Обложка
пщется

Обложка
ищется

XL Сем. № 2.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 470.

Опредѣленія разстояній солнца и луны отъ земли и ихъ параллаксовъ въ прежнія времена и теперь.

Л. Гюнтера.

Переводъ съ нѣмецкаго.

(*Окончаніе* *).

Астрономы послѣдующихъ временъ считали достаточно точнымъ число, найденное для параллакса луны; что же касается величины солнечнаго параллакса и вычисленнаго посредствомъ него разстоянія солнца отъ земли, то число 9,″5 не безъ основанія считалось сомнительнымъ; въ поискахъ за лучшими методами они относились съ большимъ вниманіемъ ко всякой новой попыткѣ.

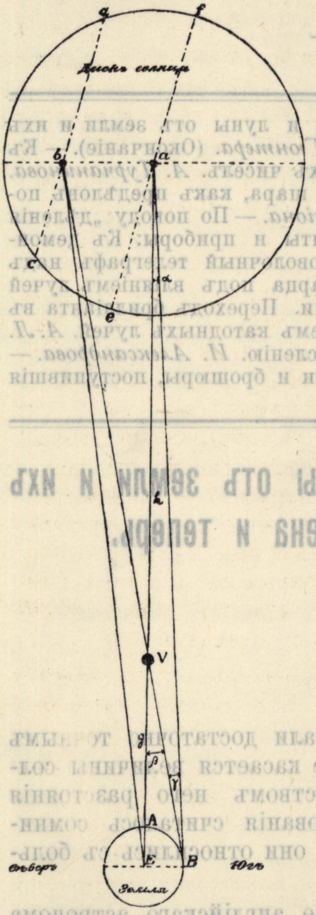
Особенный интересъ вызвало предложеніе англійскаго астронома Эдмунда Галлея (Edmund Halley, 1656—1742), современника Ньютона, воспользоваться для болѣе точнаго опредѣленія солнечнаго параллакса такъ называемыми прохожденіями нижнихъ планетъ, т. е. прохожденіями Меркурія и Венеры, по диску солнца.

Извѣстно, что орбиты этихъ планетъ охватываются орбитой земли: такимъ образомъ въ своемъ вращеніи вокругъ солнца обѣ эти планеты

*) См. № 467—468 „Вѣстника“.

по одному разу, а именно во время нижняго соединенія, занимаютъ положеніе между землей и солнцемъ; наблюдателю, находящемуся на землѣ, планета тогда представляется въ видѣ маленькаго темнаго диска на свѣтломъ дискѣ солнца; планета проходитъ мимо солнца, а темный дискъ ея проходитъ по свѣтлому диску солнца: въ этомъ и состоитъ такъ называемое прохожденіе.

Ясно, что каждое нижнее соединеніе сопровождалось бы такимъ прохожденіемъ, если бы плоскости орбитъ Меркурія и Венеры совпадали съ эклиптикой. Какъ извѣстно, въ дѣйствительности такого совпаденія нѣтъ: съ плоскостью орбиты Меркурія плоскость земной орбиты образуетъ уголъ въ 7°, а съ плоскостью орбиты Венеры — уголъ въ 3°,4; поэтому во время нижнихъ соединеній планеты большей частью проходятъ сверху или снизу отъ солнечнаго диска; по самому же диску онѣ проходятъ лишь въ томъ случаѣ, когда соединенія происходятъ либо въ узлахъ, т. е. въ мѣстахъ пересѣченія орбитъ, либо же въ точкахъ, разстояніе которыхъ отъ узловъ не превышаетъ 3°29′ для Меркурія и 1°47′ для Венеры. Понятно теперь, почему такія прохожденія происходятъ сравнительно рѣдко: въ теченіе столѣтія имѣютъ мѣсто не болѣе 13 прохожденій Меркурія, Венера же проходитъ по диску солнца еще рѣже — каждые 243 года лишь четыре раза!



Фиг. 6.

Уже К е п л е р ъ предсказалъ на 1631 г. одно прохожденіе Меркурія и одно прохожденіе Венеры: первое наблюдалъ между прочими и Г а с с е н д и (Gassendi), тогда какъ второго нельзя было увидѣть, такъ какъ явленіе оканчивалось еще до восхода солнца въ Европѣ. Прохожденіе Венеры 4 декабря 1639 г., напередъ вычисленное священникомъ Г о р р о к с о м ъ (Jeremias Horroccius, 1619—1641), правда, не ускользнуло отъ наблюдателей, но наблюденіе не было использовано для научныхъ цѣлей. Плодотворнымъ въ этомъ смыслѣ оказалось прохожденіе Меркурія въ 1677 г., наблюдавшееся Г а л л е е м ъ, который пришелъ къ мысли воспользоваться этимъ наблюденіемъ для опредѣленія солнечнаго параллакса.

Чтобы ознакомиться съ этимъ методомъ, обратимся къ чертежу 6.

Когда солнце находится въ зенитѣ наблюдателя A на экваторѣ, то другой наблюдатель B, удаленный отъ перваго на разстояніе 90°, въ это время увидѣлъ бы солнце на горизонтѣ, если бы разстояніе, отдѣляющее наблюдателей другъ отъ друга, было безконечно мало по сравненію съ разстояніемъ солнца отъ земли. Если же первое разстояніе нельзя считать безконечно малымъ сравнительно со вторымъ, то лучи, проведенные отъ солнца къ обоимъ наблюдателямъ, образуютъ нѣкоторый уголъ, и мы получимъ прямоугольный треугольникъ, основаніе котораго или меньшій катетъ равенъ радіусу земли, а гипотенуза равна разстоянію солнца отъ центра земли. Острый уголъ α, котораго вершина находится на солнцѣ, и который дополняетъ до прямого уголъ, имѣющій вершину въ центрѣ земли, т. е. уголъ между горизонтальнымъ лучомъ изъ точки B и лучомъ, идущимъ къ зениту точки A, (уголъ, котораго при полномъ параллелизмѣ вовсе нѣтъ), называется горизонтальнымъ параллаксомъ. Зная этотъ уголъ прямоугольнаго треугольника, мы легко можемъ опредѣлить гипотенузу, т. е. разстояніе солнца отъ земли. Къ сожалѣнію, уголъ α, вслѣдствіе чрезвычайной малости, не поддается непосредственному измѣренію.

Иначе обстоитъ дѣло, если между солнцемъ и землей находится промежуточное тѣло, при чемъ извѣстно отношеніе разстоянія его отъ земли къ разстоянію солнца, какъ это, напримѣръ, бываетъ въ томъ случаѣ, когда Венера находится въ положеніи нижняго соединенія и вмѣстѣ съ тѣмъ весьма близко отъ своей узловой точки, такъ что наблюдатель видитъ ее на дискѣ солнца. Въ этомъ случаѣ солнце и Венера V окажутся въ зенитѣ наблюдателя A. Въ указанномъ положеніи разстояніе Венеры отъ земли приблизительно въ 4 раза меньше разстоянія солнца; ясно, что уголъ β, образуемый лучами, исходящими отъ точки V къ точкамъ A и B, значительно больше, чѣмъ уголъ, образуемый лучами, исходящими отъ солнца; другими словами, горизонтальный параллаксъ Венеры значительно больше горизонтальнаго параллакса солнца. Наблюдатель A увидитъ Венеру V въ срединѣ солнечнаго диска, въ точкѣ a, тогда какъ наблюдатель B увидитъ ее значительно лѣвѣе, въ точкѣ b; углы α, β и γ выражаютъ горизонтальные параллаксы солнца и Венеры и ихъ разность: въ треугольникѣ aVB уголъ β равенъ суммѣ внутреннихъ несмежныхъ съ нимъ угловъ $\alpha+\gamma$, откуда $\gamma=\beta-\alpha$.

Такимъ образомъ, меньшій (солнечный) параллаксъ опредѣляется по разности между бо́льшимъ параллаксомъ Венеры и солнечнымъ параллаксомъ.

Таковы были соображенія Галлея, которыя онъ опубликовалъ въ рядѣ статей (The Philosophical Transactions, 1691 и 1716 г.г.), при чемъ предсказалъ прохожденіе Венеры на 6 іюня 1761 г. Онъ, конечно, не могъ не принять во вниманіе, что наблюденіе даетъ тѣмъ лучшіе результаты, чѣмъ больше уголъ β, т. е. чѣмъ ближе промежуточное тѣло къ землѣ. Поэтому онъ не ждалъ точныхъ результатовъ отъ наблюденій надъ Меркуріемъ, который находится гораздо дальше отъ земли, чѣмъ Венера, и рекомендовалъ наблюдать прохожденіе Венеры, какъ наиболѣе подходящее для данной цѣли.

Всѣ обсерваторіи дружно откликнулись на предложеніе Галлея, и использовали его мысль не только при прохожденіи Венеры въ 1761 г., но и при послѣдующихъ прохожденіяхъ въ 1769, 1874 и 1882 годахъ.

Перейдемъ теперь къ описанію методовъ, которые примѣнялись при наблюденіяхъ упомянутыхъ прохожденій Венеры.

