№ 479—480.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

И

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. ГЕРНЕТОМЪ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ф. КАГАНА.

XL-го Семестра № 11—12-й.

ОДЕССА.
Типографія Акц. Южно-Русскаго О-ва Печ. Дѣла. Пушкинская, 18.
1909.

XXII г. изд. **ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ** XXII г. изд.

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Выходитъ 24 раза въ годъ отдѣльными выпусками, не менѣе 24 стр. каждый, подъ редакціей привать-доцента В. Ф. КАГАНА.

Предыдущіе семестры были **рекомендованы**: Учен. Ком. Мин. Нар. Пр. для гимн. муж. и жен., реальн. уч., прогимн., город. уч., учит. инст. и семинарій; Главнымъ Управл. Воен. Учебн. Зав.—для воен.-уч. заведеній; №№ 1—48 **одобрены** Уч. Ком. при Св. Синодѣ для дух. семин. и училищъ.

ПРОГРАММА ЖУРНАЛА: Оригин. и переводн. статьи изъ области физики и элементарной математики. Статьи, посвященныя вопросамъ преподаванія математики и физики. Научн. хроника. Разн. извѣстія. Задачи для рѣшенія. Рѣшенія задачъ съ фамил. рѣшившихъ. Упражн. для учениковъ. Библіограф. отдѣлъ: обзоръ иностран. журналовъ; замѣтки и рецензіи о новыхъ книгахъ.

Статьи составляются въ такой мѣрѣ популярно, въ какой это возможно безъ ущерба для научн. стороны дѣла. Статьи, посвящ. педагог. вопросамъ, имѣютъ цѣлью обмѣнъ мнѣній преподавателей по различн. вопросамъ преподаванія элементарной мат. и физики. Въ отдѣлѣ „Научн. хроника“ помѣщ. рефераты о важнѣйшихъ научн. работахъ, отчеты о съѣздахъ, конгрессахъ и т. п. Въ отдѣлѣ „Разныя извѣстія“ помѣщаются свѣдѣнія о текущихъ событіяхъ въ жизни различн. учен. и учебн. заведеній. Задачи дѣлятся на двѣ категоріи: болѣе легкія, доступн. хорошему ученику, и болѣе трудныя, требующія большей подготовки. Отъ времени до времени предлагаются задачи и темы на премію.

УСЛОВІЯ ПОДПИСКИ:

Подписная цѣна съ пересылкой за годъ **6 руб.**, за полгода **3 руб.** Учителя и учительницы низшихъ училищъ и всѣ учащіеся **при непосредственныхъ сношеніяхъ съ конторой редакціи** платятъ за годъ **4 руб.**, за полугодіе **2 руб.** Допускается разсрочка подписной платы по соглашенію съ конторой редакціи. Книгопродавцамъ 5% уступки.

Отдѣльные номера текущаго семестра по 30 коп., прошлыхъ семестровъ по 25 коп.

Журналъ за прошлые годы по 2 р. 50 к., а учащимся и книгопродавцамъ по 2 р. за семестръ. Семестры I, II, XVI и XXIII распроданы.

Пробный номеръ высылается безплатно по первому требованію.

Адресъ для корреспонденціи: Одесса. Въ редакцію „Вѣстн. Опытной Физики“. **Городской адресъ:** Елисаветинская, 4.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

XL Сем. № 11—12.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 479—480.

Новѣйшіе успѣхи наблюдательной актинометріи*).

И. Я. Точидловскаго.

Какъ ни сложна и разнообразна жизнь нашей планеты, вся она обусловлена исключительно притокомъ солнечной радіаціи. По самому скромному, приблизительному, подсчету годовой приходъ этой энергіи оцѣнивается числомъ $1{,}68 \times 10^{24}$ гр.-калорій. Не вся энергія солнечнаго пучка усваивается землею: часть ея теряется, отражаясь въ междупланетное пространство, другая же, болѣе значительная, преобразовывается въ различныя формы жизни нашей планеты. Понятно поэтому, почему изученіе количества и распредѣленія солнечной энергіи на поверхности земли и въ ея атмосферѣ составляетъ основную задачу физики земного шара. Отдѣлъ физической географіи, занимающійся изученіемъ солнечной радіаціи, носитъ, какъ извѣстно, названіе актинометріи. Актинометрія основана около семидесяти лѣтъ тому назадъ трудами Гершеля, Форбеса, Пулье и др. Развивалась актинометрія чрезвычайно медленно и въ настоящее время не достигла еще того совершенства, какого достигли другіе, гораздо болѣе новые, отдѣлы метеорологіи. Причиною такого медленнаго развитія являлось

*) Извлечено изъ изданія: Послѣдняя страница журналовъ „Метеорологическое Обозрѣніе“ и „Лѣтописи магнитно-метеорологической обсерваторіи Императорскаго Новороссійскаго университета“, основанныхъ проф. А. Клоссовскимъ.

