№ 517.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. ГЕРНЕТОМЪ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ф. КАГАНА.

XLIV-го Семестра № 1-й.

ОДЕССА.
Типографія Акц. Южно-Русскаго О-ва Печ. Дѣла. Пушкинская, 18.
1910.

XLIV Сем. № 1.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 517.

Содержаніе: О построеніяхъ, производимыхъ циркулемъ и линейкой. *Прив.-доц. С. О. Шатуновскаго.* — О биссектрисахъ треугольника. *Н. Извольскаго.* — Опредѣленіе таксы процентовъ долгосрочныхъ займовъ, погашаемыхъ одинаковыми срочными уплатами. *С Новосильцева.* — О четырехугольникѣ, имѣющемъ при данныхъ сторонахъ наибольшую площадь. *Проф. Б К. Млодзѣевскаго.* — Тема для учащихся № 1. *П. Флорова.* — Отъ Казанскаго Физико-Математическаго Общества. – Задачи №№ 312—317 (5 сер.) — Рѣшенія задачъ №№ 223, 226, 229 и 231 (5 сер.). – Объявленія.

О построеніяхъ, производимыхъ циркулемъ и линейкой.*)

Прив.-доц. С. Шатуновскаго.

Приступая къ изложенію теоріи конструктивныхъ задачъ элементарной геометріи, мы считаемъ необходимымъ нѣсколько остановиться на общемъ опредѣленіи задачи и разъясненіи ея содержанія. Что такое задача и каково ея содержаніе въ наиболѣе общемъ случаѣ? Слѣдующее опредѣленіе, хотя, быть можетъ, и не вполнѣ отвѣчаетъ на поставленный вопросъ, но представляется намъ достаточно общимъ.

Задача есть изложеніе требованія „найти" по „даннымъ" вещамъ другія, „искомыя" вещи, находящіяся другъ къ другу и къ даннымъ вещамъ въ указанныхъ соотношеніяхъ.

Принимая это опредѣленіе задачи, мы предполагаемъ, конечно, что предварительно опредѣлены всѣ термины, входящіе

*) „Введеніе" въ книгу: „Теорія геометрическихъ построеній" А. Адлера. Одесса, 1910. „Mathesis".

въ его составъ (за исключеніемъ термина: задача), или что эти термины приняты безъ опредѣленія либо въ силу соглашенія, либо потому, что они имѣютъ достаточно ясный смыслъ. Намъ придется, однако, обратить особое вниманіе на поставленные выше въ кавычки термины: найти, данныя (вещи), искомыя (вещи). Каково бы ни было ихъ реальное содержаніе (въ настоящій моментъ оно для насъ безразлично), важнымъ представляется то обстоятельство, что въ каждой задачѣ разсматриваются два класса вещей (для насъ опять безразлично, будутъ ли эти вещи конкретныя или отвлеченныя):

Одинъ классъ есть классъ данныхъ вещей. О нихъ говорятъ, что онѣ даны, указаны, извѣстны, доступны нашему непосредственному или посредственному усмотрѣнію, созерцанію, пониманію или представленію, находятся въ нашемъ распоряженіи, что мы эти вещи знаемъ, воображаемъ и т. д.

Наоборотъ, о вещахъ другого класса говорятъ, что онѣ не даны, не извѣстны, не указаны, что это суть искомыя вещи, что онѣ должны быть найдены или опредѣлены (вычислены — въ ариѳметикѣ, построены — въ геометріи, вообще — обнаружены) и т. д.

Когда вещь найдена, о ней перестаютъ говорить, какъ о вещи неизвѣстной: она переводится изъ класса искомыхъ въ классъ данныхъ вещей. Такимъ образомъ, найти вещь—это значитъ сдѣлать такъ, чтобы мы не только могли, но и обязаны были причислить вещь къ классу данныхъ или извѣстныхъ вещей. Поэтому совершенно ясно, что задача не будетъ имѣть содержанія, терминъ „найти“ ничего не будетъ означать, если не указаны тѣ обстоятельства, событія или условія, при осуществленіи которыхъ мы обязаны перечислить вещь изъ класса вещей неизвѣстныхъ въ классъ извѣстныхъ вещей *).

Итакъ, въ каждой отдѣльной отрасли знанія или даже въ каждой отдѣльной задачѣ терминъ найти можетъ имѣть свое особое значеніе, но онъ долженъ быть опредѣленъ въ томъ смыслѣ, что явно должны быть указаны тѣ условія, при осуществленіи которыхъ искомая вещь считается найденной. Эти условія нерѣдко даются намъ тѣми или другими преслѣдуемыми цѣ-

*) Здѣсь умѣстно будетъ сдѣлать слѣдующее замѣчаніе: положимъ, что искомая вещь x будетъ нами считаться найденной тогда и только тогда, когда осуществится событіе α. Можно поставить вопросъ о томъ, при наличности какихъ признаковъ β мы будемъ говорить, что событіе α осуществилось, затѣмъ—вопросъ о томъ, каковы признаки γ, свидѣтельствующіе о наличности признаковъ β и т. д. ad infinitum. Мы будемъ поэтому предполагать, что во всѣхъ разсматриваемыхъ случаяхъ нѣтъ никакого сомнѣнія относительно того, осуществлены ли уже или еще не осуществлены тѣ условія, при выполненіи которыхъ вещь должна быть переведена изъ класса искомыхъ въ классъ данныхъ вещей.

лями, зависящими весьма часто отъ состоянія нашего сознанія или имѣющихся въ нашемъ распоряженіи средствъ воспріятія; но эти условія могутъ быть и иногда дѣйствительно являются предметомъ чистаго соглашенія. Въ послѣднемъ случаѣ мы можемъ измѣнять условія, замѣщая одни другими, лишь бы только совокупность соглашеній не содержала логическаго противорѣчія. Но нельзя не устанавливать никакихъ условій относительно перечисленія вещи изъ класса искомыхъ въ классъ данныхъ, ибо при отсутствіи такихъ условій задача не имѣетъ смысла.

Если, напримѣръ, A предлагаетъ B раздѣлить пополамъ данный прямолинейный отрѣзокъ MN, то прежде, чѣмъ приступить къ рѣшенію задачи, B долженъ узнать при выполненіи какихъ условій A будетъ считать, что середина O отрѣзка MN найдена, ибо въ противномъ случаѣ B можетъ разсуждать, какъ угодно, и дѣлать, что угодно, между тѣмъ какъ A все будетъ говорить, что середина O не найдена. На практикѣ, когда MN есть начерченный отрѣзокъ или вообще отрѣзокъ, опредѣляемый двумя реальными (начерченными) точками, середина O считается найденной, когда она отмѣчена особымъ знакомъ или когда въ ней находится ножка циркуля. Въ геометріи середина O считается найденной только тогда, когда мы къ ней пришли при помощи нѣкоторыхъ вполнѣ опредѣленныхъ пріемовъ, о чемъ рѣчь будетъ ниже.

Предложенія, которыми устанавливаются тѣ факты, обстоятельства или условія, при наличности которыхъ искомая вещь становится данной, мы будемъ называть *постулатами*, лежащими въ основѣ рѣшенія данной задачи или данной группы задачъ, разсматриваемыхъ въ той или другой дисциплинѣ (эти постулаты можно было бы назвать логическими средствами рѣшенія).

Переходя теперь къ конструктивнымъ задачамъ элементарной плоской геометріи, мы прежде всего укажемъ тѣ постулаты, которые обыкновенно кладутся въ основаніе рѣшенія этихъ задачъ. Замѣтимъ для этой цѣли, что въ элементарной плоской геометріи разсматриваются только слѣдующіе образы:

1. Точки, прямыя, прямолинейные отрѣзки, окружности и ихъ дуги. Эти образы будемъ называть основными.

2. Совокупности основныхъ образовъ.

3. Конечныя или безконечныя (напримѣръ, углы) части плоскости, ограничиваемыя основными образами.

Мы принимаемъ:

Постулатъ I. Прямая и прямолинейный отрѣзокъ соотвѣтственно считаются построенными тогда и только тогда, когда даны или построены двѣ точки прямой или концы отрѣзка.

Постулатъ II. Окружность считается построенной тогда и только тогда, когда даны или построены ея центръ и двѣ точки, которыми опредѣляется ея радіусъ. (Одною изъ этихъ точекъ можетъ быть центръ, а другою — точка на окружности.) Дуга окружности считается построенной въ томъ и только въ томъ случаѣ, когда даны или построены ея центръ и ея концы.

Постулатъ III. Точка построена, если она есть пересѣченіе двухъ данныхъ или построенныхъ прямыхъ.

Постулатъ IV. Точка построена, если она есть общая точка данной или построенной прямой и данной или построенной окружности.

Постулатъ V. Точка построена, если она есть общая точка двухъ данныхъ или построенныхъ окружностей.

Постулатъ VI. Всякій другой образъ считается построеннымъ, если даны или построены основные образы, изъ которыхъ онъ состоитъ или которые его ограничиваютъ.

Въ черченіи, гдѣ строятся не геометрическіе образы, а ихъ графическія изображенія, эти постулаты практически осуществляются помощью циркуля и линейки, при чемъ оба эти инструмента употребляются опредѣленнымъ образомъ, а именно: при помощи линейки воспроизводится графическое изображеніе прямой черезъ графически заданныя точки, при помощи циркуля описываютъ изъ графически заданнаго центра графическую окружность, имѣющую графически заданный радіусъ. Другое употребленіе циркуля или линейки можетъ не соотвѣтствовать нашимъ первымъ двумъ постулатамъ. Что касается постулатовъ III—V, то ихъ осуществленіе содержится въ томъ фактѣ, что мы непосредственно усматриваемъ общія точки графически данныхъ прямыхъ и окружностей. Случаи, когда эти общія точки лежатъ внѣ эпюра (рамокъ) чертежа и потому не усматриваются непосредственно и не считаются построенными, соотвѣтствуютъ тѣмъ случаямъ, когда тотъ или иной изъ постулатовъ III—V отбрасывается*).

---

*) Т. е. добавочнымъ условіемъ мы ограничиваемъ свое право пользоваться ранѣе установленнымъ постулатомъ въ опредѣленныхъ случаяхъ. Пусть, напримѣръ, предложена задача: даны двѣ прямыя a, b, пересѣкающіяся „въ недоступной части плоскости чертежа", и точка P внѣ нихъ; требуется построить прямую, проходящую черезъ точку P и упомянутую „недоступную" точку $a \times b$. Хотя въ силу постулата III считается построенной точка пересѣченія двухъ данныхъ прямыхъ a и b, въ силу же постулата I могла бы уже считаться построенной прямая, соединяющая эту точку съ данной точкой P, мы, однако, лишаемъ себя права пользоваться послѣднимъ условіемъ именно въ этомъ случаѣ.

Практическое значеніе такого рода ограниченій ясно само собою.

Можно, конечно, установить другіе постулаты, которымъ будутъ соотвѣтствовать либо другіе чертежные инструменты, либо другіе способы употребленія циркуля и линейки*). Можно, наоборотъ, задать чертежные инструменты и способъ ихъ употребленія и поставить на разрѣшеніе вопросъ о томъ, каковы соотвѣтственные постулаты**); но какіе-либо постулаты должны быть установлены (или соотвѣтствующіе имъ инструменты выбраны), такъ какъ въ противномъ случаѣ задача лишена содержанія.

Установленные нами постулаты, отвѣчающіе обыкновенному способу пользованія циркулемъ и линейкой, эквивалентны слѣдующему допущенію. Конструктивная задача элементарной плоской геометріи считается рѣшенной, если она приведена къ рѣшенію конечнаго числа задачъ, изъ которыхъ каждая есть одна изъ слѣдующихъ пяти задачъ: I. черезъ двѣ данныя точки провести прямую или отрѣзокъ, ихъ соединяющій; II. изъ данной точки описать окружность даннаго радіуса или начертить дугу окружности по ея концамъ и ея центру; III. найти общую точку двухъ данныхъ прямыхъ; IV. найти общія точки данной прямой и данной окружности; V. найти общія точки двухъ данныхъ окружностей. Для геометра безразлично, какъ рѣшаются эти пять задачъ. Ихъ рѣшеніе ему извѣстно по условію, и къ нимъ должна сводиться всякая другая задача для того, чтобы считаться рѣшенной.

