Обложка
ищется

Обложка
пщется

XLII Сем. № 6.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 498.

Что такое алгебра?

Прив.-доц. В. Кагана.

Если вы откроете любой курсъ геометріи, то вы почти неизмѣнно найдете опредѣленіе этой науки, которое съ небольшими видоизмѣненіями — скорѣе по формѣ, чѣмъ по существу — сводится къ тому, что геометрія есть наука о пространствѣ и пространственныхъ образахъ. Можно, конечно, этимъ не удовольствоваться и спросить себя, что такое пространство? И фактически Гильбертъ и Лежандръ, не скажу уже Евклидъ, далеко разошлись бы во взглядахъ на то, что такое пространство, какъ предметъ математическаго изслѣдованія. Но это уже вопросъ другой, стоящій на рубежѣ математики и философіи. Тотъ же, кто склоненъ принять идею о пространствѣ за основное понятіе, за точку отправленія, найдетъ въ различныхъ сочиненіяхъ по геометріи довольно согласное опредѣленіе этой науки.

Совершенно иначе обстоитъ дѣло съ алгеброй. Достаточно сказать, что одинъ изъ величайшихъ математиковъ XIX-го столѣтія Гамильтонъ нашелъ возможнымъ опредѣлить алгебру, какъ „науку чистаго времени“,— что де-Морганъ опредѣлялъ ее, какъ „ученіе о послѣдовательности“,— что, по замыслу Грассмана, его алгебра — „ученіе о протяженіи“— должна была содержать въ себѣ геометрію, какъ небольшой частный случай,— что могучему уму Лейбница рисовалась алгебра, которая должна была охватить логику, все человѣческое мышленіе,— достаточно сопоставить эти взгляды на алгебру, чтобы понять, въ какихъ широкихъ предѣлахъ блуждала здѣсь человѣческая мысль.

Между тѣмъ, вопросъ о томъ, что такое алгебра, естественно возникаетъ у всякаго, кто изучаетъ эту науку, а тѣмъ болѣе у того, кто ее преподаетъ. Болѣе того, предъ преподавателемъ этотъ вопросъ въ курсѣ средней школы выплываетъ дважды: разъ въ самомъ началѣ преподаванія, когда съ этимъ вопросомъ къ нему обращается еще почти ребенокъ на первыхъ урокахъ алгебры, и во второй разъ, въ восьмомъ классѣ, когда преподаватель имѣетъ передъ собой уже взрослаго юношу, которому можно дать и научное опредѣленіе этой дисциплины.

Посмотримъ же, какъ разрѣшается этотъ вопросъ въ различныхъ сочиненіяхъ по алгебрѣ. При этомъ мы должны считаться не только съ формальной стороной дѣла, т. е. съ текстомъ опредѣленія, но и съ фактической стороной, т. е. съ тѣмъ матеріаломъ, который включается въ курсъ алгебры. Это тѣмъ болѣе необходимо, что многіе авторы вовсе избѣгаютъ опредѣленія, такъ что только самая книга даетъ представленіе о томъ, что собственно авторъ разумѣетъ подъ алгеброй. Такъ, напримѣръ, въ наиболѣе обстоятельномъ и современномъ трактатѣ по алгебрѣ профессора Вебера*) опредѣленія алгебры нѣтъ; нѣтъ его и въ болѣе доступной и очень популярной книгѣ Нивенгловскаго**), а также и въ прекрасномъ недавно вышедшемъ сочинении Таннери***). Между тѣмъ ясно, что именно у этихъ авторитетныхъ ученыхъ мы должны искать отвѣта на вопросъ, что въ настоящее время разумѣютъ подъ „алгеброй“.

Но мы начнемъ не съ этихъ классическихъ сочиненій, а съ элементарныхъ учебниковъ и посмотримъ, какое опредѣленіе алгебры получаютъ у насъ юноши въ школѣ.

Г. Киселевъ опредѣляетъ прежде всего, что такое алгебраическое выраженіе и какія алгебраическія выраженія называются тождественными, а затѣмъ въ параграфѣ, озаглавленномъ „предметъ алгебры“, говоритъ: „Алгебра указываетъ способы, посредствомъ которыхъ можно одно алгебраическое выраженіе преобразовать въ другое, тождественное ему“. Алгебра опредѣляется, такимъ образомъ, прежде всего, какъ ученіе о тождественныхъ преобразованіяхъ. Въ концѣ рубрики прибавлено, что о другихъ сторонахъ алгебры будетъ сказано впослѣдствіи. Однако, явно объ этомъ не сказано нигдѣ; повидимому, объ этомъ нужно судить по матеріалу. Авторъ, очевидно, затрудняется охватить въ короткой формулѣ весь матеріалъ элементарной алгебры, выборомъ котораго онъ

*) H. Weber. „Lehrbuch der Algebra“. Braunschweig, 1898—1908 (3 тома).

**) B. Niewenglowsky. „Cours d'algèbre à l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales et de candidats a l'École normale Supérieure et à l'École polytechnique“, 4-ème édition. I, II, Paris, 1897.

***) J. Tannery. „Leçons d'algèbre et d'analyse à l'usage des élèves des classes de mathématiques spéciales“. I, II Paris, 1906.

къ тому же не располагаетъ, имѣя передъ собой установленную программу. И это, на нашъ взглядъ, лучше, чѣмъ давать опредѣленіе, какое мы находимъ, напримѣръ, въ учебникѣ алгебры А. Давыдова: „Алгебра учитъ разсуждать о величинахъ. При этомъ она изображаетъ ихъ буквами и означаетъ особыми знаками зависимость между ними“. Но есть ли такой отдѣлъ математики, за исключеніемъ развѣ геометріи положенія, который не учитъ разсуждать о величинахъ? И прежде всего ариѳметика, которой алгебра обыкновенно противополагается, развѣ не учитъ разсуждать о величинахъ? Здѣсь центръ тяжести, повидимому, не въ первомъ короткомъ опредѣленіи, а въ дополненіи къ нему, въ которомъ указывается, что алгебра изображаетъ величины буквами и дѣйствія надъ ними — знаками. И что это именно такъ, явствуетъ изъ того, что опредѣленія, которыми начинаются другія руководства по элементарной алгебрѣ, почти безъ исключенія представляютъ собой лишь перефразировки съ незначительными измѣненіями того опредѣленія, которое даетъ Бертранъ*) Это опредѣленіе тѣмъ болѣе интересно для насъ, что книга Бертрана не предназначена для начинающихъ, а имѣетъ въ виду читателя, уже до нѣкоторой степени знакомаго съ алгеброй. Къ тому же книга Бертрана въ теченіе свыше четверти вѣка имѣла, такъ сказать, законодательное значеніе не только во Франціи, но и у насъ. Вотъ какъ выражено у Бертрана опредѣленіе алгебры: „Алгебра имѣетъ цѣлью сокращать, упрощать и въ особенности обобщать рѣшеніе вопросовъ, которые можно себѣ ставить относительно чиселъ. Для достиженія этой цѣли алгебра пользуется буквами и знаками“.

Такимъ образомъ, во всѣхъ, можно сказать, руководствахъ по элементарной алгебрѣ за характерный, опредѣлительный для этой дисциплины признакъ принимается то, что она вводитъ буквенныя обозначенія и пользуется ими, какъ средствомъ обобщенія и упрощенія. Спрашивается, содержится ли въ этой формѣ дѣйствительно опредѣленіе алгебры?

Чтобы на этотъ вопросъ отвѣтить, замѣтимъ, что научное опредѣленіе алгебры, прежде всего, должно отграничить эту науку отъ смежныхъ съ нею отраслей—отъ ариѳметики и отъ анализа, такъ сказать, снизу и сверху; соображенія дидактическаго свойства мы покамѣстъ оставимъ въ сторонѣ.

Удовлетворяетъ ли указанное выше опредѣленіе хотя бы въ нѣкоторой степени такому требованію? Врядъ ли нужно доказывать, что нѣтъ. Кто не знаетъ, что буквенныя обозначенія приняты во всѣхъ безъ исключенія отдѣлахъ математики, и что этотъ признакъ не отграничиваетъ алгебры не только сверху, но и снизу — отъ ариѳметики? Въ обыкновенныхъ руководствахъ по ариѳметикѣ, предназначенныхъ для средней школы, теоретическія части излагаются въ настоящее время почти всегда съ помощью буквенныхъ обозначеній. И совершенно ошибочно, конечно, думать, что общія истины появляются

*) J. Bertrand. Traité d'Algèbre.

только въ алгебрѣ, что теоремы ариѳметики не нуждаются въ общемъ выраженіи и обозначеніи.

Это одна сторона дѣла, которую можно формулировать такъ: буквенныя обозначенія и связанныя съ ними обобщенія и сокращенія отнюдь не представляютъ собой достаточнаго отличительнаго признака алгебры. Но является ли этотъ признакъ необходимымъ?

Почти въ каждомъ руководствѣ по алгебрѣ вы найдете, что творцами алгебры были арабы. Это не совсѣмъ такъ; арабы, собственно, заимствовали алгебру отчасти отъ индусовъ, отчасти отъ грековъ; но вѣрно то, что въ Европу въ средніе вѣка алгебра перешла отъ арабовъ. Это извѣстно всѣмъ. Но лишь немногіе знаютъ, что алгебра арабовъ, и именно восточныхъ арабовъ, чужда всякаго символизма. Алгебра арабовъ, по терминологіи Нессельмана*), есть алгебра чисто риторическая, т. е. всѣ предложенія, всѣ вопросы, всѣ разсужденія выражаются полными словами, безъ всякихъ попытокъ не только къ символизму, но и къ сокращенію. Въ частности, отцомъ алгебры сами арабы считали Мухаммеда-ибнъ-Муса Альхваризми, книга котораго называлась „Алджебръ уальмукабала"; отъ этого сочиненія получила свое названіе алгебра; и все-таки въ этой книгѣ нѣтъ никакихъ символическихъ обозначеній. Есть же, слѣдовательно, нѣчто характерное для алгебры, что не кроется въ ея символизмѣ.

Но возьмемъ еще алгебру Діофанта. Эта замѣчательная книга, написанная уже въ эпоху упадка греческой геометріи, въ IV столѣтіи послѣ Р. Хр., называется „*Ἀριθμητικὰ*"; и тѣмъ не менѣе въ настоящее время ее, можно сказать, никто не называетъ „ариѳметикой" Діофанта; о ней всѣ говорятъ, какъ объ „алгебрѣ". Причина этого заключается въ томъ, что дошедшія до насъ 6 книгъ Діофанта всѣ посвящены рѣшенію уравненій: первая книга посвящена опредѣленнымъ, а дальнѣйшія—неопредѣленнымъ уравненіямъ высшихъ степеней. У Діофанта есть символы, но чрезвычайно примитивныя. У него есть особый символъ для обозначенія одного неизвѣстнаго (ς); квадратъ этого неизвѣстнаго Діофантъ обозначаетъ символомъ $\delta^{\bar{v}}$ — сокращеніе слова *δύναμις* (квадратъ), а кубъ—неизвѣстнымъ символомъ $\varkappa^{\bar{v}}$ (*κύβος*). Эти обозначенія Нессельманъ называетъ синкопированными,—это тѣ же слова, короче обозначенныя. Какъ уже сказано, Діофантъ употребляетъ особый символъ только для обозначенія одного неизвѣстнаго,— остальныя скрываются въ формѣ словеснаго выраженія; такъ, напримѣръ, уравненіе $x^2 + 1 = y^2$ Діофантъ выразилъ бы такъ: найти неизвѣстное (ς), квадратъ котораго ($\delta^{\bar{v}}$), увеличенный единицей ($\delta^{\bar{v}}\bar{\alpha}$), есть квадратное число.

У Діофанта мы находимъ, такимъ образомъ, лишь весьма примитивныя первыя синкопированныя обозначенія, чрезвычайно далекія отъ символизма современной алгебры. И при всемъ томъ Діофантъ рѣшаетъ многіе труднѣйшіе вопросы алгебры.

*) G. Nesselmann. „Versuch einer kritischen Geschichte der Algebra". Berlin. 1842.

Хотя буквенныя обозначенія и вообще символизмъ современной алгебры играетъ въ ней коренную роль, но никакъ нельзя сказать, что этимъ символизмомъ опредѣляется алгебра: съ одной стороны, этотъ символизмъ въ настоящее время вошелъ во всѣ отдѣлы математическаго анализа, а съ другой стороны, не символизмъ породилъ алгебру, а накопившійся алгебраическій матеріалъ былъ облеченъ въ символическую форму, которая, конечно, въ свою очередь, содѣйствовала обогащенію алгебры. Да оно и ясно: алгебраическій символизмъ есть форма, въ которую облекается алгебраическое изслѣдованіе. Форма играетъ въ дѣлѣ изслѣдованія важную, нерѣдко рѣшающую роль; но формой не опредѣляется содержаніе, а опредѣленіе науки должно указывать ея содержаніе.

Мы вновь приходимъ къ тому, что мы должны искать ключъ къ опредѣленію предмета алгебры не въ одномъ только формальномъ опредѣленіи, но въ самомъ матеріалѣ.