не отсутствіе интереса къ этой области знаній, а неопредѣленность цѣли, какую должна была преслѣдовать актинометрія, и недостатокъ удовлетворительныхъ методовъ изслѣдованія. Что касается перваго затрудненія, то оно было устранено классическимъ изслѣдованіемъ проф. О. Д. Хвольсона. Вотъ какъ опредѣлилъ въ 1892 г. проф. Хвольсонъ задачу актинометріи, въ самомъ общемъ видѣ: „требуется качественно и количественно прослѣдить всѣ составныя части потока энергіи, приходящаго отъ солнца, отъ момента вступленія его въ атмосферу, по всему пути черезъ послѣднюю до поверхности земли и обратно". Такого полнаго рѣшенія задача не получила до послѣдняго времени и остается надѣяться, что недавно учрежденная комиссія по изслѣдованію солнца, вообще, и солнечной радіаціи, въ частности, дастъ отвѣтъ на этотъ вопросъ, ждущій своего рѣшенія болѣе полустолѣтія. До настоящаго времени всѣ актинометрическія изслѣдованія посвящались спеціальнымъ вопросамъ: изслѣдовались либо отдѣльные виды энергіи (свѣтовая, тепловая, химическая), либо совокупность ихъ, при чемъ на качественныя измѣненія энергіи въ пучкѣ не обращалось вниманія: есть много работъ, посвященныхъ вопросу о притокѣ энергіи, но въ нихъ не касались опредѣленія количества энергіи, отраженной и разсѣянной и т. д.

Обращаясь къ методамъ изслѣдованія, необходимо замѣтить, что методы, примѣнявшіеся Соссюромъ, Форбесомъ, Пулье, не только нельзя назвать совершенными, но даже вполнѣ удовлетворительными. Методическая сторона актинометріи стала подвигаться впередъ въ послѣднее время, благодаря трудамъ Віоля, Крова, Лэнгле, Ангстрёма, Хвольсона. Имъ мы обязаны прекрасными методами изслѣдованія, они указали и построили приборы, удовлетворяющіе, повидимому, всѣмъ требованіямъ экспериментальной техники.

Къ рѣшенію актинометрической задачи можно подойти различными способами. Дѣйствительно, представимъ себѣ цилиндрическій или призматическій пучекъ лучей, сѣченіемъ въ 1 кв. см., идущій отъ солнца. Если на пути такого пучка помѣстить черное тѣло, которое могло бы поглотить всѣ виды падающей на него энергіи, то оно нагрѣется, и количество полученнаго тѣломъ тепла нетрудно вычислить, когда извѣстны его масса, теплоемкость, температура и т. д. Это количество тепла выражаетъ такъ называемое напряженіе солнечной радіаціи. Если дѣйствію инсоляціи этого же пучка подвергнуть химически сложное тѣло, то произойдетъ химическая реакція, и о напряженіи солнечной радіаціи можно судить по величинѣ солнечнаго эффекта. Падая на спай термоэлектрической пары, солнечная энергія обнаружится въ формѣ электровозбудительной силы термоэлектрическаго тока, и, слѣдовательно, напряженіе пучка солнечныхъ лучей можно выразить въ электрическихъ единицахъ. Далѣе, актино-электрическія явленія, открытыя въ концѣ восьмидесятыхъ годовъ прошлаго столѣтія Герцемъ и Гальваксомъ и изслѣдованныя проф. Столѣтовымъ, Эльстеромъ и Гейтелемъ, находятся въ несомнѣнной связи съ напряженіемъ радіаціи. Наконецъ, не подлежитъ сомнѣнію, что въ связи съ напряженіемъ солнечной радіаціи должно стоять свѣтовое напряженіе пучка. Любое изъ указанныхъ преобразованій солнечной энергіи можно положить въ основу опредѣленія напряженія солнечной радіаціи. Возможны, слѣдовательно, методы: тепловые, химическіе, термо- и актиноэлектрическіе и свѣтовые.