Предположимъ, что Венера занимаетъ вышеуказанное положеніе, а наблюдатель находится въ центрѣ E земли. На всей поверхности земли есть одна лишь точка, съ которой Венера видна въ томъ же мѣстѣ солнечнаго диска, какъ и съ точки E. Эта точка A должна лежать на прямой EV. Наблюдатель, находящійся во всякой другой точкѣ земной поверхности, увидитъ Венеру въ другомъ мѣстѣ солнечнаго диска: находясь къ сѣверу отъ A, мы увидимъ Венеру справа отъ центра диска, къ югу — влѣво отъ него. Представимъ себѣ идеальный случай, когда одинъ наблюдатель находится на экваторѣ, въ точкѣ A; тогда онъ увидитъ, что Венера входитъ при точкѣ e въ солнечный дискъ и выходитъ изъ него при точкѣ f, описывая такимъ образомъ хорду ef. Другой наблюдатель въ точкѣ B, на разстояніи 90^0 отъ перваго наблюдателя, увидитъ, какъ Венера входитъ при точкѣ c и выходитъ при точкѣ d, описывая хорду cd. Разстояніе ab этихъ двухъ параллельныхъ хордъ зависитъ отъ разности параллаксовъ солнца и Венеры: уголъ $bBa\,(=\gamma)$, опирающійся при указанномъ расположеніи солнца, Венеры и земли на хорду ab, представляетъ собою разность между параллаксомъ Венеры и солнечнымъ параллаксомъ; дѣйствительно, солнечный параллаксъ $EaB\,(=\alpha) + \angle\, bBa\,(=\gamma)$ равенъ параллаксу Венеры $EVB\,(=\beta)$; слѣдовательно, $\angle\, bBa = \angle\, EVB - \angle\, EaB$.

Изъ подобія треугольниковъ EVB и aVb заключаемъ, что $VE : Va = EB : ab$. Основываясь на III законѣ Кеплера, мы находимъ отношеніе разстояній земли и Венеры отъ солнца, а, стало быть, и отношеніе разстояній земли и солнца отъ Венеры, а именно: $VE : Va = 1 : 2{,}61$; очевидно, что такова же величина отношенія EB къ ab.

Обозначимъ теперь разстояніе Венеры отъ земли черезъ g, и разстояніе Венеры отъ солнца черезъ h; тогда указанное отношеніе выразится черезъ $\frac{g}{h}$; очевидно, что отношеніе угла bEa, подъ которымъ на землѣ виденъ отрѣзокъ ab, къ углу EaB, подъ которымъ изъ солнца виденъ радіусъ земли EB, равно $\frac{h}{g}$; дѣйствительно, если углы очень малы, то соотвѣтствующія имъ дуги относятся, какъ ихъ синусы. Такъ какъ уголъ EaB представляетъ собою солнечный параллаксъ, а уголъ bBa можно считать равнымъ углу bEa, то задача, въ концѣ концовъ, сводится къ возможно болѣе точному опредѣленію угла bBa, или къ измѣренію углового разстоянія ab между обѣими хордами, которыя Венера описываетъ на дискѣ солнца.

Понятно, что практически нельзя обставить наблюденіе такъ, чтобы наблюдатели занимали то именно положеніе на землѣ, какое мы указали. Но въ этомъ нѣтъ необходимости, потому что точное опредѣленіе мѣстоположеній наблюдателей даетъ намъ соединяющій ихъ базисъ; зная же послѣдній, можно свести дѣйствительный случай къ разсмотрѣнному идеальному.

При прохожденіяхъ Венеры въ 1761 и 1769 г.г. примѣнялись, главнымъ образомъ, два метода наблюденія: такъ называемый методъ пробѣга, состоящій въ наблюденіи различныхъ длинъ проходимыхъ хордъ и, слѣдовательно, продолжительности прохожденія, и методъ контактовъ, т. е. наблюденіе однихъ лишь моментовъ вступленія планеты на дискъ и ея выхожденія.

Что касается перваго метода, то понятно, что время, въ теченіе котораго планета совершитъ свое прохожденіе по диску солнца, неодинаково для обоихъ наблюдателей: оно пропорціонально длинамъ хордъ. Зная отношеніе этихъ промежутковъ времени, которые можно измѣрить, и разность широтъ обоихъ пунктовъ наблюденія, вычисляютъ по методу Regula falsi (это весьма извѣстный пріемъ приближеннаго вычисленія) точную разность между параллаксомъ Венеры и солнечнымъ параллаксомъ; для этого въ формулу сперва подставляютъ приближенное значеніе этой разности, а именно то, которое было извѣстно до того времени; зная точную разность, можно по III закону Кеплера опредѣлить истинный солнечный параллаксъ. Или же вычисленіе можно сдѣлать другимъ путемъ, подставивъ непосредственно въ формулу приближенное значеніе солнечнаго параллакса, такъ какъ параллаксъ Венеры и солнечный параллаксъ находятся въ постоянномъ отношеніи другъ къ другу.

Второй методъ, примѣнявшійся, главнымъ образомъ, Геллемъ (Hell, 1720—1792), былъ предложенъ французскимъ астрономомъ Делилемъ (Joseph Delisle, 1688—1768). Онъ замѣтилъ, что вообще можно опредѣлить солнечный параллаксъ изъ согласованныхъ наблюденій въ различныхъ пунктахъ момента, соотвѣтствующаго какой-нибудь одной фазѣ прохожденія; такимъ моментомъ можетъ, напримѣръ, служить контактъ Венеры съ дискомъ солнца, т. е. моментъ, когда темный дискъ планеты впервые касается свѣтлаго диска солнца: разность временъ, соотвѣтствующихъ этому моменту въ обоихъ пунктахъ, пропорціональна относительному перемѣщенію Венеры, т. е. разности между перемѣщеніемъ Венеры и перемѣщеніемъ земли; это же перемѣщеніе представляетъ собой солнечный параллаксъ, соотвѣтствующій разстоянію между наблюдателями; оно должно только быть выражено въ дуговыхъ единицахъ, въ видѣ отсчета, который можно было бы сдѣлать, если бы солнце двигалось по огромному раздѣленному кругу съ радіусомъ, приблизительно въ 14 000 000 *) метровъ.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что моменты вступленія и выхожденія Венеры наступаютъ не одновременно на всей поверхности земного шара. Зная разность долготъ обоихъ пунктовъ наблюденія и опредѣливъ моменты, соотвѣтствующіе контакту въ обѣихъ станціяхъ, можно вычислить разность между параллаксомъ Венеры и солнечнымъ параллаксомъ и затѣмъ этотъ послѣдній.

Преимущество этого метода заключается въ томъ, что приходится наблюдать одинъ лишь контактъ, такъ что результатъ меньше зависитъ отъ состоянія погоды; но дѣло усложняется благодаря тому обстоятельству, что трудно опредѣлить съ достаточной точностью самый моментъ контакта: когда темный дискъ Венеры приближается къ свѣт-

*) Разстояніе Венеры отъ солнца.

лому солнечному диску, а также, когда онъ отдѣляется отъ внутренняго края послѣдняго, глазу кажется, будто оба тѣла постепенно сливаются другъ съ другомъ. Кромѣ того, необходимо точно опредѣлить разность долготъ; хотя теперь такое измѣреніе не представляетъ никакихъ затрудненій, но во время Делиля эта задача была не изъ легкихъ.

Оба эти метода съ небольшими видоизмѣненіями легли въ основу наблюденій надъ прохожденіями Венеры въ 1761 и 1769 г.г., давшихъ богатый матеріалъ для цѣлаго ряда вычисленій параллаксовъ; хотя всѣ полученные результаты болѣе или менѣе отличаются одинъ отъ другого, все же всѣ они довольно близки къ истинному значенію. Ниже мы даемъ таблицу, въ которой помѣщены результаты лучшихъ вычисленій.

Зная численное значеніе солнечнаго параллакса, мы легко можемъ вычислить разстояніе солнца отъ земли.

Обозначимъ черезъ r радіусъ земного шара (858 геогр. миль) и разстояніе солнца отъ земли черезъ Ea (фиг. 6); тогда

$$\sin a = \frac{r}{Ea}\text{; слѣдовательно, } Ea \, . \sin a = r$$

$$\text{и } Ea = \frac{r}{\sin a} \cdot$$

Вставивъ сюда значеніе солнечнаго параллакса, полученное астрономомъ Энке, $a = 8'',57$, мы найдемъ:

$$Ea = \frac{858}{\sin 8'',57} = \begin{array}{l} \log 12,9334873-10 \\ \;\;„ \quad\; 5,6185494-10 \\ \hline \log \;\; 7,3149379 \end{array} = 20\,650\,847 \text{ геогр. миль,}$$

(См. таблицу ниже).

Наибольшую точность астрономы приписывали среднему значенію, полученному Энке; около сорока лѣтъ, оно, какъ наиболѣе вѣрное, было принято во всѣхъ вычисленіяхъ.

Тѣмъ временемъ астрономы придумали новые методы, и мало-по-малу распространилось мнѣніе, что численное значеніе Энке слишкомъ мало. Еще Варгентинъ (Peter Wargentin, 1717—1783) предложилъ воспользоваться для опредѣленія солнечнаго параллакса противостояніями Марса. Согласно III закону Кеплера отношеніе періодовъ обращенія земли и Марса равно 1 : 1,88; слѣдовательно, отношеніе квадратовъ равно 1 : 3,54, а кубическій корень этого отношенія, т. е. 1 : 1,524, выражаетъ отношеніе соотвѣтствующихъ среднихъ разстояній отъ солнца. Такъ какъ планеты движутся по эллипсамъ, то во время противостояній указанное отношеніе можетъ сдѣлаться значительно меньше, т. е. близость Марса къ землѣ увеличится: тогда разстояніе его отъ земли составляетъ всего 0'',4 *). Такіе моменты, когда Марсъ столь близокъ къ землѣ, особенно удобны для нахожденія па-

*) Т. е. собственно его параллаксъ. Ред.

раллакса Марса; зная послѣдній, мы можемъ, по извѣстному способу, опредѣлить и солнечный параллаксъ. Правда, Венера во время своего нижняго соединенія находится еще ближе къ землѣ (около 0″,25); но нужно принять во вниманіе, что противостояніе даетъ возможность сдѣлать нѣсколько наблюденій, тогда какъ при прохожденіи приходится ограничиваться единственнымъ наблюденіемъ.