Очевидно, Эм. Борель*), учебники котораго получили въ настоящее время преобладающее значеніе во всей Франціи, совершенно правъ, выражаясь гораздо осторожнѣе. Онъ говоритъ: „одна изъ цѣлей, которыя себѣ ставитъ алгебра, заключается въ томъ, чтобы выработать сокращенный языкъ, который давалъ бы возможность легко вести общія разсужденія и просто выражать общія правила; въ элементарной алгебрѣ эта цѣль имѣетъ даже главное значеніе".

Присматриваясь къ матеріалу, который мы находимъ во всѣхъ нашихъ руководствахъ по алгебрѣ, мы замѣчаемъ, что съ первыхъ же шаговъ она идетъ по пути обобщенія другого рода. Она вводитъ прежде всего отрицательныя числа, благодаря которымъ обобщается вычитаніе въ томъ смыслѣ, что это дѣйствіе становится всегда возможнымъ; вмѣстѣ съ тѣмъ объединяются сложеніе и вычитаніе, и область, которой это обобщеніе принадлежитъ, подчеркивается тѣмъ, что сумма въ этомъ смыслѣ слова называется „алгебраической суммой". Алгебра вводитъ затѣмъ ирраціональныя числа и тѣмъ обобщаетъ понятіе объ извлеченіи корней въ томъ смыслѣ, что распространяетъ это дѣйствіе на случаи, которые прежде не подходили подъ его опредѣленіе (въ которыхъ эти дѣйствія были невозможны). Алгебра вводитъ далѣе мнимыя числа и тѣмъ открываетъ путь для общаго предложенія, что всякое алгебраическое уравненіе имѣетъ корень. Алгебра вноситъ, такимъ образомъ, обобщеніе уже не въ форму, а въ самое существо дѣла; она распространяетъ ариѳметическія операціи, сохраняя перманентными ихъ формальные законы, на болѣе широкіе объекты изслѣдованія и этимъ путемъ ведетъ къ раскрытію общихъ истинъ. Быть можетъ, въ этомъ заключается главная задача алгебры?

Эта точка зрѣнія дѣйствительно имѣла своихъ приверженцевъ; наиболѣе выдающимся изъ нихъ является Г. Пикокъ**), книга кото-

---

*) E. Borel. „Algèbre". II ed. Paris. 1905.

**) Georg Peacock. „A treatis on algebra". Первое изданіе появилось въ Кэмбриджѣ въ 1830 г., а второе, существенно переработанное, — въ 1845 году.

раго около середины XIX столѣтія имѣла такое же значеніе въ Англіи, какое „Алгебра" Бертрана имѣла нѣсколько позже во Франціи. Пикокъ отличаетъ алгебру „ариѳметическую" и алгебру „символическую", и различіе это онъ считаетъ настолько существеннымъ, что во второмъ изданіи своей книги онъ счелъ необходимымъ отдѣлить ариѳметическую алгебру отъ символической, посвятивъ первый томъ ариѳметической, а второй томъ символической алгебрѣ. Однако, „символическую" алгебру Пикокъ понимаетъ совсѣмъ не такъ, какъ авторы, о которыхъ мы говорили выше. Дѣло въ томъ что буквенными обозначеніями онъ пользуется какъ въ ариѳметической, такъ и въ символической алгебрѣ, центръ тяжести же различія падаетъ на содержаніе, которое въ эти символы вкладывается. „Символы ариѳметической алгебры", говоритъ Пикокъ, „обозначаютъ числа — отвлеченныя или именованныя, цѣлыя или дробныя, и операціи, которымъ они подвергаются, по смыслу своему совпадаютъ съ дѣйствіями, принятыми въ обыкновенной ариѳметикѣ; единственное различіе заключается только въ томъ, что здѣсь числа обозначаются буквами... Но если, напримѣръ, мы здѣсь пишемъ разность $a - b$, то мы всегда предполагаемъ, что $a > b$". Въ другомъ мѣстѣ: „если мы въ ариѳметической алгебрѣ пишемъ $a^m . a^n = a^{m+n}$, то мы разумѣемъ подъ m и n цѣлыя числа, ибо только къ таковымъ примѣнимо опредѣленіе степени".

„Но символы", говоритъ Пикокъ дальше, „которыми мы пользуемся, не унаслѣдовали отъ чиселъ ни для глаза, ни для ума тѣхъ ограниченій, которымъ послѣднія подчинены: они сохраняютъ смыслъ, каковы бы ни были ихъ значенія". И вотъ, когда символы пріобрѣтаютъ такое болѣе общее содержаніе, они относятся уже не къ ариѳметической, а къ символической алгебрѣ. Почему же такое названіе „символической алгебры", когда символы употребляютъ и въ ариѳметической алгебрѣ. Точка зрѣнія, на которой твердо стоитъ еще Пикокъ, заключается въ томъ, что тамъ, въ ариѳметической алгебрѣ, символы означаютъ числа, здѣсь же они могутъ быть только символами, надъ которыми совершаются дѣйствія по тѣмъ же формальнымъ законамъ, что и въ ариѳметикѣ, и съ сохраненіемъ результата, когда эти дѣйствія сводятся къ операціямъ надъ обыкновенными числами (законъ перманентности, этотъ терминъ принадлежитъ Пикоку).

Ясно, что ариѳметическая алгебра Пикока есть то, что теперь называютъ теоретической ариѳметикой; настоящая же алгебра, по мнѣнію Пикока, начинается тамъ, гдѣ эти символы выходятъ за тѣ предѣлы, которыми они ограничены въ ариѳметикѣ; расширеніемъ понятія о числѣ характеризуется, такимъ образомъ, область алгебры: ариѳметика оперируетъ только надъ обыкновенными числами, алгебра — надъ положительными и отрицательными, раціональными и ирраціональными, вещественными и мнимыми.

Для нашихъ учащихся, — нужно сказать, и для многихъ преподавателей, — отрицательныя, ирраціональныя и мнимыя числа представляютъ собой собственность алгебры, еще болѣе неотъемлемую, чѣмъ буквенныя обозначенія.

Книгу Грассмана, вышедшую въ 1861 г.*), въ настоящее время довольно согласно признаютъ первымъ строго научнымъ сочиненіемъ по теоретической ариѳметикѣ. И вотъ, въ противоположность взглядамъ Пикока, Грассманъ относитъ къ ариѳметикѣ теорію всѣхъ этихъ чиселъ: положительныхъ и отрицательныхъ, вещественныхъ и мнимыхъ, раціональныхъ и ирраціональныхъ. На этой точкѣ зрѣнія стоятъ послѣ Грассмана всѣ серьезные авторы, писавшіе по теоретической ариѳметикѣ**). Болѣе того, проф. Веберъ въ написанномъ имъ первомъ томѣ „Энциклопедіи элементарной математики“ ***), посвященномъ ариѳметикѣ, алгебрѣ и анализу, относитъ къ ариѳметикѣ и все ученіе о тождественныхъ преобразованіяхъ. Эта точка зрѣнія санкціонируется еще тѣмъ, что въ выходящей въ настоящее время большой „Энциклопедіи математическихъ наукъ“ ****), составляемой и редактируемой наиболѣе авторитетными учеными всего міра, принята эта именно точка зрѣнія.

Что же такое алгебра?

(Продолженіе слѣдуетъ).

Комета Галлея и ея предстоящее возвращеніе.

К. Граффа.

(Продолженіе).*

Спустя 77 лѣтъ мы опять встрѣчаемъ въ лѣтописяхъ упоминанія о нашей кометѣ, хотя на этотъ разъ появленіе ея произвело въ Европѣ, по крайней мѣрѣ, гораздо меньшее впечатлѣніе, чѣмъ предшествовавшее (въ 1301 году). По китайскимъ указаніямъ комета въ этотъ разъ была открыта 26 сентября 1378 г. и была видна, главнымъ образомъ, въ сѣверной околополярной области. Наблюденія въ восточной Азіи продолжались до 10 ноября, между тѣмъ какъ въ Европѣ ее видѣли ясно только въ теченіе нѣсколькихъ дней. Для вычисленія орбиты, которое Ложье выполнилъ въ 1846 г., пришлось, слѣдовательно, и на этотъ разъ принять въ соображеніе почти исключительно записи Поднебесной Имперіи.

---

*) H. Grassmann „Lehrbuch der Arithmetik“.

**) См., напримѣръ: Stolz. „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik“. F. Klein. „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“, I.

***) H. Weber und J. Wellstein. „Encyklopädie der elementaren Mathematik“. Русскій переводъ вышелъ подъ редакціей автора настоящей статьи.

****) „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen“. Bd. I.

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“, № 497.

Начиная съ 1456 года, мы имѣемъ дѣло съ прохожденіями черезъ перигелій, которыя уже Галлей призналъ относящимися къ его кометѣ. Дать доказательство этого предположенія удалось, правда, только Пенгрэ въ концѣ XVIII столѣтія, на основаніи сопоставленія историческихъ замѣтокъ относительно чрезвычайно удивительной кометы 1456 г.; но окончательно подтвердилось это благодаря найденнымъ во Флоренціи нѣсколько десятилѣтій тому назадъ наблюденіямъ Тосканелли (Toscanelli), которыя обработалъ Челоріа (Celoria) въ 1885 г. Прохожденіе кометы черезъ перигелій пало на первую половину мѣсяца іюня,— слѣдовательно, опять на весьма благопріятное время. Эта комета, открытая въ началѣ іюня, въ нѣсколько дней развилась въ чрезвычайно поразительное небесное явленіе; страхъ и удивленіе, возбужденное въ Европѣ этимъ небеснымъ свѣтиломъ, были бы навѣрное еще значительнѣе, если бы на 18 іюня, какъ разъ во время наибольшей близости кометы къ землѣ, не пришлось полнолуніе. Современными писателями это небесное явленіе изображается, какъ „великое", „страшное", „необыкновенной величины", „хвостомъ своимъ покрывающее два созвѣздія". 6-го іюня, незадолго до прохожденія черезъ перигелій, ядро кометы сіяло, какъ неподвижная звѣзда, а хвостъ, который до и послѣ этого момента казался блѣднымъ и бѣловатымъ, принялъ золотистый оттѣнокъ. О ядрѣ сообщается дальше, будто оно сильно сверкало и состояло изъ отдѣльныхъ звѣздочекъ, т. е. обнаруживало, по всей вѣроятности, грануляцію, какую уже многократно замѣчали въ кометахъ въ послѣднія столѣтія послѣ открытія телескопа. Хвостъ, повидимому, не сохранялъ своего вида въ теченіе всего времени, пока былъ доступенъ наблюденію; наряду съ показаніями, свидѣтельствующими о необычайной длинѣ хвоста при умѣренной, повидимому, ширинѣ его, мы находимъ сравненія его съ широкоразвѣвающимися перьями павлиньяго хвоста. Во всякомъ случаѣ достовѣрно то, что длина хвоста послѣ прохожденія кометы черезъ перигелій необыкновенно быстро увеличилась, но затѣмъ почти также быстро уменьшилась. Въ Китаѣ комета стала видима уже 27 мая и наблюдалась весьма внимательно вплоть до 6-го іюля. Два дня спустя она также скрылась изъ поля зрѣнія Тосканелли, наблюденія котораго имѣютъ ту особенную цѣнность, что они содержатъ не только общія замѣтки, но впервые даютъ также болѣе точныя указанія относительно долготы и широты кометы въ различные моменты наблюденія.

