Обложка
пщется

Обложка
ищется

XLI Сем. № 9.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 489.

Содержаніе: Сжиженіе гелія. *Е. Фейтиса.*— Теорія движенія луны. *С. Ньюкома.* (Окончаніе).— Доказательство Г. Миньковскаго существованія рѣшенія неопредѣленнаго уравненія. *Гр. Ф.*— Линейные спектры и строеніе атомовъ. *В. Ритца.*— Краткій отчетъ о засѣданіи Московскаго Математическаго кружка 13 марта 1909 г.— Краткій отчетъ о засѣданіи Московскаго Математическаго кружка 23 апрѣля 1909 г.— Задачи №№ 168—173 (5 сер.).— Рѣшенія задачъ №№ 81, 82, 100 и 101 (5 сер.).— Объявленія.

Сжиженіе гелія.

Е. Фейтиса.

Вопросъ о низкихъ температурахъ является одной изъ наиболѣе важныхъ задачъ настоящаго времени. Это обнаружилось ясно на Парижскомъ „Конгрессѣ холода" въ сентябрѣ 1908 г. Ни одинъ изъ предметовъ, о которыхъ говорили на этомъ конгрессѣ, не привлекъ къ себѣ такого вниманія и не вызвалъ такого энтузіазма, какъ работа Камерлинга Оннеса по сжиженію гелія. Присутствующіе устроили настоящую овацію этому ученому, который цѣною двадцатипятилѣтнихъ изысканій завоевалъ еще нѣсколько градусовъ въ шкалѣ холода. Дѣйствительно, испареніе жидкаго гелія даетъ намъ температуру приблизительно въ 270° ниже нуля, т. е. на десять градусовъ ниже самой низкой изъ всѣхъ до сихъ поръ извѣстныхъ температуръ — температуры твердаго водорода — и всего лишь на три градуса выше абсолютнаго нуля температуръ („полюса холода").

Этотъ выигрышъ въ десять градусовъ можетъ показаться не очень важнымъ, если сравнивать его съ измѣненіемъ того же порядка въ области нашихъ обыкновенныхъ температуръ. Но такое сравненіе было бы весьма неправильнымъ, потому что различіе между двумя температурами измѣряется не разностью, но отношеніемъ тѣхъ двухъ чиселъ, которыя выражаютъ эти температуры въ градусахъ абсолютной шкалы: свойства вещества при переходѣ отъ температуры твердаго водорода къ температурѣ, получаемой съ помощью жидкаго гелія, мѣняются почти въ такой же степени, какъ при охлажденіи отъ температуры краснаго каленія до температуры таянія льда. Мы видимъ такимъ образомъ, что сжиженіе гелія представляетъ собой, дѣйствительно, крупный результатъ.

Гелій, открытый сперва на солнцѣ Жансеномъ, Франкландомъ и Локіеромъ, позже былъ въ значительномъ количествѣ полученъ сэромъ Вилліамомъ Рамзаемъ изъ радіоактивнаго минерала клевеита. Этотъ газъ можно получить еще изъ нѣкоторыхъ минеральныхъ водъ, сдѣлавшихся подъ вліяніемъ радія активными; вѣроятно, эти воды и являются тѣмъ источникомъ, изъ котораго атмосфера заимствуетъ слѣды гелія, которые мы встрѣчаемъ въ ней. Гелій былъ единственный газъ, котораго еще не удалось превратить въ жидкость. Въ то время, какъ всѣ прочіе газы, охлажденные жидкимъ водородомъ, превращались въ жидкое или твердое тѣло, гелій при этихъ условіяхъ постоянно оставался въ газообразномъ состояніи. Нужно было обладать методической выдержкой профессора Камерлинга Оннеса, чтобы преодолѣть это упрямство! Сжиженіе гелія представляетъ собою открытіе, логически продуманное и терпѣливо доведенное до конца.

Извѣстно, что при температурѣ выше критической никакой газъ не можетъ быть превращенъ въ жидкость, какому бы давленію мы его ни подвергали. Нужно, кромѣ того, замѣтить — иногда это упускаютъ изъ виду, — что газъ не можетъ быть также превращенъ въ жидкость, если онъ находится подъ давленіемъ, которое ниже его критическаго давленія. Профессоръ Камерлингъ Оннесъ началъ съ того, что опредѣлилъ приблизительно критическую температуру и давленіе гелія. При этомъ онъ руководился теоріей Ванъ-деръ-Ваальса. Свойства жидкостей и газовъ могутъ быть выражены особенно просто, если вмѣсто того, чтобы выражать объемъ температуру и давленіе въ обычныхъ единицахъ (т. е. въ градусахъ, кубическихъ метрахъ и атмосферахъ) мы будемъ измѣрять ихъ посредствомъ особыхъ единицъ, приспособленныхъ для жидкостей и связанныхъ съ ихъ критической температурой, критическимъ объемомъ и критическимъ давленіемъ. Тогда изотермы многихъ газовъ, относящіяся къ соотвѣтствующимъ температурамъ, имѣютъ одинаковую форму. Понятно поэтому, что изъ сравненія надлежащимъ образомъ подобранныхъ изотермъ водорода и гелія можно было вывести приблизительныя значенія критическихъ постоянныхъ гелія. Пользуясь этимъ способомъ, профессоръ Камерлингъ Оннесъ нашелъ, что критическое давленіе должно быть равно приблизительно 3 атмосферамъ, а критическая температура 5—6 градусамъ абсолютной шкалы. Такимъ образомъ, онъ почти опредѣлилъ тѣ условія, въ которыя слѣдовало поставить гелій, чтобы онъ могъ быть превращенъ въ жидкость. Эти условія были осуществлены при помощи „цикла“ жидкаго водорода, функціонирующаго въ Лейденской лабораторіи, въ который былъ произведенъ опытъ. Экспериментальная сторона этой работы представляла чрезвычайно большія трудности. Проф. Камерлингъ Оннесъ подчеркиваетъ то „важное значеніе для успѣха работы, какое на ряду съ теоріей Ванъ-деръ-Ваальса имѣли средства, предоставленныя въ распоряженіе физиковъ Дьюаромъ, превратившимъ въ жидкость водородъ“.

Методъ Дьюара состоитъ, какъ извѣстно, въ осуществленіи настоящихъ каскадовъ температуры. Сжижаютъ воздухъ; этотъ воздухъ, благодаря кипѣнію при низкомъ давленіи, вызываетъ охлажденіе, достаточное для сжиженія водорода. Жидкій водородъ, въ свою очередь закипая подъ низкимъ давленіемъ, охлаждается, и имъ можно тогда воспользоваться для охлажденія гелія. Комбинируя охлажденіе гелія извнѣ съ тѣмъ охлажденіемъ, которое наступаетъ, когда мы даемъ сжатой массѣ гелія быстро расшириться, мы можемъ получить, наконецъ, температуру, достаточно низкую для сжиженія гелія. Циклъ воздуха даетъ возможность получить циклъ водорода; циклъ водорода дѣлаетъ возможнымъ осуществленіе цикла гелія.

Оннесъ въ своемъ опытѣ работалъ съ 200 литрами гелія подъ высокимъ давленіемъ, производимымъ при помощи пресса Калльете. Этотъ гелій былъ замѣчательно чистъ. Это объясняется тѣмъ именно обстоятельствомъ, что гелій есть единственный газъ, не сжижающійся еще въ жидкомъ водородѣ: при температурѣ жидкаго водорода всѣ примѣси превращались уже въ жидкость. Двѣсти литровъ гелія сначала были сжаты подъ давленіемъ въ сто атмосферъ, а затѣмъ были охлаждены до 15 градусовъ абсолютной шкалы при помощи жидкаго водорода, который испарялся подъ давленіемъ въ шесть сантиметровъ ртутнаго столба. Затѣмъ гелій былъ впущенъ въ особый холодильникъ съ краномъ для расширенія.

Понятно, что это предпріятіе было сопряжено съ большими трудностями, приходилось также идти ощупью. Окончательный опытъ былъ предпринятъ 10 іюля 1908 г. Начали его въ пять часовъ утра. Предварительно приготовили семьдесятъ пять литровъ жидкаго воздуха. Къ часу получили двадцать литровъ жидкаго водорода; гелій могъ быть пущенъ въ обращеніе лишь послѣ четырехъ часовъ. Наконецъ, въ семь часовъ впервые былъ полученъ жидкій гелій. Онъ былъ собранъ на днѣ трубки съ двойными стѣнками, которая въ цѣляхъ лучшей термической изоляціи была высеребрена почти по всей своей поверхности, за исключеніемъ нижней части, для того, чтобы черезъ нее можно было наблюдать жидкость. Этотъ сосудъ былъ окруженъ ванной изъ жидкаго водорода, находившагося въ сосудѣ съ такими же прозрачными стѣнками; эта ванна, въ свою очередь, была окружена жидкимъ воздухомъ, который самъ былъ окруженъ алкоголемъ. Всѣ свободныя поверхности жидкостей, помѣщенныхъ одна въ другой, были очень хорошо видны. Свободная поверхность гелія ясно отличалась отъ другихъ благодаря тому обстоятельству, что она прилегала къ стѣнкамъ, „какъ лезвіе ножа“, что указываетъ на слабое капиллярное натяженіе жидкаго гелія.

