№ 490.

# Вѣстникъ Опытной Физики

и

# Элементарной Математики,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ф. Кагана.

XLI-го Семестра № 10-й.



ОДЕССА.
Типографія Акц. Южно-Русскаго О-ва Печ. Дѣла. Пушкинская, 18.
1909.

## ОТКРЫТА ПОДПИСКА НА 1909 ГОДЪ

**(20-й годъ изданія. Основатель Я. Г. Гуревичъ)**

на общепедагогическій журналъ для учителей и дѣятелей по народному образованію

# „РУССКАЯ ШКОЛА".

**ПРОГРАММА ЖУРНАЛА:** Общіе вопросы образованія и воспитанія. Реформа школы. Экспериментальная педагогика, психологія, школьная гигіена. Методика преподаванія различныхъ предметовъ. Исторія школы. Обзоры новѣйшихъ теченій въ области разныхъ наукъ. Дѣятельность государств. и обществ. учрежденій по народн. образованію (Госуд. Думы, земствъ и пр.). Народное образованіе заграницей. Низшая и средняя школа въ Россіи. Вопросы націон. школы разл. народовъ Россіи. Профессіональное образованіе. Женское образованіе. Внѣшкольное образованіе.

Кромѣ статей по означ. программѣ журналъ даетъ **слѣдующіе постоянные отдѣлы:** I. Экспериментальн. педагогика, **подъ ред. А. П. Нечаева**. II. Критика и библіографія, обзоры педагогич. и дѣтск. журналовъ. III. Хроника народнаго образованія на Западѣ. IV. Хроника національной школы разл. народовъ Россіи. V. Хроника библіотечнаго дѣла. VI. Хроника народнаго образованія въ Россіи. VII. Хроника профессіональнаго образованія. VIII. Хроника внѣшкольнаго образованія. IX. Замѣтки изъ текущей жизни. X. Разныя извѣстія. XI. Новѣйшія правительственныя распоряженія.

**Въ журналѣ принимаютъ участіе:** Н. Я. Абрамовичъ, Х. Д. Алчевская, Г. Аграевъ, Ц. П. Балталонъ, проф. И. А. Бодуэнъ-де-Куртенэ, И. А. Бѣлозерскій, И. П. Бѣлоконскій, В. П. Вахтеровъ, прив.-доц. Б. Вейнбергъ, д-ръ А. С. Виреніусъ, Е. М. Гаршинъ, проф. И. М. Гревсъ, А. Г. Готлибъ, Я. Я. Гуревичъ, Л. Я. Гуревичъ, А. Гуревичъ, К. Деруновъ, И. Жигецкій, проф. П. А. Заболотскій, А. Заксъ, С. Золотаревъ, Г. Г. Зоргенфрей, проф. Д. Н. Кайгородовъ, П. Ѳ. Каптеревъ, проф. Н. И. Карѣевъ, Н. Казанцевъ, В. А. Келтуяла, Н. М. Книповичъ, Н. И. Коробко, И. И. Лапшинъ, Б. Лезинъ, М. К. Лемке, проф. П. Ф. Лесгафтъ, Э. Ф. Лесгафтъ, А. Липовскій, А. А. Локтинъ, Э. Лямбекъ, Ѳ. Макаровъ, П. Г. Мижуевъ, А. Мезіеръ, А. Музыченко, А. П. Налимовъ, прив.-доц. А. П. Нечаевъ, Ф. Ф. Ольденбургъ, Л. Г. Оршанскій, А. Н. Острогорскій, Ф. И. Павловъ, проф. А. Л. Погодинъ, С. Н. Поляковъ, В. Л. Розенбергъ, Г. Роковъ, Н. А. Рубакинъ, Е. Рѣпина, С. Ф. Русова, С. И. Сазоновъ, проф. И. А. Сикорскій, С. И. Симоновъ, Л. С. Севрукъ, проф. Ир. П. Скворцовъ, А. Ѳ. Соколовъ, Н. М. Соколовъ, А. Стаховичъ, Ем. Стратоновъ, М. И. Страхова, М. А. Тростниковъ, Н. Томилинъ, К. А. Тюлеліевъ, В. И. Чарнолускій, Н. В. Чеховъ, В. И. Фармаковскій, В. А. Флеровъ, С. И. Шохоръ-Троцкій, Н. Шохоръ-Троцкая, А. Яцимирскій и др.

„Русская Школа" выходитъ ежемѣсячно книжками, не менѣе **пятнадцати** печ. листовъ (за май-іюнь и іюль-августъ—книжки двойного объема). **Подписная цѣна:** въ СПБ. безъ дост.—**семь** р., съ дост.—**7 руб. 50 коп.**, для иногороднихъ—**восемь** руб.; за границу—**девять** руб. въ годъ. Для **сельскихъ учителей**, выписывающихъ журналъ за свой счетъ, **шесть** руб. въ годъ, съ разсрочкою уплаты въ два срока. (При подпискѣ—**3** р. и въ іюлѣ—**3** р.). Городамъ и земствамъ, выписывающимъ не менѣе 10 экз., **уступка въ 15%**. Книжнымъ магазинамъ **за комиссію 5%** съ годовой цѣны.

Подписка съ разсрочкой и уступкой принимается **непосредственно въ конторѣ редакціи** (С.-Петербургъ, Лиговская улица, д. № 1).

**Золотая медаль на международной выставкѣ „Дѣтскій Міръ" въ 1904 году.**

Редакторъ-издатель *Я. Я. Гуревичъ.*

XLI Сем. № 10.

# Вѣстникъ Опытной Физики

и

# ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 490.



## О безконечно удаленныхъ элементахъ въ геометріи*).

*Прив.-доц. В. Ф. Кагана.*

Врядъ ли есть въ области геометріи вопросъ, относительно котораго царитъ такая путаница и который вызываетъ столько недоумѣнія, какъ вопросъ о безконечно удаленныхъ элементахъ. Оно и понятно почему. Для того, чтобы эти понятія не вызывали сомнѣній, было бы необходимо указать, каковы тѣ логическія положенія, которыми эти элементы вводятся въ геометрію, т. е. каковы тѣ формальныя свойства этихъ образовъ, которыми мы пользуемся, когда ведемъ то или иное о нихъ разсужденіе. Но этого мало. Для того, чтобы была увѣренность, что введеніе въ геометрію безконечно удаленныхъ образовъ не можетъ привести къ противорѣчію съ основными положеніями геометріи, нужно знать эти послѣднія, т. е. нужна логическая формулировка тѣхъ основныхъ положеній, изъ которыхъ чисто формально можетъ быть развита геометрія. Но, какъ извѣстно, есть еще очень мало сочиненій, въ которыхъ геометрія выводится чисто логически изъ строго формулированныхъ посылокъ. Коль скоро же этого нѣтъ, то нѣтъ и тѣхъ средствъ, помощью которыхъ можно было бы доказать, что введеніе безконечно удаленныхъ элементовъ не можетъ привести къ противорѣчію; болѣе того, не имѣетъ

*) Приложеніе къ 1-ой книгѣ II тома „Энциклопедіи элементарной математики“ Вебера и Вельштейна. Изд. „Mathesis“. Одесса. 1909.

опредѣленнаго содержанія и самый вопросъ, ибо неизвѣстно, съ чѣмъ, собственно, не должно быть противорѣчія. Такого рода сомнѣнія возникаютъ, конечно, и во всѣхъ остальныхъ частяхъ геометріи у всякаго, кто хочетъ найти въ ней строго логическую дисциплину; но тому, кто интересуется фактической стороной, при изученіи другихъ частей геометріи приходитъ на помощь интуиція, непосредственное воззрѣніе, наглядныя представленія, которыя онъ связываетъ съ геометрическими образами. Но всѣ эти средства отказываются служить, когда дѣло касается безконечно удаленныхъ элементовъ. Какъ представить себѣ, что параллельныя линіи, которыя, по опредѣленію своему, не имѣютъ общихъ точекъ, все же пересѣкаются въ нѣкоторой безконечно удаленной точкѣ? Какъ представить себѣ, что на прямой имѣется только одна безконечно удаленная точка, а на плоскости только одна безконечно удаленная прямая? Какъ представить себѣ, что въ пространствѣ имѣется только одна безконечно удаленная плоскость? Гдѣ, съ какой стороны пространства она расположена? Представить же себѣ, что плоскость окружаетъ все пространство, мы также не можемъ. Итакъ, когда рѣчь идетъ о безконечно удаленныхъ элементахъ, то мы не имѣемъ ни тѣхъ логическихъ основъ, исходя изъ которыхъ мы могли бы дѣлать о нихъ формальные выводы, ни наглядныхъ представленій, которыя руководятъ нами при изученіи другихъ вопросовъ геометріи въ тѣхъ случаяхъ, когда мы не имѣемъ достаточной логической почвы.

Между тѣмъ введеніе безконечно удаленныхъ элементовъ несомнѣнно приноситъ часто значительную пользу. Въ однихъ случаяхъ, это приводитъ къ обобщенію предложеній; такъ, напримѣръ, съ введеніемъ безконечно удаленныхъ точекъ теорема Дезарга обобщается и на тотъ случай, когда прямыя, соединяющія соотвѣтствующія вершины двухъ треугольниковъ, параллельны; въ другихъ случаяхъ мы быстрѣе приходимъ къ результату, пользуясь безконечно удаленными элементами. Для проективной же геометріи введеніе безконечно удаленныхъ элементовъ совершенно необходимо, такъ какъ проективное преобразованіе пространства было бы совершенно невозможно, если бы не учитывать безконечо удаленныхъ элементовъ [1]). Съ другой стороны, если мы будемъ всегда трактовать безконечно удаленныя точки такъ же, какъ и обыкновенныя точки, то мы легко можемъ придти къ абсурду. Было бы, напримѣръ, несправедливо сказать, что изъ любой безконечно удаленной точки можно, какъ

[1]) Вѣрнѣе: не вводя безконечно удаленныхъ элементовъ, можно было бы сохранить только тѣ проективныя соотвѣтствія, которыя сводятся къ движеніямъ и къ подобнымъ преобразованіямъ; аналитически это сводится къ тому, что можно было бы разсматривать только тѣ проективныя соотвѣтствія, которыя выражаются алгебраически цѣлыми линейными преобразованіями.