Наиболѣе разработанъ въ настоящее время методъ тепловой. Въ актинометрахъ этого типа тѣло или нагрѣвается, или охлаждается. Нетрудно вывести формулу, выражающую зависимость между количествомъ тепла, получаемымъ и теряемымъ тѣломъ.

Предположимъ, что въ одну минуту каждый квадратный сантиметръ тѣла, подверженнаго инсоляціи, получаетъ q гр.-калорій; слѣдовательно, если s квадр. сантиметровъ есть поверхность, на которую нормально падаютъ лучи, и dt—время инсоляціи, то количество тепла, полученнаго тѣломъ, очевидно, будетъ равно $qsdt$. Если, для простоты, температуру среды примемъ равною 0^0, а температуру инсолируемаго тѣла T^0, черезъ h обозначимъ количество тепла, теряемаго каждымъ квадратнымъ сантиметромъ поверхности тѣла въ одну минуту при разности температуръ тѣла и среды въ 1^0, и черезъ S кв. см.—величину охлаждающейся поверхности, то количество теплоты, потерянной во время dt, будетъ $hSTdt$. Очевидно, что, если $qsdt$ больше $hSTdt$, то тѣло нагрѣвается; когда $qsdt$ меньше $hSTdt$, то тѣло охлаждается; наконецъ, когда эти выраженія равны, то тѣло находится въ стаціонарномъ состояніи. Обозначая черезъ C теплоемкость инсолируемаго тѣла и dT нагрѣваніе его во время dt, получимъ для количества тепла, усвоеннаго тѣломъ за время dt, выраженіе:

$$CdT = qsdt - hSTdt. \qquad (1)$$

Въ моментъ наступленія стаціонарнаго состоянія

$$T = T_1 = \text{const. и } dT = 0,$$

а, слѣдовательно,

$$qsdt - hST_1dt = 0,$$

откуда

$$q = \frac{hST_1}{s},$$

или, полагая $hS = mC$, т. е. пропорціональнымъ теплоемкости тѣла, найдемъ:

$$q = \frac{mC}{s} T_1. \qquad (2)$$

Вставляя въ уравненіе (1) это значеніе q, будемъ имѣть:

$$CdT = mT_1Cdt - hSTdt,$$

или

$$CdT = mT_1Cdt - mCTdt,$$

откуда, послѣ сокращенія на C, получимъ:

$$dT = (T_1 - T)\,mdt.$$

Раздѣляя перемѣнныя и интегрируя, находимъ:

$$\frac{dT}{T_1 - T} = mdt,$$

$$-lg(T_1 - T) = mt + lgA. \qquad (3)$$

Предположимъ, что въ первоначальный моментъ, т. е. при $t = 0$, температура тѣла T равна T_n; тогда

$$-\lg(T_1 - T_n) = \lg A. \qquad (4)$$

Вычитая изъ уравненія (3) уравненіе (4), получимъ:

$$\lg\frac{T_1 - T_n}{T_1 - T} = mt,$$

или

$$\frac{T_1 - T_n}{T_1 - T} = e^{mt},$$

откуда

$$T = T_n e^{-mt} + T_1(1 - e^{-mt}). \qquad (5)$$

Формулы (2) и (5) легли въ основаніе двухъ тепловыхъ методовъ актинометріи: динамическаго и статическаго.

1) Можно тѣло подвергнуть дѣйствію солнечныхъ лучей въ теченіе извѣстнаго времени и опредѣлить количество поглощеннаго имъ тепла (динамическій методъ).

2) Можно подвергнуть дѣйствію солнечныхъ лучей шарики двухъ термометровъ, изъ которыхъ одинъ вычерненъ, а другой блестящій, выждать того момента, когда они достигнутъ стаціонарнаго состоянія, и напряженіе солнечнаго лучеиспусканія вычислить по разности показаній обоихъ термометровъ (статическій методъ).

Формула (2) позволяетъ опредѣлить количество q тепла, поглощеннаго тѣломъ, достигшимъ стаціонарнаго состоянія, зная разность между температурами тѣла и окружающей его среды.

Формула (5) позволяетъ опредѣлить разность между температурою тѣла и среды въ каждый данный моментъ, откуда, зная температуру среды, можно всегда опредѣлить температуру тѣла, подвергающагося инсоляціи.

Новѣйшія работы въ области наблюдательной актинометріи были направлены на изысканіе удовлетворительнаго метода опредѣленія солнечной радіаціи.