Къ появленію этой кометы Западъ былъ нѣкоторымъ образомъ подготовленъ. Мухамедъ II Великій завоевалъ въ 1453 г. Константинополь и двинулся къ Бѣлграду. Когда же къ успѣшному движенію турецкихъ силъ присоединилось еще и появленіе кометы, смятеніе стало всеобщимъ. Высшіе и низшіе классы, образованные люди и простой народъ — всѣ смотрѣли на грозную комету, какъ на предвѣстницу вѣрнаго пораженія; даже тогдашній папа, Каликстъ III (Alfonso Borgia),— какъ свидѣтельствуетъ Кальвизій (Calvisius) въ своемъ сочиненіи „Opus Chronologicum",— испуганный появленіемъ кометы и нашествіемъ турокъ, установилъ для отвращенія Божьяго гнѣва многодневные посты и повелѣлъ, чтобы въ городахъ также и въ полдень звонили въ колокола, сзывая народъ на молитву противъ турокъ. Впрочемъ, наряду съ этими духовными средствами, глава церкви умѣлъ также, кстати сказать, выдвинуть противъ турецкаго нашествія и практическія мѣры. Каликстъ снарядилъ на церковныя средства нѣсколько галеръ, которыя, хотя и не могли вернуть турецкихъ завоеваній на греческихъ островахъ, но все же косвенно содѣйствовали побѣдѣ Іоанна Корвина при Бѣлградѣ. Этотъ счастливый исходъ во всякомъ случаѣ сильно испортилъ дѣло толкователей кометъ, и тогда вліянію кометы стали уже приписывать даже самыя ничтожныя вещи. Такъ, напримѣръ, по указанію Литрова (Littrov), въ венгерской лѣтописи Антонія Бонифія (Antonius Bonifius), эта комета приводится въ непосредственную связь съ явившимся въ Италіи на свѣтъ Божій теленкомъ о двухъ головахъ, съ кровавымъ дождемъ въ Римѣ и даже съ родившимся въ Анконѣ ребенкомъ съ 6-ю зубами и необыкновенно большимъ лицомъ. Подобныя суевѣрныя заблужденія, которымъ довѣряли, почти безъ исключенія, даже серьезные люди того времени, теперь уже, съ каждымъ новымъ появленіемъ кометы Галлея, ослабѣваютъ, и при каждомъ изъ послѣдующихъ прохожденій кометы черезъ перигелій замѣчается не только научный прогрессъ въ обсужденіи этихъ явленій, но и постепенное исчезновеніе такихъ нелѣпыхъ взглядовъ, какіе Бонифій со всей серьезностью могъ преподносить своимъ современникамъ. Однако же, комету, появившуюся въ 1531 году, считали еще причиною кроваваго дождя и землетрясенія, а также особаго рода огненныхъ лучей. Условія видимости кометы были на этотъ разъ менѣе благопріятными, чѣмъ въ 1456 году. Комета стала видна въ Европѣ только въ концѣ іюля или въ началѣ августа; по крайней мѣрѣ, одинъ изъ историковъ сообщаетъ, что 25 іюля въ Римѣ видѣли огненный столбъ, послѣ чего будто появились двѣ кометы. Возможно, однако, что въ данномъ случаѣ за вторую комету приняли промелькнувшій одновременно съ кометой метеоръ. Явленіе же было слабо выражено потому, что комета на всемъ видимомъ пути была мало удалена отъ солнца. Помимо нѣкоторыхъ китайскихъ указаній, мы имѣемъ относительно этой кометы въ своемъ распоряженіи исключительно свидѣтельство Петра Биневица (Peter Bienevitz, Петръ Апіанъ), придворнаго астронома Карла V и Фердинанда I. Апіанъ, какъ и Тосканелли, наблюдая комету, интересовался, главнымъ образомъ, ея положеніемъ на небѣ; эти наблюденія впослѣдствіи помогли Галлею отождествить свою комету съ кометою, появившеюся въ 1531 году; поэтому съ этой кометою сперва связали имя Биневица, назвавъ ее кометою Апіана. Биневицъ наблюдалъ ее въ Ингольштадтѣ съ 13 августа до начала сентября; помимо указаній относительно положенія кометы, его астрономическія наблюденія были важны и плодотворны еще и въ другомъ отношеніи: съ помощью ихъ онъ впервые съ достовѣрностью установилъ, что хвостъ кометы всегда былъ направленъ въ сторону, противоположную солнцу. Не слѣдуетъ упускать изъ виду, что господствовавшее въ то время древнее воззрѣніе на земное происхожденіе кометъ и на ихъ атмосферическую природу ни у кого не вызывало сомнѣній. Апіанъ первый указываетъ на связь этихъ таинственныхъ тѣлъ съ солнцемъ; хотя онъ изъ своихъ наблюденій вывелъ, будто хвосты составляютъ нѣкотораго рода тѣнь, отбрасываемую отъ освѣщеннаго солнцемъ ядра, однако, благодаря этому выводу былъ уже сдѣланъ существенный шагъ впередъ по пути къ познанію истины. Справедливо говоритъ поэтому Кестнеръ объ Ингольштадтскомъ астрономѣ относительно этого ошибочнаго взгляда:

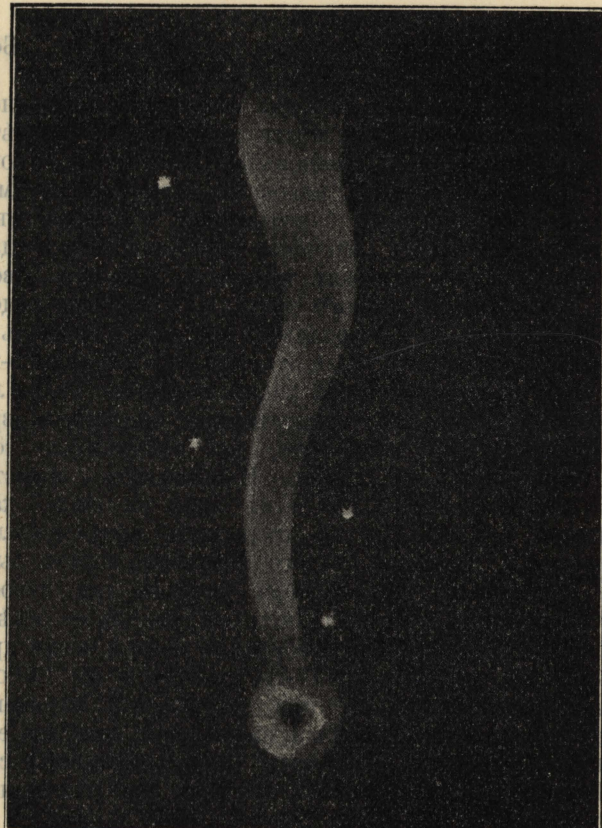
„Если въ этомъ онъ и ошибся, то онъ же и открылъ, что хвостъ кометы всегда отклоняется въ сторону, противоположную солнцу; и тотъ, во всякомъ случаѣ, еще не достоинъ порицанія, кто, сколько бы ни ошибался, все же научилъ насъ новой истинѣ“.

Въ физическомъ отношеніи наблюденіе отклоненія хвостовъ кометъ отъ солнца имѣло прежде всего своимъ послѣдствіемъ то, что съ тѣхъ поръ вниманіе къ этимъ явленіямъ все болѣе и болѣе росло. Благодаря этому къ концу прошлаго столѣтія накопился тотъ громадный матеріалъ, которымъ воспользовались Максвеллъ (Maxwell), Бредихинъ и Сванте Арреніусъ (Svante Arrhenius) для построенія своихъ теорій, чрезвычайно важныхъ въ космической физикѣ. О хвостѣ кометы 1531 года мы знаемъ, впрочемъ, только то, что 13 августа онъ имѣлъ длину около 15 градусовъ.

Комета 1607 года замѣчательна тѣмъ, что ее впервые увидѣлъ и наблюдалъ Кеплеръ. Великій астрономъ жилъ въ сентябрѣ того года въ Прагѣ; когда онъ однажды вмѣстѣ съ однимъ изъ своихъ друзей смотрѣлъ на фейерверкъ съ Молдавскаго моста, тотъ обратилъ его вниманіе на эту комету. Свѣтило стояло какъ разъ въ созвѣздіи Большой Медвѣдицы и въ начальной стадіи своего развитія бросалось въ глаза не столько своею яркостью, сколько своимъ положеніемъ въ популярнѣйшемъ изъ созвѣздій. Впрочемъ, одинъ монахъ передаетъ, будто онъ видѣлъ комету нѣсколькими днями раньше. Кеплеръ наблюдалъ комету съ 26 сентября до 26 октября. И онъ также, уже по собственнымъ наблюденіямъ, могъ убѣдиться въ справедливости открытія, сдѣланнаго Апіаномъ и впослѣдствіи подтвержденнаго Гемма Фризіемъ (Gemma Frisius), Корнеліемъ Гемма (Cornellius Gemma) и Тихо-Браге, что хвосты почти всегда обращены въ сторону, противоположную солнцу. Онъ замѣтилъ, кромѣ того, что хвостъ вначалѣ былъ очень малъ и имѣлъ видъ продолговатаго пятна съ слабымъ, блѣднымъ свѣтомъ; между тѣмъ позже ядро кометы, принявъ размѣры Юпитера, пріобрѣло значительную яркость, а хвостъ достигъ 8—10 градусовъ длины; при этомъ въ предѣлахъ занимаемой имъ области замѣчались неоднократныя быстрыя движенія и укорачиванія туманной матеріи. Человѣкъ, который сумѣлъ подчинить весьма сложныя движенія планетъ тремъ простымъ законамъ, не могъ не замѣтить, что и кометы суть небесныя тѣла, которыя въ своемъ движеніи слѣдуютъ тѣмъ же законамъ, что и планеты. У него, однако, не хватило рѣшимости объявить кометы космическими тѣлами, которыя можно изслѣдовать по отношенію къ ихъ движенію въ пространствѣ. Такимъ образомъ, помимо справедливаго утвержденія Кеплера относительно кометныхъ орбитъ, что нѣкоторыя части ихъ представляютъ собой прямыя линіи, слѣдуетъ считать, что и данное появленіе кометы Галлея не дало никакого матеріала для теоріи орбитъ этихъ тѣлъ. Правда, еще за нѣсколько десятилѣтій до того, Тихо-де-Браге, Мэстлинъ (Müstlin) и др. доказали, на основаніи измѣреній параллаксовъ, что кометы движутся не въ области земной атмосферы, но далеко за ея предѣлами, вѣроятно, даже далеко за предѣлами лунной орбиты; тѣмъ не менѣе, даже и такой человѣкъ, какъ Кеплеръ, повидимому, не отважился приписать этимъ космическимъ туманнымъ тѣламъ, доступнымъ нашимъ наблюденіямъ только на небольшой части своего пути, орбиты, подобныя тѣмъ, которыя описываютъ шесть планетъ въ своемъ регулярномъ движеніи по зодіаку вокругъ солнца.

Появленіе кометы Галлея въ 1682 г., по мѣткому выраженію Литрова, слѣдуетъ считать научнымъ ея рожденіемъ. „Болѣе, чѣмъ за тысячелѣтній промежутокъ времени, всякій разъ, какъ комета посѣщала землю, не было случая, чтобы она оказывалась недоступной наблюденію; и все же обитатели земли продолжали смотрѣть на нее, какъ на рѣдкаго, враждебнаго пришельца. Въ этотъ разъ она, однако, появилась въ такое время, когда, наконецъ, затемняющее умы суевѣріе въ значительной мѣрѣ исчезло; благодаря же совмѣстнымъ усиліямъ многихъ выдающихся людей, впервые работавшимъ тогда одновременно въ такомъ числѣ, человѣкъ получилъ, наконецъ, возможность признать въ этой кометѣ стараго друга и не только радоваться ея прежнимъ посѣщеніямъ, но и съ полнымъ довѣріемъ ожидать ея возвращенія“. На этотъ разъ комета была открыта въ Орлеанѣ 23-го августа, а 26-го она была найдена на небѣ также и слугою Гевеля (Hevel). Черезъ нѣсколько дней она представляла блестящее зрѣлище, и хвостъ ея развился до того, что, по имѣющимся сообщеніямъ достигъ 30 градусовъ въ длину. Наибольшую яркость комета пріобрѣла къ концу августа, при чемъ ядро ея сіяло, какъ звѣзда первой величины, а хвостъ и на этотъ разъ претерпѣвалъ быстрыя и частыя измѣненія. Начиная съ 1-го сентября, комета быстро стала убывать въ яркости и 12 сентября исчезла для невооруженнаго глаза. Гевель и Флэмштедъ (Flamsteed) видѣли ее вслѣдъ за тѣмъ еще въ телескопъ (который былъ изобрѣтенъ вскорѣ послѣ предыдущаго появленія кометы), первый до 17-го, а второй до 19-го сентября; однако, весьма удивительно, что при опредѣленіи положенія кометы они опирались не на телескопическія наблюденія, которыя, естественно, дали бы имъ болѣе точные результаты, а на наблюденія съ помощью діоптровъ. На этотъ разъ, впрочемъ, всѣ безъ исключенія наблюдатели кометы принадлежатъ къ числу выдающихся ученыхъ. Вмѣстѣ съ Флэмштедомъ и Гевелемъ комету наблюдали такіе люди, какъ Кирхъ (Kirch), Галлей, Кассини (Cassini), Лагиръ (Lahire) и Пикаръ (Picard). Послѣдній астрономъ умеръ, не успѣвъ провѣрить результаты своихъ тщательныхъ наблюденій. Его опредѣленіе положенія кометы 11-го сентября оказалось также и послѣдней астрономической работой въ его жизни, которая прекратилась 12 октября 1682 года.

Мало-по-малу, въ теченіе первой и второй половины XVII столѣтія, увѣренность въ космической природѣ кометъ и въ связи ихъ съ солнцемъ проникала въ среду астрономовъ, и наступило время — скажемъ пророческими словами Сенеки — „и появился человѣкъ, который показалъ, въ какихъ частяхъ мірового пространства кометы движутся, почему онѣ имѣютъ такую удаленную отъ планетъ орбиту и какою величиною и строеніемъ онѣ обладаютъ“. Этимъ человѣкомъ былъ Ньютонъ; установленному имъ закону всемірнаго тяготѣнія необходимо должны были подчиниться также и неразгаданныя до того движенія кометъ, не поддававшіяся ранѣе никакому математическому вычисленію. Правда, истинное представленіе о движеніяхъ кометъ можно



Видъ кометы Галлея въ 1682 г.