Принявъ постулаты I—VI, мы поставимъ себѣ теперь на разрѣшеніе наиболѣе общую конструктивную задачу элементарной плоской геометріи. Такъ какъ каждый образъ опредѣляется ограничивающими его основными (см. выше) образами, а эти, въ свою очередь, считаются построенными, когда найдены нѣкоторыя опредѣляющія ихъ точки, то можно принять, что каждый геометрическій образъ задается нѣкоторою системою точекъ и что требованіе построить геометрическій образъ есть

---

*) Упомянемъ, напримѣръ, слѣдующіе постулаты, отвѣчающіе употребленію прямого угла:

Считается построенной прямая, перпендикулярная къ данной или построенной прямой и проходящая черезъ данную или построенную точку.

Считается построенной лежащая на данной или построенной прямой точка, изъ которой данный или построенный отрѣзокъ виденъ подъ прямымъ угломъ.

Первый изъ нихъ отвѣчаетъ хорошо извѣстному чертежникамъ пріему, при которомъ прямой уголъ одной стороной прикладываютъ къ построенной прямой и заставляютъ его скользить по ней, пока другая сторона не придетъ въ соприкосновеніе съ построенной точкой. Второй же постулатъ осуществляется слѣдующимъ мало употребительнымъ пріемомъ: стараясь, чтобы стороны угла проходили черезъ концы отрѣзка, передвигаютъ уголъ по плоскости чертежа, пока вершина его не упадетъ на построенную прямую.

**) См., напримѣръ, главы II, III, IV книги Адлера и примѣчанія къ нимъ.

требованіе о построеніи системы точекъ. Наиболѣе общая конструктивная задача можетъ быть поэтому выражена такъ:

По данной системѣ точекъ P_1 (P_1', P_1'', ..., $P_1^{(h)}$), содержащей конечное число точекъ P_1', ..., $P_1^{(h)}$, требуется построить другую конечную систему Q (Q', Q'', ..., $Q^{(k)}$) точекъ, подъ условіемъ, чтобы эти послѣднія удовлетворяли нѣкоторымъ напередъ указаннымъ требованіямъ.

Точки P_1', ..., $P_1^{(h)}$ данной системы P_1 будемъ называть точками перваго класса. Найдемъ всѣ тѣ образы, которые могутъ и должны считаться построенными въ силу постулатовъ I—VI. Мы можемъ, впрочемъ, игнорировать послѣдній постулатъ и задаться только такимъ вопросомъ: какіе основные образы могутъ и должны считаться построенными, когда приняты постулаты I—V и дана система точекъ P_1? Если эта задача рѣшена, то должны считаться построенными и всѣ тѣ образы, которые составляются изъ основныхъ или ограничиваются ими.

Постулаты III—V говорятъ объ основныхъ образахъ, которые должны считаться построенными, когда даны (построены) прямыя или окружности. Эти постулаты непосредственно ничего не могутъ дать въ примѣненіи къ точкамъ системы P_1. Въ силу же постулата I мы можемъ и должны считать построенными всѣ прямыя l_1 и прямолинейные отрѣзки λ_1, опредѣляемые всевозможными парами точекъ перваго класса. Эти прямыя и отрѣзки будемъ называть прямыми и отрѣзками перваго класса. Въ силу же постулата II теперь должны считаться построенными всѣ окружности O_1, для которыхъ центрами служатъ точки перваго класса, а радіусами — прямолинейные отрѣзки перваго класса. Эти окружности мы будемъ называть окружностями перваго класса.

Такимъ образомъ, мы имѣемъ теперь

$$\left.\begin{array}{ll} \text{точки} & P_1 \\ \text{прямыя} & l_1 \\ \text{отрѣзки} & \lambda_1 \\ \text{окружности} & O_1 \end{array}\right\} \text{перваго класса.}$$

Примѣняя теперь постулаты III—V, мы можемъ и должны считать построенными всѣ отличныя отъ точекъ P_1 точки встрѣчи построенныхъ уже окружностей и прямыхъ. Эти точки P_2 мы будемъ называть точками второго класса. Въ силу постулатовъ I и II мы можемъ, по аналогіи съ предыдущимъ, считать построенными прямыя l_2, отрѣзки λ_2 и окружности O_2 второго класса, затѣмъ точки P_3 третьяго класса и т. д.

Совокупность точекъ классовъ P_2, P_3, ... содержитъ въ себѣ всѣ тѣ и только тѣ точки, которыя могутъ и должны считаться построенными въ силу постулатовъ I—V, когда точки P_1 образуютъ данную, исходную систему точекъ. Если искомыя точки Q найдутся среди точекъ P_1, P_2, P_3, ..., то задача при нашихъ постулатахъ разрѣшима. Если же искомыхъ точекъ Q не будетъ среди точекъ P_1, P_2, $P_3, \ldots$, какъ бы далеко мы этотъ рядъ ни продолжали, то задача не будетъ имѣть рѣшенія. Пояснимъ это еще такъ: Если точки системъ P_1, $P_2, \ldots$ не покрываютъ всей плоскости, такъ что на плоскости имѣется одна или нѣсколько точекъ q, которыя не будутъ принадлежать ни къ одному изъ классовъ P_1, $P_2, \ldots$, то всякая задача, въ которой даны только точки P_1, а ищется хоть одна изъ точекъ q, будетъ неразрѣшимой при нашихъ постулатахъ, хотя она и могла бы быть разрѣшимой при другихъ постулатахъ. Такъ, напримѣръ, (если требованіе, которымъ должны удовлетворять точки q въ нашей задачѣ, не противорѣчатъ другъ другу) можно было бы принять за постулатъ, что точки q построены, когда точки P_1 даны; въ этомъ случаѣ задача, въ которой точки q суть искомыя, разрѣшима въ силу установленнаго постулата. Въ книгѣ Адлера приводится много примѣровъ задачъ, неразрѣшимыхъ при однихъ, но разрѣшимыхъ при другихъ постулатахъ*).

Въ предыдущемъ изложеніи указанъ путь, слѣдуя которому мы, принявъ обычные постулаты, непремѣнно найдемъ рѣшеніе задачи, если только рѣшеніе можетъ быть получено при этихъ постулатахъ. Разсмотримъ, напримѣръ, задачу о дѣленіи пополамъ прямолинейнаго отрѣзка AB, заданнаго его концами. Система P_1 точекъ перваго класса состоитъ изъ двухъ точекъ A и B. Искомый образъ есть точка C, дѣлящая пополамъ отрѣзокъ AB. Отрѣзокъ AB, прямая AB, окружность $A(AB)$ центра A и радіуса AB и окружность $B(AB)$ образуютъ систему отрѣзковъ, прямыхъ и окружностей перваго класса. Если M, N суть точки пересѣченія окружностей $A(AB)$ и $B(AB)$, P и Q—вторыя точки пересѣченія этихъ окружностей съ прямою AB, то точки M, N, P, Q образуютъ систему точекъ второго класса. Среди 9-ти прямыхъ и 28-ми окружностей второго класса имѣется прямая MN, которая въ пересѣченіи съ прямой AB даетъ искомую точку C. Поэтому искомая точка есть точка третьяго класса.

Разсмотримъ еще дѣленіе пополамъ дуги AB (окружности), заданной центромъ O и концами A и B. Точки O, A, B обра-

*) Такъ, напримѣръ, съ помощью одной линейки (что отвѣчаетъ постулатамъ I, III) нельзя раздѣлить пополамъ заданный концами отрѣзокъ, въ то время какъ это легко сдѣлать съ помощью циркуля и линейки (постулаты I — VI). Съ другой стороны, циркулемъ и линейкой не могутъ быть разрѣшены задачи о трисекціи произвольнаго угла, объ удвоеніи куба (построеніе по данной сторонѣ куба стороны куба съ двойнымъ объемомъ), не можетъ быть построенъ правильный семиугольникъ, девятиугольникъ и т. д., не можетъ быть найдена квадратура круга. Всѣ названныя задачи, кромѣ послѣдней, разрѣшаются, если къ постулатамъ I — VI присоединить еще постулаты, отвѣчающіе пользованію высшими алгебраическими кривыми (коническими сѣченіями, конхоидой Никомеда, циссоидой Діоклеса и др.). Для послѣдней же задачи (квадратура круга) нужны трансцендентныя кривыя, для черченія которыхъ существуютъ особые приборы (напримѣръ, интеграфъ Абданкъ-Абакановича).

зуютъ систему точекъ перваго класса. Три отрѣзка OA, OB, AB, три прямыя OA, OB, AB и девять окружностей N (PQ) (гдѣ центръ N есть одна изъ точекъ A, B, O, а радіусъ PQ есть одинъ изъ отрѣзковъ OA, OB, AB) образуютъ систему отрѣзковъ, прямыхъ и окружностей перваго класса. Точки встрѣчи этихъ образовъ другъ съ другомъ (исключая O, A, B) образуютъ систему точекъ второго класса. Среди нихъ имѣется отличная отъ O точка встрѣчи C окружностей $A(AB)$ и $B(AB)$. Прямая OC принадлежитъ второму классу, а точка D ея встрѣчи съ окружностью $O(AB)$ (лежащая на данной дугѣ) принадлежитъ третьему классу и есть искомая точка.

Указанный общій методъ рѣшенія задачъ при помощи циркуля и линейки не только страдаетъ недостатками, свойственными всякому общему методу, но оставляетъ безъ отвѣта вопросъ о критеріяхъ разрѣшимости или неразрѣшимости данной задачи при помощи циркуля и линейки. Критеріи разрѣшимости или неразрѣшимости устанавливаются аналитически*) и выражаются слѣдующимъ образомъ:

Для того, чтобы отрѣзокъ λ могъ быть построенъ при помощи циркуля и линейки, необходимо и достаточно, чтобы длина λ могла быть выражена въ функціи раціональныхъ чиселъ и отрѣзковъ перваго класса при помощи конечнаго числа сложеній, вычитаній, умноженій, дѣленій и извлеченій квадратныхъ корней.

Отсюда выводится, что всякій отрѣзокъ, построяемый съ помощью циркуля и линейки, есть корень алгебраическаго неприводимаго уравненія степени 2^n. Критерій разрѣшимости такого уравненія въ квадратныхъ радикалахъ уже данъ былъ Ванцелемъ**).

Мы остановимся еще на двухъ вопросахъ, а именно на вопросахъ о произвольныхъ элементахъ и о геометрографическихъ рѣшеніяхъ.

Произвольные элементы. Нерѣдко при рѣшеніи геометрической задачи пользуются такъ называемыми произвольными точками, а именно либо берутъ произвольную точку на плоскости, или на данной прямой, или на данной окружности или внутри (либо внѣ) данной фигуры, либо допускаютъ еще, что эта произвольная точка отлична отъ нѣкоторыхъ данныхъ или построенныхъ уже точекъ. Такія допущенія составляютъ особенные постулаты, которые должны быть установлены особыми договорами. При употребленіи циркуля и линейки такіе постулаты

---

*) См., напримѣръ, книгу Адлера, стр. 8 и 195.

**) Въ настоящее время мы имѣемъ другой критерій: для того, чтобы неприводимое уравненіе могло быть рѣшено въ квадратныхъ радикалахъ, необходимо и достаточно, чтобы оно имѣло группу порядка 2^n.

оказываются лишними: произвольную точку легко замѣнить построенной даже въ томъ случаѣ, когда она должна быть отлична отъ нѣкоторыхъ данныхъ или построенныхъ точекъ. Такъ, напримѣръ, если на прямой или дугѣ уже имѣются построеныя точки, расположенныя въ порядкѣ: $A, B, C, \ldots, K$, то мы можемъ замѣнить произвольную точку, отличную отъ A, B, $C, \ldots, K$, — серединой отрѣзка (дуги), опредѣляемаго (опредѣляемой) двумя послѣдовательными точками.

Есть, однако, и такіе случаи, когда допущеніе о пріобщеніи произвольныхъ точекъ къ числу данныхъ или уже построенныхъ является существеннымъ: циклъ разрѣшимыхъ задачъ можетъ быть суженъ, если отбросить право пользованія произвольными точками *).