Затѣмъ можно было опредѣлить въ первомъ приближеніи нѣсколько физическихъ постоянныхъ гелія. Плотность жидкости оказалась равной 0,154, а точка кипѣнія 4,5° абсолютной шкалы. Зная отношеніе плотности жидкости къ плотности пара, которое равно 11 : 1, можно вычислить критическую температуру, которая должна быть равна 5° абсолютной шкалы. Это можно было предсказать на основаніи изученія изотермъ. Хорошо согласуются межъ собой и оба значенія, получаемыя для критическаго давленія: одно, которое выводится на основаніи изученія изотермъ, и другое, которое вычисляется изъ указанныхъ результатовъ. Это критическое давленіе, равное 2—3 атмосферамъ, замѣчательно слабо. Въ самомъ дѣлѣ, вспомнимъ, что критическое давленіе углекислаго газа, напримѣръ, равно 70 атмосферамъ. Такимъ образомъ, согласно тому, что мы замѣтили выше относительно критическихъ постоянныхъ, мы видимъ, что, когда мы работаемъ съ углекислымъ газомъ, сжатымъ до 100000 атмосферъ, или съ геліемъ, подверженнымъ давленію лишь въ 5000 атмосферъ, то мы находимся при аналогичныхъ условіяхъ.

Въ этомъ опытѣ 10 іюля проф. Камерлингъ Оннесъ попытался превратить гелій въ твердое тѣло, для чего онъ производилъ испареніе жидкаго гелія подъ уменьшеннымъ давленіемъ. Но хотя онъ довелъ разрѣженіе до 1 миллиметра ртутнаго столба, жидкость оставалась еще весьма подвижной. Выведенная изъ опытовъ сила сцѣпленія гелія чрезвычайно мала. Проф. К. Оннесъ имѣетъ основаніе полагать, что гелій можно будетъ превратить въ твердое тѣло лишь при температурѣ 1^0 по абсолютной шкалѣ, тогда какъ въ его опытѣ на этотъ разъ была достигнута, по его мнѣнію, температура приблизительно не ниже 3^0 по абсолютной шкалѣ.

Къ девяти часамъ вечера „аппараты и люди дошли до крайней степени усталости, и такъ какъ почти весь запасъ гелія уже вышелъ, то опытъ былъ прерванъ"; этой фразой Кам. Оннесъ закончилъ докладъ о своей работѣ Конгрессу, который устроилъ ему послѣ этого продолжительную и восторженную овацію.

Понятно важное значеніе работы проф. К. Оннеса: указанныя цыфры достаточно краснорѣчивы. И прежде всего поразительны тѣ громадныя средства для работы, которыя находятся въ распоряженіи Лейденскаго ученаго. Какой грандіозной мощностью должна обладать лабораторія, пускающая въ оборотъ въ одинъ день—день, правда, былъ не изъ короткихъ! — 75 литровъ жидкаго воздуха, 20 литровъ жидкаго водорода и 200 литровъ такого рѣдкаго газа, какъ гелій! Циклы жидкаго воздуха и жидкаго водорода были дѣйствительно получены на настоящихъ заводахъ. Лабораторія проф. К. Оннеса является одной изъ величайшихъ въ Европѣ; она также занимаетъ одно изъ первыхъ мѣстъ по своей энергичной дѣятельности; проф. К. Оннесъ работаетъ здѣсь вмѣстѣ со своими многочисленными сотрудниками. (Въ этой именно лабораторіи Зееманъ сдѣлалъ свои главныя открытія).

Сжиженіе гелія является не только фактомъ чрезвычайной важности, въ смыслѣ полученныхъ уже результатовъ, но оно обѣщаетъ также очень много и въ будущемъ. Согласно заявленію Оннеса, близокъ день, когда въ Лейденской лабораторіи начнетъ функціонировать непрерывная циркуляція жидкаго гелія, и тогда предъ изслѣдователями откроется обширное поле для новыхъ изысканій.

Въ настоящее время организуются изслѣдованія относительно магнитизма тѣлъ, поглощенія свѣта и электрическаго сопротивленія металловъ, которое, быть можетъ, стремится къ нулю по мѣрѣ пониженія температуры. Изслѣдователи стремятся узнать, во что превращаются извѣстныя свойства вещества при этихъ низкихъ температурахъ; въ особенности, интересно узнать, не обнаруживаются ли при этомъ какія-либо совершенно новыя свойства.

Теорія движенія луны.

(Исторія и современное состояніе этого вопроса).

С. Ньюкома.

Докладъ, прочитанный въ общемъ собраніи IV-го международнаго конгресса въ Римѣ.

(*Окончаніе**).

III.

Теперь я перехожу къ ряду изслѣдованій, которыя, какъ мнѣ кажется, приводятъ къ результатамъ, вполнѣ удовлетворяющимъ по своей точности всѣмъ требованіямъ современной астрономіи. Этотъ рядъ начинается трудомъ Леонарда Эйлера: „Теорія движенія луны, объясненная новымъ способомъ" (Theoria Motuum Lunae, Nova Metodo Pertractata). Замѣчательнымъ фактомъ въ исторіи нашей науки является то обстоятельство, что прошло цѣлое столѣтіе прежде, чѣмъ кто-либо изъ геометровъ замѣтилъ превосходство метода, набросаннаго въ этомъ трудѣ Эйлера, опубликованнаго въ 1772 году. Только въ 1878 году, въ то время, когда предполагали, что наклонъ орбиты луны и эксцентриситеты орбитъ луны и земли равны нулю, Дж. В. Гилль (G. W. Hill) опубликовалъ свои труды о движеніи луны, основная идея котораго вытекаетъ изъ труда Эйлера. Въ 1888 году появился знаменитый мемуаръ Гилля о главномъ членѣ въ движеніи перигея луны. Принципъ его изслѣдованій заключается въ слѣдующемъ: считая среднія движенія земли вокругъ солнца и луны вокругъ земли данными, можно выраженіе каждой координаты луны развернуть въ рядъ по степенямъ и произведеніямъ эксцентриситетовъ e и e' этихъ двухъ орбитъ, и γ, синуса половины наклона. Пусть y будетъ такая координата; тогда

$$y = P_0 + eP_1 + e'P_2 + \gamma P_3 + e\gamma P_4 + \ldots, \tag{3}$$

гдѣ P суть періодическія функціи времени вида

$$P = \Sigma h \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} (A + Bt). \tag{4}$$

Коэффиціенты h суть функціи m, отношенія среднихъ движеній солнца и луны, A суть линейныя комбинаціи среднихъ долготъ солнца, луны, перигея и узла, а B функціи m, e, e' и γ.

Извѣстно, что Эйлеръ пытался найти значенія коэффиціентовъ P въ отдѣльности. Но онъ встрѣтилъ затрудненіе въ томъ, что величины m, e, e' и γ входятъ въ коэффиціенты B. Въ виду этого онъ долженъ былъ разсматривать движенія аргументовъ, какъ данныя изъ наблюденій. То, что сдѣлалъ Гилль спустя столѣтіе послѣ Эйлера, можетъ быть формулировано слѣдующимъ образомъ.

*) См. № 488 „Вѣстника".

1°. Онъ нашелъ общій методъ разложенія членовъ выраженія P_0, какъ функцій среднихъ движеній, съ какой угодно степенью точности; онъ выполнилъ это разложеніе въ гораздо большей мѣрѣ, чѣмъ того могутъ требовать нужды астрономіи.

2°. Онъ развилъ новый методъ для изслѣдованія той части движенія перигея, которая не зависитъ отъ e, e' и γ.

То, что сдѣлалъ Гилль для перигея, Адамсъ (Adams) и Ковэлль (Cowell) сдѣлали для движенія узла.

Конечно, идеи и методъ Гилля примѣнимы и къ самой общей формѣ проблемы, въ которую входятъ e, e' и γ. Но вотъ затрудненіе, которое встрѣчается, когда требуется опредѣлить коэффиціенты P_1, P_2 и т. д. степеней и произведеній количествъ e, e' и γ въ нашемъ рядѣ. Въ обыкновенной формѣ такого разложенія въ безконечный рядъ коэффиціенты не содержатъ этихъ элементовъ. Но, какъ я выше замѣтилъ, e, e' и γ входятъ въ значенія B, а, слѣдовательно, и въ P. Трудность состоитъ въ разложеніи B, т. е. движенія перигея и узла, по степенямъ и произведеніямъ этихъ количествъ.

Е. В. Броунъ (E. W. Brown) занялся этой задачей, преодолѣлъ всѣ затрудненія одно за другимъ и пришелъ къ ея разрѣшенію. Главные пункты метода, примѣненнаго Броуномъ, могутъ быть резюмированы слѣдующимъ образомъ.

1°. Вмѣсто того, чтобы разлагать коэффиціенты h по степенямъ m, отношенія среднихъ движеній, онъ вноситъ съ самаго начала численное значеніе m. Такимъ образомъ, его методъ состоитъ въ комбинаціи уже описанныхъ выше пріемовъ, при чемъ по отношенію къ e и e' сохраняются алгебраическія величины, а вмѣсто m вносится численное его значеніе.

2°. Онъ открылъ новый методъ составленія производныхъ по m при помощи производныхъ, взятыхъ по другимъ элементамъ.

3°. Онъ далъ также общій методъ, который ставитъ опредѣленіе каждой изъ періодическихъ функцій P_1, P_2 и .т д. въ зависимость отъ дифференціальнаго уравненія второго порядка. Это рѣшеніе можетъ быть получено съ какой угодно степенью точности помощью рѣшенія системы линейныхъ уравненій.