	Кто вычислялъ	Годъ прохожденія Венеры	Годъ вычисленія	Солнечный параллаксъ a	Разстояніе солнца отъ земли	Замѣчанія
1.	М. Гелль (Helle)	1769	1769	8″,71	20 318 930	Участвовалъ въ наблюденіи
2.	Тотъ же самый	1769	позже	8″,73	20 272 380	
3.	І. Лексель (J. Lexell)	1761	1769	8″,63	20 507 290	
4.	Горсби (Horsby)	1769	1771	8″,78	20 156 940	Онъ же и наблюдалъ
5.	Лаландъ (Lalande)	1769	1772	8″,81	20 578 820	Средній выводъ изъ 4 вычисленій. Онъ же и наблюдалъ
6.	Пенгрэ (Pingré)	1769	1772	8″,81	20 088 300	Онъ же и наблюдалъ
7.	Маскелинъ (Maskelyne)	1769	—	8″,723	20 288 650	Онъ же и наблюдалъ
8.	Ферре (José J. de Ferrer)	1769	—	8″,602	20 574 040	Средній выводъ изъ 12 вычисленій
9.	Онъ же	1769	—	8″,577	20 634 010	Исправленное значеніе
10.	Дю-Сежуръ (Du-Sejour)	1769	—	8″,842	20 015 600	Онъ же и наблюдалъ
11.	Энке (Encke)	1761	1822	8″,531	20 650 847	
12.	Онъ же	1769	1824	8″,603		Среднее значеніе параллакса 8″,57 ± 0,038

Во время противостоянія Марса въ 1832 г. астрономы воспользовались указаннымъ методомъ для четырехъ опредѣленій солнечнаго параллакса, которыя дали въ среднемъ число 9″,028. Противостояніе Марса въ 1862 г. послужило предметомъ весьма обширныхъ наблюденій, давшихъ слѣдующіе результаты:

Солнечный параллаксъ согласно вычисленію самого наблюдателя
Виннеке (Winnecke) . . . . 8",964.
По Ньюкомбу (Newcomb) . . 8",855,
по Стону (Stone). . . . . . 8",932 ± 0,032.

Гилль (Gill), наблюдавшій ближайшее слѣдующее противостояніе Марса въ 1877 г., нашелъ число 8",780.

Такимъ образомъ, полученныя числа дѣйствительно нѣсколько превышаютъ числа, найденныя при наблюденіяхъ надъ прохожденіями Венеры.

Астрономы прилагали всевозможныя усилія, чтобы устранить это разногласіе. Непосвященному эти труды могутъ показаться особаго рода спортомъ; но на самомъ дѣлѣ совершенно точное знаніе солнечнаго парраллакса, а, слѣдовательно, и разстоянія солнца отъ земли имѣетъ огромное значеніе для цѣлаго ряда важныхъ астрономическихъ вычисленій. Не нужно также забывать, что человѣкъ привыкъ, — и эта привычка коренится въ природѣ его душевной жизни, — соразмѣрять все земнымъ масштабомъ. Но мы уже знаемъ, что увеличеніе или уменьшеніе параллакса на одну лишь сотую долю секунды обусловливаетъ соотвѣтственно уменьшеніе или увеличеніе разстоянія солнца на 23000 географич. миль: величина ничтожная въ сравненіи съ размѣрами вселенной, но огромная на нашъ земной масштабъ, раза въ четыре больше окружности экватора!

Что касается новѣйшихъ методовъ опредѣленія солнечнаго параллакса, то здѣсь намъ придется ограничиться изложеніемъ однихъ лишь принциповъ, лежащихъ въ ихъ основаніи.

1. Разстояніе солнца оказываетъ вліяніе на движеніе луны. Въ теоріи движенія луны выводится такъ называемое параллактическое уравненіе, константа котораго находится въ опредѣленномъ отношеніи къ солнечному паралаксу. Прежде всего вычисляютъ, насколько увеличивается или уменьшается притяженіе луны солнцемъ вслѣдствіе ея попеременнаго приближенія или удаленія; отсюда можно получить отношеніе разстоянія солнца къ радіусу лунной орбиты; величина послѣдняго въ радіусахъ земли уже извѣстна; затѣмъ уже легко выразить относительные размѣры посредствомъ абсолютныхъ. Ганзенъ (Hansen) въ Готѣ, извѣстный долгимъ и обстоятельнымъ изученіемъ теоріи луны, нашелъ такимъ способомъ для солнечнаго параллакса число 8",916.

2. Аналогичнымъ образомъ Леверрье (Leverrier) получилъ числа 8",950 и 8",860, исходя изъ взаимныхъ возмущеній въ одномъ случаѣ земли и Венеры, а въ другомъ Венеры и Марса. Новѣйшія весьма точныя изслѣдованія Эри (B. Airy) о взаимодѣйствіи, которое земля и Венера оказываютъ другъ на друга, показываютъ, что отношеніе массы земли къ массѣ Венеры больше, чѣмъ принимали до тѣхъ поръ. Такъ какъ отношеніе массы Венеры къ массѣ солнца есть величина извѣстная, которая не можетъ быть уменьшена, то приходится либо увеличить, либо же уменьшить также и отношеніе массы земли къ массѣ солнца. Отсюда нужно заключить, что разстояніе солнца отъ земли меньше принятаго,—стало быть, параллаксъ больше.

3. Скорость свѣта*) даетъ намъ относительную мѣру разстоянія солнца отъ земли. Если бы мы совершенно точно выразили эту относительную мѣру въ обычныхъ мѣрахъ, то мы нашли бы путь къ опредѣленію солнечнаго параллакса. Французскіе физики **Физо** (Fizeau) и **Фуко** (Foucault) рѣшили эту задачу съ помощью чрезвычайно остроумныхъ и точныхъ приборовъ. Первый нашелъ, что скорость свѣта равна 42 219 географич. миль въ секунду; отсюда онъ вычислилъ, что разстояніе солнца отъ земли равно 20 814 000 географич. миль, а соотвѣтствующее значеніе параллакса составляетъ 8",50; **Фуко** же получилъ соотвѣтственно числа 40 160, 19 798 900 и 8",94. Уже одна разница въ результатахъ показываетъ, что и этотъ методъ таитъ въ себѣ источники погрѣшностей; впрочемъ, совершенно избѣжать ихъ врядъ ли и возможно.

4. Прежде при прохожденіи Венеры астрономы вычисляли солнечный параллаксъ изъ разности между параллаксомъ Венеры и солнечнымъ (т. е. помощью угла γ фиг. 6); позже астрономы начали прибѣгать чаще къ непосредственному опредѣленію солнечнаго параллакса изъ разстоянія ab между хордами: при этомъ вычисленіи разстояніе солнца принималось за единицу, а величину ab измѣряли въ доляхъ этой единицы.

Отъ этого метода можно было ждать наиболѣе точныхъ результатовъ, такъ какъ погрѣшность можетъ вкрасться здѣсь лишь при наблюденіи контактовъ. Чѣмъ точнѣе мы опредѣлимъ контакты при прохожденіи Венеры, тѣмъ точнѣе мы вычислимъ длины хордъ, а, стало быть, и разстояніе между ними ab и солнечный параллаксъ.

Прежде для опредѣленія разстоянія между хордами пользовались геліометромъ; въ новѣйшее время для этой цѣли пользуются услугами фотографіи. Посредствомъ непрерывнаго ряда фотографій, начиная еще до вступленія Венеры на дискъ солнца и заканчивая лишь послѣ ея выхожденія, фиксируютъ явленіе прохожденія въ томъ видѣ, въ какомъ оно представляется въ различныхъ пунктахъ наблюденія. По этимъ снимкамъ можно затѣмъ во всякое время измѣрить длины пройденныхъ хордъ, разстояніе ихъ другъ отъ друга и отъ края солнца, опредѣлить контакты и необходимые углы.

Преимущество этого фотографическаго метода заключается въ томъ, что благодаря ему наблюденіе и вычисленіе становятся независимыми отъ индивидуальныхъ вліяній и случайностей; но зато этотъ методъ имѣетъ и свои слабыя стороны: если и невооруженный глазъ даже при помощи лучшихъ камеръ почти никогда не получаетъ совершенно отчетливаго и неискаженнаго изображенія, то при употребленіи микроскопа и микрометра недостаточная отчетливость по краямъ изображенія даетъ себя чувствовать особенно сильно. Недостатки этого метода заключаются еще въ сравнительно малыхъ размѣрахъ изображеній**), въ отклоненіи свѣтовыхъ лучей въ атмосферѣ во время фото-

*) **Олафъ Рёмеръ** (Olaf Römer), наблюдая въ 1675 г. затменіе спутниковъ Юпитера, нашелъ, что свѣтъ проходитъ разстояніе отъ солнца до земли за $8^m\ 13^s$. По современнымъ даннымъ это число равно $8^m\ 15^s,5$.

**) На пластинкахъ, которыя пришлось видѣть автору, изображеніе солнца имѣло въ діаметрѣ 115 мм., изображеніе Венеры — 3,6 мм.

графированія, и,—что мнѣ представляется особенно существеннымъ,— неточности возникаютъ при переходѣ отъ малыхъ размѣровъ къ большимъ; это же обстоятельство, повидимому, отражается и на правильности результатовъ, полученныхъ съ помощью измѣренія скорости свѣта.

Но и другіе новые методы, не основанные на явленіи прохожденія Венеры, не привели къ окончательному результату. Благодаря имъ подтвердилось лишь, что число Энке недостаточно точно. Величина солнечнаго параллакса все еще оставалась недостаточно выясненной.