Геометрографическія рѣшенія. Простѣйшее рѣшеніе данной конструктивной задачи называютъ геометрографическимъ ея рѣшеніемъ. Такое опредѣленіе не имѣетъ смысла, если не установлено мѣрило простоты. По Лемуану, простота рѣшенія опредѣляется слѣдующимъ образомъ. Лемуанъ разсматриваетъ 4 элементарныя операціи: 1) прикладываніе линейки къ данной точкѣ, 2) помѣщеніе ножки циркуля въ данной точкѣ, 3) проведеніе прямой и 4) описаніе окружности. Къ каждой изъ этихъ операціи Лемуанъ относитъ число 1 и называетъ число S всѣхъ элементарныхъ операцій, потребныхъ для рѣшенія задачи, коэффиціентомъ простоты или простотой рѣшенія. Проведеніе прямой черезъ данныя 2 точки имѣетъ поэтому коэффиціентъ простоты 3 (линейка прикладывается къ двумъ точкамъ и проводится одна прямая). Вычерчиваніе окружности изъ даннаго центра O даннымъ радіусомъ AB имѣетъ коэффиціентъ 4 (помѣщеніе двухъ ножекъ циркуля соотвѣтственно въ A и B, помѣщеніе одной ножки циркуля въ O, вычерчиваніе одной окружности) или 3 (если O совпадаетъ съ A или съ B), или 2 (если циркуль имѣетъ растворъ AB вслѣдствіе того, что уже раньше вычерчивалась окружность радіуса AB).

Мы покажемъ, что, имѣя какое-либо рѣшеніе задачи, можно при помощи конечнаго числа испытаній найти ея геометрографическое рѣшеніе. Замѣтимъ для этой цѣли, что для полученія

*) Напримѣръ, задача: „по тремъ даннымъ на прямой точкамъ построить къ нимъ четвертую гармоническую точку" — можетъ быть разрѣшена съ помощью одной линейки (постулаты I, III), но при непремѣнномъ пользованіи произвольными внѣ прямой лежащими точками; безъ этого съ помощью линейки не можетъ быть построена ни одна отличная отъ данныхъ точка, слѣдовательно, и искомая. Подобнымъ же образомъ, задача: „раздѣлить пополамъ заданный концами отрѣзокъ" — при пользованіи произвольной лежащей на прямой (или внѣ прямой) точкой можетъ быть рѣшена съ помощью прямого угла (т. е. постулатовъ, отвѣчающихъ его употребленію), но становится неразрѣшимой, если отнять право пользоваться произвольной точкой, ибо тогда съ помощью прямого угла вообще не можетъ быть построена ни одна точка, отличная отъ данныхъ концовъ отрѣзка.

точки класса $n > 1$ необходимо произвести, по меньшей мѣрѣ, $2n+1$ элементарныхъ операцій. Это докажется индуктивно. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ $n=2$. Такъ какъ точка 2-го класса есть пересѣченіе двухъ линій 1-го класса, то для полученія точки второго класса необходимо вычертить либо 2 прямыя 1-го класса (простота 6), либо прямую и окружность перваго класса (простота 7 или 6) или двѣ окружности перваго класса (простота 8, или 7, или 6, или 5). Такимъ образомъ, при $n=2$ число элементарныхъ операцій дѣйствительно не меньше, чѣмъ $5=2.2+1$. Точка класса $n+1$ есть пересѣченіе прямой или окружности класса n съ прямой или окружностью того же или низшаго класса. Допустивъ наше предложеніе для числа n, замѣтимъ, что для полученія прямой или окружности n-го класса 1) необходимо имѣть точку n-го класса, что, по допущенію, требуетъ, по меньшей мѣрѣ, $2n+1$ операцій, и 2) необходимо вычертить линію n-го класса, что требуетъ, по меньшей мѣрѣ, двухъ элементарныхъ операцій, такъ что для полученія точки $(n+1)$-го класса необходимо сдѣлать, по меньшей мѣрѣ, $2n+1+2=2(n+1)+1$ операцій. Положимъ теперь, что нѣкоторая задача рѣшена и рѣшеніе имѣетъ простоту S. Найдемъ наибольшее число ν, удовлетворяющее неравенству

$$2\nu+1 \leqq S.$$

Тогда

$$2(\nu+1)+1 > S.$$

Точка класса $\nu+1$ требуетъ $2\ (\nu+1)+1 > S$ элементарныхъ операцій. Отсюда слѣдуетъ, что въ составъ геометрографическаго рѣшенія не можетъ войти ни одна точка класса $\nu+1$ и потому для полученія геометрографическаго рѣшенія достаточно испытать точки первыхъ ν классовъ. Число этихъ точекъ конечно *).

Примѣчаніе. Коэффиціентъ простоты иногда можетъ быть пониженъ отъ введенія произвольныхъ точекъ. Въ этомъ случаѣ слѣдуетъ получить геометрографическое рѣшеніе безъ введенія произвольныхъ точекъ и затѣмъ опредѣлить, какія изъ данныхъ или построенныхъ точекъ могутъ быть замѣнены произвольными. Такъ, напримѣръ, безъ введенія произвольныхъ точекъ геометрографическое дѣленіе отрѣзка AB на 2 равныя части имѣетъ простоту 11. Если же замѣнить окружности $A(AB)$ и $B(AB)$ двумя окружностями произвольныхъ равныхъ радіусовъ, то простота будетъ 10.

---

*) Кажется, что до сихъ поръ еще не былъ указанъ ни одинъ общій методъ полученія геометрографическаго рѣшенія.

О биссектрисахъ треугольника.

(Краткое изложенiе этой статьи было сдѣлано въ засѣданiи Московскаго Математическаго Кружка 12 марта 1910 года).

Н. Извольскаго.

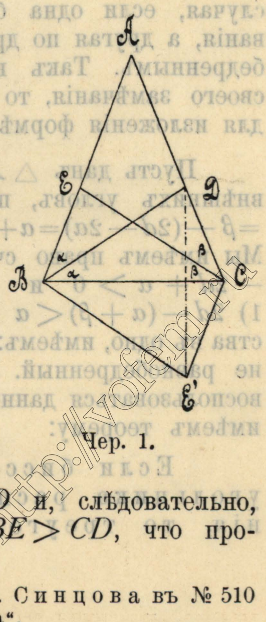
Въ засѣданiи Московскаго Математическаго Кружка 29 января 1910 г. Е. С. Томашевичъ сдѣлалъ сообщенiе, въ которомъ 1) далъ доказательство (двумя способами) теоремы: если биссектрисы двухъ внутреннихъ угловъ треугольника равны, то треугольникъ равнобедренный, 2) указалъ на возможность выясненiя, что у бо́льшаго изъ двухъ угловъ треугольника биссектриса меньше. Къ этому были присоединены еще соображенiя на случай, когда дано равенство биссектрисъ двухъ внѣшнихъ угловъ треугольника.

Мнѣ казалось, что можно тѣ же вопросы выяснить инымъ, по моему мнѣнiю, болѣе естественнымъ путемъ, основою котораго является нѣкоторое построенiе. Въ дальнѣйшемъ я предлагаю свои соображенiя по этимъ вопросамъ.

Въ сочиненiяхъ Я. Штейнера (J. Steiner) *) имѣется статья, посвященная этому вопросу; изложить здѣсь вкратцѣ содержанiе этого мемуара будетъ нелишнимъ.

I.

Штейнеръ разсматриваетъ сначала случай, когда дано равенство биссектрисъ внутреннихъ угловъ треугольника. Пусть въ $\triangle ABC$ (чер. 1) биссектриса BD равна биссектрисѣ CE; требуется доказать, что $\angle B (= 2\alpha) = \angle C (= 2\beta)$, или что $\alpha = \beta$. Допустимъ, что $\alpha > \beta$; тогда изъ $\triangle BDC$ и $\triangle BEC$, у которыхъ по 2 равныхъ стороны (BC — общая и $BD = CE$), имѣемъ: $CD > BE$. Переложимъ $\triangle BEC$ такъ, чтобы точка C треугольника BEC совпала съ точкою B треугольника BDC и обратно, и чтобы онъ расположился по другую сторону BC; пусть это положенiе есть $\triangle CE'B$. Тогда $\angle CBE' = \beta$. Легко найдемъ, что $\angle BDC = \angle A + \alpha$ и $\angle BEC = \angle A + \beta$, откуда $\angle BDC > \angle BEC$ или $\angle BDC > \angle BE'C$. Соединивъ D съ E', получимъ равнобедренный $\triangle BDE'$ ($BD = BE'$), откуда $\angle BDE' = \angle BE'D$ и, слѣдовательно, $\angle E'DC > \angle DE'C$, а потому $E'C > CD$, или $BE > CD$, что про-



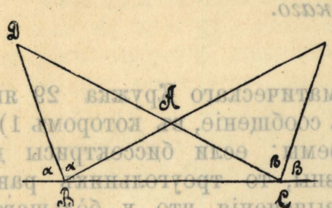
Чер. 1.

---

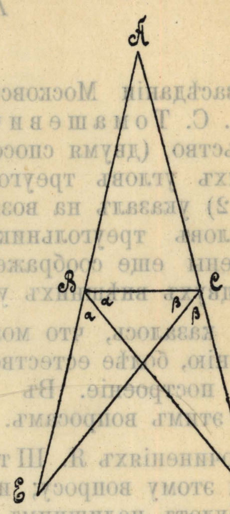
*) О сочиненiяхъ Я. Штейнера см. ст. проф. Д. Синцова въ № 510 и рецензiю прив.-доц. В. Кагана въ № 512 „Вѣстника“.

тиворѣчитъ полученному ранѣе соотношенію, что $CD > BE$. Остается принять, что $\alpha = \beta$.

Такой же пріемъ доказательства примѣнимъ и къ случаю, когда дано равенство биссектрисъ двухъ внѣшнихъ угловъ, если онѣ расположены по ту же сторону основанія, что и самъ треугольникъ, (чер. 2); но если биссектрисы расположены по другую сторону осно-



Чер. 2.



Чер. 3.

ванія (чер. 3), то предыдущій пріемъ непримѣнимъ, и Штейнеръ даетъ другой, болѣе сложный пріемъ, котораго здѣсь излагать не буду.

II.

Кромѣ того, Штейнеръ замѣчаетъ, что можно дать равенство биссектрисъ внѣшнихъ угловъ и для случая, если одна биссектриса расположена по одну сторону основанія, а другая по другую, но тогда треугольникъ не будетъ равнобедреннымъ. Такъ какъ Штейнеръ не доказываетъ послѣдняго своего замѣчанія, то здѣсь даю это доказательство въ наиболѣе легкой для изложенія формѣ.

Пусть данъ $\triangle ABC$ (чер. 4), BD и CE—биссектрисы двухъ его внѣшнихъ угловъ, при чемъ $BD = CE$. Тогда $\angle E = \beta - \angle B = \beta - (2d - 2\alpha) = \alpha + \beta - 2d + \alpha$ и $\angle D = 2d - \alpha - 2\beta = 2d - (\alpha + \beta) - \beta$. Мы имѣемъ право считать, что $\angle E > 0$ и $\angle D > 0$, или 1) $\alpha + \beta - 2d + \alpha > 0$ и 2) $2d - (\alpha + \beta) - \beta > 0$, откуда слѣдуетъ: 1) $2d - (\alpha + \beta) < \alpha$ и 2) $2d - (\alpha + \beta) > \beta$. Соединяя эти два неравенства въ одно, имѣемъ: $\beta < 2d - (\alpha + \beta) < \alpha$ или $\beta < \alpha$, т. е. $\triangle ABC$ не равнобедренный. Замѣтимъ, что въ доказательствѣ не пришлось воспользоваться даннымъ равенствомъ биссектрисъ и, слѣдовательно, имѣемъ теорему:

Если биссектрисы двухъ внѣшнихъ угловъ треугольника расположены по разныя стороны основанія, то треугольникъ не равнобедренный.

III.