4°. На каждой ступени этого вычисленія онъ даетъ значенія тѣхъ членовъ движенія перигея и узла, которыя необходимы для рѣшенія.

5°. Онъ выполнилъ вычисленія, соотвѣтствующія этой теоріи, такимъ образомъ, чтобы въ каждомъ изъ коэффиціентовъ долготы, широты и параллакса луны ошибка была менѣе $\pm$ 0,"01.

6°. Онъ далъ формулы провѣрокъ, чтобы открыть тѣ ошибки, которыя могли случиться при вычисленіи значеній членовъ.

Сравненіе коэффиціентовъ Ганзена и Делонэ съ результатами, полученными Броуномъ, приводитъ къ заключенію, что эти послѣдніе точны постольку, поскольку этого возможно желать.

Я долженъ еще указать на трудъ другого ученаго, который также работалъ надъ этой новой теоріей. Эйлеръ, Гилль и Броу н ъ пользовались прямоугольными координатами, которыя они потомъ преобразовывали въ полярныя. Андуайе (Andoyer) предложилъ методъ для непосредственнаго разложенія полярныхъ координатъ въ той же формѣ. Мнѣ кажется, что этотъ методъ достоинъ вниманія геометровъ, интересующихся теоріей вопроса.

IV.

До сихъ поръ я говорилъ только о дѣйствіи солнца, какъ возмущающей силѣ, измѣняющей эллиптическое движеніе луны вокругъ земли. До тѣхъ поръ, пока орбита земли не измѣняется, неравенства въ движеніи луны, производимыя дѣйствіемъ солнца, будутъ строго періодичны. Среднее движеніе луны, ея перигея и ея узла, оставалось бы равномѣрнымъ изъ столѣтія въ столѣтіе и неравенства луны получали бы свое первоначальное значеніе каждый разъ, какъ луна, перигей и узелъ возвращались бы въ свое перво начальное положеніе. Но дѣйствіе планетъ также должно производить небольшія измѣненія въ движеніи луны, при чемъ дѣйствіе это должно выразиться двояко: во-первыхъ, въ различномъ притяженіи планетами этихъ двухъ тѣлъ и, во вторыхъ, въ измѣненіи движенія земли вокругъ солнца, что, въ свою очередь, измѣняетъ дѣйствіе солнца на луну. Въ общемъ, дѣйствіе планетъ меньше дѣйствія солнца во столько же разъ, во сколько массы планетъ меньше массы солнца. Такимъ образомъ, казалось бы, что этими дѣйствіями можно бы пренебречь. Но какъ наблюденія, такъ и теорія показали, что результаты этого дѣйствія важны. Прежде всего сравненіе современныхъ наблюденій съ затменіями луны, о которыхъ сообщаетъ Птоломей, дали Галлею (Halley) указаніе, что среднее движеніе луны ускорилось. Позднѣе, это ускореніе оцѣнили въ 10″ въ столѣтіе. Причина этого явленія была открыта Лапласомъ; она заключается въ вѣковомъ уменьшеніи эксцентриситета орбиты земли, производимомъ дѣйствіемъ планетъ. Вычисленія Лапласа показали, что это вѣковое ускореніе равно 10″; такимъ образомъ обнаружилось какъ бы полное согласіе наблюденія съ теоріей. Около 1850 года Ганзенъ вновь принялся за вычисленіе „таблицъ луны“, и на этотъ разъ получился результатъ въ 12″,18. Позднѣйшія вычисленія, опубликованныя въ его „Darlegung“ дали разницу, еще большую на 0,″35, т. е. 12,″53. Онъ пытался удостовѣрить это число не только теоріей, но и наблюденіемъ, разсматривая нѣсколько полныхъ солнечныхъ затменій, упоминающихся у древнихъ историковъ. Но это согласіе было разрушено глубокими изслѣдованіями Адамса (J. C. Adams), который, проведя приближеніе дальше, нашелъ, что величина ускоренія равняется только половинѣ величины, вычисленной Ганзеномъ. Этотъ результатъ былъ тотчасъ же подтвержденъ Делонэ. Дѣйствительно, Ганзенъ, подобно Лапласу и другимъ геометрамъ, занимавшимся этой проблемой, ограничился членами перваго порядка по отношенію къ возмущающему дѣйствію солнца; между тѣмъ члены высшихъ порядковъ тоже имѣютъ довольно важное значеніе. Послѣднія вычисленія проф. Броуна привели его къ цифрѣ 5,″31, результату, который мы можемъ въ теоріи принять точнымъ до сотыхъ долей секунды.

Такимъ образомъ получилось явное несогласіе между теоріей и наблюденіемъ, vera causa котораго была найдена Вилліамомъ Ферелемъ (William Ferrel) и позднѣе Делонэ въ дѣйствіи луны на приливы и отливы. Вслѣдствіе тренія приливы и отливы не вполнѣ симметричны относительно направленія луны; дѣйствіе луны на море даетъ пару силъ, которая постоянно стремится замедлить движеніе земли вокругъ оси и произвести небольшое увеличеніе продолжительности нашихъ сутокъ; въ результатѣ наша мѣра времени всегда опаздываетъ изъ столѣтія въ столѣтіе. Достаточно уже опозданія въ 12 секундъ, чтобы произвести видимое измѣненіе въ 6″ въ среднемъ движеніи луны. Послѣдующія изслѣдованія даютъ видимую величину ускоренія только въ 8″, такъ что разногласіе между теоретической и наблюдаемой величинами, т. е. дѣйствіе тренія составляетъ не болѣе 2″ въ столѣтіе.

Интересенъ тотъ фактъ, что замедленіе во вращеніи земли, производимое дѣйствіемъ приливовъ и отливовъ, было предположено Кантомъ, хотя его доказательство такого явленія неправильно. Лапласъ показалъ, что дѣйствіе, предположенное Кантомъ, не существуетъ; но его выводъ, что не существуетъ никакого замедленія, не достаточно обоснованъ.

Лапласъ путемъ сравненія движенія луны съ таблицами Лаланда (Lalande) обнаружилъ существованіе въ этомъ движеніи нѣкоторыхъ неравенствъ длиннаго періода. Ганзенъ первый указалъ на существованіе такого неравенства и въ теоріи. Въ своихъ „таблицахъ луны“ онъ ввелъ два неравенства, обусловливаемыя дѣйствіемъ Венеры, одно съ періодомъ въ 273 года, другое въ 239 лѣтъ. Первое изъ нихъ по теоріи дѣйствительно существуетъ, а второе слишкомъ мало, всего около 0,″24, какъ это показали Делонэ и Радо (Radau). Величина, найденная Ганзеномъ, почти въ 100 разъ больше и, что всего хуже, ни величина, указанная Ганзеномъ, ни истинная величина не совпадаютъ съ наблюденіями. Этому загадочному разногласію я и посвящу конецъ статьи.

Разсмотримъ сначала теоретическое выраженіе нашего разногласія. Мы можемъ себѣ представить только три возмущающія дѣйствія на движеніе луны. Это дѣйствія: солнца, планетъ и уклоненіе земли отъ сферической формы. Послѣднее обстоятельство не можетъ произвести никакого неравенства съ періодомъ болѣе продолжительнымъ, чѣмъ періодъ движенія узла лунной орбиты, потому что, вслѣдствіе суточнаго вращенія, дѣйствіе всякаго неравенства по долготѣ въ фигурѣ земли сводится къ нулю въ теченіе сутокъ. Дѣйствіе солнца вполнѣ выяснено. Остается только дѣйствіе планетъ.

Проблема дѣйствія планетъ на луну является наиболѣе сложной изъ всѣхъ ясно поставленныхъ проблемъ небесной механики. Но со временъ Ганзена методы вычисленія этого дѣйствія настолько усовершенствованы глубокими изслѣдованіями Делонэ, Радо, Гилля и Броуна, что результаты, полученные этими методами, могутъ стоять внѣ всякаго сомнѣнія. Первое неравенство, указанное Ганзеномъ, является единственнымъ въ теоріи, которое имѣетъ длинный періодъ и большую амплитуду.

Важной особенностью этихъ наблюденныхъ уклоненій является то обстоятельство, что они кажутся скорѣе неправильными, чѣмъ періодическими. Говоря точнѣе, онѣ не могутъ быть представлены однимъ или даже двумя періодическими членами. Правда, вводя членъ съ періодомъ приблизительно въ 250 лѣтъ, можно представить большую часть отклоненія, остальное же представляется совершенно неправильнымъ. Наиболѣе замѣчательныя колебанія происходятъ, начиная съ 1850 года. Начиная съ этой эпохи, среднее движеніе было ускоренное, и ускореніе продолжалось до 1864 года. Затѣмъ движеніе внезапно замедлилось такимъ образомъ, что въ періодъ 1864—1890 годовъ годовое движеніе по долготѣ было меньше на 1,″5, чѣмъ оно было въ періодъ 1850—1864 г. Линейная скорость луны измѣнялась, соотвѣтственно, на 2—3 километра въ годъ. Съ 1890 года направленіе этого движенія снова стало обратное.