и изъ любой конечной точки, опустить перпендикуляръ на любую прямую или на любую плоскость; а въ тѣхъ случаяхъ, когда изъ безконечно удаленной точки можно провести перпендикуляръ на прямую или на плоскость, таковыхъ можетъ быть не одинъ, а безчисленное множество. При такихъ условіяхъ естественно возникаетъ вопросъ: въ какихъ же предѣлахъ можно пользоваться безконечно удаленными элементами, не рискуя придти къ абсурду.

Всѣ эти вопросы въ настоящее время можно считать совершенно разрѣшенными въ томъ смыслѣ, что никакихъ принципіальныхъ затрудненій они уже не вызываютъ. Но сочиненій, въ которыхъ этотъ вопросъ былъ бы достаточно выясненъ, очень мало, и они не принадлежатъ къ числу элементарныхъ [1]).

Нужно сказать, что и въ настоящемъ сочиненіи авторъ относится къ этому вопросу очень легко, и врядъ ли указанія на стр. 115, 119, 149 и др. могутъ удовлетворить читателя. Мы не имѣемъ возможности въ предѣлахъ настоящей статьи исчерпать вопросъ до конца, но полагаемъ, что нижеслѣдующія строки прольютъ нѣкоторый свѣтъ на этотъ вопросъ.

---

Въ настоящемъ сочиненіи авторъ неоднократно выясняетъ ту мысль, что одна и та же формально построенная логическая система можетъ находить себѣ примѣненіе къ различнымъ многообразіямъ, т. е. къ различнымъ комплексамъ объектовъ или образовъ. Такія два многообразія, которыя равно подходятъ подъ одну и ту же логическую систему, между которыми можно, слѣдовательно, установить однозначное соотвѣтствіе такимъ образомъ, чтобы соотвѣтственные элементы, какъ объекты примѣненія этой логической системы, играли въ ней одну и ту же роль, мы будемъ называть подобными относительно этой логической системы. Такимъ образомъ, напримѣръ, совокупность всѣхъ комплексныхъ чиселъ представляетъ собой многообразіе, подобное многообразію всѣхъ точекъ на плоскости относительно ариѳметики комплексныхъ чиселъ; ибо, какъ извѣстно, между этими многообразіями можетъ быть установлено соотвѣтствіе такимъ образомъ, чтобы каждой точкѣ отвѣчало одно и только одно комплексное число (его аффиксъ) и обратно;

---

[1]) Е. Буницкій. „Безконечно удаленные элементы въ геометріи положенія“. Записки Императорскаго Новороссійскаго университета. Т. 92. 1903.

F. Schur. „Ueber die Einführung der sogenanten idealen Elemente in die projective Geometrie“. Mathem. Annalen. XXXIX. 1891.

F. Amodeo. „Sulla introduzione dei elementi infiniti alla geometria projectiva“. Giornale di Matematiche. XXXIV. 1896.

Dr. M. Pasch. „Vorlesungen über neuere Geometrie“. Leipzig. 1882.

вмѣстѣ съ тѣмъ ариѳметическія дѣйствія надъ точками могутъ быть установлены такъ, чтобы они вполнѣ соотвѣтствовали дѣйствіямъ надъ ихъ аффиксами; обѣ системы представляютъ собой комплексы объектовъ, къ которымъ примѣняется ариѳметика комплексныхъ чиселъ.

Такимъ же образомъ совокупность комплексныхъ чиселъ по отношенію къ той же логической системѣ представляетъ собой многообразіе, подобное многообразію всѣхъ векторовъ на плоскости, выходящихъ изъ одной точки.

Чтобы это важное понятіе, на которомъ основаны всѣ нижеслѣдующія соображенія, вполнѣ отчетливо выяснить, укажемъ еще нѣкоторые геометрическіе примѣры. Во-первыхъ, въ примѣчаніи на стр. 38—42 было приведено многообразіе, подобное многообразію точекъ относительно Евклидовой геометріи. Оставляя цѣлый рядъ другихъ примѣровъ, которые авторъ разсматриваетъ въ текстѣ настоящаго сочиненія въ примѣненіи къ различнымъ геометрическимъ системамъ, разсмотримъ еще слѣдующій примѣръ.

Возьмемъ многообразіе всѣхъ лучей, выходящихъ въ (Евклидовомъ) пространствѣ изъ одной точки $O$, т. е. такъ называемую связку лучей. При этомъ подъ лучемъ мы разумѣемъ полупрямую, т. е. каждую изъ двухъ частей, на которыя точка $O$ дѣлитъ прямую. Представимъ себѣ далѣе сферу произвольнаго радіуса, имѣющую центръ въ точкѣ $O$. Каждый изъ нашихъ лучей встрѣчаетъ сферу въ одной точкѣ, которую мы будемъ считать точкой сферы, соотвѣтствующей этому лучу. Такимъ образомъ, между связкой лучей и многообразіемъ точекъ нашей сферы установлено однозначное соотвѣтствіе. Каждому образу (совокупности точекъ) на сферѣ отвѣчаетъ образъ (совокупность лучей въ связкѣ). Такъ, напримѣръ, дугѣ большого круга на сферѣ будетъ соотвѣтствовать въ связкѣ плоскій уголъ, т. е. точкамъ, заполняющимъ на сферѣ дугу большого круга, будутъ соотвѣтствовать лучи, заполняющіе плоскій уголъ. Цѣлому большому кругу будетъ соотвѣтствовать совокупность лучей, заполняющихъ цѣлую плоскость. Сферическому треугольнику будетъ соотвѣтствовать въ этомъ смыслѣ трехгранный уголъ. Каждое движеніе на сферѣ опредѣленнымъ образомъ замѣщаетъ точки сферы другими точками той же связки. Вмѣстѣ съ тѣмъ каждое предложеніе, выражающее свойство сферическихъ фигуръ, выражаетъ также свойство соотвѣтствующихъ образовъ въ связкѣ, если подъ терминами, фигурирующими въ предложеніи, разумѣть тѣ образы, которые имъ соотвѣтствуютъ въ связкѣ. Такимъ образомъ, напримѣръ, условія равенства сферическихъ треугольниковъ выразятъ условія равенства трехгранныхъ угловъ и т. д. Многообразіе лучей, представляемое связкой, и многообразіе точекъ на сферѣ подобны относительно той логической системы, которую мы называемъ сферической геометріей.

Выяснивши это понятіе, мы постараемся теперь показать, что совокупность точекъ, прямыхъ и плоскостей Евклидова пространства представляетъ собой многообразіе, подобное совокупности всѣхъ возможныхъ связокъ, прямыхъ и плоскостей въ пространствѣ относительно той логической системы, которую составляетъ совокупность аксіомъ сопряженія.

Какъ было выяснено въ текстѣ настоящаго сочиненія, Гильбертъ въ своей системѣ геометріи подраздѣляетъ аксіомы на пять группъ, изъ которыхъ первая состоитъ изъ слѣдующихъ восьми аксіомъ, называемыхъ аксіомами сопряженія.

$I_1$. Двѣ различныя точки $A$ и $B$ всегда опредѣляютъ прямую.

$I_2$. Прямая опредѣляется также любыми двумя различными своими точками.

$I_3$. На каждой прямой всегда имѣются, по меньшей мѣрѣ, двѣ точки, на каждой плоскости, по меньшей мѣрѣ, три точки, не расположенныя на одной прямой.

$I_4$. Три точки, не лежащія на одной прямой, всегда опредѣляютъ плоскость.

$I_5$. Плоскость опредѣляется также любыми тремя своими точками, не расположенными на одной прямой.

$I_6$. Если двѣ точки прямой лежатъ на плоскости, то всѣ точки этой прямой лежатъ на этой плоскости.

$I_7$. Если двѣ плоскости имѣютъ общую точку, то онѣ имѣютъ, по крайней мѣрѣ, еще одну общую точку.

$I_8$. Существуютъ, по крайней мѣрѣ, четыре точки, не расположенныя въ одной плоскости.

Подъ связкой прямыхъ мы будемъ разумѣть совокупность прямыхъ (не лучей), проходящихъ черезъ одну точку.

Условимся теперь называть каждую связку прямыхъ точкой. Мы будемъ всегда писать это слово въ разрядку, когда будемъ употреблять его въ этомъ новомъ для него значеніи. Ясно, что каждой обыкновенной точкѣ пространства отвѣчаетъ связка, т. е. точка въ новомъ значеніи этого термина. Въ этомъ новомъ многообразіи точекъ, т. е. многообразіи всѣхъ связокъ Евклидова пространства, мы будемъ подъ прямой и плоскостью разумѣть то же, что и обыкновенно въ геометріи; мы будемъ часто писать и эти термины въ разрядку только съ тою цѣлью, чтобы подчеркнуть, что мы разсматриваемъ ихъ теперь въ иной концепціи (въ многообразіи точекъ). Мы будемъ говорить, что прямая проходитъ черезъ точку, если она входитъ въ составъ соотвѣтствующей связки.

Мы будемъ говорить, что плоскость проходитъ черезъ точку, если она содержитъ, хотя бы одну прямую соотвѣтствующей связки (ясно, что она уже въ такомъ случаѣ необходимо содержитъ безчисленное множество прямыхъ этой связки); подъ терминомъ же точка лежитъ на прямой или на плоскости мы будемъ разумѣть, какъ обыкновенно, что прямая или плоскость соотвѣтственно содержитъ точку.

Теперь покажемъ, что совокупность точекъ, прямыхъ и плоскостей представляетъ собой многообразіе, подобное совокупности точекъ, прямыхъ и плоскостей въ обыкновенномъ смыслѣ этихъ словъ относительно аксіомъ сопряженія. Такъ какъ термины прямая и плоскость сохраняютъ свое значеніе, то дѣло сводится къ тому, чтобы обнаружить, что аксіомы сопряженія остаются въ силѣ, если подъ словомъ точка разумѣть не обыкновенную точку, а связку, а подъ терминами плоскость и прямая проходятъ черезъ точку или содержатъ точку разумѣть то, что установлено выше.