Понятно, съ какимъ напряженіемъ астрономы ожидали прохожденій Венеры, которыя послѣ промежутка въ 105 лѣтъ должны были произойти сперва въ 1874 г. и потомъ въ 1882 г.; наука использовала оба прохожденія, пустивъ въ ходъ всѣ средства, какими она теперь располагаетъ. Средняя величина солнечнаго параллакса, вычисленнаго на основаніи этихъ послѣднихъ прохожденій Венеры, равна 8",83. Въ астрономіи повсемѣстнымъ признаніемъ пользуется число, полученное Ньюкомбомъ; въ основаніе его вычисленія легли не только прохожденія Венеры, но и всѣ новѣйшія работы; его число — 8",80 — принято международной конференціей 1896 г. въ Парижѣ для употребленія въ астрономическихъ эфемеридахъ. Соотвѣтствующая ему средняя величина разстоянія солнца отъ земли составляетъ 149 480 976 километровъ, или 20 144 490 геогр. миль. Новѣйшія наблюденія Эроса, обсужденіе которыхъ не закончено, повидимому, значительно увеличиваютъ увѣренность въ правильности числа Нькомба, хотя и вносятъ маленькую поправку.

Такими-то многоразличными путями астрономы постарались осуществить и использовать геніальную мысль Галлея. Ближайшее прохожденіе Венеры произойдетъ лишь въ 2004 г. Долго ждать! къ тому времени вымретъ почти все современное человѣчество, и выростетъ новое поколѣніе. Придумаетъ ли оно новые способы для осуществленія извѣстныхъ намъ идей, или же оно пойдетъ совершенно новыми путями, оставивъ въ сторонѣ прохожденія Венеры и противостоянія Марса — кто знаетъ? Пока что, мы должны довольствоваться тѣмъ прекраснымъ достояніемъ, которымъ мы уже обладаемъ.

Къ вопросу о несуществованіи нечетныхъ совершенныхъ чиселъ.

А. Турчанинова.

(*Окончаніе* *).

Въ № 465—466 мы доказали, что нечетное совершенное число должно имѣть, по крайней мѣрѣ, четырехъ простыхъ дѣлителей. Такъ какъ это одинъ изъ главнѣйшихъ результатовъ нашего изслѣдованія, то мы позволяемъ себѣ предложить еще одно доказательство этого же предложенія. Обращаясь къ этому, примемъ во вниманіе, что вопросъ состоитъ лишь въ томъ, чтобы исчерпать типъ $3^{\alpha}.5^{\beta}.11^{\gamma}$.

*) См. № 465—466 „Вѣстника".

Преобразовывая уравненіе совершенныхъ чиселъ

$$2\,.\,3^{\alpha}\,.\,5^{\beta}\,.\,11^{\gamma}=\frac{3^{\alpha+1}-1}{3-1}\cdot\frac{5^{\beta+1}-1}{5-1}\cdot\frac{11^{\gamma+1}-1}{11-1},$$

получимъ:

$$2=\frac{1-\frac{1}{3^{\alpha+1}}}{1-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1-\frac{1}{5^{\beta+1}}}{1-\frac{1}{5}}\cdot\frac{1-\frac{1}{11^{\gamma+1}}}{1-\frac{1}{11}},$$

или

$$\left(1-\frac{1}{3^{\alpha+1}}\right)\left(1-\frac{1}{5^{\beta+1}}\right)\left(1-\frac{1}{11^{\gamma+1}}\right)=2\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{32}{33}\cdot\ (1)$$

Пусть ν будетъ наименьшій изъ показателей α, β, γ; въ такомъ случаѣ, изъ равенства (1) нетрудно получить:

$$\left(1-\frac{1}{3^{\nu+1}}\right)^3<\frac{32}{33},$$

откуда

$$1-\frac{1}{3^{\nu+1}}<\sqrt[3]{\frac{32}{33}};\quad \frac{1}{3^{\nu+1}}>1-\sqrt[3]{\frac{32}{33}};$$

$$3^{\nu+1}<\frac{1}{1-\sqrt[3]{\frac{32}{33}}}=\frac{\sqrt[3]{33}}{\sqrt[3]{33}-\sqrt[3]{32}}=$$

$$=\frac{5{,}74456\ldots}{5{,}74456\ldots-5{,}65685\ldots}=\frac{5{,}74456\ldots}{0{,}08771\ldots}<\frac{5{,}75}{0{,}08}=\frac{575}{8}<72.$$

Итакъ, $3^{\nu+1}<72$. При $\nu\geqslant 3$ имѣетъ мѣсто неравенство $3^{\nu+1}\geqslant 81$; значитъ, $\nu<3$, т. е. ν равно либо 1, либо 2. Теперь разсмотримъ три случая:

1) $\nu=\alpha$. Такъ какъ 3 имѣетъ видъ $4n-1$, то α есть четное число (теор. II) и, слѣдовательно, равно 2. Значитъ:

$$2\,.\,3^2\,.\,5^{\beta}\,.\,11^{\gamma}=\frac{3^3-1}{3-1}\cdot\frac{5^{\beta+1}-1}{5-1}\cdot\frac{11^{\gamma+1}-1}{11-1}=13\cdot\frac{5^{\beta+1}-1}{5-1}\cdot\frac{11^{\gamma+1}-1}{11-1},$$

откуда и видна невозможность этого случая.

2) $\nu=\beta$. Такъ какъ изъ чиселъ α, β, γ лишь 5 имѣетъ видъ $4n+1$, то β есть число нечетное и, слѣдовательно, равно 1. Такимъ образомъ, имѣемъ:

$$2\,.\,3^{\alpha}\,.\,5\,.\,11^{\gamma}=\frac{3^{\alpha+1}-1}{3-1}\cdot\frac{5^2-1}{5-1}\cdot\frac{11^{\gamma+1}-1}{11-1}=\frac{3^{\alpha+1}-1}{3-1}\cdot 6\cdot\frac{11^{\gamma+1}-1}{11-1},$$

т. е.

$$3^{\alpha-1}\,.\,5\,.\,11^{\gamma}=\frac{3^{\alpha+1}-1}{3-1}\cdot\frac{11^{\gamma+1}-1}{11-1},$$

откуда усматриваемъ, что непремѣнно должно имѣть мѣсто сравненіе $11^{\gamma+1} \equiv 1$ (мод. 3), что невозможно, такъ какъ 3 есть первообразный корень 11, а $\gamma + 1$ есть число нечетное, ибо γ есть число четное.

3) $\nu = \gamma$. Въ этомъ случаѣ $\gamma = 2$, и мы имѣемъ:

$$2 \,.\, 3^{\alpha} \,.\, 5^{\beta} \,.\, 11^2 = \frac{3^{\alpha+1} - 1}{3 - 1} \cdot \frac{5^{\beta+1} - 1}{5 - 1} \cdot \frac{11^3 - 1}{11 - 1} =$$

$$= \frac{3^{\alpha+1} - 1}{3 - 1} \cdot \frac{5^{\beta+1} - 1}{5 - 1} \cdot 133 = \frac{3^{\alpha+1} - 1}{3 - 1} \cdot \frac{5^{\beta+1} - 1}{5 - 1} \cdot 7 \cdot 19,$$

что невозможно, ибо лѣвая часть ни на 7 ни на 19 не дѣлится.

Переходимъ теперь къ дальнѣйшему изложенію нашихъ изслѣдованій.

Теорема XVII. *Если нечетное совершенное число имѣетъ только четырехъ простыхъ дѣлителей, то оно необходимо приводится къ одному изъ трехъ типовъ: 1) $3^{\alpha}.5^{\beta}.c^{\gamma}.d^{\delta}$; 2) $3^{\alpha}.7^{\beta}.c^{\gamma}.d^{\delta}$; 3) $5^{\alpha}.7^{\beta}.c^{\gamma}.d^{\delta}$, при чемъ въ первомъ изъ нихъ $5 < c < d$, а во второмъ и третьемъ $7 < c < d$.*

Пусть $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}$ есть такое число. По теоремѣ IV имѣемъ:

$$\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right)\left(1 - \frac{1}{d}\right) < \frac{1}{2},$$

гдѣ $a < b < c < d$. Значитъ,

$$\left(1 - \frac{1}{a}\right)^4 < \frac{1}{2}, \quad \text{т. е.} \quad 2(a-1)^4 < a^4,$$

откуда $a < 7$, ибо при $a = 7$

$$2 \,.\, 6^4 = 2592 > 7^4 = 2401,$$

т. е. выполняется обратное неравенство. Далѣе:

$$\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right)\left(1 - \frac{1}{d}\right) < \frac{1}{2\left(1 - \frac{1}{a}\right)} < \frac{1}{2 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{3}{4},$$

откуда

$$\left(1 - \frac{1}{b}\right)^3 < \frac{3}{4}, \quad \text{т. е.} \quad 4(b-1)^3 < 3b^3.$$

Здѣсь при $b = 11$ выполняется обратное неравенство, ибо

$$4 \,.\, 10^3 = 4000 > 3 \,.\, 11^3 = 3993.$$

Значитъ, $b < 11$. Итакъ, $a < 7$; $b < 11$. Но $a < b$; значитъ, возможны только такія комбинаціи: 1) $a = 3$, $b = 5$; 2) $a = 3$, $b = 7$; 3) $a = 5$, $b = 7$, что и доказываетъ нашу теорему. (Мы не продолжали этихъ разсужденій дальше, ибо для c предѣлъ довольно высокъ, а для d мы и совсѣмъ не получимъ предѣла — d остается неопредѣленнымъ).

Теорема XVIII. Нечетное совершенное число, имѣющее только четырехъ простыхъ дѣлителей, должно непремѣнно дѣлиться на полную четвертую степень какого-либо числа.

Докажемъ сначала, что оно должно дѣлиться на полный кубъ какого-либо числа. Предположимъ противное, т. е., что нечетное число вида $ab^2c^2d^2$ можетъ быть совершеннымъ. Но, по предыдущей теоремѣ, нечетное совершенное число о четырехъ простыхъ дѣлителяхъ можетъ быть только трехъ типовъ: $3^\alpha . 5^\beta . c^\gamma . d^\delta$; $3^\alpha . 7^\beta . c^\gamma . d^\delta$; $5^\alpha . 7^\beta . c^\gamma . d^\delta$.