Можно указать двѣ гипотезы для объясненія этихъ измѣненій; они либо реальны, либо же это только кажущіяся измѣненія, обусловливаемыя, въ свою очередь, измѣненіемъ въ вращеніи земли точно такимъ же образомъ, какъ замедленіе этого вращенія производитъ кажущееся увеличеніе вѣкового ускоренія. Чтобы остановиться на одной изъ этихъ гипотезъ, нужно имѣть вполнѣ независимое доказательство равномѣрности нашего измѣренія времени. Къ несчастью, мы не имѣемъ ни одного точнаго доказательства; лучшее изъ нихъ можетъ быть дано движеніемъ Меркурія. Прохожденія этой планеты по диску солнца, наблюденныя съ 1677 по 1907 года, указываютъ намъ на подобныя измѣненія, но ихъ величина меньше половины той, которая необходима для объясненія нашего явленія. Такимъ образомъ, можетъ казаться, что часть измѣненія реальна, а другая обязана своимъ существованіемъ измѣненіямъ во вращеніи земли. Не указываетъ ли это обстоятельство на то, что дѣйствіе луны на приливы и отливы измѣняется, и что совокупность этого дѣйствія съ противодѣйствіемъ, оказываемымъ приливами и отливами на луну, можетъ служить для объясненія нашего явленія? Оказывается, однако, что это противодѣйствіе скорѣе должно замедлять, а не ускорять дѣйствительное движеніе луны. Мы вкратцѣ изложимъ теоріи этого дѣйствія и противодѣйствія.

1°. Если оставить въ сторонѣ дѣйствіе солнца, то движеніе приливовъ и отливовъ объясняется дѣйствіемъ луны.

2°. Это движеніе необходимо должно сопровождаться треніемъ.

3°. Это треніе влечетъ за собой уменьшеніе общей энергіи, кинетической и потенціальной, всей системы земля-луна.

4°. Моментъ количества движенія этой системы, или же количество

$$\int m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)$$

остается неизмѣннымъ. Онъ дѣлится на двѣ рѣзкія части: моментъ земли и моментъ луны, обусловленный вращеніемъ вокругъ земли.

5°. Моментъ земли не можетъ быть измѣненъ никакими взаимодѣйствіями ея частей, даже треніемъ. Для того чтобы произошло измѣненіе, необходимо дѣйствіе пары силъ, происходящей отъ луны, а это можетъ быть только въ томъ случаѣ, если приливы и отливы не симметричны по отношенію къ радіусу-вектору луны.

6°. Та же пара дѣйствуетъ и на луну такъ, что увеличеніе ея момента равняется уменьшенію момента земли.

7°. Вслѣдствіе того же противодѣйствія измѣняются среднее разстояніе и среднее движеніе луны такъ, что при неизмѣнности ихъ отношенія сумма кинетической и потенціальной энергій системы будетъ уменьшена на величину, равную тренію.

8°. Результатомъ всего вышеизложеннаго будетъ, по сэру Дж. Дарвину (George Darwin), замедленіе на 3,″6 нашего измѣренія времени на каждую 1″ видимаго ускоренія средняго движенія луны, и обратно.

Эти теоретическія разсужденія, приложенныя къ нашей проблемѣ, не даютъ намъ тѣхъ измѣненій, которыя уже подмѣчены. Иначе говоря, для объясненія измѣненія средняго движенія луны дѣйствіемъ приливовъ и отливовъ нужно предположить измѣненіе почти въ 1′ въ нашемъ измѣреніи времени за два столѣтія, слѣдующія за 1700 годомъ. Между тѣмъ прохожденія Меркурія указываютъ, что эти измѣненія не могутъ превысить нѣсколькихъ секундъ.

Послѣ всего приведеннаго кажется, что объясненіе лежащей передъ нами тайны является наиболѣе важной и интересной задачей небесной механики. Но это уже вопросъ, лежащій скорѣе въ границахъ небесной физики, чѣмъ математики; въ виду этого я воздержусь отъ дальнѣйшаго его разъясненія.

Доказательство существованія рѣшенія неопредѣленнаго уравненія, предложенное Г. Миньковскимъ.

Въ замѣчательной книгѣ недавно безвременно скончавшагося геттингенскаго математика Германа Миньковскаго „Діофантовы приближенія“ *) на первыхъ же страницахъ мы находимъ чрезвычайно простое и оригинальное доказательство существованія пары цѣлыхъ рѣшеній линейнаго Діофантова уравненія, т. е. неопредѣленнаго уравненія типа

$$sX - rY = 1, \qquad (1)$$

гдѣ s и r суть положительныя цѣлыя взаимно простыя числа. Въ настоящей статьѣ мы имѣемъ въ виду воспроизвести это доказательство,

*) Hermann Minkowsky, „Diophantische Approximationen“.

слѣдуя порядку идей его автора. Нужно лишь замѣтить, что профессоръ *Миньковскій* разсматриваетъ свое сочиненіе, какъ *введеніе въ теорію чиселъ*, и потому не опирается на даваемыя въ этой наукѣ опредѣленія и на доказываемыя въ ней теоремы.

Въ основаніе своихъ умозаключеній, кромѣ обычно подразумѣваемыхъ основныхъ опредѣленій и аксіомъ ариѳметики, профессоръ *Миньковскій* кладетъ еще слѣдующій принципъ:

Если $n+1$ *вещей какимъ бы то ни было образомъ распредѣлены на* n *категорій***), *то среди этихъ категорій найдется хоть одна, содержащая больше одной вещи.*

Представимъ себѣ, какъ это дѣлается обыкновенно, что вещественныя числа изображены точками на безконечной прямой. Разсмотримъ на ней рядъ равноотстоящихъ точекъ, отвѣчающихъ цѣлымъ раціональнымъ числамъ, и условимся къ каждому изъ получившихся интерваловъ относить *только* его *правый конецъ*, такъ что, напримѣръ, точка 1 принадлежитъ интервалу $\overline{01}$, но *не* принадлежитъ интервалу $\overline{12}$, и т. д. Въ такомъ случаѣ каждая точка прямой относится *къ одному опредѣленному интервалу*, откуда легко усмотрѣть, что для каждаго вещественнаго числа a можно однимъ лишь способомъ опредѣлить такихъ два послѣдовательныхъ цѣлыхъ числа x и $x-1$, чтобы выполнялись соотношенія:

$$x-1<a\leqq x, \quad \text{или} \quad 0\leqq x-a<1; \tag{2}$$

число x носитъ названіе *ближайшаго къ* a *справа цѣлаго числа*.

Аналогично устанавливается понятіе о *цѣломъ числѣ, ближайшемъ къ* a *слѣва*.

Остановимся теперь на интервалѣ $\overline{01}$. Мы раздѣлимъ его на t равныхъ частей (предполагая, что $t\geqq 2$) и условимся относить къ каждому изъ полученныхъ частичныхъ интерваловъ *только* его *лѣвый конецъ* (точка $1/t$, напримѣръ, относится къ интервалу $\overline{\frac{1}{t}\,\frac{2}{t}}$, но *не* принадлежитъ интервалу $\overline{0\,\frac{1}{t}}$); такимъ образомъ, каждая точка интервала $\overline{01}$ (къ нему мы также относимъ только его лѣвый конецъ 0) принадлежитъ одному и только одному изъ упомянутыхъ частичныхъ интерваловъ, такъ что для каждаго вещественнаго числа ξ, содержащагося въ интервалѣ $\overline{01}$, выполняется одно и только одно изъ соотношеній:

$$0\leqq\xi<\frac{1}{t},\ \frac{1}{t}\leqq\xi<\frac{2}{t},\ldots,\ \frac{h-1}{t}\leqq\xi<\frac{h}{t},\ldots,\ \frac{t-1}{t}\leqq\xi<1. \tag{3}$$

---

*) Не исключается возможность того, что какая-либо изъ категорій не содержитъ ни одной вещи.

Возьмемъ произвольное вещественное число b; подъ y будемъ разумѣть какое-либо изъ $t+1$ цѣлыхъ чиселъ $0, 1, 2, \ldots, t$. При каждомъ значенiи y (изъ числа упомянутыхъ) для числа by мы найдемъ ближайшее къ нему справа цѣлое число x, и аналогично соотношенiю (2) будемъ имѣть:

$$0 \leqq x - by < 1;$$

такимъ образомъ, $x - by$ содержится въ интервалѣ $\overline{01}$ и, слѣдовательно, удовлетворяетъ одному (и только одному) изъ соотношенiй (3). Мы распредѣлимъ $t+1$ чиселъ $x - by$ (отвѣчающихъ $t+1$ различнымъ значенiямъ y) на t категорiй въ зависимости отъ того, какое изъ соотношенiй (3) выполняется для каждаго изъ нихъ: къ первой категорiи мы отнесемъ тѣ числа $x - by$, для которыхъ выполняется первое изъ соотношенiй (3), вообще, къ h-ой категорiи — тѣ числа $x - by$, для которыхъ выполняется h-ое соотношенiе. Согласно основному принципу, формулированному въ началѣ статьи, хоть одна изъ категорiй (скажемъ, h-ая) будетъ содержать больше одного числа типа $x - by$, т. е. для двухъ (по крайней мѣрѣ) значенiй y' и y'' перемѣнной y соотвѣтствующiя имъ числа $x' - by'$ и $x'' - by''$ (черезъ x' и x'' обозначены цѣлыя числа, ближайшiя справа къ by' и by'') удовлетворяютъ оба h-ому изъ соотношенiй (3):

$$\frac{h-1}{t} \leqq x' - by' < \frac{h}{t}, \quad \frac{h-1}{t} \leqq x'' - by'' < \frac{h}{t}.$$