Дѣйствительно, двѣ различныя точки, т. е. двѣ не совпадающихъ связки, всегда опредѣляютъ прямую, черезъ нихъ проходящую: это есть единственная общая прямая обѣихъ связокъ; она содержитъ обѣ точки, ибо принадлежитъ обѣимъ связкамъ (аксіома $I_1$). Ясно также, что та же прямая опредѣляется и любыми другими двумя различными своими точками, т. е. любыми двумя различными связками, которымъ она принадлежитъ (аксіома $I_2$). Далѣе, на каждой прямой имѣются, по меньшей мѣрѣ, двѣ точки, т. е. каждая прямая принадлежитъ, по крайней мѣрѣ, двумъ различнымъ связкамъ; на каждой плоскости имѣются, по меньшей мѣрѣ, три точки, не расположенныя на одной прямой, т. е. каждая плоскость содержитъ, по крайней мѣрѣ, три прямыхъ, принадлежащихъ тремъ различнымъ связкамъ (аксіома $I_3$). Три точки, не лежащія на одной прямой, всегда опредѣляютъ плоскость, черезъ нихъ проходящую, ибо три различныя связки, не имѣющія общей прямой, опредѣляютъ три прямыхъ, принадлежащихъ каждая двумъ изъ этихъ связокъ. Черезъ эти три прямыя проходитъ плоскость, и при томъ еднственная, удовлетворяющая требованію (аксіома $I_4$). Ясно, что эта плоскость опредѣляется также любыми тремя другими своими точками, не расположенными на одной прямой (аксіома $I_5$). Если двѣ точки прямой лежатъ на плоскости, т. е. если эта плоскость содержитъ по одной прямой отъ двухъ различныхъ связокъ, то она содержитъ также общую прямую этихъ связокъ, а, слѣдовательно, проходитъ черезъ каждую точку этой прямой, ибо каждая связка, содержащая эту прямую, имѣетъ, такимъ образомъ, прямую, лежащую въ этой плоскости (аксіома $I_6$). Если двѣ плоскости имѣютъ одну общую точку, т. е. если двѣ различныя плоскости содержатъ каждая по прямой связки, то онѣ всегда имѣютъ общую прямую, принадлежащую связкѣ, а, слѣдовательно, имѣютъ прямую, принадлежащую еще и другимъ связкамъ, т. е. имѣютъ и другія точки (аксіома $I_7$). Наконецъ, если мы возьмемъ три точки, не лежащія на одной прямой, то онѣ, какъ мы видѣли, всегда опредѣляютъ плоскость; а такъ какъ всегда существуютъ еще связки, не имѣющія съ этой плоскостью ни одной общей прямой, то существуютъ, по крайней мѣрѣ, четыре точки, не расположенныя въ одной плоскости (аксіома $I_8$).

Такимъ образомъ, мы видимъ, что многообразіе точекъ, прямыхъ и плоскостей подобно многообразію обыкновенныхъ точекъ, прямыхъ и плоскостей относительно аксіомъ расположенія.

Теперь, сверхъ тѣхъ связокъ, которыя мы разсматривали до сихъ поръ, мы введемъ еще другого рода связки; именно, мы условимся называть также связкой совокупность всѣхъ прямыхъ, параллельныхъ какой-либо опредѣленной прямой. Этимъ вводится въ разсмотрѣніе безчисленное множество новыхъ связокъ. Сообразно же введенной нами выше новой терминологіи мы будемъ эти связки также называть точками, но, въ отличіе отъ прежде введенныхъ точекъ, мы будемъ называть ихъ безконечно удаленными точками. Въ этомъ новомъ своемъ значеніи безконечно удаленная точка представляетъ собою уже вполнѣ опредѣленное понятіе: это есть связка параллелей. Въ дальнѣйшемъ мы сохранимъ терминологію, принятую раньше, т. е. мы будемъ говорить, что прямая содержитъ безконечно удаленную точку (или что безконечно удаленная точка лежитъ на прямой), если эта прямая входитъ въ составъ соотвѣтствующей связки. Въ такомъ случаѣ мы можемъ сказать, что на каждой прямой лежитъ одна и только одна безконечно удаленная точка, ибо каждая прямая входитъ въ составъ одной и только одной связки параллелей. Вмѣстѣ съ тѣмъ параллельныя между собой прямыя всѣ проходятъ черезъ одну и ту же безконечно удаленную точку, такъ какъ онѣ принадлежатъ одной связкѣ параллелей.

Далѣе, какъ и прежде, мы будемъ говорить, что плоскость проходитъ черезъ безконечно удаленную точку (или что безконечно удаленная точка лежитъ на плоскости), если плоскость содержитъ хотя бы одну прямую, принадлежащую соотвѣтствующей связкѣ. Ясно, такимъ образомъ, что, сообразно этой терминологіи, плоскость содержитъ тѣ безконечно удаленныя точки, которыя представляютъ собой связки прямыхъ, параллельныхъ этой плоскости; и такъ какъ такихъ связокъ имѣется безчисленное множество, то можно сказать, что каждая плоскость содержитъ безчисленное множество безконечно удаленныхъ точекъ. Совокупность безконечно удаленныхъ точекъ, принадлежащихъ одной плоскости, мы будемъ называть безконечно удаленной прямой этой плоскости. Сообразно этой терминологіи, на каждой плоскости имѣется одна и только одна безконечно удаленная прямая. Вмѣстѣ съ тѣмъ двѣ параллельныя плоскости имѣютъ одну и ту же безконечно удаленную прямую, ибо безконечно удаленныя прямыя какъ одной, такъ и другой плоскости состоятъ изъ тѣхъ безконечно удаленныхъ точекъ, т. е. изъ тѣхъ связокъ, которыя параллельны этимъ плоскостямъ. Напротивъ, безконечно удаленныя прямыя, принадлежащія двумъ непараллельнымъ плоскостямъ, не совпадаютъ, а имѣютъ только одну общую безконечно удаленную точку. Въ самомъ дѣлѣ, общая безконечно удаленная точка двухъ такихъ безконечно удаленныхъ прямыхъ должна лежать въ обѣихъ плоскостяхъ, т. е. это должна быть связка параллелей, изъ которыхъ нѣкоторыя лежатъ въ одной изъ этихъ плоскостей и нѣкоторыя въ другой и которыя всѣ, слѣдовательно, параллельны обѣимъ плоскостямъ. Ясно, что такая связка есть только одна; это есть связка прямыхъ, параллельныхъ прямой пересѣченія нашихъ двухъ плоскостей.

Наконецъ, совокупность всѣхъ безконечно удаленныхъ точекъ мы будемъ называть безконечно удаленной плоскостью. При такой терминологіи въ пространствѣ есть, слѣдовательно, одна безконечно удаленная плоскость, составленная изъ всѣхъ безконечно удаленныхъ точекъ.

*(Окончаніе слѣдуетъ).*

# Линейные спектры и строеніе атомовъ.

*В. Ритца.*

*(Окончаніе*).*

## III. Спектры водорода. Серіи.

Предположимъ теперь, что силы, которыя производятъ колебанія, соотвѣтствующія линейчатымъ спектрамъ, или, точнѣе, спектрамъ съ линіями, расположенными въ серіи, были бы исключительно магнитныя. Эта гипотеза позволитъ намъ объяснить существованіе предѣла частотъ и, въ особенности, дастъ простое истолкованіе формулъ (1) и (2) для водорода; болѣе того, она дастъ намъ возможность понять происхожденіе аномальныхъ и сложныхъ явленій Зеемана (Zeeman). И тогда эта гипотеза станетъ тѣмъ болѣе вѣроятной, что, несмотря на усилія многочисленныхъ изслѣдователей, до сихъ поръ не было найдено никакого удовлетворительнаго рѣшенія ни той ни другой задачи.

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“, № 489.

Допустимъ (это будетъ наиболѣе простая гипотеза), что поле производится магнитомъ, и предположимъ, въ видахъ симметріи, что корпускула расположена на продолженіи линіи, соединяющей полюсы, на разстояніи $r_1$ отъ перваго и $r_2$ отъ второго полюса, и что она совершаетъ маленькія колебанія въ плоскости, перпендикулярной къ этой линіи. Пусть $\mu$ будетъ магнитный зарядъ одного изъ полюсовъ; тогда частота будетъ пропорціональна полю въ точкѣ, гдѣ находится корпускула, т. е.

$$\mu\left(\frac{1}{r_1^2}-\frac{1}{r_2^2}\right).$$

Пусть $A$ будетъ коэффиціентъ, который зависитъ только отъ заряда и отъ массы корпускулы; мы получимъ тогда:

$$\text{частота } V=A\mu\left(\frac{1}{r_1^2}-\frac{1}{r_2^2}\right).$$

Въ этомъ видѣ мы уже узнаемъ столь любопытное строеніе формулъ (1) — (4).

Теперь, чтобы получить въ точности формулы для водорода, достаточно предположить магнитъ состоящимъ изъ произвольнаго числа $m'$ магнитовъ, тождественныхъ между собою, каждый длиною $a$, расположенныхъ въ рядъ одинъ за другимъ. Кромѣ того, пусть магнитъ будетъ неизмѣнно связанъ съ элементомъ поверхности, въ которомъ корпускула должна совершать колебанія, посредствомъ нѣкотораго числа частичекъ такихъ же размѣровъ, какъ магнитики, и такъ же расположенныхъ въ рядъ, но не обладающихъ магнитными свойствами. Разстоянія $r_1$, $r_2$ будутъ тогда кратными $a$; пусть $r_1=na$, $r_2=ma$; тогда частоты будутъ:

$$V=\frac{A\mu}{a^2}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right).$$

Остается только выбрать надлежащимъ образомъ постоянныя $A$, $\mu$, $a$, чтобы получить формулу (1) для водорода.