Разсматривая первый типъ, видимъ, что тутъ можетъ представиться два случая: либо 5 войдетъ въ нечетной степени, либо одно изъ чиселъ c, d войдетъ въ нечетной степени. Разсмотримъ каждый изъ нихъ отдѣльно:

1) $$2 . 5 . 3^2 . c^2 . d^2 = (1+5)(1+3+3^2)(1+c+c^2)(1+d+d^2) = \\ = 6 . 13 . (1+c+c^2)(1+d+d^2);$$

сокращая, получимъ:

$$15c^2d^2 = 13 . (1+c+c^2)(1+d+d^2);$$

отсюда видно, что либо $c = 13$, либо $d = 13$, т. е.

$$15 . 13^2x^2 = 13(1+13+13^2)(1+x+x^2),$$

гдѣ x есть нечетное простое число; но

$$1+13+13^2 = 183 = 3 . 61,$$

а такъ какъ 61 есть простое число, то $x = 61$, и мы получимъ по сокращеніи:

$$5 . 13 . 61 = 1+61+61^2,$$

что невозможно.

2) $$2 . c . 3^2 . 5^2 . d^2 = (1+c)(1+3+3^2)(1+5+5^2)(1+d+d^2) = \\ = (1+c) . 13 . 31(1+d+d^2),$$

откуда видно, что одно изъ чиселъ c, d равно 13, а другое равно 31. Но изъ чиселъ 13, 31 лишь 13 имѣетъ видъ $4n+1$; значитъ, $c = 13$, а $d = 31$. Тогда $c+1 = 14$, откуда слѣдуетъ, что вторая часть уравненія дѣлится на 7, а это невозможно.

Разсмотримъ теперь второй типъ $3^\alpha . 7^\beta . c^\gamma . d^\delta$. Такъ какъ и 3 и 7 имѣютъ видъ $4n-1$, то оба эти числа входятъ въ четныхъ степеняхъ, и мы имѣемъ:

$$2 . c . 3^2 . 7^2 . d^2 = (c+1)(1+3+3^2)(1+7+7^2)(1+d+d^2) = \\ = (c+1) . 13 . 57 . (1+d+d^2) = (c+1) . 13 . 3 . 19 . (1+d+d^2),$$

а такъ какъ 19 имѣетъ видъ $4n-1$, то $c = 13$, а $d = 19$, и мы по сокращеніи получаемъ:

$$2 . 3 . 7^2 . 19^2 = 14 . 19 . (1+19+19^2), \quad \text{т. е.} \quad 3 . 7 . 19 = 1+19+19^2,$$

что, очевидно, невозможно.

Перейдемъ, наконецъ, къ третьему типу $5^{\alpha}.7^{\beta}.c^{\gamma}.d^{\delta}$. Предварительно нетрудно убѣдиться, что здѣсь 5 не можетъ входить въ нечетной степени. Дѣйствительно, въ противномъ случаѣ имѣло бы мѣсто равенство:

$$2.5^{2\alpha-1}.7^{2\beta}.c^{2\gamma}.d^{2\delta}=\frac{5^{2\alpha}-1}{5-1}.\frac{7^{2\beta+1}-1}{7-1}.\frac{c^{2\gamma+1}-1}{c-1}.\frac{d^{2\delta+1}-1}{d-1},$$

откуда видно, что вторая часть дѣлится на $5+1=6$, т. е. на 3, что невозможно, ибо каждое изъ чиселъ c и d больше 7.

Значитъ, въ нечетной степени должно входить одно изъ чиселъ c, d, и мы будемъ имѣть:

$$2.c.5^2.7^2.d^2=(c+1)(1+5+5^2)(1+7+7^2)(1+d+d^2),$$

но

$$1+7+7^2=57=3.19,$$

т. е. правая часть дѣлится на 3, что невозможно.

Итакъ, нечетное совершенное число, имѣющее четырехъ простыхъ дѣлителей, должно дѣлиться на полный кубъ, т. е. если $a^{2\alpha-1}b^{2\beta}c^{2\gamma}d^{2\delta}$ есть нечетное совершенное число, то, по крайней мѣрѣ, одно изъ чиселъ α, β, γ, δ больше 1. Но α есть число нечетное (теор. X); значитъ, оно не можетъ равняться 2. Итакъ, либо $\alpha>2$, либо одно изъ чиселъ β, γ, δ больше 1, чѣмъ, очевидно, и доказана теорема.

Теорема XIX. Въ предѣлахъ первыхъ двухъ милліоновъ нѣтъ ни одного нечетнаго совершеннаго числа.

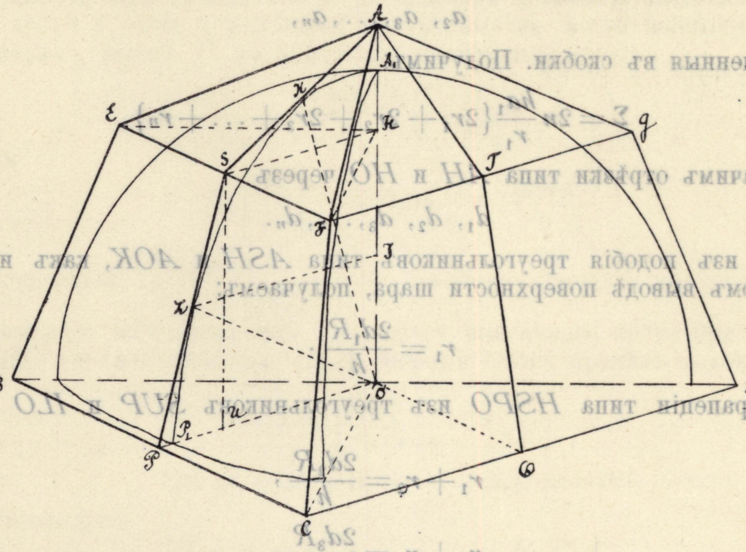
Въ самомъ дѣлѣ, согласно теоремѣ VIII, низшій предѣлъ для нечетныхъ совершенныхъ чиселъ о пяти простыхъ дѣлителяхъ есть $13.11^2.7^2.5^2.3^2=17\,342\,325>2\,000\,000$. Для нечетныхъ совершенныхъ чиселъ, имѣющихъ большее число простыхъ дѣлителей, предѣлы будутъ еще выше. Что же касается до нечетныхъ совершенныхъ чиселъ о четырехъ простыхъ дѣлителяхъ, то, принимая во вниманіе предыдущую теорему, находимъ для нихъ низшій предѣлъ $5.3^4.7^2.11^2=$ $=2\,401\,245$.

Опредѣленіе поверхности и объема шара, какъ предѣловъ поверхностей и объемовъ многогранниковъ.

Б. Цомакіона.

Черезъ прямую OA проведемъ n плоскостей, образующихъ равные двугранные углы. Въ каждой изъ этихъ плоскостей проведемъ равными радіусами R окружности съ общимъ центромъ въ точкѣ O. Около каждой окружности опишемъ правильные $4n$-угольники такъ, чтобы точка A была ихъ общей вершиной. Черезъ каждую сторону этихъ многоугольниковъ проведемъ плоскость, перпендикулярную къ той плоскости, въ которой лежитъ соотвѣтствующая окружность. Въ результатѣ получимъ многогранникъ, четверть котораго, для случая $n = 2$, изображена на чертежѣ.

Предѣлъ поверхности такого многогранника при $n = \infty$ назовемъ поверхностью шара радіуса R, а предѣлъ объема того же многогранника при томъ же предѣльномъ переходѣ — объемомъ шара.



Фиг. 1.

Опредѣлимъ поверхность многогранника. Эта поверхность состоитъ изъ $2n$ полосъ типа $AEBCF$. Найдемъ выраженіе поверхности половины такой полосы. Эта поверхность состоитъ изъ одного треугольника типа EAF и $n-1$ трапецій типа $BEFC$. Назовемъ сторону типа EF черезъ a_1, а послѣдующія параллельныя стороны трапеціи — черезъ

$$a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n.$$

Высотами треугольника и трапецій будутъ служить стороны правильнаго $4n$-угольника; общую ихъ величину обозначимъ h. Тогда поверхность S половины полосы выразится такъ:

$$S = h \cdot \left\{ \frac{a_1}{2} + \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_2 + a_3}{2} + \ldots + \frac{a_{n-1} + a_n}{2} \right\}.$$

Поверхность всего многогранника будетъ въ $4n$ разъ больше. Обозначимъ эту поверхность черезъ Σ. Тогда:

$$\Sigma = 2n \,.\, h \,.\, \{2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + \ldots + a_n\}.$$

Преобразуемъ нѣсколько это выраженіе.