Пусть при этомъ $y'' > y'$. Въ первомъ изъ этихъ сложныхъ неравенствъ напишемъ части въ обратномъ порядкѣ и вычтемъ его почленно изъ второго неравенства, въ результатѣ чего получимъ:

$$-\frac{1}{t} < x'' - x' - b(y'' - y') < \frac{1}{t}. \tag{4}$$

Положимъ, далѣе,

$$x'' - x' = x, \quad y'' - y' = y; \tag{5}$$

такъ какъ $y' < y'' \leqq t$, то легко усмотрѣть, что y есть цѣлое число, содержащееся между 1 и t. Если въ соотношенiяхъ (4) сдѣлать подстановки (5), то придемъ къ неравенствамъ:

$$-\frac{1}{t} < x - by < \frac{1}{t},$$

откуда*)

$$|x - by| < \frac{1}{t}, \text{ или } \left|\frac{x}{y} - b\right| < \frac{1}{ty}. \tag{6}$$

---

*) Мы основываемся здѣсь на элементарномъ предложенiи: если $-\varepsilon < a < \varepsilon$ то $|a| < \varepsilon$. Оно очевидно, если $a = 0$, Далѣе, замѣтимъ, что изъ двухъ положительныхъ чиселъ меньшее имѣетъ меньшую абсолютную величину, а изъ двухъ отрицательныхъ, наоборотъ, бóльшее имѣетъ меньшую абсолютную величину; слѣдовательно, если $a > 0$, то изъ того, что $a < \varepsilon$, вытекаетъ: $|a| < |\varepsilon| = \varepsilon$; если же $a < 0$, то, такъ какъ $a > -\varepsilon$, приходимъ къ тому же: $|a| < |-\varepsilon| = \varepsilon$.

Такимъ образомъ, нами доказана теорема:

Для каждаго вещественнаго числа b и цѣлаго положительнаго числа t существуетъ, по меньшей мѣрѣ, одна пара цѣлыхъ чиселъ x и y (изъ коихъ послѣднее содержится между 1 и t) такого рода, что выполняются неравенства (6).

Этимъ предложеніемъ и пользуется Миньковскій для простого доказательства существованія пары цѣлыхъ рѣшеній Діофантова уравненія:

$$sX - rY = 1.$$

Числа r и s взаимно простыя, т. е. (такъ опредѣляетъ взаимно простыя числа Миньковскій) ихъ отношеніе $\frac{r}{s}$ не можетъ быть выражено съ помощью меньшихъ чиселъ*). Если $s = 1$, то уравненію, очевидно, удовлетворяютъ числа $X = 1$, $Y = 0$; поэтому впредь мы можемъ предполагать, что $s > 1$. Положимъ въ только-что доказанной теоремѣ $b = r/s$, $t = s - 1$; на основаніи ея можемъ утверждать существованіе такой раціональной дроби x/y (при чемъ $1 \leqq y \leqq s - 1$), которая удовлетворяетъ неравенству

$$\left| \frac{x}{y} - \frac{r}{s} \right| < \frac{1}{(s-1)y},$$

или (умножаемъ обѣ части его на sy):

$$|sx - ry| < 1 + \frac{1}{s-1};$$

такъ какъ дробь $\frac{1}{s-1}$ не превосходитъ единицы, а лѣвая часть этого неравенства есть цѣлое число, то

$$|sx - ry| \leqq 1;$$

такимъ образомъ, число, стоящее слѣва, можетъ либо $= 0$, либо $= 1$. Первое невозможно, ибо въ противномъ случаѣ дробь $\frac{r}{s}$ равнялась бы дроби $\frac{x}{y}$, гдѣ $y \leqq s - 1 < s$, а это противорѣчитъ предположенію, что дробь $\frac{r}{s}$ пе можетъ быть выражена съ помощью меньшихъ чиселъ.

Итакъ,

$$|sx - ry| = 1.$$

---

*) Убѣдиться въ томъ, будутъ ли разсматриваемыя числа взаимно простыми (по этому опредѣленію), можно съ помощью конечнаго числа испытаній, такъ какъ существуетъ лишь конечное число дробей, числители коихъ не превосходятъ r, а знаменатели не превосходятъ s.

Если черезъ ε обозначимъ знакъ числа $sx - ry$, то будетъ имѣть мѣсто равенство:

$$\varepsilon(sx - ry) = 1, \quad \text{или} \quad s(\varepsilon x) - r(\varepsilon y) = 1.$$

Отсюда слѣдуетъ, что цѣлыя числа

$$X = \varepsilon x, \quad Y = \varepsilon y$$

представляютъ собой пару рѣшеній Діофантова уравненія (1).

Гр. Ф.

Линейные спектры и строеніе атомовъ.

В. Ритца.

I. Общія положенія. Новые эмпирическіе законы.

Несмотря на постоянно возобновляемыя усилія изслѣдователей, природа атомовъ и молекулярныхъ силъ намъ все еще пока очень мало извѣстна. Въ самомъ дѣлѣ, большая трудность задачи заключается въ томъ, что въ большинствѣ случаевъ мы наблюдаемъ не свойства атомовъ, но сложныя среднія явленія, зависящія отъ безпорядочнаго молекулярнаго движенія и внѣшнихъ причинъ. Есть, однако, одно важное исключеніе изъ этого правила: спектры простыхъ тѣлъ непосредственно даютъ намъ свѣдѣнія о различныхъ видахъ колебанія атомовъ; ибо расположеніе линій въ спектрѣ почти совершенно не зависитъ ни отъ температуры, ни отъ внѣшнихъ условій, ни даже отъ дѣйствія молекулъ другъ на друга. Очевидно, если бы по колебаніямъ электрическихъ зарядовъ атома можно было судить о силахъ, которыя ихъ производятъ, и о расположеніи или движеніи самихъ зарядовъ, — то задача была бы рѣшена. Чрезвычайная точность спектральныхъ измѣреній даетъ намъ по этому вопросу многочисленные и цѣнные документы, но написанные, къ сожалѣнію, іероглифами, которыхъ мы не умѣемъ разбирать. Но все-таки, благодаря замѣчательной простотѣ нѣкоторыхъ эмпирическихъ законовъ, связывающихъ другъ съ другомъ длины волнъ отдѣльныхъ линій спектра, нѣкоторые результаты въ этомъ направленіи были получены. И дѣйствительно, изъ нижеслѣдующаго будетъ видно, что задача для водорода во всякомъ случаѣ имѣетъ очень простое рѣшеніе, вполнѣ согласное съ общимъ взглядомъ на строеніе атомовъ, сложившимся подъ вліяніемъ послѣднихъ открытій.

Припомнимъ замѣчательную формулу, найденную Бальмеромъ (Balmer), которая связываетъ между собой длины волнъ λ спектральныхъ линій водорода. Ее можно написать слѣдующимъ образомъ, обозначая черезъ N нѣкоторую постоянную:

$$\frac{1}{\lambda}=N\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{m^2}\right).$$

Давая m послѣдовательно значенія 3, 4, 5,...,32, мы получаемъ точныя длины волнъ всѣхъ линій водорода. Если есть ошибка, то, повидимому, она меньше одной стотысячной.

Пикерингъ (Pickering) открылъ въ спектрѣ нѣкоторыхъ звѣздъ, въ которыхъ преобладаетъ водородъ, вторую серію линій, которую мы еще не умѣемъ воспроизвести въ лабораторіи; эта серія выражается формулой:

$$\frac{1}{\lambda}=N\left[\frac{1}{2^2}-\frac{1}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2}\right],\ m=1,\ 2,\ 3\ldots,$$

въ которой N обозначаетъ ту же постоянную, что и выше.

Согласно Бальмеру (Balmer) и Рюдбергу (Rydberg) есть основаніе думать, что въ дѣйствительности эти формулы должны содержать каждая два произвольныхъ цѣлыхъ числа m и n; такимъ образомъ, спектръ водорода выражался бы формулами:

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2}, \tag{2}$$

гдѣ значенія $n=3,\ 4\ldots$ соотвѣтствуютъ инфра-краснымъ линіямъ. Эта гипотеза совсѣмъ недавно получила блестящее подтвержденіе. По моимъ указаніямъ Пашенъ (Paschen) нашелъ, дѣйствительно, двѣ инфра-красныя линіи водорода, которыя ему удалось измѣрить съ большой точностью*). Онъ получилъ:

$$\lambda=18.751{,}3\pm 1U.\mathring{A}\ ^{**})$$

и

$$\lambda=12.817{,}6\pm 1{,}5U.\mathring{A};$$

формулы же

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2};\quad \frac{1}{N}\cdot\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}$$

даютъ:

$$\lambda=18.751{,}6 \text{ и } 12.818{,}7.$$

---

*) F. Paschen, Annalen der Physik, Октябрь, 1908.

** Единицъ Онгстрёма (Ångstrom).

Итакъ, согласіе формулъ съ наблюденіемъ не оставляетъ желать ничего лучшаго.