Въ общемъ, необходимо допустить, что при тѣхъ условіяхъ, при которыхъ водородъ даетъ серію Бальмера, онъ способенъ находиться въ различныхъ состояніяхъ, образуя нѣкоторымъ образомъ полимеры. Это происходитъ оттого, что магнитные и немагнитные элементы, природу которыхъ нѣтъ надобности точнѣе опредѣлять, могутъ въ бо́льшемъ или меньшемъ числѣ образовывать группы на подобіе прямолинейныхъ четокъ и присоединяться къ атому водорода. Или же, чтобы дать конкретный образъ, возьмемъ намагниченный стержень и два мѣдныхъ стержня той же длины и расположимъ ихъ по прямой другъ за другомъ. Въ томъ концѣ системы, гдѣ находится мѣдный стержень, помѣстимъ надлежащій электрическій зарядъ и дадимъ ему небольшой импульсъ; этотъ зарядъ будетъ колебаться и дастъ линію $H_\alpha$. Приложивъ къ концу перваго второй намагниченный стержень, тождественный съ первымъ, мы получимъ линію $H_\beta$, третій стержень дастъ $H_\gamma$ и т. д. Не противорѣчитъ ли подобное объясненіе современнымъ взглядамъ на строеніе матеріи? Нѣтъ основанія утверждать это. Дѣйствительно, въ тѣлѣ вращенія, которое вращается вокругъ своей оси, легко распредѣлить электричество различными способами такъ, чтобы это тѣло было эквивалентно элементарному магниту. Впрочемъ, вращательныя или круговыя движенія электрическихъ зарядовъ внутри атомовъ необходимы для объясненія магнитизма; при чемъ первыя болѣе устойчивы. Съ другой стороны, системы, дающія линейчатые спектры,—и на этомъ также лордъ Рэлей особенно настаивалъ, должны быть чрезвычайно устойчивы, такъ какъ въ противномъ случаѣ линіи сдѣлались бы расплывчатыми. Слѣдовательно, если допустить, что химическій атомъ есть собраніе различныхъ элементовъ, то гипотеза неизмѣнной связи между этими элементами станетъ особенно вѣроятной. Наконецъ, изъ различныхъ способовъ соединять перемѣнное число элементовъ наиболѣе простой, безспорно, это располагать ихъ въ рядъ.

Вполнѣ очевидно, что всякая отдѣльная гипотеза о строеніи атомовъ, могущая объяснить большое число линій спектровъ, покажется на первый взглядъ болѣе или менѣе невѣроятной. Стоитъ только надъ этимъ подумать, чтобы отдать себѣ въ этомъ отчетъ. Даже водородъ, кажущійся наиболѣе простымъ изъ элементовъ, имѣетъ нѣсколько спектровъ и испускаетъ сотни линій самаго разнообразнаго характера. Поневолѣ приходится допустить, что это простота очень относительная, и считать себя счастливымъ, если удастся найти хоть простыя геометрическія соотношенія и извѣстныя силы, дѣйствующія по простымъ законамъ; это удовлетворяетъ гипотезѣ, которой мы занимаемся. Впрочемъ, можно измѣнить нашу систему различными способами,—напримѣръ, избѣгать введенія немагнитныхъ элементовъ и т. д.

Важно, чтобы колебанія производились магнитнымъ полемъ, происходящимъ отъ двухъ полюсовъ, при чемъ каждый изъ этихъ полюсовъ можетъ занимать внутри атома нѣсколько различныхъ положеній, но всегда расположенныхъ на прямыхъ линіяхъ и на одинаковыхъ разстояніяхъ другъ отъ друга.

Обобщеніе этихъ гипотезъ насъ приводитъ къ другимъ формуламъ такимъ же, какъ (2) и (3), при чемъ всегда имѣется предѣлъ для колебаній. Наблюденіе намъ дало тотъ замѣчательный результатъ, что множитель $N$ одинъ и тотъ же для всѣхъ тѣлъ. Наша теорія требуетъ, чтобы не только колеблющаяся корпускула, но и „элементарные магниты“ были одни и тѣ же для всѣхъ тѣлъ. Такимъ образомъ на ряду съ корпускулами появляется второй новый элементъ, входящій въ составъ всякой матеріи.

## IV. Аномальныя явленія Зеемана.

Извѣстно, что въ магнитномъ полѣ самымъ сложнымъ образомъ обыкновенно разлагаются именно тѣ линія, которыя принадлежатъ къ серіямъ. Насчитано пятнадцать и даже девятнадцать составляющихъ, при чемъ очень часто разстоянія между ними относятся, какъ цѣлыя числа. Лоренцъ (Lorentz) сдѣлалъ попытку объяснить эти разложенія, замѣняя простой электронъ элементарной теоріи системами съ $n$ степенями свободы, при чемъ нужно столько же системъ, сколько существуетъ спектральныхъ линій. Несмотря на чрезвычайную сложность этой гипотезы, она лишь въ очень небольшомъ числѣ случаевъ даетъ объясненіе наблюдавшихся разложеній, при томъ не физическое, а только математическое: законъ же раціональныхъ соотношеній такъ и остается непонятнымъ. Дѣло обстоитъ иначе съ нашей гипотезой.—Въ большинствѣ случаевъ, подъ совмѣстнымъ дѣйствіемъ внѣшняго и гораздо болѣе сильнаго внутренняго поля, магнитная система будетъ совершать такія періодическія колебательныя движенія, которыя могутъ быть разложены въ рядъ Фурье (Fourier). Отсюда получаются для колеблющагося электрона болѣе сложныя движенія, а вычисленія показываютъ, что колебанія можно разложить въ сумму синусоидальныхъ членовъ, соотвѣтствующихъ линіямъ частоты $V_0 \pm m\,\omega$, гдѣ $V_0$ обозначаетъ первоначальную частоту, $m$ цѣлое число, а $\omega$ періодъ движенія атома. Отсюда ясно, что разстоянія составляющихъ находятся, дѣйствительно, въ раціональныхъ отношеніяхъ другъ къ другу; поляризація этихъ составляющихъ совпадаетъ съ той, которая получается изъ опыта. Одинъ электронъ, въ большинствѣ случаевъ, самъ по себѣ даетъ безконечное число составляющихъ, изъ которыхъ только нѣкоторыя достаточно сильны, чтобы ихъ можно было замѣтить; ихъ число зависитъ отъ быстроты сходимости ряда. Итакъ, съ этой точки зрѣнія для вращательныхъ движеній атома явленіе Зеемана играетъ роль гармоничнаго анализатора.

## V. Другія объясненія. Заключеніе.

Можно ли изъ всего вышесказаннаго заключить, что колебанія спектровъ, имѣющихъ серіи, дѣйствительно обязаны своимъ происхожденіемъ интенсивнымъ магнитнымъ полямъ? Вполнѣ понятно, что подобное заключеніе не представляется намъ убѣдительнымъ; на первый взглядъ недостаточно знать колебанія системы, чтобы составить себѣ представленіе о ея строеніи. Чтобы быть убѣдительной, теорія должна давать простое объясненіе совокупности всѣхъ наблюденій и связывать ихъ съ другими областями. Всѣ другіе способы объясненія должны казаться для нашей мысли несравненно менѣе экономными. Для этого то и необходимо ихъ всѣхъ разрабатывать, и потому я хотѣлъ бы въ заключеніе сказать нѣсколько словъ объ одномъ изъ этихъ способовъ, единственномъ, который въ настоящее время заслуживаетъ серьезнаго вниманія.

Какъ извѣстно, колебанія упругихъ тѣлъ, подобно колебаніямъ серій спектра, существуютъ въ безконечномъ числѣ; ихъ частоты зависятъ отъ нѣкоторыхъ цѣлыхъ чиселъ, которыя суть числа узловыхъ линій (хладніевы фигуры) или же узловыхъ поверхностей, характеризующихъ каждое колебаніе. Для прямоугольной мембраны мы имѣемъ $V^2 = am^2 + bn^2$, гдѣ $a$ и $b$ постоянныя, а $m$ и $n$ цѣлыя числа. Но въ противоположность спектральнымъ серіямъ, при безконечномъ увеличеніи чиселъ $m$ и $n$ то же происходитъ и съ числомъ $V$.—При болѣе глубокомъ анализѣ это можно объяснить тѣмъ, что силы, производящія упругія колебанія, уничтожаются на маленькомъ разстояніи. Могъ бы явиться вопросъ, не дадутъ ли другія силы, дѣйствующія по закону Ньютона или по другимъ законамъ, формулъ типа (1), (2) и (3). Эта гипотеза была изслѣдована авторомъ этой статьи, а затѣмъ Фредгольмомъ (Fredholm) и Адамаромъ (Hadamard). Эту гипотезу можно математически выразить уравненіями интегральными, а не дифференціальными. Изъ этихъ изысканій слѣдуетъ, что законъ квадратовъ разстояній и безконечное число другихъ, дѣйствительно даютъ предѣлъ для колебаній. Къ сожалѣнію, аналогія, повидимому, на этомъ и кончается, ибо, чтобы на самомъ дѣлѣ получить формулы (1) и (2) для водорода, нужно ввести законы невѣроятной сложности; изъ простыхъ же интегральныхъ уравненій Фредгольма нельзя ихъ вывести. Впрочемъ, недостаточно найти для каждой серіи спектра соотвѣтствующій ей особый законъ; нужно, чтобы этотъ законъ не былъ слишкомъ неправдоподобенъ и не слишкомъ превосходилъ бы своей сложностью ту формулу, которую нужно было объяснить.

Тотъ фактъ, что уравненіе въ этой гипотезѣ содержитъ квадраты частотъ, не можетъ еще способствовать упрощенію задачи, а скорѣе указываетъ на большое значеніе замѣчанія Лорда Рэлея, о которомъ было выше упомянуто. Чтобы имѣть исключенія изъ этого правила, нужны сложныя логическія построенія. Наконецъ, если мы оставимъ въ сторонѣ всякое предубѣжденіе съ физической точки зрѣнія и будемъ просто стараться удовлетворить математическимъ условіямъ задачи, то мы будемъ приведены къ системамъ, въ которыхъ только основаніе колебанія даетъ замѣтное излученіе; излученіе же высшихъ гармоническихъ почти-что равно нулю вслѣдствіе вліянія узловыхъ линій; поэтому ихъ нельзя было бы замѣтить.

Несмотря на это, всѣ эти гипотезы заслуживаютъ тщательнаго изученія; хотя онѣ и не примѣнимы къ линіямъ серій, но онѣ могутъ примѣняться къ другимъ линіямъ, о расположеніи которыхъ мы ничего не знаемъ, а также и къ полосовымъ спектрамъ, основные законы которыхъ, данные, какъ извѣстно Деландромъ (Deslandres), представляютъ много важныхъ аналогій съ законами извѣстныхъ колебательныхъ системъ.

Въ общемъ, для объясненія самой простой серіи спектровъ водорода и другихъ тѣлъ слѣдуетъ приписать колебанія этихъ линій вліянію мощныхъ магнитныхъ полей магнитныхъ полюсовъ, распредѣленныхъ въ атомѣ по простымъ геометрическимъ законамъ. Важно отмѣтить, что энергія этихъ системъ исключительно электро-магнитная.

# Лекціи по ариѳметикѣ для учителей,

читанныя въ $190^7/_8$ академическомъ году профессоромъ Ф. Клейномъ въ Гёттингенѣ.