Треугольники типа EHF и BOC подобны. Обозначимъ ихъ высоты (типа HS и OP) черезъ:

$$r_1,\ r_2,\ r_3 \ldots r_n.$$

Тогда будутъ имѣть мѣсто пропорціи:

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{r_2}{r_1},\ \frac{a_3}{a_1}=\frac{r_3}{r_1},\ \ldots,\ \frac{a_n}{a_1}=\frac{r_n}{r_1}.$$

Съ помощью этихъ пропорцій исключимъ въ выраженіи Σ величины

$$a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,$$

заключенныя въ скобки. Получимъ:

$$\Sigma=2n\frac{ha_1}{r_1}\left\{2r_1+2r_2+2r_3+\ldots+r_n\right\}.$$

Обозначимъ отрѣзки типа AH и HO черезъ

$$d_1,\ d_2,\ d_3,\ \ldots,\ d_n.$$

Тогда изъ подобія треугольниковъ типа ASH и AOK, какъ и при обычномъ выводѣ поверхности шара, получаемъ:

$$r_1=\frac{2d_1R}{h}.$$

Для трапеціи типа $HSPO$ изъ треугольниковъ SUP и ILO получаемъ:

$$r_1+r_2=\frac{2d_2R}{h},$$

$$r_2+r_3=\frac{2d_3R}{h},$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$r_{n-1}+r_n=\frac{2d_nR}{h}.$$

Исключимъ съ помощью этихъ равенствъ величины

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_n$$

въ выраженіи Σ внутри скобокъ:

$$\Sigma=4nR\frac{a_1}{r_1}\left\{d_1+d_2+d_3+\ldots+d_n\right\}.$$

Теперь найдемъ выраженіе объема многогранника. Представимъ этотъ многогранникъ состоящимъ изъ пирамидъ, вершины которыхъ сходятся въ точкѣ O, а основанія суть грани многогранника. Обозначимъ объемъ многогранника черезъ Y. Тогда

$$Y={}^1/_3\,\Sigma\,.\,R.$$

Перейдемъ къ предѣламъ, полагая

$$\operatorname{Lim} n=\infty.$$

$$\operatorname{Lim}\,[\Sigma]_{n=\infty}=4R\,.\operatorname{Lim}\left[\frac{na_1}{r_1}\right]_{n=\infty}\cdot\operatorname{Lim}\,[d_1+d_2+d_3+\ldots+d_n]_{n=\infty},$$

$$\operatorname{Lim}\,[Y]_{n=\infty}={}^1/_3\,R\,.\operatorname{Lim}\,[\Sigma]_{n=\infty}.$$

$\text{Lim}\left[\frac{na_1}{r_1}\right]_{n=\infty}$ нетрудно найти; a_1 есть сторона правильнаго $2n$-угольника, r_1 — радіусъ вписаннаго круга. Представимъ себѣ другой правильный $2n$-угольникъ и будемъ увеличивать число сторонъ его въ зависимости отъ увеличенія n, не измѣняя величины радіуса вписаннаго круга ϱ: если перемѣнный полупериметръ этого многоугольника обозначимъ черезъ P, то при всѣхъ значеніяхъ n:

$$\frac{na_1}{r_1}=\frac{P}{\varrho},$$

откуда:

$$\text{Lim}\left[\frac{na_1}{r_1}\right]_{n=\infty}=\text{Lim}\frac{P}{\varrho}=\frac{\text{Lim}\,P}{\varrho}.$$

Слѣдовательно, $\text{Lim}\left[\frac{na_1}{r_1}\right]_{n=\infty}$ равенъ отношенію предѣла полупериметра правильнаго многоугольника къ радіусу вписаннаго круга при неограниченно увеличивающемся числѣ сторонъ; этотъ предѣлъ равенъ π.

$$\text{Lim}\left[\frac{na_1}{r_1}\right]_{n=\infty}=\pi.$$

$$\text{Lim}\,[d_1+d_2+d_3+\ldots+d_n]_{n=\infty}=R.$$

Дѣйствительно:

$$|d_1+d_2+d_3+\ldots+d_n-R|<d_1,$$

$$d_1<h,$$

$$\text{Lim}\,[h]_{n=\infty}=0.$$

Слѣдовательно:

$$\text{Lim}\,[\Sigma]_{n=\infty}=4\pi R^2$$

$$\text{и}\quad \text{Lim}\,[Y]_{n=\infty}={}^4/_3\pi R^3.$$

Изложенное разсужденіе отличается отъ принятыхъ въ учебникахъ въ двухъ отношеніяхъ: 1) даетъ искомыя формулы помощью однократнаго перехода къ предѣлу и 2) объединяетъ выводы обѣихъ формулъ.

По поводу „дѣленія безъ дѣленія и вычитанія" *).

А. Филиппова.

По поводу „дѣленія безъ дѣленія и вычитанія" нужно замѣтить, что безъ посредства алгориѳма безконечнаго умноженія можно съ помощью двухъ прямыхъ элементарныхъ операцій — умноженія и сложенія — обращать дроби вида $\frac{1}{a}$, гдѣ a есть какое-угодно число натуральнаго ряда, большее 1, въ десятичную, а, слѣдовательно, производить дѣленіе.

*) См. статью „О періодическихъ дробяхъ". „Вѣстникъ", № 467—468.

Напомнимъ, что

$$\frac{1}{x-a}=\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{a^2}{x^3}+\frac{a^3}{x^4}+\dots \qquad (1)$$

Для однозначнаго a полагаемъ $x=10$, $a=10-a$; для n-значнаго a полагаемъ $x=10^n$, $a=10-a$.

Такимъ образомъ,

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{10-4}=\frac{1}{10}+\frac{4}{100}+\frac{16}{1000}+\frac{64}{10000}+\dots$$

$$\frac{1}{6}=\begin{array}{l}0{,}14\\ \quad\ 16\\ \quad\ \ 64\\ \quad\ \ 256\\ \quad\ \ \ 1024\\ \quad\ \ \ \dots\\ \hline 0{,}166\dots\end{array}$$

Конечно, алгориѳмъ, основанный на разложенiи (1), практически не всегда облегчаетъ вычисленiя. Если число a не велико, тогда вычисленiя могутъ быть весьма просты. Напримѣръ, для

$$\frac{1}{997}=\frac{1}{1000-3}=\frac{1}{1000}+\frac{3}{1000^2}+\frac{9}{1000^3}+\dots$$

$$\frac{1}{997}=0{,}001003009027\dots$$

съ точностью до одной билліоной.

Но суть не въ упрощенiи вычисленiй, а въ томъ, что на основанiи разложенiя (1) можно построить алгориѳмъ, состоящiй изъ прямыхъ операцiй сложенiя и умноженiя, съ помощью котораго можно производить дѣленiе.

Опыты и приборы.

Къ демонстрацiи токовъ Фуко. Чтобы показать зависимость наведеннаго тока отъ числа перерѣзаемыхъ проводникомъ магнитныхъ силовыхъ линiй, можно воспользоваться слѣдующимъ опытомъ.

Берутъ мѣдный кружокъ, не слишкомъ толстый, въ дiаметрѣ около 5 см., и приспособливаютъ его такъ, чтобы онъ могъ висѣть на нити въ вертикальной и въ горизонтальной плоскости. Для этого просверливаютъ у края кружка дырочку, а къ центру его придѣлываютъ крючекъ или петлю. Если такой кружокъ, висящiй на нити въ горизонтальной плоскости, помѣстить между полюсами электромагнита и, закрутивши нить, предоставить ей раскручиваться и, тѣмъ самымъ, приводить кружокъ во вращенiе вокругъ оси, перпендикулярной къ его плоскости, то ясно можно видѣть, какъ присутствіе или отсутствіе магнитнаго поля между полюсами электромагнита (при замыканіи или размыканіи тока въ электромагнитѣ) не оказываетъ никакого вліянія на вращающійся кружокъ: число силовыхъ линій, пронизывающихъ при этихъ обстоятельствахъ кружокъ, остается неизмѣннымъ. Если же продѣлать тотъ же опытъ съ вертикально висящимъ кружкомъ, то легко видѣть, какъ въ магнитномъ полѣ вращеніе кружка быстро тормозится: въ этомъ случаѣ, число силовыхъ линій, пронизывающихъ кружокъ, мѣняется отъ момента къ моменту, будучи максимальнымъ, когда плоскость кружка перпендикулярна къ силовымъ линіямъ поля, и минимальнымъ, когда она имъ параллельна.

Если висящій вертикально кружокъ помѣстить параллельно и возможно близко къ поверхности одного изъ полюсовъ электромагнита, отодвинувши другой полюсъ возможно дальше, то нетрудно замѣтить, что при замыканіи тока въ электромагнитѣ кружокъ отталкивается отъ полюса электромагнита, при размыканіи тока притягивается къ нему. Этотъ опытъ еще лучше удается, если сравнительно тяжелый кружокъ замѣнить замкнутымъ круговымъ проводникомъ, состоящимъ изъ 3—4 оборотовъ тонкой мѣдной проволоки. (Ztsch. f. ph. ch. Unt.).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Безпроволочный телеграфъ надъ Атлантическимъ океаномъ. (Revue Scientifique, 21). Въ текущемъ году Маркони (Marconi) былъ приглашенъ сдѣлать сообщеніе о безпроволочномъ телеграфѣ на засѣданіи Royal Institution; въ этомъ сообщеніи онъ даетъ краткій очеркъ развитія безпроволочнаго телеграфа. Въ мартѣ 1899 г. впервые было установлено сообщеніе по телеграфу безъ проводовъ черезъ la Manche, а 29 марта того же года Times впервые опубликовалъ депеши, полученныя по этому новому телеграфу. Эти попытки вызвали споръ въ печати о возможности безпроволочнаго телеграфированія на дальнія разстоянія; главнымъ препятствіемъ считали кривизну земной поверхности. Кромѣ того, существенную помѣху видѣли въ возможности уловленія всѣхъ посылаемыхъ сильныхъ волнъ станціями, лежащими въ сферѣ ихъ распространенія. Но удачное телеграфированіе въ 1901 г. между озеромъ Wight и мысомъ Lizard, на разстояніи 186 миль, показало, что эти страхи неосновательны. Посылаемыя электрическія волны слѣдуютъ кривизнѣ поверхности, не задерживаясь на своемъ пути. Въ то же время былъ открытъ приборъ для уничтоженія интерференціи волнъ различныхъ станцій.