Формулы эти настолько просты, что стремленіе найти такіе механическія или электромагнитныя системы, колебанія которыхъ выражались бы ими, нельзя считать лишенными смысла. Впрочемъ, подобные законы были, какъ извѣстно, найдены Рюдбергомъ, Кайзеромъ (Kayser) и Рунге (Runge) и въ другихъ спектрахъ. И въ этихъ случаяхъ также доказано*), что формулы содержатъ два произвольныхъ цѣлыхъ числа. По Рюдбергу въ первомъ приближеніи можно написать ихъ такъ:

$$\frac{1}{N\lambda}=\frac{1}{(n+a)^2}-\frac{1}{(m+a')^2}$$

и болѣе точно, какъ указалъ авторъ настоящей статьи:

$$\frac{1}{N\lambda}=\frac{1}{\left(n+a+\frac{b}{n^2}\right)^2}-\frac{1}{\left(m+a'+\frac{b'}{m^2}\right)^2}. \tag{3}$$

Здѣсь N имѣетъ то же значеніе, какъ и въ случаѣ водорода, тогда какъ постоянныя a, b, a', b' различны для различныхъ элементовъ. Выбирая ихъ надлежащимъ образомъ и полагая $m = 1^1/_2$, $n = 2,3\ldots$, мы изъ формулы (3) получаемъ „главную серію“ Кайзера и Рунге; для $n = 2$, $m = 2^1/_2$, $3^1/_2\ldots$ мы получаемъ вторую побочную серію; системамъ значеній $n = 3$, $m = 2^1/_2\ldots$ и т. д. также соотвѣтствуютъ наблюдавшіяся линіи. Замѣняя a', b' нѣкоторыми новыми постоянными a'' b'', получаемъ для $n = 2$, $m = 3$, 4, $5\ldots$ первую побочную серію, которая для $m = \infty$ имѣетъ тотъ же предѣлъ, что и вторая. И въ этомъ случаѣ удалось найти инфра-красныя линіи $n = 3$, $m = 3$, 4 и т. д. Но, если вмѣсто того, чтобы сочетать, какъ мы сдѣлали выше, первый членъ, содержащій a и b, со вторымъ, содержащимъ a', b' или a'', b'', мы напишемъ выраженіе:

$$\frac{1}{N\lambda}=\frac{1}{\left(n+a'+\frac{b'}{n^2}\right)^2}-\frac{1}{\left(m+a''+\frac{b''}{m^2}\right)^2}, \tag{4}$$

въ которомъ сочетаются a', b' въ первомъ членѣ съ a'', b'' во второмъ то мы получимъ новыя линіи, которыя дѣйствительно наблюдались, по крайней мѣрѣ, въ нѣкоторыхъ спектрахъ. Этотъ результатъ особенно ясно указываетъ на значеніе этихъ формулъ. Наконецъ, комбинируя аналогичнымъ образомъ главную серію самое съ собой, мы получаемъ для литія и натрія:

$$\frac{1}{N\lambda}=\frac{1}{\left(m+a+\frac{b}{m^2}\right)^2}-\frac{1}{\left(n+a+\frac{b}{n^2}\right)^2} \tag{5}$$

*) Для болѣе подробнаго ознакомленія съ дальнѣйшимъ см. мои различные мемуары: Comtes Rendus, t. CXLV, p. 178, 1907; Physical. Zeitschr., августъ, 1908; The astrophysikal Journal, октябрь, 1908; Ann. der Physik, t. XXV, p. 660, 1908.

Изъ этихъ законовъ слѣдуетъ, что, складывая или вычитая частоты двухъ наблюдаемыхъ линій или серій, мы получаемъ частоту новой линіи или цѣлой серіи линій. Ошибки, которыя при этомъ получаются, бываютъ того же порядка, что экспериментальныя неточности. Такъ, напримѣръ, для гелія мы находимъ для самой яркой линіи системы (4) $\frac{1}{\lambda} = 26\,.\,244{,}86$; опытъ же даетъ $26\,.\,244{,}78$.

Этимъ я и ограничусь. Итакъ, мы видимъ, что:

1. Простые законы получаются всегда для $\frac{1}{\lambda}$, т. е. для частоты.

2. При безконечномъ увеличеніи одного или другого изъ цѣлыхъ чиселъ полученныя частоты стремятся къ опредѣленному предѣлу.

3. Каждый изъ двухъ членовъ формулы имѣетъ, нѣкоторымъ образомъ, самостоятельное существованіе, и, комбинируя различнымъ образомъ такіе члены, мы получаемъ линіи спектра.

II. Гипотеза атомныхъ полей.

Эти общіе выводы вполнѣ ясно оттѣняютъ большую разницу, существующую между упругими, электрическими и другими намъ извѣстными колебаніями, съ одной стороны, и колебаніями, соотвѣтствующими спектральнымъ линіямъ, съ другой. Прежде всего,— и на этомъ лордъ Рэлей (Rayleigh) особенно настаивалъ, — простые законы колебательныхъ явленій относятся, за малыми исключеніями, къ квадратамъ частотъ, а не просто къ частотамъ. Это происходитъ оттого, что уравненія движенія содержатъ не только координаты, опредѣляющія состояніе системъ, но и вторыя производныя или ускоренія. Въ самомъ дѣлѣ, когда дѣло идетъ о колебаніяхъ, время входитъ только въ формѣ $\sin v\,(t - t_0)$,— выраженіе, вторая производная котораго содержитъ множитель v^2. Слѣдовательно, для опредѣленія частоты v, такъ какъ $\sin v\,(t - t_0)$ исчезаетъ изъ результата, мы получаемъ, въ концѣ концовъ, уравненіе относительно v^2 и только въ исключительныхъ случаяхъ можно алгебраически извлечь квадратный корень. Дѣло обстояло бы иначе, какъ замѣчаетъ это лордъ Рэлей, если бы дифференціальныя уравненія были перваго порядка Къ сожалѣнію, введеніе ускореній со всѣхъ точекъ зрѣнія представляется безусловно необходимымъ, такъ что на первый взглядъ наше положеніе кажется безвыходнымъ.

Однако, слѣдующая простая гипотеза выведетъ насъ изъ затрудненія. Если силы, которыя производятъ колебанія, не будутъ опредѣляться положеніемъ или деформаціей системы, какъ это обыкновенно бываетъ для упругихъ и другихъ системъ, а будутъ зависѣть отъ скоростей, то въ уравненіяхъ движенія, кромѣ этихъ скоростей, будутъ содержаться ихъ первыя производныя, т. е. ускоренія; они будутъ перваго порядка по отношенію къ скоростямъ.

Магнитная сила удовлетворяетъ, именно, этому условію; болѣе того, мы уже не можемъ сомнѣваться въ существованіи мощныхъ магнитныхъ полей внутри атомовъ. По теорiи ферро-магнитизма П. Вейсса*) (P. Weiss), эти поля, по крайней мѣрѣ, порядка 10^7 гауссовъ (порядокъ величины молекулярнаго магнитнаго поля). Эта теорiя, какъ извѣстно, нашла себѣ замѣчательное подтвержденiе въ количественномъ объясненiи аномалiй удѣльной теплоты желѣза, никеля и кобальта. Съ другой стороны, Гёмфрейзъ (Humphreys) для объясненiя законовъ перемѣщенiя линiй подъ влiянiемъ давленiя (явленiе, открытое имъ нѣсколько лѣтъ тому назадъ), долженъ былъ приписать эти законы взаимному дѣйствiю молекулярныхъ полей порядка величины 10^8 гауссовъ.

Легко показать, что съ такимъ полемъ возможно безконечнымъ множествомъ способовъ получить колебанiя корпускулы съ частотой, пропорцiональной этому полю и порядка величины, соотвѣтствующей свѣтовымъ колебанiямъ. Достаточно, напримѣръ, подчинить корпускулы условiю, чтобы онѣ оставались на опредѣленномъ элементѣ поверхности или въ данной плоскости: эта корпускула, будучи приведена въ движенiе, будетъ совершать круговое движенiе частоты v, пропорцiональной, составляющей H_n поля H, перпендикулярной къ плоскости. Если къ полю H_n прибавляется новое поле H'_n, которое само по себѣ вызвало бы колебанiе частоты v', то положенiе обоихъ полей дастъ частоту $v+v'$. Такимъ образомъ, мы дѣйствительно получаемъ линейную зависимость, требуемую закономъ постоянныхъ разностей и законами, приведенными выше.

(Окончанiе слѣдуетъ).

Краткiй отчетъ о засѣданiи Московскаго Математическаго кружка 13 марта 1909 года.

Въ засѣданiи было сдѣлано два доклада.

Первый докладъ на тему „Вопросы пропедевтики геометрiи въ русской педагогической литературѣ“ былъ прочитанъ преподавателемъ московскихъ среднихъ учебныхъ заведенiй П. А. Барановымъ.

Докладчикъ задался цѣлью напомнить о существующихъ въ нашей педагогической литературѣ трудахъ, посвященныхъ пропедевтикѣ геометрiи. Выполнить намѣченную задачу докладчикъ рѣшилъ путемъ выясненiя того, какъ рѣшались различными авторами основные вопросы пропедевтики геометрiи, и отмѣчая главныя теченiя методики этого курса. Приводя мнѣнiя Евтушевскаго, Фанъ-деръ-Флита, Паульсона, Вулиха, Добровольскаго и другихъ, докладчикъ разсмотрѣлъ слѣдующiе вопросы: 1) въ чемъ состоятъ цѣли пропедевтики геометрiи; 2) какiе существуютъ пути для достиженiя этихъ цѣлей; 3) чѣмъ отличается приготовительный курсъ геометрiи отъ начальнаго курса геометрiи; 4) сколько времени требуется на прохожденiе пропедевтическаго курса геометрiи; 5) каковъ долженъ быть методъ преподаванiя пропедевтическаго курса геометрiи. Разбирая второй изъ

*) См. „Revue générale des Sciences“ отъ 15 февраля 1908 г.