*(Продолженіе*).*

## 2. Дроби.

Обращаясь теперь къ такому же изложенію ученія о дробяхъ, мы начнемъ съ того, какъ трактуется этотъ вопросъ въ школѣ. Здѣсь дробь $\frac{a}{b}$ съ самаго начала имѣетъ чисто конкретное значеніе. Только по сравненію съ наглядными образами, которыми интерпретируются цѣлыя числа, здѣсь субстратъ мѣняется,— именно, отъ количества предметовъ мы переходимъ къ измѣренію, отъ предметовъ, подлежащихъ счету, мы переходимъ къ предметамъ, подлежащимъ измѣренію. Примѣромъ измѣримыхъ многообразій служатъ съ нѣкоторыми ограниченіями система монетъ и система вѣсовъ и безъ всякихъ ограниченій, въ полной мѣрѣ—система всѣхъ длинъ. На этихъ именно примѣрахъ каждому ученику и выясняется значеніе дробей, ибо каждому человѣку очень легко выяснить, что такое $\frac{1}{3}$ метра или $\frac{1}{2}$ фунта. Изъ конкретныхъ же соображеній легко устанавливается также значеніе соотношеній $=, >, <$ для дробей, а также устанавливается сложеніе и вычитаніе дробей. Затѣмъ умноженіе выясняется обыкновенно путемъ незначительной модификаціи первоначальнаго опредѣленія этого дѣйствія. Помножить число на дробь $\frac{a}{b}$ — значитъ помножить его на цѣлое число $a$ (согласно старому опредѣленію) и затѣмъ раздѣлить на $b$. Или иначе, произведеніе составляется изъ множимаго совершенно такъ же, какъ множитель $\frac{a}{b}$ составляется изъ единицы. Вслѣдъ за этимъ дѣленіе на дробь опредѣляется, какъ операція, обратная умноженію: раздѣлить $a$ на $\frac{2}{3}$ — значитъ найти такое число, которое, будучи умножено на $\frac{2}{3}$, дастъ число $a$. Эти опредѣленія въ теоріи дробей мы комбинируемъ далѣе съ введеніемъ отрицательныхъ числъ и такимъ образомъ получаемъ окончательно совокупность всѣхъ раціональныхъ чиселъ. Мы не имѣемъ возможности входить въ детали всего этого построенія, развитіе котораго въ школѣ естественно требуетъ много времени; мы лучше сравнимъ это изложеніе съ современной разработкой этого изложенія въ математикѣ; въ видѣ

*) См. „Вѣстникъ“, № 487.

примѣровъ, остановлюсь на приведенныхъ выше сочиненіяхъ Вебера-Вельштейна и Буркгардта.

У Вебера-Вельштейна выступаетъ на первый планъ формальная сторона дѣла, выдвигающая изъ различныхъ возможныхъ интерпретацій необходимыя общія свойства дробей. Здѣсь дробь $\frac{a}{b}$ просто является символомъ (числовой парой), надъ которой нужно совершать дѣйствія, согласно опредѣленнымъ правиламъ.

Эти правила, которыя, какъ мы упомянули выше, естественно вытекаютъ изъ реальнаго значенія дробей, имѣютъ здѣсь характеръ совершенно произвольныхъ соглашеній. Такъ, напримѣръ, то, что представляетъ для ученика наглядное предложеніе объ умноженіи дробей, пріобрѣтаетъ здѣсь форму опредѣленія равенства: двѣ дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называются равными, если $ad = bc$. Аналогичнымъ образомъ опредѣляется понятіе „больше" или „меньше"; сумма двухъ дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ просто опредѣляется, какъ дробь $\frac{ad+bc}{bd}$, и т. д. Затѣмъ уже доказывается, что опредѣленныя такимъ образомъ дѣйствія въ получающейся при этомъ болѣе обширной числовой области строго подчиняются прежнимъ формальнымъ законамъ, т. е. 11 основнымъ законамъ, которые мы уже неоднократно приводили.

Не столь формально, какъ въ системѣ Вебера-Вельштейна, изложенной здѣсь, конечно, только въ самыхъ общихъ чертахъ, трактуетъ этотъ вопросъ Буркгардтъ. На дробь $\frac{a}{b}$ онъ смотритъ, какъ на послѣдовательность двухъ операцій въ области цѣлыхъ чиселъ, именно умноженіе на число $a$ и дѣленіе на число $b$; объектомъ, надъ которымъ эти операціи должны быть выполнены, является совершенно произвольное цѣлое число. Если мы произведемъ двѣ такія пары операцій $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, то это разсматривается, какъ умноженіе дробей. Легко видѣть, что происходящая такимъ образомъ операція представляетъ собой не что иное, какъ умноженіе на $ac$ и дѣленіе на $bd$. Такимъ образомъ, правило умноженія дробей

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

вытекаетъ здѣсь изъ значенія дробей и не представляется произвольнымъ соглашеніемъ. Совершенно аналогично можно, конечно, опредѣлить и развить дѣленіе дробей; однако, сложеніе и вычитаніе не поддаются интерпретаціи въ этомъ порядкѣ идей. Формула

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

остается, такимъ образомъ, и у Буркгардта соглашенiемъ, въ пользу котораго онъ приводитъ только наводящiя указанiя.

Сравнимъ теперь школьную постановку вопроса съ указаннымъ современнымъ изложенiемъ. Существенно важно то, что въ этой новой постановкѣ мы какъ въ одной, такъ и въ другой системѣ остаемся всецѣло на почвѣ цѣлыхъ чиселъ. Извѣстными предполагаются только совокупность цѣлыхъ чиселъ и дѣйствiя надъ ними; новыя же числа являются только объектами, которые опредѣляются, какъ числовыя пары и какъ операцiи надъ цѣлыми числами. Школьное же изложенiе существенно опирается на новое наглядное представленiе объ измѣримыхъ величинахъ, дающихъ непосредственное интуитивное представленiе о дробяхъ. Мы уяснимъ себѣ это различiе лучше всего, если представимъ себѣ существо, владѣющее только идеей о цѣломъ числѣ и вовсе не знающее измѣренiй. Для такого существа школьное изложенiе казалось бы совершенно непонятнымъ, между тѣмъ какъ постановка вопроса у Вебера и Вельштейна была бы ему совершенно доступна.

Какая же изъ двухъ точекъ зрѣнiя лучше, и что́ даетъ каждая изъ нихъ? Отвѣтъ на этотъ вопросъ будетъ такой же, какъ и выше, когда мы разбирали аналогичный вопросъ относительно цѣлыхъ чиселъ. Новая точка зрѣнiя, несомнѣнно, чище, но въ то же время и беднѣе. Она, собственно говоря, даетъ только половину того, что въ цѣльномъ видѣ содержитъ въ себѣ школьное изложенiе: абстрактное, ариѳметическое, логически точное введенiе дробей и дѣйствiя надъ ними.

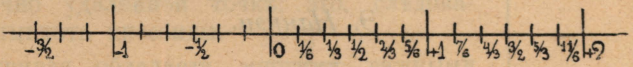


Рис. 11.

Но когда это исчерпано, то остается еще другой, независимый и не менѣе важный вопросъ: можно ли примѣнить построенную такимъ образомъ теоретическую доктрину къ нагляднымъ, измѣримымъ величинамъ, съ которыми намъ приходится имѣть дѣло. И здѣсь, конечно, можно было бы смотрѣть на этотъ вопросъ, какъ на относящiйся къ „прикладной математикѣ" и допускающiй строго самостоятельную обработку. Представляется, однако, сомнительнымъ, можно ли такое раздѣленiе считать цѣлесообразнымъ и съ педагогической точки зрѣнiя. У Вебера-Вельштейна это раздѣленiе задачи на двѣ части находитъ себѣ, впрочемъ, своеобразное выраженiе: вводя абстрактно дѣйствiя съ дробями, онъ затѣмъ посвящаетъ отдѣльную главу подъ заглавiемъ „отношенiя" вопросу о томъ, какъ рацiональныя дроби могутъ быть примѣняемы къ внѣшнему мiру. При этомъ изложенiе носитъ у него болѣе абстрактный, чѣмъ наглядный характеръ.

Я закончу еще настоящее разсужденiе о дробяхъ общимъ замѣчанiемъ, относящимся къ совокупности всѣхъ цѣлыхъ чиселъ; при этомъ, для наглядности, я буду пользоваться изображенiемъ чиселъ на прямой линiи. Мы представимъ себѣ, что на прямой (рис. 11) отмѣчены всѣ точки съ раціональными абсциссами, которыя мы будемъ короче называть просто „раціональными точками". Говорятъ, что совокупность всѣхъ этихъ раціональныхъ точекъ на оси абсциссъ образуетъ, „сгущенное" многообразіе. Этимъ хотятъ сказать, что въ каждомъ интервалѣ, какъ бы малъ онъ ни былъ, имѣется еще безчисленное множество раціональныхъ точекъ. Точнѣе, не вводя чуждыхъ понятій, можно еще выразить то же самое слѣдующимъ образомъ: между двумя раціональными точками имѣется еще, по крайней мѣрѣ, одна раціональная точка. Слѣдствіемъ этого является то обстоятельство, что изъ совокупности всѣхъ раціональныхъ чиселъ всегда возможно выдѣлить конечную часть, не содержащую ни наибольшаго, ни наименьшаго элемента. Примѣромъ можетъ служить совокупность всѣхъ раціональныхъ дробей, содержащихся между 0 и 1, если самыя эти два числа не включать. Въ самомъ дѣлѣ, какова бы ни была правильная дробь, всегда существуетъ еще меньшая дробь, содержащаяся между нею и 0, и большая, содержащаяся между нею и 1. Эти понятія въ систематическомъ развитіи относятся уже къ Канторовой теоріи многообразій, или комплексовъ. Ниже намъ дѣйствительно придется воспользоваться раціональными числами съ указанными ихъсвойствами, какъ важнымъ примѣромъ комплекса.

*(Продолженіе слѣдуетъ).*

---

# О нѣкоторыхъ замѣчательныхъ плоскихъ кривыхъ.

*Э. Наннэи.*

(*Продолженіе* *).

Цѣпная линія. Гибкая нерастяжимая нить, имѣющая одинаковую плотность по всей своей длинѣ, принимаетъ форму этой кривой, будучи подвѣшена за свои концы. Уравненіе ея:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

гдѣ $e$ есть основаніе Неперовыхъ логариѳмовъ.