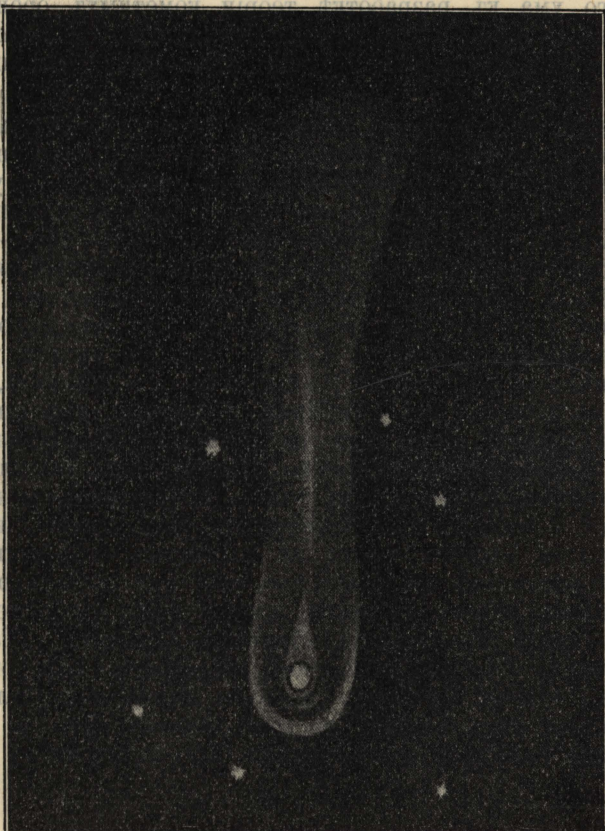
сказать, носилось въ воздухѣ уже, послѣ того, какъ путемъ измѣренія параллаксовъ было доказано космическое положеніе кометъ во вселенной. Около 1680 г. Гевель уже высказалъ утвержденіе, что кометы движутся по параболамъ, огибающимъ солнце. Данцигскій астрономъ исходилъ при этомъ изъ наблюденія, что брошенный камень описываетъ орбиту, близко подходящую къ параболѣ; онъ принялъ, что и кометы подвержены силѣ, аналогичной силѣ верженія брошеннаго тѣла (vis projectilis), и что она, слѣдовательно, какъ объ этомъ догадывался уже Кеплеръ, сообщаетъ кометамъ сначала прямолинейное движенiе, которое потомъ, подъ влiянiемъ притяженiя солнца, становится криволинейнымъ. Конечно, Гевель такъ же мало имѣлъ возможность доказать свою позже вполнѣ подтвердившуюся идею, какъ и Сенека свое ученiе о космической природѣ кометъ, высказанное имъ съ замѣчательной увѣренностью. Разносторонне образованный Доминикъ Кассини также прилагалъ всю изобрѣтательность своего ума къ разработкѣ теорiи кометныхъ орбитъ; онъ не достигъ, однако, удовлетворительнаго результата, такъ какъ, по примѣру Тихо, онъ принялъ при своихъ вычисленiяхъ землю за центръ движенiй.

Положить конецъ этимъ догадкамъ суждено было кометѣ 1680 г., чрезвычайно удивительное появленiе которой опять выдвинуло вопросъ о кометныхъ орбитахъ. Едва комета снова исчезла, какъ ученикъ Гевеля, Самуилъ Дёрфель, въ своихъ „Астрономическихъ наблюденiяхъ большой кометы, которая появилась въ 1680 — 1681 гг.“ привелъ доказательство того, что отдѣльныя наблюденныя имъ мѣста орбиты свѣтила можно размѣстить по параболѣ, фокусомъ которой служитъ солнце*); Бернулли же высказалъ уже даже гипотезу относительно возвращенiя кометы въ 1719 г. Однако, вполнѣ удовлетворительно рѣшилъ задачу только Ньютонъ: онъ доказалъ, что кометы движутся по коническимъ сѣченiямъ и нашелъ параболическiе элементы для кометы 1680 года на основанiи остроумнаго, хотя и сложнаго конструктивнаго прiема. Правда, онъ указалъ также на то, что истинныя орбиты кометъ только приближенно можно принять за параболы, и что, по всей вѣроятности, всѣ кометы, какъ и планеты, движутся вокругъ солнца по эллипсамъ, — во всякомъ случаѣ по столь удлиненнымъ орбитамъ, что, онѣ, при крайне короткомъ перiодѣ видимости кометъ съ земли, могутъ быть изображены простѣйшимъ изъ трехъ коническихъ сѣченiй — параболой. „Такимъ образомъ“, говоритъ Литровъ въ своей неодократно цитированной нами монографiи о кометѣ Галлея, „какъ бы мимоходомъ была разрѣшена великая задача, надъ которой до того тратили силы и время замѣчательнѣйшiе геометры: сразу внесенъ былъ порядокъ въ необозримый

*) Въ исторiи астрономiи Вольфа приведены слѣдующiя подлинныя слова Дёрфеля: „Считаю необходимымъ сообщить благосклонному читателю и предоставить на его обсужденiе свое послѣднее (хотя еще незрѣлое) открытiе, способное, быть можетъ, улучшить и усовершенствовать гипотезу Гевеля: не представляетъ ли линiя движенiя этой кометы (и другихъ) такую параболу, фокусъ которой находится въ центрѣ солнца?“. Такъ какъ это сочиненiе явилось раньше Ньютоновской разработки этой теорiи, то весьма часто признаютъ, что Дёрфелю, поистинѣ, принадлежитъ прiоритетъ въ дѣлѣ открытiя движенiя кометъ по параболическимъ орбитамъ. Такъ. напримѣръ, Кестнеръ въ своихъ „Начальныхъ основанiяхъ математики“ говоритъ:

„Истинная орбита кометы осталась для Кеплера еще скрытой; британцамъ ее впервые открылъ Ньютонъ; но еще до него ее уже обсуждалъ нѣмецъ; Ньютонъ прославленъ, а Дёрфель забытъ“.

хаосъ этихъ безчисленныхъ движеній, которыя казались вдвойнѣ запутанными изъ нашего обиталища, находящагося внѣ центра движеній; человѣку сразу удалось обозрѣть величайшія явленія природы, силою своего духа установить внутреннюю связь между движеніями миріадовъ тѣлъ, которыя до того блуждали по неразгаданнымъ орбитамъ въ обширномъ небесномъ пространствѣ. Кометы перестали уже внушать страхъ своимъ видомъ, и теперь сама собою обнаружилась полная



Видъ Кометы Галлея въ 1759 г.

несостоятельность повѣрья, будто кометы предсказываютъ войны, повальныя болѣзни, и т. п.“.

Конечно, и въ противникахъ открытія Дёрфеля и Ньютона не было недостатка. Лейбницъ, Гюйгенсъ и Маральди энергично оспаривали новое ученіе и замолкли только тогда, когда ученикъ Ньютона, Галлей, взялъ на себя обширный и чрезвычайно сложный трудъ — доказать правильность Ньютоновой теоріи на большомъ числѣ примѣровъ. Для этого онъ избралъ 24 кометы, появлявшіяся въ послѣднія столѣтія и подвергавшіяся точнымъ наблюденіямъ, въ томъ числѣ и комету 1682 года. Работа была окончена и опубликована только въ 1705 году. Она не только доказала справедливость воззрѣній Ньютона, но обнаружила еще и другой поразительный результатъ. Уже бѣглое обозрѣніе элементовъ орбиты показало, что кометы, появлявшіяся въ 1682, 1607 и 1531 гг., либо двигались по одной и той же орбитѣ, либо, въ виду приблизительнаго равенства промежутковъ времени между ихъ появленіями, должны быть признаны тождественными между собою. Теперь только Галлей принялъ за исходную точку эллипсъ и фактически доказалъ, что, принимая періодъ обращенія кометы въ 75 лѣтъ, можно во всей полнотѣ возстановить картину трехъ упомянутыхъ появленій. Весьма страннымъ показалось только неравенство періодовъ обращенія, противорѣчащее постоянству времени полнаго оборота въ семьѣ планетъ нашей солнечной системы. Галлею, однако, удалось вскорѣ выслѣдить причину этого неравенства періодовъ и объяснить его притяженіемъ Юпитера и Сатурна. Теперь оставалось только пересмотрѣть старыя записи относительно прежнихъ прохожденій кометы черезъ перигелій. При этомъ пересмотрѣ комету 1456 года самъ Галлей призналъ своею; даты прохожденія черезъ перигелій кометъ 1380 и 1305 гг., которыя Галлей также сопоставилъ съ кометою 1682 г., теперь оказались какъ бы противорѣчащими теоріи и должны были быть замѣнены, какъ мы видѣли, соотвѣтственно 1378 и 1301 гг. Теперь уже Галлей могъ предсказать съ полной достовѣрностью возвращеніе интересовавшаго его свѣтила на 1758 г.; вычисленіе показало ему, что подъ вліяніемъ возмущающихъ силъ Юпитера и Сатурна, комета, какъ можно ожидать, придетъ еще съ большимъ опозданіемъ, и только черезъ 77 лѣтъ, около 1759 г., достигнетъ перигелія; до блестящаго исполненія этого предсказанія Галлею, конечно, дожить не пришлось.

(Окончаніе слѣдуетъ).

Искусственные драгоцѣнные камни.

Издавна человѣкъ восхищается красотой драгоцѣнныхъ камней и старается самъ приготовить ихъ. Дѣйствительно, имитація этихъ камней является очень древнимъ искусствомъ. Вначалѣ, причинами этой имитаціи было вѣроятно, эстетическое чувство и желаніе сдѣлать драгоцѣнные камни болѣе доступными публикѣ. Но позже имитація, безъ сомнѣнія, практиковалась въ цѣляхъ спекуляціи, а нерѣдко и обмана.

Имитировать, старались, главнымъ образомъ, камни наиболѣе драгоцѣнные, какъ алмазъ, рубинъ, изумрудъ. Вначалѣ поддѣлки производились только при помощи стеколъ, затѣмъ ужъ стали замѣнять цѣнные камни другими, менѣе дорогими, и прибѣгать къ дублетамъ (см. ниже). Только нѣсколько десятилѣтій тому назадъ появляются попытки получить тѣла, тождественныя во всѣхъ своихъ существенныхъ свойствахъ съ драгоцѣнными камнями. Вопросъ объ изготовленіи этихъ послѣднихъ и составитъ предметъ настоящаго очерка. Но прежде необходимо сказать нѣсколько словъ объ имитаціяхъ другого рода, которыя скорѣе являются поддѣлками. Появленіе ихъ восходитъ до очень отдаленныхъ временъ: ихъ находятъ въ могилахъ кельтовъ; но дѣйствительно сходныя съ алмазами поддѣлки встрѣчаются только позже.

Первая настоящая имитація алмазовъ, такъ называемый стразъ, была изобрѣтена въ XVIII вѣкѣ. Стразъ получается путемъ сплавленія кварца, соды, буры, сурика и селитры; сплавъ представляетъ изъ себя красивое съ сильнымъ блескомъ стекло, оптическія свойства котораго сходны съ таковыми у алмаза.

Но одного уже различія въ твердости достаточно, чтобы легко отличить стразъ отъ алмаза, хотя безъ спеціальнаго испытанія, и при искусственномъ освѣщеніи, когда камни ошлифованы и оправлены, всегда возможно смѣшать эти два камня тѣмъ болѣе, что съ того времени въ производствѣ свинцовыхъ стеколъ достигли еще бо̀льшаго совершенства.

При помощи соотвѣтствующихъ прибавленій къ стеклу можно поддѣлать цвѣтъ главныхъ драгоцѣнныхъ камней; напримѣръ, цвѣтъ рубина поддѣлывается прибавленіемъ смѣси окиси желѣза, сѣрнистаго золота, сурьмы, Кассіева пурпура и перманганата калія $K_2Mn_2O_7$. Голубой цвѣтъ сафира получается прибавленіемъ къ стеклу окиси кобальта, цвѣтъ изумруда — прибавленіемъ смѣси окиси желѣза и окиси мѣди. Однако, въ настоящее время, если только возникаетъ подозрѣніе, можно отличить имитацію изъ стекла отъ настоящихъ драгоцѣнныхъ камней, чаще всего благодаря рѣзкому цвѣту и меньшей твердости.

Другой видъ имитаціи — это дублеты; при помощи подходящей мастики прикрѣпляютъ тонкій слой настоящаго камня на стекло такого же цвѣта и получаютъ драгоцѣнный камень; но при испытаніи уловка легко раскрывается.

Часто случается также, что за драгоцѣнные камни выдаютъ камни другіе, схожіе съ первыми, но менѣе цѣнные. Такъ, уже давно алмазъ подмѣнивали бѣлымъ циркономъ и бѣлымъ сафиромъ — камнями, въ дѣйствительности очень похожими на алмазъ. Горнымъ хрусталемъ пользуются для этой цѣли рѣже вслѣдствіе того, что онъ имѣетъ гораздо менѣе живой блескъ и меньшую твердость. За рубинъ выдавали, главнымъ образомъ, шпинель, за сафиръ—шпинель и камень, извѣстный подъ именемъ водяного сафира. Изумрудъ замѣнялся хризолитомъ и зеленымъ гранатомъ, иногда также зеленымъ циркономъ. Однако, всѣ эти камни меньшей цѣнности отличаются отъ камней, которые мы называемъ драгоцѣнными, удѣльнымъ вѣсомъ, твердостью, лучепреломляемостью и плеохроизмомъ*).