Этотъ успѣхъ подалъ надежду на возможность телеграфированія черезъ океанъ. Тогда было приступлено къ постройкѣ станціи въ Poldhu (Корнвалисъ, Англія). Въ приборѣ, посылающемъ волны, форма мачтъ, употребленныхъ въ этомъ случаѣ, состояла изъ конически расположенныхъ проводовъ, изолированныхъ на вершинѣ и соединяющихся въ одинъ кабель въ основаніи Эти провода были поддерживаемы на высотѣ 250 футовъ 20 мачтами. Въ то же время сооружалась станція въ Америкѣ (Cap. Cod), но буря, разразившаяся въ сентябрѣ 1901 г., разрушила сооруженія въ Poldhu и повредила многое на станціи въ Cap. Cod. Поэтому была сооружена временная станція на Новой Землѣ. Шары прерывателя для этого телеграфированія имѣли около 3 пальцевъ въ діаметрѣ. 12 декабря была впервые получена буква S, сообщенная по безпроволочному телеграфу черезъ океанъ На пароходѣ Philadelphia, уходящемъ изъ Англии въ Америку, была установлена получающая станція; вплоть до разстоянія въ 1551 милю отъ Poldhu сигналы доходили непрерывно и вполнѣ отчетливо. Во время этихъ опытовъ было впервые замѣчено удивительное дѣйствіе солнечнаго свѣта на распредѣленіе электрическихъ волнъ (на большихъ разстояніяхъ). По мнѣнію Маркони абсорбція электрическихъ волнъ въ теченіе дня происходитъ благодаря іонизаціи молекулъ воздуха ультрафіолетовыми лучами. Эти послѣдніе поглощаются, въ свою очередь, вышележащими слоями; весьма вѣроятно, что нѣкоторая часть атмосферы, подверженная дѣйствію солнечнаго свѣта, содержитъ больше іоновъ или электроновъ, чѣмъ та часть, которая находится въ темнотѣ. Какъ показалъ проф. Дж. Дж. Томсонъ (J. J. Thomson), освѣщенный и іонизованный воздухъ поглощаетъ часть энергіи электрическихъ волнъ. Во всякомъ случаѣ наиболѣе существеннымъ фактомъ является то обстоятельство, что солнечный свѣтъ и голубое небо дѣйствуютъ, какъ туманъ на сильныя электрическія волны. Амплитуда электрическихъ колебаній и длины волнъ имѣютъ большое значеніе въ разсмотрѣнномъ случаѣ.

Во время опытовъ выяснилось, что въ случаѣ длины волнъ, большей 100 м., выпуклости на поверхности земли и даже горы не представляютъ препятствія для прохожденія электрическихъ волнъ. Въ декабрѣ 1902 г. впервые обмѣнялись сигналами между Англіей и Америкой, при чемъ электрическія волны прошли разстояніе въ 3500 миль. Опыты телеграфированія съ судами были произведены надъ эскадрой, отплывшей къ Гибралтару; во все время пути (1000 миль) сообщеніе поддерживалось безостановочно. Наконецъ, одна изъ морскихъ компаній, Cunard, первая установила станціи безпроволочнаго телеграфа на всѣхъ своихъ судахъ, совершающихъ рейсъ Европа-Америка. Уединеніе на борту атлантическаго корабля отошло въ область прошлаго.

Въ настоящее время самой сильной станціей является итальянская станція въ Cottino. Въ настоящее время между Лондономъ и Нью-Іоркомъ сообщеніе производится регулярно, какъ по кабельному телеграфу, такъ и по безпроволочному. *А. Л.*

Окраска стекла и кварца подъ вліяніемъ лучей радія (Nature, № 2006). Окраска стекла, которая имѣетъ мѣсто подъ дѣйствіемъ лучей радія, приписывается обыкновенно присутствію марганца или свинца; но послѣднія изслѣдованія показываютъ, что эта окраска обязана своимъ происхожденіемъ соединенію какой-то посторонней субстанціи съ кремнеземомъ.

Небольшая полоска кристалла кварца была подвергнута дѣйствію лучей радія въ продолженіе трехъ недѣль; по истеченіи этого времени оказалось, что, кромѣ окраски одного мѣста неправильнымъ фіолетовымъ цвѣтомъ, получились еще параллельныя линіи, очень странно окрашенныя, съ едва замѣтными промежутками между ними. Съ другой стороны, химически чистый кремнеземъ не испытываетъ никакой окраски, будучи подверженъ самостоятельно дѣйствію лучей радія (время экспозиціи то же).

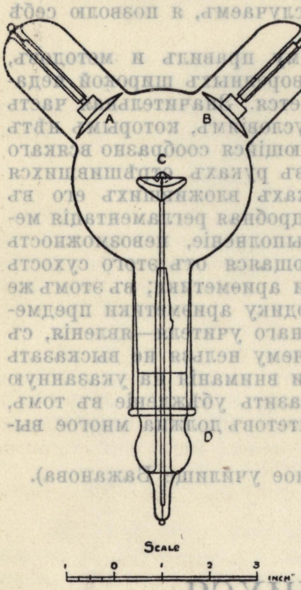
Бура, подвергнутая дѣйствію лучей радія въ продолженіе трехъ недѣль, показала, что на нее радій производитъ медленное дѣйствіе въ смыслѣ окрашиванія; это же тѣло, равно какъ и борная кислота въ соединеніи съ небольшимъ количествомъ чистаго кремнезема, представляютъ весьма удобный продуктъ для оказанія дѣйствія лучей радія. Такимъ образомъ, окраска, получаемая отъ дѣйствія этихъ излученій, можетъ служить доказательствомъ чистоты кремнезема, идущаго на приготовленіе стекла; здѣсь уже мы имѣемъ дѣло съ болѣе или менѣе практическимъ выводомъ, могущимъ пригодиться въ жизни. *А. Л.*

Іонизація воздуха ультрафіолетовыми лучами (Nature, № 2008). Ленаръ (Lenard) показалъ, что іонизація воздуха обязана своимъ происхожденіемъ короткимъ свѣтовымъ волнамъ; въ связи съ этимъ явился вопросъ, какую роль въ іонизаціи воздуха имѣютъ ультрафіолетовые лучи, длины волнъ которыхъ меньше λ 1850.

Для выясненія этого вопроса воспользовались трубкой, наполненной водородомъ, и экраномъ; позади экрана находилась комната, гдѣ іонизировался воздухъ. Сначала при помощи конденсирующихъ цилиндровъ былъ введенъ сухой, свѣжій воздухъ; затѣмъ черезъ электроды трубки былъ пропущенъ токъ, и наблюдали іонизацію воздуха помощью измѣренія заряда въ одномъ изъ конденсирующихъ цилиндровъ, въ то время какъ другой былъ установленъ на одномъ и томъ же потенціалѣ. При соблюденіи этихъ условій было найдено, что іонизація воздуха увеличивается соотвѣтственно тому, какъ уменьшалась сила свѣта; иначе говоря, можно съ достовѣрностью сказать, что іонизацію воздуха производятъ лучи въ той части спектра, открытой Шуманомъ (Schumann), гдѣ начинаются ультрафіолетовые лучи. Явленіе усиливается по мѣрѣ уменьшенія длины волны, приблизительно при λ 1800. *А. Л.*

Переходъ бриллıанта въ коксъ въ безвоздушномъ пространствѣ подъ вліяніемъ катодныхъ лучей. (Proceedings of the Royal Society, № 537, A).

Означенная работа преслѣдовала три цѣли: 1) убѣдиться въ полномъ переходѣ бриллıанта въ коксъ или графитъ при нагрѣваніи его катодными лучами; 2) опредѣлить температуру перехода и 3) опредѣлить, поглощаетъ ли или испускаетъ полученный уголь какой-нибудь газъ.



Фиг. 1.

A и *B* два аллюминіевыхъ электрода, *C* — бриллıантъ (или алмазъ), *D* — непроницаемая для воздуха стеклянная подставка, черезъ который былъ введенъ драгоцѣнный камень. Для опыта употреблялся перемѣнный токъ, такъ что *A* и *B* поперемѣнно дѣлались анодами или катодами, при чемъ кривизна была сдѣлана такой, чтобы фокусъ всегда находился на камнѣ. Этотъ послѣдній поддерживался пластинкой изъ ирридія, лежащей на граняхъ платиновой чашки. Во время опыта аппаратъ былъ соединенъ съ двумя ртутными насосами системы Тэплера, сюда же были присоединены и спектральныя трубки.

Періодъ перемѣннаго тока — 85 въ секунду; вольтажъ второй цѣпи простирался 5000 — 12000 вольтъ. Камни, употребленные для опыта, имѣли около 0,2 дюйма въ діаметрѣ. Первый изъ нихъ былъ обращенъ въ коксъ безъ всякаго затрудненія, второй же при токѣ въ 9660 вольтъ и 45,5 милліамперовъ началъ испускать искры и только при 11200 вольтажѣ и 48 милліамперахъ началъ разсыпаться, при чемъ оставшаяся часть представляла изъ себя коксъ. Температура, опредѣленная по пирометру, доходила во время опыта до 1890° *C*. Выдѣлилось много газа, но не вполнѣ выяснено, происходилъ ли этотъ газъ отъ камня или отъ раскаленныхъ частицъ трубки. Что же касается спектра, то полученный былъ настолько неясенъ, что не было возможности судить о газѣ, выдѣлившемся при изслѣдованіи. *А. Л.*

РЕЦЕНЗІИ.

А. И. Гольденбергъ. *Бесѣды по счисленію.* Посмертное изданіе, редактированное Д. Л. Волковскимъ. Изданіе Саратовскаго земства. 1906 г. Цѣна 1 руб. 25 коп.

Бесѣды представляютъ обработанный протоколъ педагогическихъ курсовъ въ Саратовѣ, руководителемъ которыхъ по отдѣлу методики ариѳметики былъ покойный А. И. Гольденбергъ. Изъ всѣхъ бесѣдъ самимъ руководителемъ написаны только 5 первыхъ; остальныя 16 бесѣдъ, затѣмъ описаніе 7 образцовыхъ уроковъ, данныхъ А. И. Гольденбергомъ, и 11 пробныхъ уроковъ, данныхъ курсистами, изложены Д. Л. Волковскимъ, который былъ самъ слушателемъ курсовъ. Къ книгѣ приложены двѣ статьи г. Волковскаго подъ заглавіемъ „Памяти А. И. Гольденберга“ и „Значеніе бесѣдъ“. Кромѣ протоколовъ и личныхъ впечатлѣній, авторъ пользовался литературой всего предмета.