Цѣпная линія обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что изъ всѣхъ кривыхъ, проходящихъ черезъ двѣ данныя точки она при вращеніи вокругъ оси, расположенной въ ея плоскости, описываетъ наименьшую поверхность.

Циссоида Діокла. Дана окружность радіуса $a$ (фиг. 7) и въ ней постоянный діаметръ $OB$. Въ точкѣ $B$ построимъ касательную къ окружности, а черезъ $O$ будемъ проводить различныя сѣкущія. Пусть одна изъ нихъ пересѣчетъ окружность въ точкѣ $C$, а построенную

---

*) См. № 488 „Вѣстника".

раньше касательную въ точкѣ $D$. На полупрямой $OD$ отложимъ $\overline{OP}=\overline{CD}$. Геометрическое мѣсто точекъ $P$ извѣстно подъ названіемъ циссоиды Діокла (это слово происходитъ отъ греческаго κίσσος—плющъ; кривая немного похожа по формѣ на листъ этого растенія).

Уравненіе кривой въ полярныхъ координатахъ получимъ безъ труда, если примемъ точку $O$ за начало координатъ, а прямую $OB$ за полярную ось. Въ самомъ дѣлѣ:

$$\varrho=\overline{OP}=\overline{CD}=\overline{OD}-\overline{OC}.$$

Изъ прямоугольнаго треугольника $OBD$ имѣемъ: $OD=\frac{2a}{\cos\theta}$; изъ прямоугольнаго треугольника $OCB$ найдемъ, что $OC=2a\cos\theta$; слѣдовательно:

$$\varrho=\frac{2a}{\cos\theta}-2a\cos\theta=\frac{2a\sin^2\theta}{\cos\theta}.$$

Переходя къ Декартовымъ координатамъ при помощи формулъ

$$\varrho=\sqrt{x^2+y^2},\quad \varrho\cos\theta=x,\quad \varrho\sin\theta=y$$

получимъ:

$$y^2=\frac{x^3}{2a-x}.$$

Это уравненіе кривой третьяго порядка. Точка $O$ есть точка возврата. Прямая, касающаяся окружности въ точкѣ $B$, касается кривой въ безконечно удаленной точкѣ; это, слѣдовательно, ассимптота циссоиды.

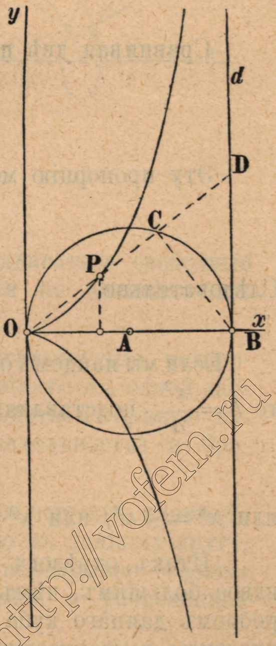

Рис. 7.

Эта кривая обладаетъ многими важными свойствами; кромѣ того, она замѣчательна тѣмъ, что была найдена при рѣшеніи извѣстной задачи объ удвоеніи куба.

Пусть данъ кубъ и длина ребра его равна $a$. Требуется найти отрѣзокъ длины $x$ такой, чтобы:

$$x^3=2a^3.$$

Изъ точки $A$, какъ изъ центра, описываемъ окружность радіусомъ, равнымъ $2a$, и строимъ соотвѣтствующую циссоиду (фиг. 7). Проводимъ діаметръ $FE$, перпендикулярный къ $OB$. Соединяемъ точку $B$ съ серединой $H$ радіуса $AE$; пусть прямая $BH$ пересѣкаетъ циссоиду въ точкѣ $P$. Проведемъ $OP$ и обозначимъ точку пересѣченія этой прямой съ радіусомъ $AE$ черезъ $K$*).

Положимъ $\overline{AK}=b$, тогда:

$$KF=2a+b;\quad EK=2a-b,$$

*) Читателя просятъ дополнить чертежъ.

слѣдовательно:

$$\overline{OK}\,.\,\overline{KC} = \overline{FK}\,.\,\overline{KE} = (2a + b)(2a - b) = 4a^2 - b^2. \qquad (1)$$

Съ другой стороны, изъ прямоугольнаго треугольника $OKA$ имѣемъ:

$$\overline{OK}^2 = 4a^2 + b^2. \qquad (2)$$

Соединимъ теперь точку $O$ съ серединой $M$ радіуса $AF$. Прямая $OM$ параллельна прямой $PB$; слѣдовательно, треугольники $PKH$ и $OKM$ подобны. Значитъ,

$$\frac{OK}{PK} = \frac{KM}{KH}.$$

Но $PK = KC$, такъ какъ $OK - OP = KD - KC$; $KM = b + a$, $KH = b - a$; слѣдовательно,

$$\frac{OK}{KC} = \frac{b+a}{b-a}.$$

Дѣля (2) на (1), имѣемъ, съ другой стороны,

$$\frac{OK}{KC} = \frac{4a^2 + b^2}{4a^2 - b^2}.$$

Сравнивая двѣ послѣднія пропорціи, имѣемъ:

$$\frac{4a^2 + b^2}{4a^2 - b^2} = \frac{a+b}{b-a}.$$

Эту пропорцію можно разсматривать, какъ производную пропорціи

$$\frac{4a^2}{b^2} = \frac{b}{a}.$$

Слѣдовательно,

$$b^3 = 4a^3.$$

Если мы найдемъ отрѣзокъ $x$, удовлетворяющій пропорціи $b : x = x : a$, то $b = \frac{x^2}{a}$; подставляя это въ предыдущее равенство, имѣемъ:

$$\frac{x^6}{a^3} = 4\,a^3,$$

или $x^6 = 4\,a^6$, или $x^3 = 2\,a^3$.

Итакъ, отрѣзокъ $x$ (ребро удвоеннаго куба, т. е. куба съ объемомъ вдвое большимъ, чѣмъ данный) есть средняя пропорціональная между ребромъ даннаго куба и отрѣзкомъ, который можно найти при помощи циссоиды вышеуказаннымъ образомъ.

Ц и к л о и д а. — Такъ называется кривая, описываемая точкой окружности, которая катится по нѣкоторой прямой безъ скольженія. Такимъ образомъ разстояніе $ON$ между точкой $O$, въ которой началось движенiе, и точкой $N$, въ которой окружность касается прямой въ нѣкоторый моментъ, это разстоянiе равно длинѣ дуги $NO_1$ (фиг. 8).

Циклоида состоитъ изъ равныхъ между собою дугъ, хорды или основанiя которыхъ равны длинѣ окружности. Каждая изъ этихъ дугъ симметрична относительно перпендикуляра, возставленнаго къ основанiю въ серединѣ его; концы основанiй являются точками возврата кривой.

Первымъ, кто обратилъ вниманiе на циклоиду, былъ Марсеннъ (P. Marsenne, 1615). Ему пришла въ голову мысль объ этой кривой, когда онъ наблюдалъ движенiе колесъ экипажа. Паскаль далъ ей названiе рулетты. Наиболѣе замѣчательныя свойства были найдены Робервалемъ (Roberval), Ферматомъ (Fermat), Паскалемъ, Гюйгенсомъ (Huygens), Бернулли. Упомянемъ о слѣдующихъ свойствахъ циклоиды.

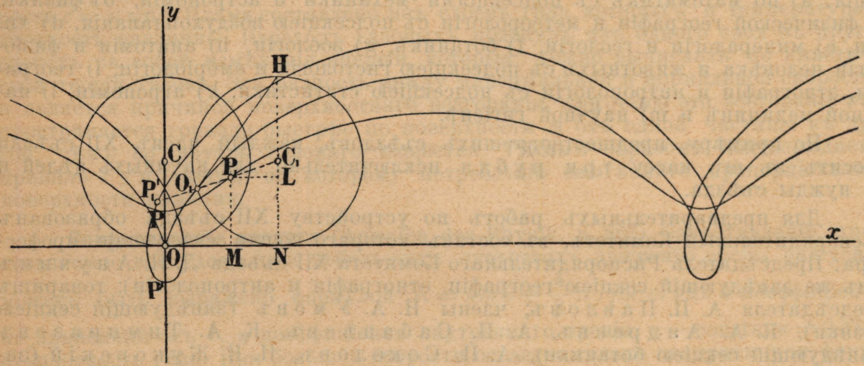


Рис. 8.

Циклоида есть кривая, по которой долженъ двигаться свободный конецъ маятника для того, чтобы время качанiя не зависѣло отъ амплитуды.

Циклоида есть кривая, по которой должно двигаться тѣло, подверженное силѣ тяжести, для того, чтобы время паденiя его отъ одной данной точки до другой было наименьшее. По этимъ свойствамъ кривую называютъ тавтохроной (кривой одинаковой продолжительности) и брахистохроной (кривой скорѣйшаго ската).

На рисункѣ, кромѣ циклоиды $OO_1$, изображены еще двѣ кривыхъ. Первую описываетъ точка $P$, внѣшняя по отношенiю къ данному кругу, вторую—внутренняя точка $P_1$, если обѣ эти точки неразрывно связаны съ окружностью. Эти кривыя называются удлиненной и укороченной циклоидами.

# XII съѣздъ русскихъ естествоиспытателей и врачей.

Съ 28 декабря 1909 г. по 6 января 1910 г. въ Москвѣ имѣетъ быть XII съѣздъ русскихъ естествоиспытателей и врачей. Цѣль его заключается въ споспѣшествованіи ученой и учебной дѣятельности на поприщѣ естественныхъ наукъ, въ направленіи этой дѣятельности, главнымъ образомъ, на ближайшее изслѣдованіе Россіи и въ доставленіи русскимъ естествоиспытателямъ случая лично знакомиться между собою. Членомъ съѣзда можетъ быть всякій, кто научно занимается естествознаніемъ; но правами голоса на съѣздѣ пользуются только ученые, напечатавшіе самостоятельное сочиненіе или изслѣдованіе по естественнымъ наукамъ, и преподаватели этихъ наукъ въ высшихъ и среднихъ учебныхъ заведеніяхъ. Никакого диплома на званіе члена XII съѣзда не выдается. Засѣданія съѣзда бываютъ общія и частныя (или по секціямъ); въ общихъ засѣданіяхъ читаются статьи общеинтересныя и обсуждаются вопросы, касающіеся всего съѣзда; въ частныхъ засѣданіяхъ сообщаются и разбираются изслѣдованія и наблюденія, имѣющія болѣе спеціальное значеніе для одной изъ отраслей естествознанія. Отдѣленія на съѣздѣ полагаются слѣдующія: a) по математикѣ съ подсекціями механики и астрономіи, b) физикѣ, c) физической географіи и метеорологіи съ подсекціею воздухоплаванія, d) химіи, e) минералогіи и геологіи, f) ботаникѣ, g) зоологіи, h) анатоміи и физіологіи человѣка и животныхъ съ подсекціею гистологіи и эмбріологіи, i) географіи, этнографіи и антропологіи съ подсекціею статистики, k) агрономіи, l) научной медицинѣ и m) научной гигіенѣ.