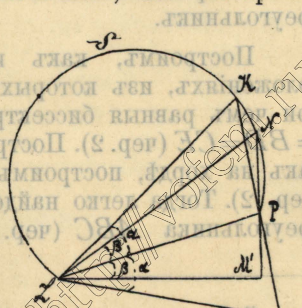
Перехожу теперь къ изложенію своихъ соображеній по поводу указанныхъ въ началѣ статьи вопросовъ. Сначала остановлюсь на случаѣ равенства биссектрисъ двухъ внутреннихъ угловъ треугольника.

Пусть намъ данъ $\triangle ABC$ (чер. 1), BD и CE его биссектрисы, при чемъ $BD = CE$. Построимъ вновь тотъ же самый треугольникъ, начиная съ его биссектрисы BD. Отложимъ $LP = BD$ (чер. 5). На отрѣзкѣ LP построимъ сегментъ, вмѣщающій $\angle A$, и построимъ при точкѣ L $\angle PLK = a$ и $\angle PLM = a$ (a есть половина угла B треугольника ABC — чер. 1). Тогда точка A треугольника ABC (чер. 1) попадетъ въ точку K (чер. 5), въ которой дуга сегмента пересѣкается съ прямой LK. Чтобы окончить построеніе нашего треугольника, надо соединить K съ P и продолжить прямую KP до пересѣченія съ LM въ точкѣ M. Тогда получимъ $\triangle KLM$, тожественный съ $\triangle ABC$.

Чер. 4.

Построимъ теперь тотъ же $\triangle ABC$ въ перевернутомъ видѣ, т. е. такъ, чтобы точка C этого треугольника попала въ точку L (чер. 5) и биссектриса CE (чер. 1) совпала съ LP (чер. 5); этого достигнуть можно, ибо $CE = BD = LP$. Построимъ затѣмъ при точкѣ L углы PLN и PLM', изъ которыхъ каждый равенъ половинѣ угла C треугольника ABC, т. е. каждый равенъ углу β. Если предположить, что $\beta < a$, то прямыя LN и LM' пойдутъ внутри $\angle KLM$.

Такъ какъ $\angle A$ этого перевернутаго треугольника остался тотъ же самый, то точка A должна попасть на пересѣченіе прямой LN съ дугою построеннаго ранѣе сегмента, вмѣщающаго $\angle A$; пусть эта точка будетъ N. Чтобы достроить $\triangle ACB$, надо соединить N съ P и продолжить NP до пересѣченія съ прямой LM' въ точкѣ M'. Важно обратить вниманіе на то, что точка M' помѣстится непремѣнно внутри $\triangle LKM$. Тогда получимъ $\triangle NLM'$, тожественный съ $\triangle ACB$.



Чер. 5.

Замѣтимъ еще, что въ данномъ треугольникѣ (чер. 1) $\angle B = 2\alpha < 2d - \angle A$, откуда $\alpha < d - \frac{A}{2}$. Это указываетъ, что точки L и K (чер. 5) расположатся непремѣнно по разныя стороны отъ середины S дуги $LSKP$ нашего сегмента*).

При выполненіи нашего построенія мы полагали, что $\alpha > \beta$ и получили 2 треугольника: $\triangle KLM$ и $\triangle NLM'$, тожественные съ однимъ и тѣмъ же (съ даннымъ); слѣдовательно, одинъ изъ нихъ, если его перевернуть, долженъ совмѣститься съ другимъ. Но можно найти признакъ, указывающій, что построенные 2 треугольника отнюдь не могутъ быть конгруэнтными. Въ самомъ дѣлѣ, точка N, въ силу предположенія, что $\beta < \alpha$, лежитъ ближе къ P, чѣмъ точка K. Поэтому площадь $\triangle LNP$ меньше площади $\triangle LKP$. Точка M', какъ уже было указано, должна попасть внутрь $\triangle LKM$; слѣдовательно, площадь $\triangle LM'P$ меньше площади $\triangle LMP$. Поэтому площадь $\triangle LNM'$ меньше площади LKM, а неравновеликіе треугольники не могутъ быть конгруэнтными. Слѣдовательно, сдѣланное при нашемъ построеніи предположеніе, что $\beta < \alpha$, не годится, и остается принять, что $\beta = \alpha$, и что, слѣдовательно, перевернутый $\triangle ABC$ совпадаетъ съ его прежнимъ положеніемъ, т. е. что $\triangle ABC$ равнобедренный.

Я считаю, что имѣю полное право пользоваться сравненіемъ площадей, понимая подъ этимъ именемъ ограниченную часть плоскости, такъ какъ положеніе, что, если 2 треугольника имѣютъ общее основаніе, но высота одного изъ нихъ меньше высоты другого, то площадь перваго треугольника меньше площади другого, можетъ быть установлено чисто геометрически, безъ измѣренія, безъ пропорціональности. Въ этомъ мнѣніи меня еще укрѣпляетъ дальнѣйшее развитіе того же вопроса.

IV.

Пусть теперь имѣемъ $\triangle ABC$ (чер. 2), при чемъ дано равенство биссектрисъ его двухъ внѣшнихъ угловъ, т. е. $BD = CE$, при условіи что онѣ располагаются съ той же стороны основанія, какъ и самъ треугольникъ.

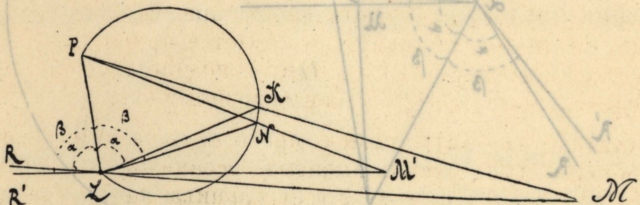
Построимъ, какъ и раньше, этотъ треугольникъ въ двухъ положеніяхъ, изъ которыхъ одно получается перевертываніемъ другого, при чемъ равныя биссектрисы совпадаютъ. Пусть отрѣзокъ LP (чер. 6) $= BD = CE$ (чер. 2). Построимъ $\angle PLR = \angle PLK = \alpha$ и на отрѣзкѣ LP, какъ на хордѣ, построимъ сегментъ, вмѣщающій $\angle DAB = \angle EAC$ (чер. 2). Тогда легко найдемъ точку K, въ которую попадетъ вершина A треугольника ABC (чер. 2), не перевернутаго. Чтобы докончить по-

---

*) Въ самомъ дѣлѣ, $\smile PKSL = 4d - 2A$; слѣдовательно, $\frac{1}{2} \smile PKLS = \smile PKS = 2d - A$, а $\angle PLS = d - \frac{A}{2}$. Но $\alpha < d - \frac{A}{2}$, т. е. сторона LK лежитъ внутри угла PLS.

строеніе $\triangle ABC$, надо продолжить PK и RL до пересѣченія съ M; тогда $\triangle KLM$ (чер. 6) тожествененъ съ $\triangle ABC$. Для построенія того же треугольника въ перевернутомъ видѣ, строимъ $\angle PLR' = \angle PLN = \beta$, при чемъ допустимъ, что $\beta > \alpha$. Тогда, окончивъ построеніе, получимъ $\triangle NLM'$, тожественный съ $\triangle ACB$. Отсюда заключаемъ, что $\triangle NLM'$, если его перевернуть, долженъ совмѣститься въ $\triangle KLM$. Но изъ построенія явствуетъ, что точки N и M' непремѣнно должны упасть внутрь $\triangle KLM$, а, слѣдовательно, $\triangle LNM'$ не равновеликъ $\triangle LKM$. Поэтому заключаемъ, что допущеніе $\beta > \alpha$ невѣрно; также нельзя положить $\beta < \alpha$, и, слѣдовательно, $\beta = \alpha$, т. е. $\triangle ABC$ (чер. 2) равнобедренный.

Здѣсь невозможность совмѣщенія $\triangle LNM'$ и $\triangle LKM$ прямо слѣдуетъ изъ того, что N и M' лежатъ внутри $\triangle LKM$. Но, по существу, здѣсь мы имѣемъ положеніе, совершенно сходное съ тѣмъ, какое было въ предыдущемъ изслѣдованіи; поэтому этотъ случай еще болѣе



Чер. 6.

укрѣпляетъ меня въ законности пользованіемъ идеей о неравновеликости двухъ треугольниковъ, имѣющихъ общее основаніе, но разныя высоты *).

V.

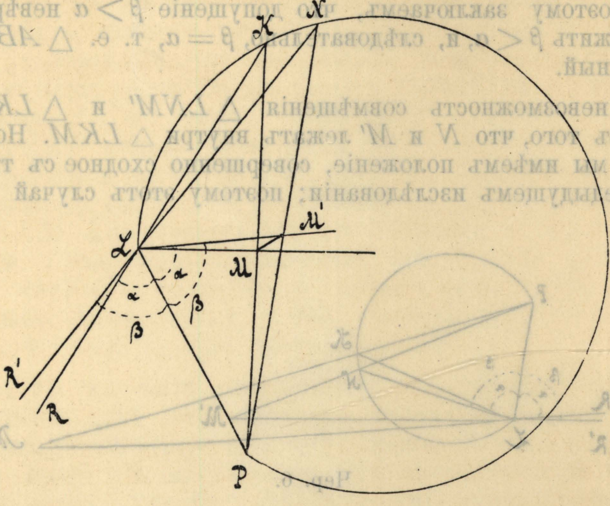
Наконецъ, разберемъ случай, когда дано равенство биссектрисъ внѣшнихъ угловъ, располагающихся такъ, какъ на чертежѣ 3, гдѣ $\triangle ABC$ данный и биссектрисы BD и CE равны между собою.

Строимъ LP (чер. 7) $= BD = CE$ (чер. 3); на отрѣзкѣ LP строимъ сегментъ, вмѣщающій $\angle A$, и строимъ $\angle PLR = PLM = \alpha$. Продолжая RL до пересѣченія съ дугою сегмента въ точкѣ K и соединивъ прямою точки K и P, получимъ точку M, гдѣ KP пересѣкается съ LM;

*) Мы не понимаемъ, почему авторъ сомнѣвается въ доказательной силѣ этихъ соображеній. Можно, конечно, поставить себѣ задачей найти такое доказательство предложенія, которое не содержало бы соображеній, относящихся къ теоріи площадей; и такія доказательства, конечно, существуютъ, какъ авторъ объ этомъ и самъ сообщаетъ въ началѣ. Но въ строгости или въ убѣдительности доказательство нисколько не теряетъ отъ того, что оно опирается на теорію площадей прямолинейныхъ фигуръ. Вѣдь пользуется же Евклидъ въ теоріи подобія такими же соображеніями, относящимися къ ученію о равновеликости прямолинейныхъ фигуръ.

Ред.

тогда $\triangle KLM$ (чер. 7) долженъ быть тожественнымъ съ $\triangle ABC$ (чер. 3). Затѣмъ, перевернувъ данный $\triangle ABC$ и совмѣстивъ CE съ LP, строимъ $\angle R'LP = \angle PLM' = \beta$ и, закончивъ построеніе, получимъ $\triangle NLM'$, тожественный съ $\triangle ACB$, — при выполненіи мы предполагаемъ, что $\beta > \alpha$. Сюда мнѣ не удалось примѣнить признака равновеликости, но мнѣ удалось найти другой признакъ, указывающій, что $\triangle KLM$ не можетъ быть тожественнымъ съ $\triangle NLM'$. Соединивъ точ-



Чер. 7.

ки M и M', получимъ на основаніи MM' два треугольника, изъ которыхъ одинъ $\triangle MLM'$ долженъ быть равнобедреннымъ, если $\triangle NLM'$ конгруэнтенъ съ $\triangle KLM$ (ибо сторона LM' должна совмѣститься со стороной LM при перевертываніи), а другой имѣетъ каждую изъ боковыхъ сторонъ, большую, чѣмъ этотъ равнобедренный треугольникъ. [MP на чер. 7 есть отрѣзокъ CD на чер. 3, LM на чер. 7 есть сторона BC на чер. 3, но $CD > BC$, ибо $\alpha > \angle D$ ($\alpha = \angle D + \angle A$); слѣдовательно, $MP > LM$; также найдемъ, что $M'P > LM'$]. Кромѣ того, уголъ $M'LM = \angle M'PM$, такъ какъ $\angle M'LM = \beta - \alpha = \angle RLR' = \angle KLN = \angle KPN = \angle M'PM$. Но легко сообразить (чер. 8), что на одномъ и томъ же основаніи MM' нельзя построить 2 такихъ треугольника, чтобы углы, противолежащіе общему основанію, были равны, чтобы одинъ изъ нихъ былъ равнобедренный и

Чер. 8.