*) Плеохроизмъ заключается въ различной окраскѣ минерала, если на него смотрѣть съ различныхъ сторонъ.

Разсмотримъ теперь имитаціи, которыя появились на свѣтъ въ концѣ XIX-го столѣтія. Здѣсь дѣло идетъ уже не столько о выдѣлкѣ тѣлъ, похожихъ на настоящіе камни, сколько о полученіи тѣлъ, обладающихъ всѣми существенными свойствами драгоцѣнныхъ камней. Каковы же тѣ свойства искусственнаго камня, изготовленнаго въ лабораторіи, при наличности которыхъ онъ могъ бы считаться тождественнымъ съ естественными камнями? Необходимо, прежде всего, чтобы онъ обладалъ такимъ же химическимъ составомъ, такими же кристаллографическими и физическими свойствами, какъ и естественный камень, другими словами, онъ долженъ имѣть точно такое же кристаллическое строеніе, точно такую же кристаллическую форму, удѣльный вѣсъ и твердость, что и настоящій камень. Необходимо также, чтобы оптическія свойства, коэффиціентъ преломленія, дихроизмъ, блескъ и цвѣтъ были такими, какіе наблюдаются въ естественныхъ камняхъ. Необходимо, кромѣ того, чтобы цвѣтъ являлся продуктомъ одного и того же красящаго вещества, чтобы распредѣленіе отдѣльныхъ цвѣтовъ было одно и тоже, чтобы былъ на лицо плеохроизмъ, если онъ имѣетъ мѣсто въ естественномъ камнѣ. Даже случайные признаки, которые наблюдаются въ настоящихъ драгоцѣнныхъ камняхъ, каковы трещины, микроскопическія скважины, жидкія включенія, небольшія иглы и пр., должны находиться въ искусственномъ камнѣ. Разумѣется, трудно получить тѣло со всѣми указанными признаками драгоцѣнныхъ камней, и успѣха можно достигнуть только въ исключительныхъ случаяхъ. Нужно сказать, что изготовленіе искусственныхъ камней до настоящаго времени достигло высокой степени совершенства только въ небольшомъ числѣ случаевъ; если бы искусственные камни находились въ необработанномъ видѣ, то опредѣленіе ихъ было бы дѣломъ довольно легкимъ, ибо въ большинствѣ случаевъ искусственные камни въ сыромъ видѣ сильно отличаются отъ настоящихъ: первые часто получаются даже не въ кристаллической формѣ; напримѣръ, искусственные рубины получаются въ видѣ капель. И даже кристаллическую форму искусственные камни обыкновенно имѣютъ отличную отъ той, какую мы наблюдаемъ въ кристаллахъ естественныхъ камней. Къ тому же послѣдніе обыкновенно различаются другъ отъ друга и въ зависимости отъ мѣста своего нахожденія; такъ, напримѣръ, сафиры и рубины Цейлона разнятся отъ сафировъ и рубиновъ Урала, или алмазы Бразиліи — отъ алмазовъ Кимберлея; камни эти не обладаютъ ни одной и той же формой, ни одними и тѣми же свойствами. Къ сожалѣнію, искусственные камни продаются только въ отдѣланномъ видѣ, благодаря чему опредѣленіе ихъ становится въ такой мѣрѣ затруднительнымъ, что для нѣкоторыхъ рубиновъ знатоки получали возможность распознать ихъ истинное происхожденіе только послѣ кропотливаго испытанія.

Поднимался вопросъ о томъ, имѣемъ ли мы дѣйствительно право называть имитаціями искусственные камни, настолько похожіе своими существенными свойствами на настоящіе, что становится невозможнымъ отличить ихъ одинъ отъ другого. По моему, на этотъ счетъ не можетъ быть никакого сомнѣнія: вѣдь искусственнымъ камнямъ на самомъ дѣлѣ недостаетъ самаго важнаго свойства, которое легко констатировать, когда камень въ сыромъ видѣ, и невозможно, когда онъ отдѣланъ,— свойство, которое составляетъ одинъ изъ основныхъ признаковъ при опредѣленіи всякаго минеральнаго вещества; именно, это долженъ быть настоящій естественный продуктъ. Искусственный камень есть не что иное, какъ имитація, предназначенная для обмана; такіе полученные синтетически продукты несомнѣнно заслуживаютъ названія поддѣлокъ. Соотвѣтствующее названіе рубина и изумруда, полученныхъ синтетически, будетъ поэтому: рубинъ искусственный, изумрудъ искусственный.

Вмѣстѣ съ тѣмъ всякій, кто продаетъ за настоящіе эти искусственные рубины, какъ бы они ни были похожи на настоящіе, совершаетъ обманъ. Ибо тотъ, кто покупаетъ или собираетъ драгоцѣнные камни, цѣнитъ не только физическія свойства, но, главнымъ образомъ, ихъ рѣдкость; онъ желаетъ имѣть, во всякомъ случаѣ, естественный продуктъ. Если бы сдѣлалось абсолютно невозможнымъ отличать искусственные камни отъ настоящихъ, ювелиры должны были бы покупать только тѣ камни, происхожденіе которыхъ могло быть удостовѣрено, или камни въ необработанномъ видѣ, природу которыхъ легко распознать. Правда, торговля отдѣланными камнями сдѣлалась бы тогда уже значительно затруднительнѣе.

Наиболѣе драгоцѣнные камни суть алмазъ, рубинъ, изумрудъ и сафиръ; они и составляютъ въ настоящее время главный предметъ индустріи искусственныхъ камней. Промышленность эта началась уже давно фабрикаціей менѣе драгоцѣннаго камня, а именно бирюзы. Раньше за бирюзу выдавали камень, похожій на него по внѣшнему виду, именно, слоновую или западную бирюзу; нѣсколько же десятилѣтій тому назадъ получили синтетически бирюзу, имѣющую всѣ свойства естественнаго камня. Вслѣдствіе такого сходства свойствъ въ прежнее время часто находили въ торговлѣ эту искусственную бирюзу; быть можетъ, она и въ настоящее время есть въ торговлѣ. Получить точныя данныя относительно приготовленія искусственной бирюзы не удалось; однако, извѣстно, что она приготовляется химическимъ путемъ въ видѣ осадка фосфорной кислоты и окиси алюминія, который необходимо затѣмъ подвергнуть сильному давленію чтобы онъ отвердѣлъ. Единственное вѣрное средство отличить химическій продуктъ отъ естественнаго камня — это подвергнуть его нагрѣванію; къ сожалѣнію, оно разрушаетъ какъ искусственный, такъ и естественный камень. Настоящая бирюза, будучи накалена, раскалывается съ сильнымъ трескомъ, превращаясь въ легкую темно-бурую пыль; искусственная же сжимается или плавится въ мутную массу, которая внутри сохраняетъ голубой или зеленый цвѣтъ. Утверждаютъ также, что эта послѣдняя размягчается въ алкоголѣ.

Производство рубиновъ имѣетъ большое значеніе. Впервые въ этомъ достигъ успѣха въ 1837 г. Годенъ (Gaudin). Ему послѣдовалъ Беттгеръ (Böttger), который получилъ красящее вещество для рубиновъ при посредствѣ двухромовокислаго калія. Эбельменъ (Ebelmen) въ 1848 году употреблялъ глину и буру, прибавляя для окраски смѣсь окиси хрома и углекислаго натра. Генри Сентъ-Клеръ-Девиль (Henri Sainte-Claire-Deville) и Каронъ (Caron) разложили при высокой температурѣ Al_2F_6 и получили красные, зеленые и голубые кристаллы, прибавляя фтористый хромъ. Можно было бы также разложить при высокой температурѣ и $AlCl_3$, хлористый алюминій, дѣйствіемъ водяного пара, какъ это сдѣлалъ Менье (Meusnier):

$$(AlCl_3)_2 + 3H_2O = Al_2O_3 + 6HCl.$$

Готфейль (Hautefeuille) и Перси (Percy) нашли нѣсколько способовъ полученія кристаллической окиси алюминія,— напримѣръ, сплавленіемъ смѣси Al_2O_3, Na_2S и минерала, называемаго нефелиномъ ($NaAlSiO_4$).

Всѣ эти опыты доставляли микроскопическіе рубины или зерна, настолько малыя, что они не имѣли никакого коммерческаго значенія. Только благодаря трудамъ Фреми (Frémy) и его сотрудниковъ удалось получить рубины крупной величины. Первый разъ Фреми получилъ рубинъ изъ алюмината свинца. Алюминатъ этотъ даютъ при красномъ каленіи окись свинца и глина; кремнекислотой тигля алюминатъ разлагается, при чемъ кислота соединяется съ окисью свинца въ силикатъ свинца, а окись алюминія кристаллизуется. Фреми и Фейль (Feil) употребляли смѣсь равныхъ частей Al_2O_3 и сурика съ 3% двухромовокислаго калія; получался рубинъ, но только въ видѣ тонкихъ пластинокъ. Крупные кристаллы получались только при употребленіи фтористыхъ соединеній, которыя прибавлялись къ первоначальному веществу, дающему окись алюминія. Въ качествѣ красящаго вещества употребляли опять отъ 2% до 3% двухромовокислаго калія. Послѣ нѣсколькихъ пробъ былъ окончательно выбранъ фтористый барій, какъ самый чистый. Но это соединеніе не постоянное; водяной паръ воздуха, повидимому, разлагаетъ фтористый алюминій, который получается, какъ промежуточный продуктъ. Въ самомъ дѣлѣ, въ непроницаемыхъ тигляхъ, каковы тигли изъ графита, не имѣло мѣста образованіе рубина; камни эти получались только въ помѣщеніяхъ, доступныхъ влажному воздуху. Но рубины могутъ получаться и безъ фтористыхъ соединеній. Фреми допускаетъ, что нѣкоторое вліяніе имѣетъ калій. Рубины содержали самое большое слѣды этихъ ингредіентовъ.

Я полагаю, что главная роль фтористыхъ соединеній заключается въ томъ, что они способствуютъ кристаллизаціи въ качествѣ растворителей и, кромѣ того, понижаютъ точку плавленія.

Эбельменъ, Гаденъ и Фреми прибавляли къ смѣси глины и хромовокислаго калія такъ называемыхъ агентовъ кристаллизаціи, которые въ данномъ случаѣ имѣли цѣлью, какъ мы только что сказали, только понизить точку плавленія; послѣдняя была такъ высока, что ея не могли получать въ угольныхъ и газовыхъ печахъ, бывшихъ тогда въ употребленіи. Позже пользовались воздуходувными машинами, черезъ которыя продували гремучій газъ, и электрическими печами, которыя доставляли такія высокія температуры, при которыхъ можно было совершенно расплавить окись алюминія, не прибѣгая къ помощи упомянутыхъ выше агентовъ.

Рубинъ является также вторичнымъ продуктомъ при нѣкоторыхъ процессахъ промышленности, главнымъ образомъ, при производствѣ термита Г. Гольдшмидта (H. Goldschmidt), а также при полученіи окиси алюминія въ Нейгаузенѣ (Neuhausen) на Рейнѣ.

Упомянемъ еще о нѣсколькихъ способахъ полученія рубина, примѣненныхъ Готфейлемъ, которые, впрочемъ, не имѣли практическаго приложенія.

До сихъ поръ всѣ производства рубина совершались въ чисто научныхъ интересахъ, и только въ послѣднее время промышленность завладѣла этими способами для производства драгоцѣнныхъ камней въ большихъ размѣрахъ. Сначала дѣло касалось только полученія маленькихъ рубиновъ, главнымъ образомъ, для замѣны настоящихъ рубиновъ въ часахъ; но мало-по-малу ихъ стали фабриковать для подмѣны драгоцѣнныхъ камней и для употребленія ихъ въ украшеніяхъ.

Первые хорошіе граненные рубины, появившіеся въ торговлѣ ужъ двадцать лѣтъ тому назадъ, были изъ Женевы, т. е. изъ того мѣста, гдѣ они впервые появились на свѣтъ. Ихъ назвали „реконструированными рубинами" („rubis reconstruits"); это названіе съ теченіемъ времени распространилось на всѣ французскіе искусственные рубины. Оказалось, что они получались, главнымъ образомъ, путемъ переплавленія пыли отъ настоящихъ рубиновъ или тѣхъ незначительныхъ настоящихъ рубиновъ, которые потеряли цѣнность. Различались они отъ драгоцѣнныхъ камней легко, такъ какъ содержали включенія стекла и цвѣтъ ихъ, не будучи однороднымъ, отличался немного отъ цвѣта настоящихъ рубиновъ. Въ круксовой трубкѣ также было установлено нѣкоторое различіе между ними. Пользуясь аналогичными способами, Вернейль (Verneuil) въ Парижѣ и Мите (Miethe) въ Берлинѣ достигли результатовъ, показывающихъ значительный прогрессъ этого дѣла. Оба эти химика пользуются исключительно окисью алюминія и красящимъ веществомъ. Вернейль употребляетъ для окраски 2,5% окиси хрома или двухромовокислаго калія и смѣсь порошковъ нагрѣваетъ на вертикальной воздуходувной машинѣ, снабженной цилиндромъ изъ окиси алюминія.