По примѣру предшествовавшихъ съѣздовъ, каждый членъ XII съѣзда вноситъ въ его кассу три рубля исключительно для научныхъ цѣлей и на нужды съѣзда.

Для предварительныхъ работъ по устройству XII съѣзда образованъ Распорядительный Комитетъ, въ составъ котораго вошли слѣдующіе профессора: Предсѣдатель Распорядительнаго Комитета XII съѣзда Д. Н. Анучинъ (онъ же завѣдующій секціею географіи, этнографіи и антропологіи); товарищъ предсѣдателя А. П. Павловъ; члены Н. А. Умовъ (завѣдующій секціею физики), К. А. Андреевъ, А. П. Сабанѣевъ, К. А. Тимирязевъ (завѣдующій секціею ботаники), А. П. Соколовъ, Н. Е. Жуковскій (завѣдующій секціею математики и подсекціею воздухоплаванія), В. К. Цераскій (завѣдующій подсекціею астрономіи), М. А. Мензбиръ (завѣдующій секціею зоологіи), Н. Ю. Зографъ, Б. К. Млодзѣевскій, Н. Д. Зелинскій (завѣдующій секціею химіи), Л. К. Лахтинъ, В. И. Вернадскій (завѣдующій секціею минералогіи и геологіи), П. Н. Лебедевъ, И. А. Каблуковъ. А. Н. Сабанинъ (завѣдующій секціею агрономіи), Д. Ѳ. Егоровъ, С. А. Чаплыгинъ (завѣдующій подсекцію механики), М. И. Голенкинъ, А. М. Настюковъ, Ѳ. Н. Крашенинниковъ, Н. А. Каблуковъ, (завѣдующій подсекціею статистики), Д. Н. Зерновъ, Л. З. Мороховецъ, А. Б. Фохтъ, В. Д. Шервинскій (завѣдующій секціею научной медицины), В. С. Гулевичъ, С. Ѳ. Бубновъ (завѣдующій секціею научной гигіены), И. Ф. Огневъ (завѣдующій секціею анатоміи и физіологіи человѣка и животныхъ съ подсекціею гистологіи и эмбріологіи); дѣлопроизводители съѣзда: Э. Е. Лейстъ (завѣдующій секціею физической географіи и метеорологіи) и Г. А. Кожевниковъ.

Доводя о семъ до всеобщаго свѣдѣнія, члены Комитета обращаются къ товарищамъ по наукѣ съ покорнѣйшей просьбой почтить XII съѣздъ естествоиспытателей и врачей своимъ личнымъ присутствіемъ или присылкою ученыхъ трудовъ. Такъ какъ Комитету необходимо знать заранѣе, на какое число гостей онъ можетъ разсчитывать, то онъ обращается съ просьбою къ лицамъ, желающимъ принять участіе въ съѣздѣ, извѣстить Комитетъ не позже 1-го ноября с. г. о своемъ намѣреніи прибыть въ Москву, адресуя письма въ Университетъ на имя Комитета съѣзда или его дѣлопроизводителей, а также сообщить свои адреса и обозначить ту секцію, на которую они намѣрены записаться.

Распорядительный Комитетъ употребитъ всѣ старанія, чтобы доставить членамъ съѣзда возможность широко воспользоваться пребываніемъ ихъ въ Москвѣ для осмотра мѣстныхъ достопримѣчательностей, научныхъ институтовъ, музеевъ, лабораторій и т. д.

Подробныя программы занятій XII съѣзда будутъ своевременно сообщены членамъ съѣзда.

---

# НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

**Физика пламени** (Annalen der Physik, p. 527). Если безпрерывно увеличивать скорость истеченія смѣси газа, зажженнаго при выходѣ изъ трубки, то можно, въ концѣ концовъ, затушить пламя. Скорость истеченія въ этомъ случаѣ можетъ быть разсматриваема, какъ максимальная; эта послѣдняя испытываетъ различныя измѣненія, въ зависимости отъ смѣси газа. Если $u$ есть скорость истеченія газа, $2\gamma$ — уголъ отверстія конуса пламени, то скорость $c = u \sin \gamma$. Пламя составлено изъ слоевъ газа, которыхъ и температура и плотность различны. Переходъ газовыхъ молекулъ изъ одного слоя въ другой влечетъ за собой измѣненія энергіи, которыя можно вычислить по кинетической теоріи газовъ. Эта разность между максимальной и нормальной скоростью и является причиной поверхностнаго возгоранія, при чемъ это возгораніе распространяется гораздо быстрѣе по поверхности и отъ одной частицы къ другой, чѣмъ во внутрь газоваго вещества. Такимъ образомъ подтверждается правило Гуи (Gouy), по которому потребленіе сжигаемаго пропорціонально поверхности пламени.

**Сопротивленіе воздуха** (Annalen der Physik, p. 863). Сопротивленіе, представляемое воздухомъ при небольшихъ скоростяхъ движенію сферы радіуса $r$, можетъ быть выражено формулой $R = k\eta r v + \frac{4}{3}\pi \cdot \gamma \delta r^2 v$, гдѣ $k$ коэффиціентъ, не зависящій отъ $v$, $\eta$ коэффиціентъ внутренняго тренія, $\gamma$ — constans $= 0{,}375$ и $\delta$ — плотность газа. При большой скорости остается только квадратичная форма, т. е. приходимъ къ закону Ньютона.

**Вліяніе электрическаго поля на спектральныя линіи** (Astrophysical Journal, XXV, p. 1). Авторъ сообщенія Гулль (Hull) занялся изслѣдованіемъ явленія Допплера-Физо въ электрическихъ разрядахъ, т. е. изученіемъ ширины спектральныхъ полосъ и поляризаціи свѣта въ различныхъ мѣстахъ свѣтящейся колонны въ разрѣженныхъ трубкахъ; кромѣ того, его заинтересовалъ вопросъ о вліяніи лучей Рёнтгена при ихъ прохожденіи черезъ свѣтящіеся газы. Для работы изслѣдователь пользовался спектроскопомъ со шкалой или же интерферометромъ Майкельсона (Michelson); при помощи этихъ приборовъ изслѣдовался свѣтъ, либо исходившій отъ искры, между двумя электродами, либо получившійся въ разрѣженной трубкѣ. Такъ какъ ни въ одномъ изъ этихъ случаевъ не наблюдалось явленіе Допплера, то авторъ занялся отысканіемъ его въ каналовыхъ лучахъ. Здѣсь уже было указаніе на его существованіе, сдѣланное еще Штаркомъ (Stark). Гулль же не получалъ желаемаго результата, или же, если явленіе и было, то чрезвычайно слабое. По этому поводу на страницахъ Astrophysical Journal возникъ споръ между Штаркомъ и Гуллемъ, пока еще не приведшій къ какому-либо опредѣленному результату. Что же касается изученія поляризаціи свѣта въ этихъ каналовыхъ лучахъ, то и здѣсь, при употребленіи поляриметра Савара (Savart), не наблюдалось никакихъ явленій поляризаціи.

**Вліяніе высокихъ температуръ на эманацію радія** (Proceedings of the Royal Society, p. 158). При дѣйствіи высокихъ температуръ на радіоактивную эманацію происходитъ измѣненіе активности, зависящее отъ перехода эманацій въ радій $B$ или $C$.

**Разложеніе воды солями радія** (Comptes Rendus, p. 703). Разложеніе воды солями радія было получено Гизелемъ (Giesel) и Рамзаемъ (Ramsay). Послѣдній указалъ на то обстоятельство, что составъ газа, выдѣленнаго растворенiемъ солей радія, не соотвѣтствуетъ формулѣ $H_2 + O$, при чемъ имѣется избытокъ водорода; кромѣ того, наблюдалось, что при достаточномъ количествѣ бромистаго радія въ растворенномъ видѣ этотъ растворъ совершенно прекращаетъ выдѣленіе водорода и кислорода. Дебіернъ (Debiern) провѣрилъ это положеніе Рамзая и пришелъ къ противоположнымъ результатамъ, указывающимъ либо на случайность изслѣдованія Рамзая, либо на какую-то особую причину задержки разложенія.

# ЗАДАЧИ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

**№ 174** (5 сер.). Найти зависимости между коэффиціентами уравненія

$$x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + fx + g = 0,$$

которыя оказываются необходимыми и достаточными для того, чтобы лѣвая его часть распадалась на три множителя вида

$$x^2 + \alpha,\quad x^2 + \beta,\quad x^2 + \gamma x + \delta.$$

Воспользоваться результатомъ для рѣшенія уравненія

$$x^6 + 4x^5 + 5x^4 + 12x^3 + 4{,}5x^2 + 6x + 3 = 0.$$

*Б. Щиголевъ* (Варшава).

**№ 175** (5 сер.). Доказать, что уравненіе

$$3x^2 - 10xy + 4y^2 = 11$$

не можетъ быть рѣшено въ цѣлыхъ числахъ относительно $x$ и $y$.

*Я. Назаревскій* (Харьковъ).

**№ 176** (5 сер.). Доказать, что

$$\frac{a^2}{r_a - r} + \frac{b^2}{r_b - r} + \frac{c^2}{r_c - r} = 2(r_a + r_b + r_c),$$

гдѣ $a$, $b$, $c$ — стороны, $r$, $r_a$, $r_b$, $r_c$ — радіусы вписаннаго и внѣвписанныхъ круговъ нѣкотораго треугольниковъ.

*Ат. Радевъ* (Ботево, Болгарія).