чтобы каждая изъ боковыхъ сторонъ другого была больше боковой стороны перваго.

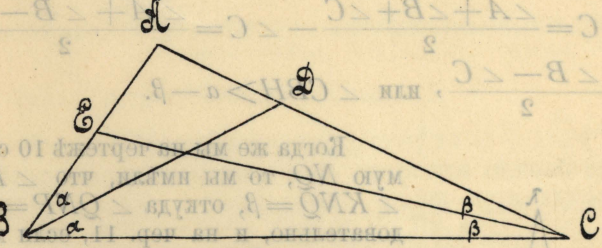
Отсюда заключаемъ о невѣрности допущенія $\beta > \alpha$ и приходимъ къ необходимости принять, что $\beta = \alpha$, и, слѣдовательно, $\triangle ABC$ равнобедренный *).

VI.

Подобный же методъ построенія особенно ясно даетъ возможность доказать теорему:

У меньшаго изъ двухъ внутреннихъ угловъ треугольника биссектриса больше.

Пусть имѣемъ $\triangle ABC$ (чер. 9), въ которомъ $\angle B > \angle C$; пусть BD и CE будутъ биссектрисы этихъ угловъ и $\alpha = \frac{\angle B}{2}$, $\beta = \frac{\angle C}{2}$. Воспро-



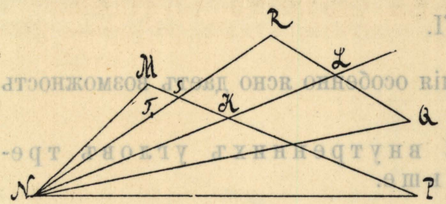
Чер. 9.

изведемъ вновь $\triangle ABC$, но только съ биссектрисою большаго изъ двухъ угловъ. Пусть MNP (чер. 10) есть новое положеніе этого треугольника и $\angle N = \angle B$, а NK его биссектриса ($NK = BD$). Перевернемъ данный $\triangle ABC$ и построимъ его наложеннымъ на $\triangle MNP$ такъ, чтобы биссектриса CE пошла по NK. Такъ какъ $\angle B > \angle C$, то $\alpha > \beta$, и мы поэтому должны строить стороны CB и CA идущими внутри угловъ KNP и KNM. Сначала будемъ для простоты предполагать, что высота, опущенная изъ B на AC, идетъ такъ, что пересѣчетъ AC гдѣ-либо по другую, сравнительно съ точкою C, сторону отъ точки D; тогда $\angle BDC$ тупой, или $\angle NKP$ (чер. 10) тупой. Такъ какъ сторона NQ есть новое положеніе стороны BC, то $NQ = NP$, и нетрудно сообразить, при сдѣланномъ допущеніи относительно высоты, что въ виду этого равенства точка Q необходимо должна попасть внѣ $\triangle MNP$ **). Теперь, гдѣ расположится точка A? Она не можетъ попасть ни на MP, ни внутри $\triangle MNP$, такъ какъ, предположивъ, напри-

*) Замѣтимъ, что признакъ, разсмотрѣнный здѣсь, примѣнимъ и къ предыдущему случаю расположенія биссектрисъ внѣшнихъ угловъ, но не примѣнимъ къ случаю биссектрисъ внутреннихъ угловъ.

**) Ибо $NQ = NP$, а отрѣзки, соединяющіе точку N съ внутренними точками отрѣзка PK, какъ наклонныя, менѣе удаленныя отъ основанія перпендикуляра, короче, чѣмъ NP.

мѣръ, что она попадетъ въ S, мы найдемъ, что $\angle NSP$, а, слѣдовательно, и $\angle NSQ$ непремѣнно больше $\angle M$, а между тѣмъ это долженъ быть одинъ и тотъ же уголъ. Тѣмъ болѣе точка A не можетъ попасть и внутрь $\triangle MNP$, напримѣръ, въ точку T, ибо тогда $\angle NTQ$, очевидно, больше $\angle M$. Поэтому точка A должна попасть куда-либо въ точку R, расположенную на прямой NR гдѣ-либо внѣ $\triangle MNP$, и тогда сторона AB займетъ положеніе RQ; биссектриса CE окажется совмѣщенною съ отрѣзкомъ NL, откуда сразу видимъ, что $NL > NK$ или $CE > BD$.



Чер. 10.

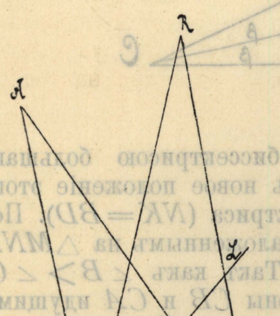
Если высота BH (чер. 11) идетъ между биссектрисою BD и стороною BC, то ничего новаго здѣсь не будетъ. Тогда $\angle CBH =$

$$= 90^0 - \angle C = \frac{\angle A + \angle B + \angle C}{2} - \angle C = \frac{\angle A + \angle B - \angle C}{2}, \text{ или}$$

$$\angle CBH > \frac{\angle B - \angle C}{2}, \text{ или } \angle CBH > \alpha - \beta.$$

Когда же мы на чертежѣ 10 строили прямую NQ, то мы имѣли, что $\angle KNP = \alpha$ и $\angle KNQ = \beta$, откуда $\angle QNP = \alpha - \beta$. Слѣдовательно, и на чер. 11, если мы перевернемъ $\triangle ABC$ и помѣстимъ его такъ, чтобы точка C перевернутаго попала въ точку B начальнаго, и чтобы биссектрисы угловъ B и C пошли другъ по другу, то новое положеніе BQ стороны BC должно расположиться такъ, чтобы имѣло мѣсто равенство: $\angle QBC = \dfrac{\angle B - \angle C}{2} = \alpha - \beta$.

Но такъ какъ $\angle CBH > \alpha - \beta$, то отсюда заключаемъ, что BQ расположится по ту же сторону отъ BH, какъ и BC, а для равенства $BQ = BC$ необходимо, чтобы точка Q помѣстилась внѣ $\triangle ABC$, и т. д.



Чер. 11.

Замѣтимъ, что $\angle C$ всегда острый, ибо мы предполагаемъ, что $\angle B > \angle C$ и слѣдовательно, не надо разбирать случая, когда $\angle C$ тупой.

Определеніе таксы процентовъ долгосрочныхъ займовъ, погашаемыхъ одинаковыми срочными уплатами.

С. Новосильцева.

Въ учебникахъ элементарной алгебры обыкновенно выводится формула

$$a = \frac{Aq^t(q-1)}{q^t-1}, \tag{1}$$

гдѣ $q = 1 + \frac{p}{100}$, A — полученная въ заемъ сумма, a — срочная уплата, t — число лѣтъ (періодовъ) погашенія.

Уравненіе (1) по отношенію къ q степени $(t+1)$-ой и въ общемъ видѣ неразрѣшимо, а между тѣмъ на практикѣ, напримѣръ, при разсчетѣ государственныхъ займовъ, очень часто приходится опредѣлять таксу процентовъ при данныхъ t, a и A. Въ виду этого существуетъ цѣлая серія формулъ, дающихъ приближенное рѣшеніе настоящаго вопроса съ большой степенью точности.

Мы дадимъ здѣсь выводъ формулы Бэли (Baily) и, попутно, формулы Галлея.

Раздѣлимъ числителя и знаменателя второй части формулы (1) на q^t и положимъ $\frac{p}{100} = r$; слѣдовательно, $q = 1 + r$ и $q - 1 = r$.

Тогда

$$a = \frac{A(q-1)}{1-q^{-t}} = \frac{Ar}{1-(1+r)^{-t}},$$

или

$$\frac{A}{a} = \frac{1-(1+r)^{-t}}{r}. \tag{2}$$

---

*) Во всѣхъ практическихъ приложеніяхъ $p < 100$ и, слѣдовательно, $r < 1$. Обыкновенно p даже < 10 и $r < \frac{1}{10}$.

По биному Ньютона*)

$$(1+r)^{-t}=1-tr+\frac{-t(-t-1)}{1.2}r^2+\frac{-t(-t-1)(-t-2)}{1.2.3}r^3+\cdots,$$

или

$$(1+r)^{-t}=1-tr+\frac{t(t+1)}{1.2}r^2-\frac{t(t+1)(t+2)}{1.2.3}r^3+\cdots,$$

а

$$1-(1+r)^{-t}=tr-\frac{t(t+1)}{1.2}r^2+\frac{t(t+1)(t+2)}{1.2.3}r^3-\cdots$$

Слѣдовательно, на основанiи (2),

$$\frac{A}{a}=t-\frac{t(t+1)}{2}r+\frac{t(t+1)(t+2)}{6}r^2-\ldots,$$

или

$$\frac{A}{at}=1-\frac{t+1}{2}r+\frac{(t+1)(t+2)}{6}r^2-\ldots \tag{3}$$

Если бы во второй части равенства (3) пренебречь членами, содержащими r въ третьей степени и выше, то получилось бы для r квадратное уравненiе, изъ котораго и можно было бы найти приближенное значенiе для r. Однако, такой прiемъ не далъ бы для r значенiя, достаточно близкаго къ дѣйствительному, такъ какъ при r^3, r^4 и т. д. въ равенствѣ (3) стоятъ коэффицiенты, имѣющiе большую величину. Чтобы уменьшить значенiе этихъ коэффицiентовъ, представимъ равенство (3) въ видѣ

$$\frac{A}{at}=1-S, \tag{4}$$

гдѣ $S=\frac{t+1}{2}r-\frac{(t+1)(t+2)}{6}r^2+\ldots$, и возведемъ обѣ части равенства (4) въ степень $-\frac{2}{t+1}\cdot$ Получимъ:

$$\left(\frac{A}{at}\right)^{-\frac{2}{t+1}}=(1-S)^{-\frac{2}{t+1}}, \tag{5}$$

Такъ какъ at представляетъ собой сумму уплатъ, сдѣланныхъ для погашенiя долга A вмѣстѣ съ процентами, то $at>A$, а потому $(1-S)$ есть правильная дробь, а, слѣдовательно, и S — правильная дробь. На основанiи этого замѣчанiя мы можемъ разложить вторую часть равенства (5) по биному Ньютона и получимъ:

$$\left(\frac{A}{at}\right)^{-\frac{2}{t+1}} = 1 + \frac{2}{t+1} S + \frac{-\frac{2}{t+1}\left(-\frac{2}{t+1}-1\right)}{1.2} S^2 - \ldots,$$

или

$$\left(\frac{at}{A}\right)^{\frac{2}{t+1}} = 1 + \frac{2}{t+1} S + \frac{t+3}{(t+1)^2} S^2 + \ldots \tag{6}$$

Подставимъ сюда значенie S, ограничиваясь вторыми степенями r. Вычислимъ каждый членъ второй части равенства (6) отдѣльно.

$$\frac{2}{t+1} S = \frac{2}{t+1}\left[\frac{t+1}{2} r - \frac{(t+1)(t+2)}{6} r^2\right] = r - \frac{t+2}{3} r^2;$$

при вычисленiи S^2 придется взять только квадратъ перваго члена $\frac{t+1}{2} r$, такъ какъ квадратъ второго будетъ уже содержать r^4, а удвоенныя произведенiя каждаго члена на слѣдующiе за нимъ будутъ содержать r въ третьей степени и выше. Такимъ образомъ, ограничиваясь второй степенью r, получимъ:

$$\frac{t+3}{(t+1)^2} S^2 = \frac{t+3}{(t+1)^2} \cdot \frac{(t+1)^2}{4} r^2 = \frac{t+3}{4} r^2.$$

Слѣдовательно,

$$\left(\frac{at}{A}\right)^{\frac{2}{t+1}} = 1 + r - \frac{t+2}{3} r^2 + \frac{t+3}{4} r^2,$$

или

$$\left(\frac{at}{A}\right)^{\frac{2}{t+1}} = 1 + r - \frac{t-1}{12} r^2. \tag{7}$$

Если бы повести вычисленiя такъ, чтобы получить въ равенствѣ (7) и третью степень r, то надо было бы для S взять значенie $\frac{t+1}{2} r - \frac{(t+1)(t+2)}{6} r^2 + \frac{(t+1)(t+2)(t+3)}{24} r^3$ и во второй части равенства (6) взять членъ съ S^3, при чемъ, вычисляя S^2, пришлось бы взять, кромѣ квадрата перваго члена, еще и удвоенное произведенie перваго члена на второй, а, вычисляя S^3, взять только кубъ перваго члена. Выполнивъ всѣ эти вычисленiя, мы получили бы коэффицiентъ при r^3

$$\frac{(t+2)(t+3)}{12} - \frac{(t+2)(t+3)}{6} + \frac{(t+2)(t+3)}{12},$$

что равно нулю. Слѣдовательно, равенство (7) осталось бы безъ измѣненія.