перечисленныхъ вопросовъ, докладчикъ отмѣтилъ два главныхъ направленія пропедевтики геометріи, а именно: 1) въ основу кладется разсматриваніе тѣлъ; 2) основой является разсматриваніе линій. Въ курсахъ второго направленія выдѣляются, въ свою очередь, два теченія: одно базируется на упражненіяхъ геодезическаго характера, другое тѣсно связано съ графическими упражненіями. Разбирая наиболѣе типическіе труды, посвященные пропедевтикѣ геометріи, г. Барановъ особенное вниманіе удѣлилъ труду Вулиха —„Приготовительный курсъ геометріи", напечатанному впервые въ журналѣ „Семья и Школа" за 1871 и 1872 гг., въ виду большого педагогическаго достоинства этого курса, а также и потому, что то направленіе, котораго держался Вулихъ, было проведено въ жизнь русской школы программами бывшихъ военныхъ гимназій и городскихъ по положенію 1872 г. училищъ.

Въ обсужденіи доклада приняли участіе Н. А. Извольскій, А. Н. Шапошниковъ, А. К. Власовъ, А. А. Алферова, Д. А. Волковскій е Б. К. Млодзѣевскій, при чемъ изъ преній выяснилось, что вопросъ о пропедевтическомъ курсѣ геометріи и въ настоящее время является существенно-важнымъ для школы и введеніе его въ программы среднихъ учебныхъ заведеній большинствомъ признается въ высшей степени желательнымъ. Труды русскихъ педагоговъ, перечисленные референтомъ, и теперь могли бы быть полезны при разработкѣ этого вопроса, но въ виду успѣха, сдѣланнаго за послѣднія десятилѣтія и самой геометрической наукой и ея методикой, учебный планъ пропедевтическаго курса геометріи долженъ быть переработанъ заново.

Второй докладъ—„О повтореніи математики въ VIII-мъ классѣ кадетскихъ корпусовъ"—былъ сдѣланъ преподавателемъ московскихъ среднихъ учебныхъ заведеній Н. Н. Чулицкимъ.

Въ текущемъ году Главное Управленіе военно-учебныхъ заведеній въ развитіе общихъ принциповъ, положенныхъ въ программу и инструкцію для преподаванія учебныхъ предметовъ въ кадетскихъ корпусахъ 1898 г., сдѣлало нѣкоторыя разъясненія. Указывая на уменьшеніе числа уроковъ, отведенныхъ на повтореніе математики въ VIII-мъ классѣ, съ 4 на 3 въ недѣлю, Главное Управленіе предлагаетъ держаться принципа повторить немного, но основательно, относясь отрицательно къ сплошному повторенію, какъ къ скучному подтверживанію задовъ. Въ одномъ изъ своихъ циркуляровъ Главное Управленіе говоритъ, что цѣль повторенія математики въ старшихъ классахъ заключается не столько въ заучиваніи, сколько въ уясненіи, систематизаціи и сообщеніи матеріала. Въ частности, по ариѳметикѣ рекомендуется пройти теоретическія статьи о дѣлимости, объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ и наименьшемъ кратномъ, о простыхъ числахъ и объ обращеніи простыхъ дробей въ десятичныя — по учебнику Серре, а дѣйствія съ дробями по учебнику младшихъ классовъ. По алгебрѣ необходимо остановиться на развитіи понятія о числѣ, несоизмѣримости, уравненіяхъ, радикалахъ и логариѳмахъ. При этомъ необходимо возможно шире пользоваться понятіемъ о функціи и ея непрерывности, вводя вездѣ, гдѣ возможно, геометрическія иллюстраціи. При повтореніи геометріи рекомендуется не останавливаться на деталяхъ, а обратить вниманіе на сознаніе цѣльности матеріала, основныя положенія геометріи, типы доказательствъ, соединяя при повтореніи вмѣстѣ теоремы съ одинаковыми методами доказательствъ изъ разныхъ отдѣловъ курса. Образовавшіеся въ результатѣ такого повторенія курса пробѣлы предлагается восполнить путемъ классной работы. Повтореніе тригонометріи не считается нужнымъ, хотя и предлагается вводить въ рѣшеніе геометрическихъ задачъ тригонометрическія величины и построить графики тригонометрическихъ функцій. Относясь съ сочувствіемъ къ тѣмъ принципамъ, которые положены отнынѣ въ основаніе повторительнаго курса математики въ VIII-мъ классѣ, докладчикъ выразилъ, однако, сомнѣніе въ практическомъ осуществленіи поставленной симпатичной цѣли. Такъ, ему представляется мало продуктивнымъ прохожденіе статей теоретической ариѳметики, трудно понимаемой учащимися по ихъ крайней отвлеченности. Далѣе, повтореніе алгебры и геометріи, въ сущности, является почти полнымъ прохожденіемъ ихъ заново, съ новыхъ точекъ зрѣнія, ибо сдѣланныя сокращенія незначительны. Пользоваться тригонометрическими данными въ геометрическихъ задачахъ безъ повторенія тригонометріи референту представляется рискованнымъ. Наконецъ, введеніе новыхъ началъ въ прохожденіе предмета прямо въ выпускномъ классѣ можетъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ повести къ осложненіямъ и затрудненіямъ въ зависимости отъ весьма разнообразныхъ мѣстныхъ условій предшествующей постановки учебнаго дѣла.

Принявшіе участіе въ обсужденіи доклада члены Кружка, относясь, подобно докладчику, съ сочувствіемъ къ принципамъ, положеннымъ въ основу плана повторительнаго курса, находили его трудно осуществимымъ на практикѣ, въ виду незначительнаго числа отведенныхъ на него часовъ, а также излишней его регламентаціи, связывающей преподавателя въ его дѣйствіяхъ.

Краткій отчетъ о засѣданіи Московскаго Математическаго кружка 23 апрѣля 1909 г.

Въ засѣданіи, кромѣ обычныхъ предметовъ занятій — выборовъ новыхъ членовъ Кружка, текущихъ дѣлъ, преподавателемъ московскихъ среднихъ учебныхъ заведеній Д. Л. Волковскимъ было сдѣлано сообщеніе — „О пріемахъ быстраго счета“.

Признавая вопросъ о вычисленіяхъ вообще однимъ изъ важнѣйшихъ методическихъ вопросовъ въ дѣлѣ обученія ариѳметикѣ въ начальной школѣ и однимъ изъ важныхъ вопросовъ по этому предмету въ средней школѣ, докладчикъ вмѣстѣ съ тѣмъ указалъ, что вопросъ этотъ есть одно изъ самыхъ больныхъ мѣстъ не только русской начальной и особенно средней школы, но и заграничной. Относительно плохой постановки вычисленій по ариѳметикѣ въ заграничной (французской) школѣ референтъ сослался на мнѣніе французскаго математика Е. Бореля (E. Borel), высказанное имъ въ докладѣ, который читался въ 1905 г. на конференціяхъ преподавателей математики и физики въ Парижскомъ Педагогическомъ Музеѣ, и единогласно одобренное собраніемъ, а относительно русской школы привелъ взглядъ А. И. Гольденберга, въ общемъ совпадающій со взглядомъ Бореля.

Важность вычисленій, вообще, и сокращенныхъ, въ частности, признается весьма многими методистами. Не говоря уже объ иностранной литературѣ, особенно о нѣмецкой, вопроса о сокращенныхъ вычисленіяхъ не чуждается и русская литература: о нихъ говорится, хотя и кратко, почти въ любой методикѣ ариѳметики, а также въ коммерческихъ ариѳметикахъ, и весьма кратко въ руководствахъ по общей ариѳметикѣ. Есть, впрочемъ, и спеціальныя брошюры. Больше же всего вопросу о быстрыхъ вычисленіяхъ посвященъ рядъ статей какъ оригинальныхъ, такъ и переводныхъ въ журналѣ „Народное Образованіе“. Но изъ всѣхъ книгъ, въ которыхъ говорится о быстрыхъ вычисленіяхъ, референтъ не знаетъ ни одной ни въ русской, ни въ иностранной литературѣ, гдѣ этотъ вопросъ разсматривался бы съ такою полнотою и обстоятельностью, какъ въ сочиненіи Феликса Мартеля „Пріемы быстраго счета“, вышедшемъ въ Парижѣ въ 1907 г. и переведенномъ въ 1909 г. на русскій языкъ редакторомъ журнала „Народное Образованіе“ П. П. Мироносицкимъ *). Правда, по словамъ докладчика, нельзя сказать, чтобы Ф. Мартель предлагалъ совершенно новые пріемы быстраго счета: то, что изложено въ книгѣ Ф. Мартеля, есть и въ другихъ подобныхъ

*) Феликсъ Мартель. „Пріемы быстраго счета“. Переводъ съ французскаго П. П. Мироносицкаго. СПБ. 1909 г. Цѣна 80 к.

работахъ, но только по частямъ, здѣсь же все собрано въ одно; хотя, впрочемъ, по заявленію референта, нельзя утверждать, чтобы въ этомъ трудѣ была использована вся литература разсматриваемаго предмета, даже французская. По крайней мѣрѣ, въ книгѣ Ф. Мартеля не нашли себѣ мѣста нѣкоторые частные случаи умноженія, предложенные такими крупными французскими математиками, какъ Коллиньо, Коти и др. Затѣмъ докладчикъ перешелъ къ разсмотрѣнію нѣкоторыхъ случаевъ сокращенныхъ вычисленій на сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе какъ цѣлыхъ, такъ и дробныхъ чиселъ, указанныхъ въ книгѣ Ф. Мартеля.

