъ отдѣловъ математики, но, преимущественно, какъ на „картины роста математическихъ знаній и развитія главнѣйшихъ математическихъ идей“ (см. „Предисловіе“ редактора), а во-вторыхъ, доступной читателю, не имѣющему предварительнаго знакомства съ исторіей математики.

Д. Волковскій. *Вѣстникъ Воспитанія*, мартъ 1910.

ПУАНКАРЕ, Г., акад.

НАУКА И МЕТОДЪ.

Переводъ съ франц. И. Брусиловскаго подъ ред. прив.-доц. В. Кагана.
VIII+384 стр. 16°. 1910. Цѣна **1** р. **50** к.

Содержаніе: Кн. I. Ученый и наука. Выборъ фактовъ. — Будущее математическихъ наукъ — Математическое творчество — Случайность. Кн. II. Математическое разсужденіе. Относительность пространства — Математическія опредѣленія и преподаваніе — Математическія науки и логика — Новыя логики — Послѣднія усилія логистиковъ. Кн. III. Новая механика. Механика и радій — Механика и оптика — Новая механика и астрономія. Кн. IV. Астрономическая наука. Млечный путь и теорія газовъ — Французская геодезія. — Общіе выводы.

Э. БОРЕЛЬ и П. ШТЭККЕЛЬ.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА.

Часть I. Ариѳметика и Алгебра.

Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей прив.-доц. **В. Ф. Кагана.** Съ приложеніемъ его статьи о реформѣ преподаванія математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ Франціи и Германіи. Цѣна **3** р.

Руководство Э. Бореля представляетъ собой наиболѣе распространенный въ настоящее время во Франціи учебникъ элементарной математики. Обработка проф. Штэккеля освобождаетъ сочиненіе Бореля отъ той формы, которая связана съ установившимся во Франціи дѣленіемъ курса на циклы, сохраняя въ то же время особенности сочиненія, выражающія тенденцію реформы. Сущность реформы подробно изложена во вступительной статьѣ приватъ-доцента В. Ф. Кагана.