Такимъ образомъ, для опредѣленія r мы получили квадратное уравненіе (7), изъ котораго и имѣемъ:

$$r = \frac{6}{t-1} - \sqrt{\frac{36}{(t-1)^2} - \frac{12}{t-1}\left[\left(\frac{at}{A}\right)^{\frac{2}{t+1}} - 1\right]}. \qquad (8)$$

Беремъ передъ радикаломъ только —, такъ какъ при знакѣ + мы получили бы для r значеніе, не соотвѣтствующее дѣйствительности. Въ самомъ дѣлѣ, взявъ радикалъ съ + и полагая, напримѣръ, $t = 7$, мы получили бы $r > \frac{6}{7-1}$, т. е. $r > 1$; другими словами: оказалось бы, что $p > 100$ при какихъ угодно a и A.

Формула (8) была выведена Галлеемъ. Для практическихъ приложеній она не вполнѣ удобна, такъ какъ подъ радикаломъ довольно сложное выраженіе.

Пользуясь уравненіемъ (7), можно вывести для r формулу, болѣе удобную для вычисленій.

Перенесемъ въ уравненіи (7) единицу въ первую часть и обозначимъ $\left(\frac{at}{A}\right)^{\frac{2}{t+1}} - 1$ черезъ h; тогда уравненіе (7) представится въ видѣ:

$$h = r - \frac{t-1}{12} r^2,$$

или

$$r[12 - (t-1)r] = 12h,$$

откуда

$$r = \frac{12h}{12 - (t-1)r}. \qquad (9)$$

Такъ какъ r небольшая дробь, то мы можемъ принять, какъ первое приближеніе, что $r = 0$. Тогда изъ (9) получимъ:

$$r = \frac{12h}{12} = h.$$

Подставляя полученное значеніе для r во вторую часть равенства (9), получимъ:

$$r = \frac{12h}{12 - (t-1)h},$$

а, подставляя это выраженіе во вторую часть равенства (9), получимъ:

$$r = \frac{12h}{12 - \frac{12(t-1)h}{12-(t-1)h}} = \frac{12h\,[12-(t-1)\,h]}{12\,[12-(t-1)\,h]-12\,(t-1)\,h} =$$

$$= \frac{h\,[12-(t-1)\,h]}{12-(t-1)\,h-(t-1)\,h},$$

или

$$r = \frac{12-(t-1)\,h}{12-2(t-1)\,h}\,h, \tag{10}$$

гдѣ $h = \left(\frac{at}{A}\right)^{\frac{2}{t+1}} - 1.$

Равенство (10) и представляетъ собой формулу Бэли, дающую результатъ, очень близкій къ дѣйствительности для t, не превышающихъ 50. Замѣтимъ, что по формулѣ Бэли всегда получается r нѣсколько больше дѣйствительнаго.

Примѣръ. $A = 1178{,}54$; $a = 200$; $n = 7$.

$$h = \left(\frac{200\,.\,7}{1178{,}54}\right)^{\frac{2}{7+1}} - 1 = \left(\frac{1400}{1178{,}54}\right)^{\frac{1}{4}} - 1.$$

$$\begin{aligned} \log 1400 &= 3\cdot1461280 \\ \log 1178{,}54 &= 3\cdot0713443 \\ \hline &\ 0\cdot0747837 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4}\log\frac{1400}{1178{,}54} = 0\cdot0186959;\quad \left(\frac{1400}{1178{,}54}\right) = 1{,}043989$$

$$h = \frac{1}{0{,}043989}$$

$$(t-1)\,h = 0{,}263934;\quad 12 - (t-1)\,h = 11{,}736066,$$

$$2\,(t-1)\,h = 0{,}527868;\quad 12 - 2\,(t-1)\,h = 11{,}472132.$$

Слѣдовательно,

$$r = \frac{11{,}736066}{11{,}472132}\cdot 0{,}043989 = 0{,}045001,$$

а потому $p = 4{,}5001$. Дѣйствительная же такса $4\frac{1}{2}\%$.

О четырехугольникѣ, имѣющемъ при данныхъ сторонахъ наибольшую площадь.

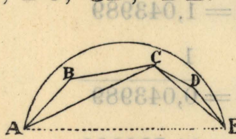
Сообщено въ засѣданіи Московскаго Математическаго Кружка проф. *Б. К. Млодзѣевскимъ* *).

Доказательство теоремы о четырехугольникѣ, имѣющемъ при данныхъ сторонахъ наибольшую площадь, которое было мною сообщено въ засѣданіи Московскаго Математическаго Кружка, я нашелъ въ старомъ, очень хорошемъ учебникѣ геометріи (нѣмецкомъ) „Heis und Eschweiler“. Самая идея доказательства стоитъ въ близкой связи съ методами, примѣненными Штейнеромъ въ его работахъ о геометрическихъ maxima и minima (Werke, Bd. II); но въ работахъ Штейнера я не нашелъ непосредственнаго выраженія этой идеи. Доказательство, находящееся въ книгѣ „Heis und Eschweiler“, слагается изъ слѣдующихъ предложеній.

I. Если въ треугольникѣ даны двѣ стороны, то его площадь будетъ наибольшею въ томъ случаѣ, когда уголъ, заключенный между данными сторонами, прямой.

II. Если въ многоугольникѣ даны длины всѣхъ сторонъ, кромѣ одной, то площадь многоугольника будетъ наибольшею, если въ немъ нѣтъ входящихъ угловъ и если около него можно описать окружность, діаметромъ котораго служитъ послѣдняя сторона.

Пусть въ многоугольникѣ $ABCDE$ (чер. 1) даны стороны AB, BC, CD, DE. Что для наибольшаго значенія площади необходимо отсутствіе входящихъ угловъ — очевидно. Положимъ теперь, что окружность, построенная на AE какъ на діаметрѣ, не проходитъ черезъ всѣ вершины B, C, D, и докажемъ, что при этомъ площадь многоугольника не можетъ быть maximum. Пусть будетъ C одна изъ вершинъ, не лежащихъ на упомянутой окружности. Тогда уголъ ACE не равенъ прямому. Замѣнимъ теперь треугольникъ ACE другимъ съ тѣми же сторонами AC и CE, но съ прямымъ угломъ при C и приложимъ къ этому треугольнику прежніе фигуры ABC и CDE. Мы получимъ новый многоугольникъ съ прежними сторонами AB, BC, CD, DE, но съ большею площадью. Въ самомъ дѣлѣ, при нашемъ преобразованіи часть площади ACE увеличилась по теоремѣ I, а остальныя части не измѣнились. Такимъ образомъ, если около многоугольника нельзя



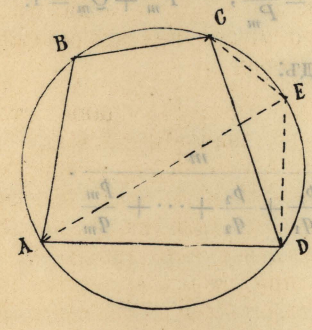
Чер. 1.

*) Любезно прислано проф. Б. К. Млодзѣевскимъ по просьбѣ редактора.

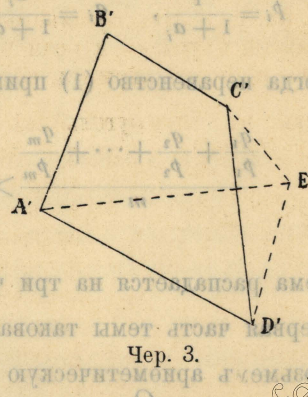
описать окружности, имѣющей діаметромъ не данную сторону, то площадь его можетъ быть увеличена, и потому не можетъ быть maximum. А такъ какъ при данныхъ условіяхъ площадь не можетъ расти безгранично, то этотъ maximum навѣрное существуетъ и можетъ принадлежать только многоугольнику, удовлетворяющему условіямъ теоремы. Вмѣстѣ съ тѣмъ очевидно, что двухъ такихъ многоугольниковъ быть не можетъ, ибо при данныхъ хордахъ есть только одна окружность, въ которой сумма дугъ, стягиваемыхъ этими хордами, равна полуокружности.

III. Изъ всѣхъ четырехугольниковъ съ данными длинами сторонъ наибольшую площадь имѣетъ тотъ, около котораго можно описать окружность.

Пусть будетъ $ABCD$ (чер. 2) четырехугольникъ, вписанный въ кругъ; докажемъ, что его площадь больше площади всякаго другого четырехугольника $A'B'C'D'$ (чер. 3) съ тѣми же длинами сторонъ. Проведемъ діаметръ AE и соединимъ его конецъ E съ двумя сосѣдними вершинами C, D; Построимъ затѣмъ на $C'D'$ треугольникъ $C'D'E'$, равный треугольнику CDE, и соединимъ A' съ E'. Такъ какъ многоугольники $ABCE$ и ADE вписаны въ окружность, діаметромъ которой служитъ AE, то, по теоремѣ II, площади ихъ соотвѣтственно больше площадей многоугольниковъ $A'B'C'E'$ и $A'D'E'$, стороны которыхъ, кромѣ $A'E'$, равны соотвѣтственнымъ сторонамъ первыхъ многоугольниковъ. Такимъ образомъ, площадь многоугольника $ABCED$ больше площади



Чер. 2.



Чер. 3.

многоугольника $A'B'C'E'D'$. Отсюда, отнимая площади равныхъ треугольниковъ CDE и $C'D'E'$ получимъ, что площадь четырехугольника $ABCD$ больше площади четырехугольника $A'B'C'D'$, что и требовалось доказать.

Очевидно, что послѣдняя теорема можетъ быть распространена на многоугольники съ любымъ числомъ сторонъ.

Тема для учащихся № 1.

Общія формы чиселъ, заключенныхъ между ариѳметической и гармонической срединами.

Директора Урюпинскаго реальнаго училища *П. Флорова*.

Дано m положительныхъ чиселъ

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m .$$

Ихъ ариѳметическая средина есть отношеніе ихъ суммы къ ихъ числу. Ихъ гармоническая средина есть число, обратное ариѳметической срединѣ чиселъ, обратныхъ даннымъ.

Задача заключается въ опредѣленіи x по неравенству

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m} > x > \frac{m}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_m}}. \tag{1}$$

Введемъ обозначенія

$$p_i=\frac{1}{1+a_i},\qquad q_i=\frac{a_i}{1+a_i},\qquad x=\frac{Q_m}{P_m},\qquad P_m+Q_m=1.$$

Тогда неравенство (1) приметъ видъ:

$$\frac{\frac{q_1}{p_1}+\frac{q_2}{p_2}+\cdots+\frac{q_m}{p_m}}{m} > \frac{Q_m}{P_m} > \frac{m}{\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}+\cdots+\frac{p_m}{q_m}}.$$

Тема распадается на три части.