Признавая полезность нѣкоторыхъ пріемовъ быстраго счета въ теоретическомъ, образовательномъ и практическомъ, жизненномъ отношеніи, докладчикъ, однако, предостерегаетъ отъ увлеченія этими пріемами, видя въ этомъ увлеченіи непроизводительную трату времени и силъ учащихся.

Полагая необходимымъ знакомство учащихся съ нѣкоторыми сокращенными вычисленіями, референтъ вмѣстѣ съ тѣмъ признаетъ существенно важнымъ, чтобы эти пріемы сообщались дѣтямъ не догматически, а обосновывались и, по возможности, выводились самими учащимися, не нарушая ихъ „свободнаго соображенія".

Слѣдующее засѣданіе Кружка состоится осенью.

ЗАДАЧИ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 168 (5 сер.). Построить треугольникъ по основанію, суммѣ (или разности) боковыхъ сторонъ и отрѣзку основанія, заключенному между медіаной и высотой.

В. Богомоловъ (Шацкъ).

№ 169 (5 сер.). Доказать теорему: во всякомъ тетраэдрѣ сумма квадратовъ его реберъ равна учетверенной суммѣ квадратовъ прямыхъ, соединяющихъ средины противоположныхъ другъ другу реберъ.

Б. Двойринъ (Одесса).

№ 170 (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\frac{\sqrt[4]{65+x}}{65}+\frac{\sqrt[4]{65+x}}{x}=\frac{243\sqrt[4]{x}}{2080}.$$

М. Крыйчикъ (Минскъ).

№ 171 (5 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y-z}=\frac{1}{b+c},$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z-x}=\frac{1}{b},$$

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{x-y}=\frac{1}{c}.$$

(Заимств.).

№ 172 (5 сер.). Доказать справедливость тожества

$$\sin 2A\sin^2 B+\sin 2B\sin^2 C+\sin 2C\sin^2 A=$$

$$=3\sin A\sin B\sin C+\sin(A-B)\sin(B-C)\sin(C-A).$$

(Заимств.).

№ 173 (5 сер.). Двѣ матеріальныя точки брошены изъ одного и того же мѣста земной поверхности вертикально вверхъ соотвѣтственно со скоростью v_1 и v_2 черезъ t секундъ одна послѣ другой. Черезъ сколько времени упадетъ на землю вторая точка послѣ первой?

А. *Добровольскій* (Брянскъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 81 (5 сер.), *Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе*

$$xy+3x-5y=-3.$$

Опредѣляя изъ этого уравненія x, находимъ:

$$x=\frac{5y-3}{y+3}=5-\frac{18}{y+3}, \qquad (1)$$

откуда видно, что цѣлое число $y+3$ должно равняться какому-нибудь дѣлителю 18, взятому со знакомъ плюсъ или минусъ, т. е.

$$y+3=\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6,\ \pm9,\ \pm18. \qquad (2)$$

Опредѣляя y изъ одного изъ уравненій (2) и подставляя эти значенія въ уравненіе (1), находимъ всѣ цѣлыя рѣшенія даннаго уравненія въ видѣ таблицы:

$$y=-2,\ -1,\ 0,\ 3,\ 6,\ 15,\ -4,\ -5,\ -6,\ -9,\ -12,\ -21,$$

$$x=-13,\ -4,\ -1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 23,\ 14,\ 11,\ 8,\ 7,\ 6,$$

въ которой соотвѣтствующія значенія x и y помѣщены въ одномъ столбцѣ.

С. Кудинъ (Москва); *М. Добровольскій* (Сердобскъ). *Ф. Рапопортъ* (Одесса); *П. Барановскій* (Фу-дзя-дзянъ, Манчжурія); *Б. Щиголевъ* (Варшава).

№ 82 (5 сер.). *Рѣшить систему уравненій*

$$\sqrt[3]{1+\frac{2x}{3}}+\sqrt[3]{1-\frac{2y}{3}}=1,\quad \sqrt[3]{1+\frac{2x}{3}}-\sqrt[3]{1-\frac{2y}{3}}=x.$$

(Заимств. изъ *Supplemento al Periodico di matematica*).

Сложивъ данныя уравненія, находимъ:

$$2\sqrt[3]{1+\frac{2x}{3}}=1+x, \quad \text{откуда } 8\left(1+\frac{2x}{3}\right)=1+3x+3x^2+x^3,$$

или, послѣ очевидныхъ преобразованій,

$$3x^3+9x^2-7x-21=0.$$

Представивъ послѣднее уравненіе въ видѣ:

$$3x^2(x+3)-7(x+3)=(3x^2-7)(x+3)=0,$$

находимъ

$$x_1=-3, \quad x_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{7}{3}}. \qquad (1)$$

Изъ перваго изъ предложенныхъ для рѣшенія уравненій имѣемъ:

$$\sqrt[3]{1-\frac{2y}{3}}=1-\sqrt[3]{1+\frac{2x}{3}},$$

$$y=\frac{3}{2}\left[1-\left(1-\sqrt[3]{1+\frac{2x}{3}}\right)^3\right]. \qquad (2)$$

Подставляя во вторую часть равенства (2) значенія x изъ формулъ (1), находимъ соотвѣтствующія значенія y:

$$y_1=-10{,}5,$$

$$y_{2,3}=\frac{3}{2}\left[1-\left(1-\sqrt[3]{1\pm\sqrt{\frac{7}{3}}}\right)^3\right], \qquad (3)$$

при чемъ въ формулахъ (1) и (3) надо взять одновременно одинъ и тотъ же знакъ передъ радикаломъ $\sqrt{\frac{7}{3}}$.

С. Кудинъ (Москва); *М. Добровольскій* (Сердобскъ); *Ф. Раппопортъ* (Одесса); *Л. Барановскій* (Фу-дзя-дзянъ, Манчжурія); *Б. Щиголевъ* (Варшава).

№ 100 (5 сер.). *Опредѣлить углы прямоугольнаго треугольника, въ которомъ отношеніе радіуса круга вписаннаго къ радіусу круга описаннаго достигаетъ maximum'а.*

Обозначая черезъ a, b, c, p гипотенузу, катеты и полупериметръ прямоугольнаго треугольника, черезъ A, B, C углы и черезъ r и R радіусы круговъ вписаннаго и описаннаго и замѣчая, что для прямоугольнаго треугольника

$$r=p-a, \quad R=\frac{a}{2},$$

имѣемъ:

$$\frac{r}{R}=\frac{p-a}{\left(\frac{a}{2}\right)}=\frac{2p-2a}{a}=\frac{b+c-a}{a}=\frac{b+c}{a}-1=$$

$$=\frac{a(\sin B+\sin C)}{a}-1=2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}-1=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{B-C}{2}-1=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{2}\cos\frac{B-C}{2}-1=\sqrt{2}\cos\frac{B-C}{2}-1,$$

откуда видно, что отношеніе $\frac{r}{R}$ достигаетъ maximum'а вмѣстѣ съ выраженіемъ $\cos\frac{B-C}{2}$. Такъ какъ B и C углы первой четверти, то $\cos\frac{B-C}{2}$ можетъ, обратившись въ 1, достигнуть своего наибольшаго значенія только при $B-C=0$, откуда вытекаетъ, что для искомаго треугольника

$$A=\frac{\pi}{2}, \quad B=C=\frac{\pi}{4}.$$

Б. Щиголевъ (Варшава).

№ 101 (5 сер.). *Доказать, что во всякомъ треугольникѣ сумма разстояній центра круга описаннаго отъ сторонъ равно суммѣ радіусовъ круговъ описаннаго и вписаннаго.*

(Заимств. изъ *Supplemento al Periodico di matematica*).

Назовемъ черезъ A, B, C — углы, черезъ a, b, c, p — стороны и полупериметръ треугольника ABC, черезъ s, R, r — площадь и радіусы круговъ описаннаго и вписаннаго, черезъ $O\alpha=x_a$, $O\beta=x_b$, $O\gamma=x_c$ — соотвѣтственныя разстоянія центра O круга описаннаго отъ сторонъ треугольника.

Тогда имѣемъ:

$$x_a=O\alpha=OB\cos\angle BO\alpha=R\cos A,$$

$$x_b=R\cos B,$$

$$x_c=R\cos C,$$

откуда

$$x_a+x_b+x_c=R\cos A+R\cos B+R\cos C=$$

$$=R+R\cos A+R\cos B+R\cos C-R=$$

$$=R+R(\cos A+\cos B+\cos C-1)=R+R\left(2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}\right)=$$

$$=R+2R\left(\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}\right)=R+2R\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)=$$

$$=R+2R\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)=R+4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=$$

$$=R+4R\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}\cdot\frac{(p-c)(p-a)}{ca}\cdot\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}=$$

$$=R+4R\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}=$$

$$=R+\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{S}=R+\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{Sp}=$$

$$=R+\frac{S^2}{Sp}=R+\frac{S}{p}=R+r,$$

при чемъ при одномъ изъ послѣднихъ преобразованій принята во вниманіе извѣстная въ элементарной геометріи формула $R=\frac{abc}{4S}$.

А. Абиндеръ (Тамбовъ); *Н. С.* (Одесса).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
ищется

Обложка
ищется