Германская компанія производства драгоцѣнныхъ камней въ Идарѣ пользуется методомъ Мите, употребляя, какъ и онъ, чистую окись алюминія. Говорятъ, что производство, детали котораго неизвѣстны, ведется въ электрическихъ печахъ. Продукты отличаются красотой и на самомъ дѣлѣ удивительнымъ сходствомъ съ настоящими камнями.

Наконецъ, для полученія болѣе крупныхъ кристалловъ практикуютъ прибавленіе готовыхъ уже кристалловъ, что предохраняетъ отъ чрезмѣрнаго охлажденія. Что зерна, такимъ образомъ полученныя и часто очень крупныя, даютъ мѣсто кристалламъ безъ стекла, объясняется большою скоростью кристаллизаціи и большою способностью къ кристаллизаціи окиси алюминія, которая при соотвѣтствующемъ охлажденіи переходитъ въ кристаллъ безъ всякаго слѣда стекла; образованіе же крупныхъ кристалловъ, годныхъ для шлифовки, является слѣдствіемъ этой большой скорости кристаллизаціи.

(Окончаніе слѣдуетъ).

По поводу новаго объясненія твердости тѣлъ.

Л. Видемана.

На-дняхъ въ Москвѣ вышелъ изъ печати новый учебникъ физики Аменицкаго*), содержащій въ приложеніи очень интересную замѣтку о новой теоріи твердости тѣлъ по ученію Лебона, Гульвича и др.—Эта теорія основана на весьма замѣчательныхъ опытахъ, которые, однако, какъ мнѣ кажется, истолкованы ошибочно и, въ сущности, для своего объясненія не нуждаются ни въ какой новой теоріи. Вотъ одинъ изъ этихъ опытовъ. Приведите въ чрезвычайно быстрое вращательное движеніе тонкій картонный кругъ и поднесите къ его краю деревянную палочку, напримѣръ, карандашъ. Казалось бы, отъ такого соприкосновенія картона и дерева долженъ пострадать мягкій картонъ, а не твердое дерево, на самомъ же дѣлѣ картонъ при этихъ условіяхъ моментально разрѣжетъ деревянную палочку, а самъ нисколько не пострадаетъ! Точно такъ же, если понадобится распилить сталь, агатъ или другой подобный предметъ, то достаточно приложить его къ вращающемуся тонкому кругу изъ обыкновеннаго мягкаго желѣза, и, если скорость его вращенія достигнетъ по окружности ста метровъ въ секунду, то сталь будетъ перерѣзана. При этомъ отъ стали посыпятся искры, а желѣзный кругъ даже не нагрѣется. На основаніи этихъ опытовъ, повидимому, можно заключить, что сущность твердости не въ сцѣпленіи, какъ учила физика до сихъ поръ, а въ той или иной скорости движенія всего тѣла или же его частицъ. Въ самомъ дѣлѣ, если мягкое желѣзо при быстромъ вращеніи рѣжетъ сталь, т. е. достигаетъ на мгновеніе высшей степени твердости, то не заключается ли причина огромной твердости алмаза также въ постоянномъ чрезвычайно быстромъ вращеніи его частицъ, котораго мы не видимъ только потому, что нашъ глазъ не различаетъ вообще внутренняго строенія вещества? Такое предположеніе, пожа-

*) Н. А. Аменицкій, преподаватель женской гимназіи. „Физика въ примѣненіи къ обыденнымъ явленіямъ и вопросамъ жизни“.

луй, еще болѣе подтверждается третьимъ замѣчательнымъ опытомъ: если пустить вверхъ или горизонтально струю воды съ огромной быстротой, то ее невозможно перерубить саблей. Лезвіе стали отскакиваетъ отъ движущихся частицъ воды, какъ отъ каменной стѣны. Однако, всѣ эти умозаключенія представляются плодомъ недоразумѣнія. Въ той же книгѣ приводится общеизвѣстный фактъ пробиванія камня водою, падающею на него много лѣтъ. Г. Аменицкій упоминаетъ объ этомъ лишь вскользь, между тѣмъ это явленіе — прекрасная исходная точка для объясненія всѣхъ приведенныхъ поразительныхъ опытовъ; стоитъ лишь задать себѣ вопросъ, отчего зависитъ дѣйствіе падающихъ водяныхъ капель на камень? Очевидно, вся суть въ ихъ огромномъ количествѣ: если въ каждую секунду на камень упадетъ только по одной каплѣ, то въ теченіе года ихъ упадаетъ 30 000 000; не удивительно, что онѣ, въ концѣ-концовъ, пробьютъ камень. Теперь представимъ себѣ, что мы нашли бы способъ выпустить весь этотъ зарядъ капель, не сливая ихъ вмѣстѣ, въ теченіе хотя бы одного часа: очевидно, дѣйствіе ихъ не уменьшится отъ того, что оно не растянулось на цѣлые года; но неужели въ этомъ случаѣ творцы новой теоріи сочли бы себя въ правѣ утверждать, что дѣло не въ милліонахъ капель, а въ томъ, что вода будто бы превратилась на этотъ часъ изъ мягкаго вещества въ твердое? Въ сущности нѣчто подобное происходитъ и въ прочихъ опытахъ.

При разрѣзываніи желѣзнымъ кругомъ стали кругъ, какъ упомянуто, вертится съ такою скоростью, что каждая точка на его окружности проходитъ въ секунду 100 *м.* Сколько времени нужно, чтобы сталь была разрѣзана, въ описаніи опыта не сказано, но предположимъ, что для этого достаточно 20 секундъ; въ такомъ случаѣ каждая точка окружности успѣетъ пройти $20 \times 100 = 2000$ *м.* или около двухъ верстъ! Не правда ли, получается нѣчто аналогичное милліону водяныхъ капель? Вѣдь вращеніе прикасающагося къ стали, а, слѣдовательно, и трущагося объ нее желѣзнаго круга при такихъ условіяхъ можно приравнять къ протягиванію по той же стали двухверстной проволоки, а если предположить, что сталь имѣетъ толщину въ 1 *см.*, то выйдетъ, что по одному сантиметру стали проволочутся 200 000 *см.* проволоки! Вполнѣ понятно, если сталь будетъ перерѣзана. Остается выяснить вопросъ о нагрѣваніи.

Для этого сосчитаемъ, сколько оборотовъ долженъ сдѣлать кругъ. Это конечно зависитъ отъ его діаметра. Если предположить, что діаметръ круга равенъ $1\frac{1}{2}-2$ *м.*, то его окружность будетъ составлять около 5 *м.*, и такой кругъ достаточно повернуть 400 разъ, чтобы мимо разрѣзываемой стали пролетѣли тѣ же 200 000 *см.*, какъ если бы мы протянули по ней двухверстную проволоку. Далѣе, если кругъ сдѣлаетъ въ 20 секундъ 400 оборотовъ, то въ 1 секунду онъ сдѣлаетъ 20 оборотовъ; слѣдовательно, въ теченіе секунды каждая его точка испытаетъ на себѣ лишь 20 разъ треніе 1 *см.* стали, при томъ съ перерывами въ 500 разъ большими, нежели продолжительность самого тренія, тогда какъ сталь, т. е. небольшая часть ея поверхности, за то же время испытаетъ непрерывное треніе десяти тысячъ сантиметровъ желѣза. Ясно, что отъ стали должны сыпаться искры, а частицы желѣза, пролетая съ молніеносной быстротой мимо стали, едва успѣваютъ въ моментъ соприкасанія получить самое ничтожное количество тепла, да и то растрачиваютъ его при дальнѣйшемъ полетѣ. Произведя простой ариѳметическій разсчетъ, мы убѣдимся, что, если при такомъ соотношеніи количествъ тренія 1 *кв. см.* стали нагрѣется на сто градусовъ, то 1 *кв. см.* кружка нагрѣется менѣе, нежели на $^1/_4$ градуса.

Международная Коммиссія по преподаванію математики*).

Германія. Въ составъ германской подкоммиссіи вошли: президентъ коммиссіи Клейнъ (F. Klein) и Трётлейнъ (Treutlein), первый—по порученію Центральнаго Комитета, второй—по полномочію Союза германскихъ математиковъ. Имѣя порученіе организовать германскую подкоммиссію, они адоптировали въ первую очередь редакторовъ изданій, посвященныхъ преподаванію математики и физики, именно Гутцмера (Gutzmer), Питцкера (Pietzker), Поске (Poske) и Шоттена (Schoten). Питцкеръ, однако, вскорѣ отказался, и на его мѣсто былъ приглашенъ проф. Тэръ (Thaer), директоръ реальнаго училища въ Гамбургѣ. Кромѣ этихъ руководящихъ лицъ въ составъ подкоммиссіи вошелъ рядъ болѣе молодыхъ членовъ.

Относительно работъ подкоммиссіи проф. Клейнъ сообщаетъ слѣдующее. Работы подкоммиссіи значительно подвинулись впередъ. Подкоммиссія работаетъ совмѣстно съ постоянно дѣйствующей „Педагогической Коммиссіей Союза германскихъ естествоиспытателей и врачей". Работы подкоммиссіи найдутъ собѣ выраженіе въ двухъ серіяхъ изданій: одна подъ заглавіемъ „Извѣстія и доклады, составленные по инициативѣ Международной Коммиссіи по преподаванію математики" (Berichte und Mitteilungen, veranlasst durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission), —другая подъ заглавіемъ „Статьи по преподаванію математики въ Германіи, составленныя по инициативѣ М. К. п. пр. м." („Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranalasst von der I. M. U. K."). Въ первой серіи по настоящее время вышли въ свѣтъ три брошюры: 1) предварительный докладъ Центральнаго Комитета (см. „Вѣстникъ", № 475—476); 2) G. Noodt, „Über die Stellung der Mathematik im Lehrplan der höheren Mädchenschule vor und nach der Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens in Preussen"; 3) F. Klein u. H. Fehr. „Erstes Rundschreiben des Hauptausschusses" (первый циркуляръ Центральнаго Комитета**). Во второй серіи появилась пока одна статья Литцмана

*) См. „Вѣстникъ", № № 475—476, 485—486, 487, 488.

**) Циркуляръ этотъ еще не полученъ редакціей.

„Матеріалъ и методы въ математическихъ учебникахъ, принятыхъ въ Сѣверной Германіи“ (Lietzmann, „Stoff und Methode in den Mathematischen Lehrbüchern Norddeutschlands“).

Франція. Почетный предсѣдатель подкоммиссии Аппель (Appell), предсѣдатель Ст. Жерменъ (Saint-Germain). Подкоммиссія раздѣлилась на секціи съ цѣлью составить рядъ подготовительныхъ докладовъ.

Италія. На мѣсто скончавшагося проф. Вайлати (Vailati) въ составъ делегаціи вошелъ проф. Скорца (Scorza). Ближайшихъ свѣдѣній о работахъ подкоммиссіи еще нѣтъ.

Краткій отчетъ о засѣданіи Московскаго Математическаго Кружка.

Въ засѣданіи, бывшемъ 25-го сентября 1909 г., прив.-доц. Московскаго Университета С. П. Виноградовъ сдѣлалъ сообщеніе: „Лекціи проф. Ф. Клейна (F. Klein): „Elementarmathematik vom höheren Standpuncte aus“. Theil I. Leipzig 1908. (Litographirt)“.

Лекціи проф. Клейна, вышедшія въ литографированномъ изданіи подъ указаннымъ названіемъ, были читаемы въ Геттингенѣ въ зимній семестръ 1907-1908 г. для кандидатовъ на должность преподавателей математики въ гимназіяхъ и реальныхъ училищахъ. Онѣ состоятъ изъ 3 частей: 1-я посвящена ариѳметикѣ, 2-я — алгебрѣ и 3-я — анализу. Къ 1-й части присоединенъ очеркъ о современномъ развитіи и построеніи математики вообще, а въ концѣ книги имѣется 2 прибавленія: доказательство трансцендентности чиселъ e и π и основанія теоріи множествъ. Лекціи не представляютъ собою ни исчерпывающаго учебника по отдѣльной части математики, ни руководства по методикѣ предмета. Цѣлью ихъ служитъ уничтоженіе той двойной прерывности, которая и до сихъ поръ замѣчается между математикой средней школы и университетской математикой. Средствомъ для достиженія цѣли служитъ указаніе, посредствомъ научныхъ обзоровъ, взаимной связи между вопросами отдѣльныхъ дисциплинъ и особенно ихъ отношенія къ задачамъ школьной математики. Попутно Клейнъ даетъ множество цѣнныхъ историческихъ и литературныхъ указаній*).