Первая часть темы такова:

Возьмемъ ариѳметическую и гармоническую средины порядка k, и пусть отношеніе $\frac{Q_k}{P_k}$ есть число, удовлетворяющее условію

$$\frac{\frac{q_1}{p_1}+\frac{q_2}{p_2}+\cdots+\frac{q_k}{p_k}}{k} > \frac{Q_k}{P_k} > \frac{k}{\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}+\cdots+\frac{p_k}{q_k}}.$$

Показать, что по числамъ порядка k числа порядка m найдутся посредствомъ слѣдующихъ формъ:

Форма I.

$$\frac{Q_m}{P_m}=\frac{k\dfrac{Q_k}{P_k}+\dfrac{q_{k+1}}{p_{k+1}}+\dfrac{q_{k+2}}{p_{k+2}}+\cdots+\dfrac{q_m}{p_m}}{m}.$$

Форма II.

$$\frac{Q_m}{P_m}=\frac{m}{k\dfrac{P_k}{Q_k}+\dfrac{p_{k+1}}{q_{k+1}}+\dfrac{p_{k+2}}{q_{k+2}}+\cdots+\dfrac{p_m}{q_m}}.$$

Форма III.

$$\frac{Q_m}{P_m}=\sqrt[m]{\frac{Q_k^k\ q_{k+1}\ q_{k+2}\cdots q_m}{P_k^k\ p_{k+1}\ p_{k+2}\cdots p_m}}.$$

Форма IV.

$$\frac{Q_m}{P_m}=\frac{kQ_k+q_{k+1}+q_{k+2}+\cdots+q_m}{kP_k+p_{k+1}+p_{k+2}+\cdots+p_m}.$$

Буква k имѣетъ любое изъ значеній:

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1.$$

Въ заключеніе вывести формулу:

$$\frac{Q_{k+1}}{P_{k+1}}=\frac{\dfrac{k}{P_k}+\dfrac{1}{p_{k+1}}}{\dfrac{k}{Q_k}+\dfrac{1}{q_{k+1}}},$$

строй которой не даетъ, впрочемъ, возможности выразить непосредственно $\dfrac{Q_m}{P_m}$ черезъ Q_k и P_k.

Въ частности показать, что

$$\frac{Q_m}{P_m}=\frac{\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}+\cdots+\dfrac{1}{p_m}}{\dfrac{1}{q_1}+\dfrac{1}{q_2}+\cdots+\dfrac{1}{q_m}}.$$

Вторая часть темы, требующая знанія теоремы Ролля, заключается въ доказательствѣ неравенства:

$$\frac{\dfrac{q_1}{p_1}+\dfrac{q_2}{p_2}+\cdots+\dfrac{q_m}{p_m}}{m}>\frac{m-k}{k+1}\cdot\frac{A_k}{A_{k+1}}>\frac{m}{\dfrac{p_1}{q_1}+\dfrac{p_2}{q_2}+\cdots+\dfrac{p_m}{q_m}},$$

гдѣ k имѣетъ любое изъ значеній

$$k = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$$

а A_k есть коэффиціентъ при x^k въ разложеніи произведенія

$$(p_1 x + q_1)(p_2 x + q_2) \cdots (p_m x + q_m)$$

по степенямъ x.

Третья часть темы заключается въ доказательствѣ того, что, начиная съ $m = 2$, число общихъ формъ чиселъ, заключенныхъ между ариѳметической и гармонической срединами, безконечно велико. Построеніе этого доказательства можно основать на неравенствѣ

$$1 - \frac{m}{\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \cdots + \frac{1}{q_m}} > P_m > \frac{m}{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_m}}.$$

Въ виду трудности предлагаемой темы къ разсмотрѣнію могутъ быть приняты работы, въ которыхъ будетъ исполнена какая-либо одна изъ трехъ частей темы.

Было бы желательно, чтобы кому-либо удалось вторую часть темы исполнить безъ помощи теоремы Ролля.

Къ выполненію настоящей работы приглашаются учащіеся въ среднихъ и высшихъ учебныхъ заведеніяхъ. Работы должны быть представлены въ редакцію не позже 1 декабря 1910 г.

Отъ Казанскаго Физико-Математическаго Общества.

Казанское Физико-Математическое Общество имѣетъ честь сообщить, что оно располагаетъ на 1912 годъ двумя преміями имени Н. И. Лобачевскаго, по 500 рублей каждая.

Одна изъ премій присуждается за сочиненія, относящіяся къ неевклидовой геометріи.

Къ конкурсу на эту премію допускаются сочиненія, напечатанныя на русскомъ, французскомъ, нѣмецкомъ, англійскомъ, италіанскомъ и латинскомъ языкахъ, присланныя Физико-Математическому Обществу ихъ авторами и опубликованныя въ теченіе шести лѣтъ, предшествующихъ присужденію преміи.

Премія ни въ какомъ случаѣ не раздѣляется между авторами двухъ или нѣсколькихъ сочиненій. Въ случаѣ представленія работъ равнаго достоинства премія присуждается по жребію.

На соисканіе второй преміи, къ которому допускаются сочиненія печатныя или рукописи, Общество назначило слѣдующую тему:

„Изученіе общихъ интеграловъ уравненій Painlevé (дифференціальныя уравненія второго порядка, первой степени, общій интегралъ которыхъ имѣетъ неподвижныя критическія точки)“. Желательно подробное изученіе одного изъ типовъ этихъ уравненій.

Литература. Painlevé. C. R. de l'Académie des Sciences de Paris, T. CXXVI; Bulletin de la Société Mathém. de France, 1900 г. Gambier. Acta Mathematica, 1909 г.

Преміи будутъ присуждены 4 ноября (нов. ст.) 1912 года. Сочиненія, предназначаемыя на конкурсъ, должны быть доставлены въ Физико-Математическое Общество до 4 ноября (нов. ст.) 1911 года.

Предсѣдатель Общества *Д. Зейлигеръ*.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей приватъ-доцента **Е. Л. Буницкаго.**

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 312 (5 сер.). Черезъ вершины треугольника ABC проведены внѣшнія биссектрисы, которыя, пересѣкаясь, образуютъ треугольникъ $A_1 B_1 C_1$. Черезъ вершины треугольника $A_1 B_1 C_1$ опять проведены его внѣшнія биссектрисы, образующія треугольникъ $A_2 B_2 C_2$. Далѣе строятъ послѣдовательно аналогичнымъ образомъ треугольники $A_3 B_3 C_3$, $A_4 B_4 C_4$ и т. д. Доказать, что фигура $A_n B_n C_n$, при безконечномъ возрастаніи n, стремится по формѣ своей къ равностороннему треугольнику (т. е. — что каждый изъ угловъ треугольника $A_n B_n C_n$ стремится при $n = \infty$ къ предѣлу $\frac{\pi}{3}$).

Д. Гофманъ (Варшава).

№ 313 (5 сер.). Доказать, что отношеніе объемовъ шара и описаннаго около него усѣченнаго конуса равно отношенію ихъ поверхностей.

В. Богомоловъ. (Шацкъ).

№ 314 (5 сер.). На основаніи ABC данной пирамиды $SABC$ найти (внутри его) точку M такъ, чтобы произведеніе перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ M на три остальныя грани пирамиды, достигало maximum'а.

Б. Двойринъ (Одесса).

№ 315 (5 сер.). Найти необходимое и достаточное условіе, которому должны удовлетворять коэффиціенты уравненія

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

для того, чтобы лѣвая его часть могла быть представлена въ видѣ

$$(x^2+m)(x^2+nx+p).$$

С. Адамовичъ (Варшава).

№ 316 (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$y^3+2py^2+(p^2+2)y+2p=0.$$

В. Тюнинъ (Уфа).

№ 317 (5 сер.). Найти истинное значеніе выраженія

$$\frac{x^2\cos x}{\cos x-1}$$

при $x=0$.

А. Д. (Лодзь).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 223 (5 сер.). *Пусть* O *есть центръ круга вписаннаго въ треугольникъ* ABC. *На сторонахъ* BC *и* AC *беремъ соотвѣтственно точки* K *и* M *такъ, чтобы выполнялись равенства*

$$BK\,.\,AB=BO^2,\quad AM\,.\,AB=AO^2.$$

Доказать, что точки K, O *и* M *лежатъ на одной прямой.*

Записавъ равенство $BK\,.\,AB=BO^2$ въ видѣ $\frac{BK}{BO}=\frac{BO}{AB}$ и принявъ во вниманіе, что, по свойству центра круга вписаннаго, углы OBK и ABO равны, убѣждаемся въ подобіи треугольниковъ OBK и AOB и выводимъ отсюда равенство

$$\angle BOK=\angle OAB. \tag{1}$$

Подобнымъ же образомъ, принимая во вниманіе равенство $AM\,.\,AB=AO^2$, находимъ, что треугольники OAM и BAO также подобны, и выводимъ отсюда, что

$$\angle AOM=\angle ABO. \tag{2}$$

Сумма угловъ OAB, AOB и ABO треугольника AOB равна π, а потому [см. (1), (2)]

$$\angle AOM+\angle AOK=\angle AOM+\angle AOB+\angle BOK=$$
$$=\angle ABO+\angle AOB+\angle OAB=\pi,$$

откуда вытекаетъ, что MO есть продолженіе OK, т. е. точки K, O и M лежатъ на одной прямой.

М. Добровольскій (Сердобскъ); *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *В. Моргулевъ* (Одесса); *Н. Ноwsерhеапz* (Владикавказъ); *И. Чемисовъ* (Никольскъ-Уссурійскій); *П. Безчеревныхъ* (Козловъ); *Нюта Г.* (Нижній-Новгородъ).

№ 226 (5 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$\sin^3 x - 4\sin^2 x \cos x + 5 \sin x \cos^2 x - 2 \cos^3 x = 0.$$

Представивъ данное уравненіе послѣдовательно въ видѣ:

$$(\sin^3 x - 2 \sin^2 x \cos x + \cos^2 x \sin x) - (2 \sin^2 x \cos x - 4 \cos^2 x \sin x + 2 \cos^3 x) =$$

$$= \sin x (\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x) - 2 \cos x (\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x) =$$

$$= (\sin x - 2 \cos x)(\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x) =$$

$$= (\sin x - 2 \cos x)(\sin x - \cos x)^2 = 0,$$

мы видимъ, что оно распадается на два уравненія:

$$\sin x - 2 \cos x = 0, \quad \sin x - \cos x = 0, \quad \text{откуда} \quad \operatorname{tg} x = 2 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} x = 1.$$

Такимъ образомъ, корни даннаго уравненія суть

$$x_1 = \operatorname{arctg} 2 + k\pi, \quad x_2 = \frac{\pi}{4} + k\pi = \frac{\pi}{4}(4k + 1),$$

гдѣ k — произвольное цѣлое число и гдѣ подъ $\operatorname{arctg} 2$ достаточно подразумѣвать наименьшій положительный уголъ a, удовлетворяющій равенству $\operatorname{tg} a = 2$

М. Добровольскій (Сердобскъ); *И. Коровицкій* (Аккерманъ); *В. Богомоловъ* (Шацкъ); *Б. Двойринъ* (Одесса); *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *С. Розенблатъ* (Балта); *А. Фельдманъ* (Одесса); *В. Моргулевъ* (Одесса); *Н. Ноwsерhеапz* (Владикавказъ); *П. Прозоровскій* (Тамбовъ); *Н. Мамуловъ* (Тифлисъ); *А. Радевъ* (Ботево, Болгарія); *П Безчеревныхъ* (Козловъ); *С. Каменецкій* (Весьегонскъ); *В. Колодій* (Нѣжинъ); *Нюта Г.* (Нижній-Новгородъ); *И. Чемисовъ* (Никольскъ-Уссурійскій); *Г. Варкентинъ* (Вальдгеймъ).

№ 229 (5 сер.). *Доказать слѣдующую теорему: если въ треугольникѣ одинъ изъ угловъ вдвое больше другого, то квадратъ стороны, лежащей противъ большаго изъ этихъ угловъ, равенъ произведенію суммы двухъ другихъ сторонъ на сторону, лежащую противъ меньшаго изъ этихъ двухъ угловъ.*

Пусть въ треугольникѣ ABC, углы и стороны котораго мы обозначимъ обычнымъ образомъ, $A = 2B$. Тогда, называя черезъ AD биссектрису угла A, находимъ, что $\angle CAD = \angle \dfrac{A}{2} = B$, откуда вытекаетъ, что треугольники DCA и BCA, имѣющіе равные углы при вершинахъ A и B и общій уголъ при вершинѣ C, подобны. Изъ подобія этихъ треугольниковъ вытекаетъ пропорція $\dfrac{DC}{CA} = \dfrac{AC}{CB}$, или, если введемъ обозначенія $CD = x$, $DB = y$, пропорція $\dfrac{x}{b} = \dfrac{b}{a}$; кромѣ того, по извѣстному свойству биссектрисы, $\dfrac{x}{y} = \dfrac{b}{c}$, откуда $\dfrac{x}{x+y} =$

$\frac{x}{a} = \frac{b}{b+c}$. Раздѣливъ почленно равенства $\frac{x}{b} = \frac{b}{a}$ и $\frac{x}{a} = \frac{b}{b+c}$, получимъ $\frac{a}{b} = \frac{b+c}{a}$, откуда $a^2 = b(b+c)$.