**№ 177** (5 сер.). Найти предѣлъ отношенія

$$\frac{x^2+2x\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin x}$$

при неограниченномъ приближеніи $x$ къ нулю.

*В. Тюнинъ* (Уфа).

**№ 178** (5 сер.). Построить прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ и по данному отношенію $\frac{m}{n}$ одного изъ катетовъ къ проекціи другого катета на гипотенузу.

*Н. С.* (Одесса).

**№ 179** (5 сер.). Привести къ логариѳмическому виду выраженіе

$$\vartheta=\sin(x+y+z)\sin(x+2y+z)-\sin x\sin(x+y)-\sin z\sin(y+z).$$

(Заимств.).

---

# РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

**№ 99** (5 сер.). *Построить треугольникъ* ABC, *зная положеніе центра* O *круга описаннаго, середины* M′ *медіаны* AM *и основанія* D *высоты* AD.

Такъ какъ треугольникъ $OMD$ прямоугольный, то точка $M$ должна лежать на окружности, описанной на $OD$, какъ на діаметрѣ. Медіана $M'D$ прямоугольнаго треугольника $ADM$ равна половинѣ гипотенузы $AM$, т. е. $M'M=M'D$, а потому точка $M$ лежитъ также на окружности, описанной изъ $M'$ радіусомъ $M'D$. Отсюда вытекаетъ построеніе: на $OD$, какъ на діаметрѣ, описываемъ окружность, а также описываемъ окружность радіусомъ $M'D$ изъ $M'$, какъ изъ центра. Если $M'$ не лежитъ на прямой $OD$, то двѣ построенныя нами окружности пересѣкаются въ двухъ различныхъ точкахъ, а именно въ $D$ и въ нѣкоторой другой точкѣ $M$. Соединяя $M$ съ $M'$ прямой и откладывая на продолженіи $MM'$ отрѣзокъ $M'A=MM'$, описываемъ изъ точки $O$, какъ изъ центра, окружность радіусомъ $OA$; задача возможна лишь тогда, если эта послѣдняя окружность встрѣчаетъ прямую $MD$ въ двухъ точкахъ $B$ и $C$. Треугольникъ $ABC$ есть искомый. Если точка $M'$ лежитъ на прямой $OD$, но не на серединѣ отрѣзка $OD$, то двѣ окружности, указанныя нами въ началѣ построенія, касаются въ точкѣ $D$; въ этомъ случаѣ точка $M$ должна совпадать съ $D$, т. е. медіана $AM$ совпадаетъ съ высотой $AD$, такъ что искомый треугольникъ есть равнобедренный. Въ этомъ случаѣ для окончанія построенія откладываемъ на продолженіи $DM'$ отрѣзокъ $M'A=DM'$ и проводимъ изъ $O$, какъ изъ центра, радіусомъ $OA$ окружность до пересѣченія въ $B$ и $C$ съ прямой, перпендикулярной къ $AD$ въ точкѣ $D$; треугольникъ $ABC$ есть искомый. Наконецъ, если точка $M'$ лежитъ въ серединѣ $OD$, то двѣ окружности, указанныя въ началѣ построенія, совпадаютъ. Въ этомъ случаѣ задача имѣетъ безчисленное множество рѣшеній: соединивъ любую точку $M$ окружности, построенной на $OD$, какъ на діаметрѣ, съ $M$, откладываемъ на продолженіи $MM'$ отрѣзокъ $M'A=MM'$ (или, что все равно, дополняемъ прямоугольный треугольникъ $OMD$ до прямоугольника $OMDA$) и описываемъ изъ $O$, какъ изъ центра, радіусомъ $OA$ окружность до пересѣченія съ прямой $MD$ въ точкахъ $B$ и $C$. Треугольникъ $ABC$ есть искомый, при чемъ ясно, что для пересѣченія послѣдней окружности съ $MD$ въ двухъ точкахъ необходимо и достаточно соблюсти добавочное условіе $OM<OA$, или же $OM<MD$ $\left(\text{т. е. } \angle MDO<\frac{\pi}{4}\right)$.

*І. Ниссельбаумъ* (Пинскъ); *Н. С.* (Одесса).

**№ 112** (5 сер.). *Найти maximum выраженія*

$$\frac{4a^2x^2 + b^2(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}$$

*при условіи* $a^2 > b^2$.

Представивъ данное выраженіе въ видѣ

$$\frac{4a^2x^2 + b^2(x^2+1)^2 - 4b^2x^2}{(x^2+1)^2} = b^2 + \frac{4(a^2-b^2)x^2}{(x^2+1)^2}, \qquad (1)$$

мы видимъ, что оно, въ виду условія $a^2 > b^2$, достигаетъ maximum'а вмѣстѣ съ выраженіемъ

$$\frac{4x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Представивъ послѣднее въ видѣ:

$$\frac{4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^2-(x^2+1)^2+(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2} = 1 + \frac{4x^2 - x^4 - 2x^2 - 1}{(x^2+1)^2} = 1 - \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2},$$

мы видимъ, что оно достигаетъ maximum'а при $x = \pm 1$, и что это наибольшее значеніе равно 1. Итакъ, предложенное выраженіе достигаетъ наибольшаго значенія при $x = \pm 1$, и числовая величина этого наибольшаго значенія равна

$$b^2 + (a^2 - b^2) = a^2.$$

*Б. Щиголевъ* (Варшава).

**№ 120** (5 сер.). *Представить выраженіе*

$$4[a^4 + b^4 - ab(a^2+b^2)]$$

*въ видѣ* $A^2 + 3B^2$ (*гдѣ* A *и* B *суть цѣлые многочлены относительно* a *и* b).

(Заимств. изъ *Supplemento al Periodico di matematica*).

Раскрывъ въ данномъ выраженіи скобки, получимъ:

$$4a^4 + 4b^4 - 4a^3b - 4ab^3 = 3a^4 + 3b^4 + a^4 - 4a^3b - 4ab^3 + b^4 =$$

$$= a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 + 3a^4 - 6a^2b^2 + 3b^4 =$$

$$= (a-b)^4 + 3(a^2-b^2)^2 = (a^2 - 2ab + b^2)^2 + 3(a^2-b^2)^2 = A^2 + 3B^2,$$

гдѣ

$$A = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$B = a^2 - b^2.$$

*Б. Щиголевъ* (Варшава).



Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

III г. изд. **Открыта подписка** III г. изд.

**на 1909-й годъ**

на единственный иллюстрированный русско-нѣмецкій журналъ

# „РУССКІЙ КУРЬЕРЪ“

**Журналъ для поощренія русско-германскихъ торгово-промышленныхъ сношеній.**

„Русскій Курьеръ“, во всѣхъ отношеніяхъ вполнѣ независимый органъ, издается въ Берлинѣ на русскомъ и нѣмецкомъ языкахъ и цѣлесообразно распространяется въ Германіи и Россіи. Главнѣйшею цѣлью журнала „Русскій Курьеръ“ составляетъ: Поддержаніе добрососѣдскихъ отношеній между Россіей и Германіей, особенно же дѣльное посредничество между германскими производителями и русскими потребителями, равно какъ и при сбытѣ русскихъ сырыхъ продуктовъ въ Германію, для чего, помимо подходящихъ статей, сообщеній и т. д. служитъ рядъ соотвѣтствующихъ организаціонныхъ мѣропріятій, причемъ цѣлесообразные совѣты и указанія заинтересованныхъ русскихъ и германскихъ вѣдомствъ, должностныхъ лицъ, организацій и отдѣльныхъ лицъ всегда принимаются во вниманіе.

Устроенныя при конторѣ Редакціи спеціальныя бюро: информаціонное, экспортъ и импортъ, техническое, юридическое, переводчиковъ и т. д. предназначены главнымъ образомъ къ услугамъ русскихъ, имѣющихъ надобность въ Германіи.

**Всякій подписчикъ журнала „Русскій Курьеръ“ получитъ въ 1909 году БЕЗПЛАТНО путеводитель „Русскаго Курьера“** (патентованъ въ Германіи за № 343125), **незамѣнимый спутникъ для каждаго русскаго, ѣдущаго за границу.**

## ПОДПИСНАЯ ЦѢНА:

На годъ съ доставкой и пересылкой во всѣ города Россійской Имперіи. **5 руб.**

Подписка принимается въ Конторѣ Редакціи:

**БЕРЛИНЪ (Германія) N. W. 52, Верфтштрассе, 3** и во всѣхъ книжныхъ магазинахъ.

Такъ какъ на почтовыхъ переводахъ, посылаемыхъ въ Германію, не допускаются никакія сообщенія, то рекомендуется посылать деньги въ обыкновенныхъ денежныхъ пакетахъ или же сообщить адресъ и т. д. отдѣльно заказнымъ письмомъ. Простыя письма должны быть оплачены маркою въ 10 коп., а открытыя—въ 4 коп. Для отвѣта надлежитъ всегда прилагать 20 коп. почт. марк.

---

**XIII-й ГОДЪ ИЗДАНІЯ.**

**Открыта подписка на 1909 г. на ежемѣсячный технич. журналъ**

# ИЗВѢСТІЯ

# Южно-Русскаго Общества Технологовъ

**Издается по слѣдующей программѣ:**

1) Свѣдѣнія о дѣятельности Общества: протоколы общихъ собраній, адресы членовъ Общества, родъ ихъ службы и т. п. 2) Различныя статьи по вопросамъ техники и промышленности. Электротехника. 3) Фабричное и желѣзнодорожное дѣло. 4) Техническое образованіе и техническія учебныя заведенія въ Россіи и заграницей. 5) Политико-Экономическія статьи по вопросамъ промышленности. Статистика. Управленіе фабриками и заводами. Фабрично-заводская гигіена. 6) Главнѣйшія правительственныя распоряженія и мѣропріятія относительно фабрикъ и заводовъ. 7) Хроника. Обзоръ техническихъ журналовъ. Рецензіи. Библіографія и проч. 8) Полемика. Корреспонденціи. Вопросы и отвѣты. 9) Смѣсь. Біографія и некрологи. 10) Объявленія.

**Подписная цѣна на журналъ съ доставкой и пересылкой:**

Для членовъ общества 1 руб., для постороннихъ лицъ и учрежденій 5 руб. Отдѣльный номеръ 45 коп., за перемѣну адреса 25 коп.

**Подписка на журналъ и объявленія принимаются въ Харьковѣ, Петровскій пер., д. № 18.**