Референтъ вкратцѣ познакомилъ собраніе съ содерженіемъ каждаго отдѣла лекцій проф. Клейна, останавливаясь на наиболѣе характерныхъ и интересныхъ мѣстахъ, а въ заключеніе изложилъ, какія реформы Клейнъ желалъ бы видѣть осуществленными въ преподаваніи элементарной математики. Клейнъ желалъ бы, чтобы отсталость средней школы сравнительно съ высшей была не болѣе, какъ на 30 лѣтъ, тогда какъ современная отсталость охватываетъ болѣе, чѣмъ столѣтіе, ибо школа игнорируетъ почти все развитіе математики, начиная съ Эйлера. Пожеланія Клейна можно резюмировать такъ: центральнымъ пунктомъ всего математическаго образованія должно быть понятіе о функціи; основанія исчисленія безконечно-малыхъ должны быть введены въ курсъ средней школы явно; способъ преподаванія долженъ быть наглядный, для чего рекомендуется широкое пользованіе графическимъ методомъ. Референтъ закончилъ изложеніемъ требованій, которымъ, по мнѣнію Клейна, долженъ удовлетворять преподаватель математики въ средней школѣ. Въ виду высокаго достоинства и значенія лекцій Клейна

*) Первая часть печатается въ „Вѣстникѣ“ подъ заглавіемъ „Лекціи по ариѳметикѣ для учителей“.

членами Кружка было выражено желаніе выслушать рефератъ о 2-й части лекцій — о геометріи, а также горячее пожеланіе, чтобы онѣ были возможно скорѣе полностью переведены на русскій языкъ.

Въ дѣловой части засѣданія обсуждался вопросъ объ участіи Математическаго Кружка въ имѣющемъ быть въ декабрѣ и январѣ мѣсяцахъ въ Москвѣ съѣздѣ естествоиспытателей и врачей, а также въ трудахъ международной коммиссіи по реформѣ математики.

РЕЦЕНЗІИ.

Проф. Ф. Кэджори. Исторія элементарной математики съ указаніями на методы преподаванія. Переводъ съ англійскаго подъ редакціей, съ примѣчаніями и прибавленіями прив.-доц. И. Ю. Тимченко. VI + 318 стр. Одесса, „Mathesis“. Ц. 2 р. 50 к.

Врядъ ли есть другая отрасль математики, которой въ русской литературѣ такъ мало посчастливилось, какъ исторіи математики. Работы г. Бобынина и г. Тимченко являются почти исключительно научными изслѣдованіями, интересными для спеціалистовъ, и развѣ только обширная исторія геометріи профессора Ващенко-Захарченко можетъ послужить русскому читателю для ознакомленія съ исторіей математики. Мы считаемъ поэтому чрезвычайно своевременнымъ появленіе на русскомъ языкѣ одного изъ лучшихъ европейскихъ сочиненій по исторіи элементарной математики.

Въ историческомъ сочиненіи, посвященномъ обзору развитія той или иной науки, особенно важно выпукло изобразить постепенную эволюцію основныхъ идей, не загромождая изложенія частностями, мелочами, отвлекающими читателя. Насколько можно въ этомъ отношеніи грѣшить, можетъ судить всякій, кому приходилось разсматривать вышедшее недавно двухтомное сочиненіе Тропфке (Tropfke) „Geschichte der Elementarmathematik“. 1200 страницъ, которыя занимаетъ эта книга, сплошь заполнены густо нанизанными другъ на друга фактами, въ которыхъ изъ-за лѣса не видно дровъ. Въ противоположность этому книга Кэджори написана чрезвычайно живо; роль каждаго народа и отдѣльныхъ его представителей въ исторіи математическихъ дисциплинъ, преемственная связь идей и ходъ ихъ эволюціи выступаютъ здѣсь съ полной ясностью. Благодаря тому, что второстепенный матеріалъ совершенно оставленъ въ сторонѣ, читатель не путается въ мелочахъ и составляетъ себѣ ясное представленіе о тѣхъ препятствіяхъ, которыя стояли на пути изслѣдователя, о тѣхъ усиліяхъ, которыя были сдѣланы въ теченіе вѣковъ для рѣшенія трудныхъ математическихъ задачъ. Съ особенной наглядностью авторъ выясняетъ, что наибольшаго труда потребовали наиболѣе элементарныя основныя теоріи, сдѣлавшіяся въ настоящее время тривіальными. Представляетъ ли себѣ ребенокъ, такъ легко усваивающій въ настоящее время нашу систему счисленія, какая огромная работа мысли была затрачена на ея разработку? Знаетъ ли даже преподаватель, какую роль фактически сыграла десятичная система счисленія, какую борьбу она выдержала съ абакомъ, какъ медленно шла эволюція понятія о числѣ, какъ эта эволюція отражалась на успѣхахъ алгебры? Все это изложено въ книгѣ Кэджори съ большимъ умѣньемъ. Геометрія и тригонометрія отдѣлены отъ науки чиселъ въ каждомъ большомъ періодѣ. Нѣсколько спеціальный характеръ носятъ только частности, которыя относятся къ исторіи математики въ Англіи и которыя для насъ представляютъ меньшій интересъ; такъ, напримѣръ, главы: „Англійскіе вѣса и мѣры“, — „Возникновеніе школы коммерческой ариѳметики въ Англіи“, — „Причины, задержавшія развитіе теоретической ариѳметики въ Англіи“, написаны съ подробностями, которыя объясняются только тѣмъ, что авторъ самъ англичанинъ.

Нужно сказать, впрочемъ, что теорія развитія странной и своеобразной англійской системы мѣръ не лишена интереса и для русскаго читателя.

Что касается педагогическихъ указаній, о которыхъ говорится въ предисловіи, то нужно сказать, что имъ удѣлено сравнительно мало мѣста и играютъ они въ этомъ сочиненіи весьма второстепенную роль. Впрочемъ, совмѣстить изложеніе исторіи математики съ обсужденіемъ педагогическихъ вопросовъ довольно трудно, и мы не знаемъ сочиненія, въ которомъ это было бы удачно выполнено.

Переводъ сдѣланъ безукоризненно и дополненъ семнадцатью прибавленіями, принадлежащими приватъ-доценту И. Ю. Тимченко.

Подробный указатель дѣлаетъ книгу также очень удобной для справокъ.

Н. Р.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Новое сообщеніе проф. Рамзая о превращеніи химическихъ элементовъ. Какъ извѣстно, въ 1907 году англійскій химикъ Рамзай опубликовалъ весьма интересную статью о превращеніи мѣди въ литій подъ вліяніемъ эманаціи радія. Этотъ удивительный результатъ тщательно произведеннаго опыта привелъ его къ заключенію, что посредствомъ эманаціи можно будетъ превращать вообще одни элементы въ другіе. Но вскорѣ послѣ этого, какъ небезызвѣстно читателямъ „Вѣстника Опытной Физики и Элем. Математики“ *) появилась работа M-me Кюри и M-lle Гледичъ, опровергающая работу Рамзая Въ отвѣтъ на это опроверженіе Рамзай напечаталъ возраженіе, въ которомъ отстаиваетъ свою точку зрѣнія, а въ послѣднее время появилась другая, еще болѣе интересная работа Рамзая о превращеніи элементовъ четвертой группы періодической системы (кремнія, титана, цирконія, торія, свинца) въ углеродъ — въ низшій членъ этой группы. Подробности этой статьи будутъ приведены въ слѣдующемъ номерѣ „Вѣстника“.

Отчетъ о задачѣ на премію № 2.

Въ редакцію поступило 18 рѣшеній задачи на премію № 2. Изъ нихъ вполнѣ правильными признаны двѣ: одна принадлежитъ инспектору Саратовскаго І-го Реальнаго училища Е. Григорьеву, а другое—студенту Новороссійскаго Университета М. Шейнфинкелю. По совѣщанію между членами редакціи означеннымъ лицамъ назначены преміи. Не желая задерживать отчета, мы ограничимся здѣсь этимъ сообщеніемъ, а въ слѣдующемъ номерѣ помѣстимъ болѣе подробныя свѣдѣнія о присланныхъ рѣшеніяхъ, а также рѣшеніе г. Григорьева полностью. Авторы премированныхъ рѣшеній приглашаются сообщить редакціи, какія они желаютъ получить сочиненія въ видѣ преміи.

*) См. статьи „Преобразованіе элементовъ“ В. Оствальда и „Эманація радія“ В. Рамзая въ № 439 „Вѣстника“ и статью „Дѣйствіе эманаціи радія на растворы солей мѣди“ M-me Кюри и M-lle Гледичъ въ № 475—476 „Вѣстника“.

ЗАДАЧИ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 216 (5 сер.). Прямыя AO, BO, CO встрѣчаютъ окружность, описанную около треугольника ABC, соотвѣтственно въ точкахъ A_1, B_1, C_1; доказать, что соотвѣтственныя точки встрѣчи C_2, A_2, B_2 сторонъ AB и A_1B_2, BC и B_1C_1, AC A_1C_1 лежать на одной прямой.

Б. Двойринъ (Одеса).

№ 217 (5 сер.). Рѣшить систему уравненій:

$$x^3 + y^3 + xy\sqrt{xy} = 73,$$

$$x^3 + z^3 + xz\sqrt{xz} = 757,$$

$$y^3 + z^3 + yz\sqrt{yz} = 1009,$$

З. Цывьянъ (Виндава).

№ 218 (5 сер.). Даны двѣ пересѣкающіяся окружности центровъ O и O'. Построить сѣкущую, встрѣчающую ихъ послѣдовательно въ точкахъ A, B, C, D такъ, чтобы имѣло мѣсто равенства $AB = BC = CD$.

Н. С. (Одесса).

№ 219 (5 сер.). Доказать слѣдующій общій признакъ дѣлимости на 43 или на 7: сложимъ число всѣхъ сотенъ ранняго числа съ утреннимъ числомъ, составленнымъ двумя послѣдними цифрами даннаго числа; данное число дѣлится или нѣтъ на 43 (или на 7), смотря по тому, будетъ ли полученная сумма кратна 43 (или 7).

Б. Щиголевъ (Варшава).

№ 220 (5 сер.). Доказать, тожество

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)^2 - x^n = (1 + x + \ldots + x^{n+1})(1 + x + \ldots + x^{n-1}).$$

Заимств..

№ 221 (5 сер.). Доказать, что число

$$2^{4n+1} - 2^{2n} - 1$$

при цѣломъ и положительномъ n кратно 9; при какихъ значеніяхъ n разсматриваемое выраженіе кратно 27?

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 924 (4 сер.). *Въ уравненіи*

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

опредѣлить коэффиціенты b, c, d *такъ, чтобы они служили корнями этого же самого уравненія.*

(Заимств. изъ *Supplemento al Periodico di matematica*).

Для того, чтобы b, c, d были корнями уравненія

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы имѣло мѣсто тождество:

$$x^3 + bx^2 + cx + d = (x - b)(x - c)(x - d),$$

откуда, приравнивая коэффиціенты въ обѣихъ частяхъ равенства, находимъ, что коэффиціенты b, c, d должны удовлетворять системѣ уравненій:

$$b + c + d = -b, \qquad (1)$$

$$bc + bd + cd = c, \qquad (2)$$

$$bcd = -d. \qquad (3)$$

Если $d = 0$, то уравненіе (3) удовлетворяется этимъ значеніемъ d при всякихъ значеніяхъ b и c, а уравненія (1) и (2) принимаютъ видъ:

$$b + c = -b, \qquad (4)$$

$$bc = c. \qquad (5)$$

Если $c = 0$, то уравненіе (5) удовлетворяется этимъ значеніемъ при всякомъ b, а уравненіе (4) даетъ $b = -b$, $2b = 0$, $b = 0$. Такимъ образомъ, приходимъ къ слѣдующему рѣшенію системы (1), (2), (3):

$$b = c = d = 0. \qquad (6)$$

Если же $d = 0$, но $c \neq 0$, то уравненіе (5), записанное въ видѣ $bc - c = c(b-1) = 0$, даетъ намъ $b = 1$, а потому уравненіе (4) принимаетъ видъ $1 + c = -1$, откуда $c = -2$. Такимъ образомъ, получаемъ рѣшеніе

$$b = 1, \quad c = -2, \quad d = 0 \qquad (7)$$

системы (1), (2), (3). Наконецъ, если $d \neq 0$, уравненіе (3) даетъ намъ $bc = -1$. Записавъ уравненія (1) и (2) въ видѣ:

$$d = -c - 2b, \qquad (8)$$

$$-bc - bd - cd + c = 0, \qquad (9)$$

подставимъ значеніе d изъ равенства (8) въ равенство (9). Тогда получимъ:

$$-bc + b(c + 2b) + c(c + 2b) + c = 2b^2 + 2bc + c^2 + c = 0.$$

Подставляя въ послѣднее равенство значеніе c, опредѣленное изъ уравненія $bc = -1$, получимъ:

$$2b^2 - 2 + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{b} = 0,$$

или

$$2b^4 - 2b^2 - b + 1 = 0. \qquad (10)$$

Разлагая лѣвую часть уравненія (10) на множителей, находимъ:

$$(b-1)(2b^3+2b^2-1)=0,$$

откуда

$$b=1 \tag{11}$$

или

$$2b^3+2b^2-1=0. \tag{12}$$

Уравненіе (11) въ связи съ равенствомъ $bc=-1$ даетъ намъ $c=-1$, откуда [см. (8)] находимъ $d=-1$. Такимъ образомъ, приходимъ къ новому рѣшенію системы (1), (2), (3), а именно:

$$b=1,\quad c=-1,\quad d=-1. \tag{13}$$

Полагая въ уравненіи (12) $b=\frac{y}{2}$, приводимъ его къ виду:

$$y^3+2y^2-4=0;$$

это уравненіе не имѣетъ цѣлыхъ корней, такъ какъ ни одинъ изъ дѣлителей свободнаго члена (-4) не удовлетворяетъ ему, откуда видно, что уравненіе (12) не имѣетъ ни цѣлыхъ ни дробныхъ корней. Для того, чтобы рѣшить уравненія (12), раздѣлимъ его на b^3 и запишемъ его въ видѣ.