Лопато (Городокъ, Сар. губ.); *А. Д.* (Лодзь); *Н. Кольскій-Редереръ* (Одесса); *Файнбрунъ* (Одесса); *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *П. Безчеревныхъ* (Козловъ); *В. Богомоловъ* (Шацкъ); *Б. Двойринъ* (Одесса). *И. Карабугаевъ* (Владикавказъ); *А. Радевъ* (Ботево, Болгарія); *С. Розенблатъ* (Балта); *Н. Ракитинъ*; *В. Моргулевъ* (Одесса); *Н. Howsepheanz* (Владикавказъ); *Н. Мамуловъ* (Тифлисъ); *Г. Бугаевскій* (Одесса); *М. Добровольскій* (Сердобскъ); *В. Колодій* (Нѣжинъ); *Нюта Г.* (Нижній-Новгородъ); *И. Чемисовъ* (Никольскъ-Уссурійскій); *Г. Варкентинъ* (Вальдгеймъ).

№ 231 (5 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$(2, 3, 2, 3, \ldots)^x = 6 + \frac{14\sqrt{15}}{9}.$$

Полагая $y = (2, 3, 2, 3, \ldots)$, имѣемъ:

$$y = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{y}}, \quad \text{откуда} \quad \frac{7y+2}{3y+1} = y, \quad \text{или} \quad 3y^2 - 6y - 2 = 0,$$

при чемъ y должно быть равно положительному корню послѣдняго уравненія. Такимъ образомъ, $y = \frac{3+\sqrt{15}}{3} = 1 + \frac{\sqrt{15}}{3}$, откуда

$$y^3 = (2, 3, 2, 3, \ldots)^3 = 1 + 3\frac{\sqrt{15}}{3} + 3 \cdot \frac{15}{9} + \frac{15\sqrt{15}}{27} = 6 + \frac{14\sqrt{15}}{9}.$$

Итакъ, предложенное уравненіе, которое, согласно съ общей теоріей логариѳмовъ, можетъ имѣть лишь одинъ корень, удовлетворяется при $x = 3$. Такимъ образомъ, искомое значеніе x есть 3.

А. Д. (Лодзь); *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *П. Безчеревныхъ* (Козловъ); *В. Моргулевъ* (Одесса); *В. Богомоловъ* Шацкъ); *А. Фельдманъ* (Одесса); *С. Розенблатъ* (Балта); *Н. Мамуловъ* (Тифлисъ); *N. N.*; *Нюта Г.* (Нижній-Новгородъ); *И. Чемисовъ* (Никольскъ-Уссурійскій); *Г. Варкентинъ* (Вальдгеймъ).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Продолжается подписка на 1910 годъ

(шестой годъ изданія)

НА ЕЖЕМѢСЯЧНЫЙ ИЛЛЮСТРИРОВАННЫЙ ЖУРНАЛЪ ДЛЯ ДѢТЕЙ

„Семья и Школа“.

Журналъ предназначается преимущественно **для дѣтей средняго возраста (10—12 лѣтъ)**, которымъ еще мало доступны существующіе у насъ журналы болѣе старшаго возраста. При этомъ „Семья и Школа“ ставитъ своей задачей одинаково примѣняться какъ къ интересамъ дѣтей, учащихся **въ младшихъ классахъ среднихъ учебныхъ заведеній**, такъ и къ пониманію учениковъ **начальной народной школы.**

„Семья и Школа“ состоитъ изъ **12** ежемѣсячныхъ книжекъ журнала и **6** отдѣльныхъ книжекъ **„Библіотеки Семьи и Школы“.**

Не привлекая своихъ подписчиковъ никакими преміями, ни такъ называемыми безплатными приложеніями, редакція „Семьи и Школы“ обращаетъ исключительное вниманіе на внутреннее достоинство самого журнала, на тщательный подборъ матеріала, доступнаго и занимательнаго для дѣтей и выдержаннаго въ педагогическомъ отношеніи,—а также и на его изящную внѣшность. Для послѣдней цѣли текстъ журнала тщательно иллюстрируется художественно-исполненными рисунками, и, кромѣ того, въ каждой книжкѣ помѣщаются отдѣльныя картинки.

Имѣя въ виду распространеніе журнала въ школахъ, каждая книжка „Семьи и Школы“ составляется такимъ образомъ, чтобы ее легко было, при желаніи, раздѣлить на части и большія произведенія, печатавшіяся въ нѣсколькихъ номерахъ, можно было бы въ концѣ года переплести въ одну книгу.

Въ „Семьѣ и Школѣ“ принимаютъ участіе: Е. А. Бакунина, И. А. Бѣлоусовъ, Е. Волкова, Н. А. Гольцева, С. Г. Григорьевъ, С. Д. Дрожжинъ, П. Засодимскій, П. П. Инфантьевъ, В. Ѳ. Капелькинъ, О. Карышева, А. А. Кизеветтеръ, С. А. Князьковъ, Н. К. Кольцовъ, М. А. Круковскій. Т. Н. Львовъ, Вл. Львовъ, Д. Н. Маминъ-Сибирякъ, И. И. Митропольскій, Н. Новичъ, Юр. Новоселовъ, К. Д. Носиловъ, Сергѣй Орловскій, О. П. Рунова, С. И. Рербергъ, А. Н. Рождественская, Р. Рубинова, В. Г. Рудневъ, П. Н. Сакулинъ, А. Серафимовичъ, В. Д. Соколовъ, П. П. Сушкинъ, Н. Д. Телешовъ, М. В. Тиличеева, В. Н. Харузина и др.

Подписная цѣна за **12** книжекъ **„Семья и Школа“** и за **6** книжекъ **„Библіотеки Семьи и Школы“:**

съ доставкой и пересылкой **3 РУБ. въ годъ** Безъ доставки въ Москвѣ **2 РУБ. 50 КОП.**

За границу 5 рублей.

Подписка на полгода 1 р. 50 к. (принимается исключительно въ редакціи).

Подписка безъ доставки принимается въ Москвѣ: **въ редакціи**, въ конторѣ **Н. Печковской** и въ книжныхъ магазинахъ **„Трудъ“** и **Н. Карбасникова.**

Пробный номеръ журнала высылается изъ редакціи **за три семикопеечныя марки.**

Г.г. учителямъ, желающимъ ознакомиться съ журналомъ, пробный номеръ высылается безплатно.

Оставшіеся комплекты журнала за прежніе годы продаются въ редакціи и конторѣ Н. Печковской по 3 руб., кромѣ 1908 г., который за израсходованіемъ почти всѣхъ экземпляровъ продается по повышенной цѣнѣ за пять рублей.

Иногородніе подписчики могутъ обращаться прямо въ редакцію журнала **„Семья и Школа“**: *Москва, Гончарная ул., домъ № 17.*

Редакторъ-издатель **Вл. Львовъ.**

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

Выходитъ 24 раза въ годъ отдѣльными выпусками, не менѣе 24 стр. каждый,

подъ редакціей приватъ-доцента В. Ф. Кагана.

ПРОГРАММА ЖУРНАЛА: Оригинальныя и переводныя статьи изъ области физики и элементарной математики. Статьи, посвященныя вопросамъ преподаванія математики и физики. Опыты и приборы. Научная хроника. Разныя извѣстія. Математическія мелочи. Темы для сотрудниковъ. Задачи для рѣшенія. Рѣшенія предложенныхъ задачъ съ фамиліями рѣшившихъ. Упражненія для учениковъ. Задачи на премію. Библіографическій отдѣлъ: обзоръ спеціальныхъ журналовъ; замѣтки и рецензіи о новыхъ книгахъ.

Статьи составляются настолько популярно, насколько это возможно безъ ущерба для научной стороны дѣла.

Предыдущіе семестры были **рекомендованы**: Учен. Ком. Мин. Нар. Пр. для гимн. муж. и жен., реальн. уч., прогимн., город. уч., учит. инст. и семинарій; Главн. Упр. Воен.-Учебн. Зав.—для воен.-уч. заведеній; Учен. Ком. при Св. Синодѣ — для дух. семинарій и училищъ.

Пробный номеръ высылается за одну 7-коп. марку.

Важнѣйшія статьи, помѣщенныя въ 190⁹/₁₀ г.

42-ой семестръ.

М. Зиминъ. Приближенное вычисленіе корней квадратнаго уравненія. — *П. В. Шепелевъ.* Объ изложеніи основныхъ понятій и законовъ механики.— *Э. Пикаръ.* Успѣхи динамическаго воздухоплаванія.— Проф. *Ф. Содди.* Отецъ радія.— *К. Граффъ.* Комета Галлея и ея предстоящее возвращеніе.— *А. Долговъ.* О построеніи нитяныхъ моделей многогранниковъ Пуансо.— Проф. *Ф. Содди.* Къ вопросу о происхожденіи радія.— Прив.-доц. *В. Каганъ.* Что такое алгебра?— Проф. *К. Делтеръ.* Искусственные драгоцѣнные камни.— *Л. Видеманъ.* По поводу новаго объясненія твердости тѣлъ.— Проф. *Г. Кайзеръ.* Современное развитіе спектроскопіи.— Новое сообщеніе проф. Рамзая о превращеніи химическихъ элементовъ.— *Д. Ефремовъ.* О четырехугольникахъ.— *А. Пугаченко.* Приближенное дѣленіе угла на n равныхъ частей при помощи циркуля и линейки.— Опыты проф. І. І. Косоногова по изслѣдованію электролиза при помощи ультра-микроскопа.— Проф. *А. Беккеръ.* Сжиженіе газовъ.

43-ій семестръ.

Г. Пуанкаре. Новая механика. — *П. Флоровъ.* Способъ вычисленія отношенія окружности къ діаметру съ пятью десятичными знаками, пригодный для преподаванія въ среднихъ школахъ.— *И. Мессершмидтъ.* Марсъ и Сатурнъ. — *П. Лоуэль.* Марсъ. — *С. Виноградовъ.* Развитіе понятія о числѣ въ его исторіи и въ школѣ.— *Е. Григорьевъ.* О разложеніи въ ряды функцій $\sin x$ и $\cos x$.— Проф. *Д. Синцовъ.* Къ вопросу о преподаваніи математики. Я. Штейнеръ, какъ преподаватель — *Г. Урбэнъ.* Являются ли основные законы химіи точными или же лишь приближенными. — *Е. Смирновъ* Объ ирраціональныхъ числахъ. — *П. Ренаръ.* Авіація, какъ спортъ и наука. — Проф. *О. Лоджъ.* Міровой эѳиръ — *К. Лебединцевъ.* Понятіе объ ирраціональномъ числѣ въ курсѣ средней школы. — *Э. Кроммелинъ.* Происхожденіе и природа кометъ. — *А. Филипповъ.* Дѣйствія съ періодическими дробями. — Прив.-доц. *В. Бобынинъ.* Естественные и искусственные пути возстановленія историками математики древнихъ доказательствъ и выводовъ

Условія подписки:

Подписная цѣна съ пересылкой: за годъ **6 руб.**, за полгода **3 руб.** Учителя и учительницы низшихъ училищъ и всѣ учащіеся, выписывающіе журналъ **непосредственно изъ конторы редакціи**, платятъ за годъ **4 руб.**, за полугодіе **2 руб.** Допускается разсрочка подписной платы по соглашенію съ конторой редакціи. Книгопродавцамъ 5% уступки.

Журналъ за прошлые годы по 2 р. 50 к., а учащимся и книгопродавцамъ по 2 р. за семестръ. **Отдѣльные номера** текущаго семестра по 30 к., прошлыхъ семестровъ по 25 коп.

Адресъ для корреспонденціи: **Одесса. Въ редакцію „Вѣстника Опытной Физики“.**