Разсматриваемая книга имѣетъ солидныя достоинства и является важнымъ дополненіемъ къ трудамъ А. И. Гольденберга. Ясность и законченность изложенія, старательное отношеніе къ дѣлу, строго проведенный характеръ и стиль методовъ, наконецъ, основательное знакомство съ литературой предмета за послѣдніе 15—20 лѣтъ—должны дать книгѣ видное мѣсто среди сочиненій по методикѣ ариѳметики. Къ числу же недостатковъ книги относится слѣдующее.

Трактуемые способы и методы преподаванія г. Волковскій считаетъ законченными, совершенными и, главное, обязательными; для него указываемые имъ методы—святая святыхъ, къ которой нельзя притронуться, и которая не подлежитъ измѣненію, такъ что г. Волковскій является болѣе методичнымъ, чѣмъ сама методика—таково, по крайней мѣрѣ, было отъ этой книги впечатлѣніе, быть можетъ, и неправильное. Пользуясь случаемъ, я позволю себѣ высказать свой взглядъ на это дѣло.

На методику нельзя смотрѣть, какъ на сумму правилъ и методовъ, потому что число этихъ методовъ, хотя бы и одухотворенныхъ широкой педагогической идеей, неограниченно и постоянно мѣняется. Значительная часть души методики есть приспособляемость метода къ условіямъ, которымъ нѣтъ мѣры и числа. Методика есть предметъ, вѣчно мѣняющійся сообразно всякаго рода условіямъ, предметъ вѣчно юный и живой въ рукахъ отрѣшившихся отъ шаблона, скучный, сухой и безполезный въ рукахъ вложившихъ его въ узенькій футляръ обязательности и направленія. Подробная регламентація методовъ, педантичность пріемовъ, неуклонное ихъ выполненіе, невозможность внести въ преподаваніе жизнь и свѣжесть, получающаяся отъ этого сухость отталкиваютъ хорошихъ преподавателей отъ методики ариѳметики; въ этомъ же надо искать причину того, что многіе считаютъ методику ариѳметики предметомъ совершенно безполезнымъ для серьезнаго и умнаго учителя—явленія, съ которыми нѣтъ возможности не считаться. Вотъ почему нельзя не высказать пожеланія, чтобы авторы методикъ болѣе обращали вниманія на указанную сторону этого предмета. Въ заключеніе я могу выразить убѣжденіе въ томъ, что практика средней школы и народныхъ университетовъ должна многое выяснить въ разбираемомъ вопросѣ.

И. Александровъ (Москва, реальное училище Бажанова).

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 67 (5 сер.). Найти наибольшее значеніе суммы

$$s = \sin a_1 + \sin a_2 + \ldots + \sin a_n,$$

гдѣ всѣ a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ положительны, при условіи

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \pi.$$

Указать геометрическое значеніе найденнаго результата.

Я. Назаревскій (Харьковъ).

№ 68 (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^6 - 3x^5 + x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 1 = 0.$$

Н. С. (Одесса).

№ 69 (5 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$y^3 + z^3 = 7x^3,$$
$$y + z - 3x = 0,$$
$$z - x = y - 2.$$

(Заимств.)

№ 70 (5 сер.). Найти геометрическое мѣсто точекъ M, лежащихъ внутри угла A равнобедреннаго треугольника ABC и обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что разстояніе каждой изъ нихъ отъ основанія BC есть среднее пропорціональное между разстояніями отъ равныхъ сторонъ AB и AC.

(Заимств.).

№ 71 (5 сер.). Доказать, что въ системѣ счисленія, основаніе которой есть a, удвоенное число, предшествующее основанію, и квадратъ числа, предшествующаго основанію, записываются однѣми и тѣми же цифрами, но въ обратномъ порядкѣ.

(Заимств.).

№ 72 (5 сер.). Ареометръ *Brix*'а (сахариметръ), градуированный отъ 0° до 50°, будучи опущенъ въ сахарный сиропъ, показываетъ 33°. Сколько дестилированной воды надо прибавить къ 100 куб. сантиметрамъ этого сиропа, чтобы разжижить его до 20° *Brix*'а. Извѣстно, что тотъ же приборъ для сахарнаго раствора плотности 1,0404 даетъ показаніе въ 10°.

Л. Ямпольскій (Петербургъ).

№ 73 (5 сер.). Данъ правильный многоугольникъ P, вписанный въ кругъ радіуса R. Вершины его соединяются черезъ одну хордами, которыя, пересѣкаясь, образуютъ многоугольникъ P_1. Затѣмъ стороны многоугольника P продолжаютъ черезъ одну; тогда послѣдовательныя пересѣченія являются вершинами новаго многоугольника P_2. Доказать, что многоугольники P, P_1, P_2 подобны, и что сторона многоугольника P есть средняя пропорціональная между сторонами многоугольниковъ P_1 и P_2; вычислить сторону каждаго изъ многоугольниковъ P_1, P_2 по сторонѣ a_n многоугольника P и по радіусу R.

Н. Агрономовъ. (Вологда).

№ 74 (5 сер.). Дано основаніе $BC = a$ треугольника ABC и на BC положенія биссектрисы β угла A и точки D, выбранной такъ, что $\angle BAD = \frac{1}{4} \angle BAC$. Построить треугольникъ ABC.

Н. С. (Одесса).

№ 75 (5 сер.). Доказать, что число

$$2^{131} - 1$$

дѣлится на 263.

А. Брюхановъ (Иркутскъ).

№ 76 (5 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$x + y = a, \quad xz + yt = b, \quad xz^2 + yt^2 = c, \quad xz^3 + yt^3 = d.$$

(Заимств.).

№ 77 (5 сер.). Построить помощью циркуля и линейки треугольникъ ABC, зная положеніе вершины A, положенія точекъ P и P', въ которыхъ перпендикуляры, возстановленные къ сторонамъ AB и AC въ ихъ срединахъ, встрѣчаютъ соотвѣтственно перпендикуляры, возстановленные къ BC въ вершинахъ B и C, а также разстояніе центра O круга описаннаго отъ прямой PP'.

(Заимств.).

№ 78 (5 сер.). Нѣкоторое тѣло, взвѣшиваемое помощью мѣдныхъ гирь, вѣситъ въ воздухѣ 27 граммовъ. Сколько вѣситъ это тѣло въ пустотѣ? Плотности платины, мѣди и воздуха суть соотвѣтственно $d = 22$; $d_1 = 8{,}3$; $\delta = 0{,}0013$.

(Заимств.).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

І. І. Косоноговъ. Профессоръ университета Св. Владиміра. *Концентрическій учебникъ физики для среднихъ учебныхъ заведеній.* Съ рисунками и задачами въ текстѣ. Изданіе книжнаго магазина В. А. Просяниченко. Кіевъ. 1908. 579 стр. Цѣна 2 р. 25 коп.

В. А. Егуновъ и **А. И. Яновичъ**. *Курсъ тригонометріи.* І. Рѣшенія треугольниковъ. Книги для современной школы. Изд. Т-ва И. Д. Сытина. Москва. 1908. 124 стр. Ц. 50 коп.

С. Щербаковъ. *Курсъ космографіи.* Складъ изданія въ книжныхъ магазинахъ Н. П. Карбасникова. Изд. 7-ое, просмотрѣнное и улучшенное. Нижній-Новгородъ. 1908 224 стр. Ц. 1 р. 10 коп.

Н. С. Дрентельнъ. *Пособіе для практическихъ работъ по физикѣ въ средней школѣ.* Съ вопросами для упражненія и 63 рисунками. Изданіе Т-ва И. Д. Сытина. СПБ. 1908. 208 стр. Цѣна 90 коп.

Н. С. Дрентельнъ. *Простые физическіе опыты и простые приборы.* Съ 48 рисунками. Изданіе Т-ва И. Д. Сытина. СПБ. 1908. 52 стр. Ц. 40 коп.

Николай Морозовъ. *Основы качественнаго физико-математическаго анализа и новые физическіе факторы, обнаруживаемые имъ въ различныхъ явленіяхъ природы.* Изд Т-ва И. Д. Сытина. Москва. 1908. Ц. 2 р. 50 к.

П. И. Павлиновъ, преподаватель Рижскаго реальнаго училища Императора Петра І. *Основанія аналитической геометріи на плоскости.* Курсъ дополнительнаго класса реальныхъ училищъ. Рига. 1908. 79 стр. Ц. 75 коп.

А. Воиновъ. *Очеркъ теоретической ариѳметики.* Пособіе для учащихся старшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній. Павловскъ н/Д. 1908. 88 стр. Ц. 50 коп.

А. К. Монтелли. *Органы чувствъ и внѣшній міръ.* Публичная лекція. Изд. журнала „Физикъ-Любитель". Николаевъ. 1908. Ц. 15 коп.

W. Rouse. Ball. Fellow and tutor of trinity college, Cambridge. *Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes.* Première partie. Arithmétique, Algèbre et Théorie des Nombres. Deuxième édition française. A. Hermann, Éditeur. Paris. 1907. Prix 5 francs.

Gustave le Bon. D-r. *L'Evolution des forces.* Avec 42 figures. Bibliothèque de Philosophie scientifique. Ernest Flammarion, Editeur. Paris. 1907. Prix 3 fr. 50.

Handbuch für Lehrer höherer Schulen. B. G. Teubner. Leipzig und Berlin. 1906.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
ищется

Обложка
ищется