$$\left(\frac{1}{b}\right)^3-2\left(\frac{1}{b}\right)-2=0;$$

затѣмъ полагаемъ $\frac{1}{b}=y+z$. Тогда оно приметъ видъ:

$$(y+z)^3-2(y+z)-2=0,$$

или

$$y^3+z^3+(3yz-2)(y+z)-2=0. \tag{14}$$

Полагая $3yz-2=0$, т. е. $yz=\frac{2}{3}$, имѣемъ [см. (14)]:

$$y^3+z^3-2=0,$$

или

$$y^3+z^3=2. \tag{15}$$

Такъ какъ $yz=\frac{2}{3}$, то

$$y^3z^3=\frac{8}{27},$$

откуда видно [см. (15)], что y^3 и z^3 суть корни квадратнаго уравненія

$$t^2-2t+\frac{8}{27}=0.$$

Рѣшая это уравненіе, получимъ:

$$t=\frac{9\pm\sqrt{57}}{9},$$

а потому

$$\frac{1}{b}=y+z=\sqrt[3]{\frac{9+\sqrt{57}}{9}}+\sqrt[3]{\frac{9-\sqrt{57}}{9}}. \tag{16}$$

Такъ какъ въ равенствѣ (16) надо взять такія значенія радикаловъ, произведеніе которыхъ даетъ $\frac{2}{3}$, то три различныхъ значенія b мы найдемъ по формулѣ:

$$b = \frac{1}{\alpha\sqrt[3]{\frac{9+\sqrt{57}}{9}} + \alpha^2\sqrt[3]{\frac{9-\sqrt{57}}{9}}}, \tag{17}$$

гдѣ подъ кубичными радикалами подразумѣваются ихъ дѣйствительныя значенія, а подъ α — одно изъ трехъ значеній корня третьей степени изъ единицы. Называя черезъ m_i ($i = 1, 2, 3$) одно изъ значеній второй части формулы (17), находимъ изъ равенства $bc = -1$, что $c = -\frac{1}{m_i}$, а затѣмъ [см. (8)] $d = \frac{1}{m_i} - 2m_i$. Такимъ образомъ, приходимъ къ тремъ новымъ системамъ рѣшеній:

$$b = m_i, \quad c = -\frac{1}{m_i}, \quad d = \frac{1}{m_i} - 2m_i \ (i = 1, 2, 3). \tag{18}$$

гдѣ m_i есть одно изъ трехъ значеній правой части равенства (17). Изъ формулъ (6), (7), (13), (18) находимъ, что уравненія третьей степени, коэффиціенты b, c, d которыхъ являются ихъ корнями, имѣютъ одинъ изъ видовъ:

$$x^3 = 0, \quad x^3 + x^2 - 2x = 0, \quad x^3 + x^2 - x - 1 = 0,$$

$$x^3 + m_1 x^2 - \frac{1}{m_1}x + \left(\frac{1}{m_1} - 2m_1\right) = 0, \quad x^3 + m_2 x^2 - \frac{1}{m_2}x + \left(\frac{1}{m_2} - 2m_2\right) = 0,$$

$$x^3 + m_3 x^2 - \frac{1}{m_3}x + \left(\frac{1}{m_3} - 2m_3\right) = 0.$$

П. Безчеревныхъ (Козловъ); *Н. С.* (Одесса).

№ 145 (5 сер.). *Стороны треугольника* ABC *суть корни кубическаго уравненія*

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0.$$

Показать, что

$$p^2 < 4q.$$

Называя стороны треугольника через a, b, c, при чемъ $a > b > c$ имѣемъ согласно съ основной теоремой теоріи уравненій:

$$p = -(a + b + c), \quad q = ab + bc + ca.$$

Поэтому

$$p^2 - 4q = (a + b + c)^2 - 4(ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca. \tag{1}$$

По свойству сторонъ треугольника имѣемъ:

$$b - c < a,$$

откуда

$$(b - c)^2 < a^2,$$

$$(b - c)^2 - a^2 < 0, \tag{2}$$

и

$$b + c > a,$$

откуда

$$b + c - a > 0,$$

$$-2a(b + c - a) < 0. \tag{3}$$

Складывая неравенства (2) и (3), получимъ:

$$(b-c)^2-a^2-2a(b+c-a)<0,$$

или

$$b^2+c^2-2bc-a^2-2ab-2ac+2a^2<0,\quad a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ac<0.$$

т. е. [см. (1)]

$$p^2-4q<0,\quad p^2<4q.$$

М. Добровольскій (Сердобскъ); *А. Радевъ* (Ботево, Болгарія); *Г. Пистракъ* (Лодзь); *Н. Доброгаевъ* (Одесса); *С. Коганъ* (Винница); *Б. Двойринъ* (Одесса); *П. Безчеревныхъ* (Козловъ); *Б. Щиголевъ* (Варшава); *С. Т.* (Новочеркасскъ).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

І. Камнскій. *Опытъ приложенія графики въ области преподаванія начальной ариѳметики (графико-аналитическій методъ).* Изъ доклада, прочитаннаго въ собраніи преподавателей Кременчугскаго коммерческаго училища. Кременчугъ. 1909. Стр. 23.

К. Тороповъ. *Магическій рядъ и примѣненіе его къ рѣшенію задачъ.* Таганрогъ. 1908. Стр. 46.

Физико-математическое приложеніе къ циркуляру по управленію Кавказскимъ учебнымъ округомъ. № 1. Изд. Кавказскаго учебнаго округа. Цѣна 40 к. за экз. Тифлисъ. 1909.

В. А. Лай (Dr. W. A. Lay). *Руководство къ первоначальному обученію ариѳметикѣ, основанное на результатахъ дидактическихъ опытовъ.* Переводъ съ послѣдняго нѣмецкаго изданія подъ редакціей Д. Л. Волковскаго. Изд. Т-ва И. Д. Сытина. Москва. 1910. Стр. 188. Цѣна 80 коп.

К. Н. Рашевскій. Преподаватель Московскаго реальнаго училища Воскресенскаго. *Элементарная геометрія.* Курсъ среднихъ учебныхъ заведеній. Изд. Т-ва И. Д. Сытина. Москва. 1909. Стр. 304. Цѣна 1 р. 30 коп.

А. П. Павловъ. *Методика нагляднаго обученія счисленію простыхъ дробей.* Съ приложеніемъ таблицы и примѣровъ для вычисленій. Складъ въ кн. маг. Н. П. Карбасникова. Москва. 1909. Стр. 40. Цѣна 30 коп.

В. М. Куперштейнъ. *Записки по методикѣ ариѳметики съ приложеніемъ задачника для учителей.* Часть первая. Изд. кн. маг. І. И. Золотарева. Елисаветградъ. 1909.

Д. В. Агаповъ. *Геометрія на новыхъ началахъ.* Безъ параллельныхъ: Рѣшеніе треугольниковъ. Оренбургъ. 1909. Стр. 94. Ц 75 коп. Съ прибавленіемъ.

Д. В. Агаповъ. *Измѣреніе угловъ помощью угломѣра линейной системы.* Оренбургъ. 1909 Стр. 44. Цѣна 40 коп.

І. І. Косоноговъ *Изслѣдованіе электролиза при помощи ультра-микроскопа.* (Предварительное сообщеніе). Кіевъ. 1909. Стр. 15. Цѣна не обозначена.

А. А. Ивановъ. *Комета Галлея и ея предстоящее появленіе.* Изд. Русскаго Астрономическаго Общества. С.-Петербургъ. Стр. 52.

Звѣздная карта. Изд. Нижегородскаго Кружка любителей физики и астрономіи. 1909 г. Цѣна съ приложеніемъ объясненія 40 коп.

А. Щукаревъ, прив.-доц. *Введеніе въ курсъ физики. Ученіе объ энергіи и энтропіи въ элементарномъ изложеніи.* Изд. „Природа и Школа“. Москва. 1909. Стр. 56. Цѣна 30 коп.

М. В. Пономаренко, преподаватель реальн. учил., учр. Н. Г. Божановымъ. *Физика. Ученіе о движеніи электричества въ связи съ первоначальными свѣдѣніями объ электрическомъ потенціалѣ. (Гальванизмъ).* Выпускъ I. Для среднихъ учебныхъ заведеній и для лицъ, готовящихся къ конкурснымъ испытаніямъ. Изд. Т-ва И. Д. Сытина. Москва. 1910. Стр. 104. Цѣна 40 коп.

Н. Н. Аменицкій. преподаватель Московской женской гимназіи Е. В. Винклеръ. *Физика въ примѣненіи къ обыденнымъ явленіямъ и вопросамъ жизни.* (Съ приложеніемъ главнѣйшихъ физическихъ законовъ и новаго ученія о твердости тѣлъ). Пособіе для мужск. и женск. средн. учебн. заведеній и городскихъ училищъ. Изд. Т-ва И. Д. Сытина. Москва. 1910. Стр. 118. Цѣна 50 к.

В. М. Ипатовъ. *Сборникъ алгебраическихъ задачъ.* Повторительный курсъ среднихъ учебныхъ заведеній. Изд. Т-ва И. Д. Сытина. Москва. 1910. Стр. 160. Цѣна 50 коп.

Н. Извольскій. *Алгебраическія числа и дѣйствія надъ ними. (Числа со знаками).* Для начинающихъ изучать алгебру. Изд. кн. маг. В. В. Думнова. Москва. 1909. Стр. 27. Цѣна 15 коп.

С. И. Шохоръ-Троцкій, преподаватель Педагогической академіи, Педагогическихъ курсовъ военнаго вѣдомства, Педагогическихъ курсовъ Фрёбелевскаго общества и Выборгскаго коммерческаго училища въ СПБ. *Геометрія на задачахъ.* Книга для учащихся. Выпускъ второй. Свыше 280 политипажей въ текстѣ. Изъ „Книгъ для современной школы“, издаваемыхъ Т-вомъ И. Д. Сытнна. Москва. 1909. Стр. XVI + 400. Цѣна 1 р. 20 коп.

В. П. Вахтсмутъ. *Таблицы по качественному анализу.* Изд. кн. маг. Г. Леффлера. Рига. 1909. Стр. 19. Цѣна 40 коп.

Б. Н. Лебедевъ. *Выясненіе основъ счисленія безконечныхъ величинъ.* С.-Петербургъ. 1909. Стр. 16. Цѣна 20 коп.

Н. П. Кильдюшевскій. *Сборникъ упражненій по аналитической геометріи на плоскости.* Съ приложеніемъ формулъ и статьи „Коническія сѣченія“. Примѣнительно къ программѣ реальныхъ училищъ. Казань. 1909. Стр. 91. Цѣна 65 к.

В. В. Половцовъ, магистръ ботаники, препод. Женск. Педагог. Института. *Практичеекія занятія по ботаникѣ.* Пособіе къ учебнику ботаники того же автора. Съ 34 рис. въ текстѣ. Изд. Т-ва И. Д. Сытина. Москва. 1910. Стр. 112. Цѣна 35 коп.

В. В. Стратоновъ. *„Солнце“. Астрономическая популярная монографія.* Роскошное изданіе in quarto. Картины, виньетки и обложка художника О. И. Шмерлинга и Б. А. Фогеля. Клише и многокрасочныя иллюстраціи изготовлены и отпечатаны художественнымъ заведеніемъ Ангереръ и Гешль въ Вѣнѣ. Одноцвѣтныя иллюстраціи и текстъ отпечатаны типографіей Т-ва „Либерманъ и К°“. въ Тифлисѣ. По настоящее время вышло три тома по 24 стр. каждый.

С. Роу. *Геометрическія упражненія съ кускомъ бумаги.* Изданіе „Mathesis“. Одесса, 1909. Стр. 173.

O. Heck. *Wissenschaftliche Abhandlung über das grosse Theorem des Mathematikers Fermat.* Büdingeu in Hessen. 1909. S. 16.

F. Klein. *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus.* Teil II. Geometrie. Vorlesung gehalten im Sommersemester. 1908. S. 515.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
ищется

Обложка
ищется