Изслѣдованіе актинометровъ О. Д. Хвольсономъ, появившееся въ 1892 г. подъ заглавіемъ „О современномъ состояніи актинометріи", показало, что ни одна изъ задачъ, поставленныхъ практическою актинометріей, не могла въ то время считаться рѣшенною. По мнѣнію О. Д. Хвольсона, изъ всѣхъ методовъ абсолютнаго актинометрическаго измѣренія лишь методъ Ангстрёма, соотвѣтственнымъ образомъ измѣненный, могъ бы дать удовлетворительные результаты.

Дѣйствительно, усовершенствованіемъ своего актинометра Ангстрёмъ оказалъ большую услугу наблюдательной актинометріи. Международная комиссія по изученію солнца остановилась на приборѣ Ангстрёма, который даетъ настолько сравнимые и удовлетворительные результаты, что въ настоящее время считается нормальнымъ.

Принципъ метода Ангстрёма, вкратцѣ, сводится къ слѣдующему.

Двѣ очень тонкія и совершенно одинаковыя металлическія полоски укрѣплены на разстояніи нѣсколькихъ миллиметровъ другъ отъ друга. Со стороны, обращенной къ измѣряемому источнику тепла, полоски вычернены. Къ заднимъ поверхностямъ полосокъ прикрѣплены спаи термоэлектрическихъ элементовъ, въ цѣпь которыхъ вставленъ гальванометръ. Если одна изъ пластинокъ подвергается инсоляціи, а другая находится въ тѣни, то въ цѣпи является токъ. Особымъ токомъ, силу котораго можно довольно точно регулировать, Ангстрёмъ нагрѣваетъ полоску, находящуюся въ тѣни, пока стрѣлка гальванометра не придетъ въ равновѣсіе; въ этомъ случаѣ, очевидно, обѣ полоски будутъ имѣть одинаковую температуру, и количество энергіи, падающей на инсолируемую пластинку, равно энергіи тока, проходящаго по затѣненной. Если обозначимъ черезъ: i—силу тока, r—сопротивленіе полоски, b—ширину ея, a—поглощательную способность поверхности полосокъ, q—количество лучистой энергіи, падающей на 1 кв. см. въ одну секунду, то qab будетъ количество граммо-калорій, полученныхъ инсолируемою пластинкою отъ источника лучеиспусканія. Выраженная въ граммо-калоріяхъ, энергія электрическаго тока $= \frac{ri^2}{4,18}$. Когда токъ въ цѣпи отсутствуетъ, то

$$baq = \frac{ri^2}{4,18},$$

откуда

$$q = \frac{ri^2}{4,18ba} \text{ гр.-калор. } ^{\text{сек.}}/_{\text{кв. см.}},$$

или

$$Q = \frac{ri^2 . 60}{4,18ba} \text{ гр.-калор. } ^{\text{мин.}}/_{\text{кв. см.}}$$

Ясно, что, такъ какъ температура полосокъ одинакова, то результатъ не требуетъ поправокъ отъ лучеиспусканія, проводимости и конвекціи. Такимъ образомъ, чтобы имѣть величину радіаціи въ абсолютныхъ единицахъ, необходимо разъ на всегда опредѣлить постоянныя r, b и a, во время же измѣреній придется наблюдать только i. Правда, сопротивленіе r будетъ измѣняться съ температурою, но соотвѣтственную поправку ввести нетрудно.

Практически эта идея Ангстрёмомъ осуществлена слѣдующимъ образомъ. Прежде всего очень тщательно изготовляются тѣ полоски, которыя потомъ будутъ подвержены дѣйствію инсоляціи; для этого на кусокъ зеркальнаго стекла помѣщаютъ платиновый листочекъ, толщиною 0,001 — 0,002 мм., сверху на него накладываютъ кусочекъ, нѣсколько большихъ размѣровъ, тонкой папиросной бумаги, смоченной жидкимъ растворомъ шеллака, помѣщаютъ на дѣлительную машину и разрѣзаютъ платиновую пластинку на полоски нужной ширины. Изъ этихъ полосокъ выбираютъ пару имѣющихъ почти одинаковое сопротивленіе и укрѣпляютъ на эбонитовой рамочкѣ. Къ сторонѣ полосокъ, гдѣ находится бумага, растворомъ шеллака же прикрѣпляются термоэлементы такъ, чтобы спаи находились приблизительно посрединѣ полосокъ.

Термоэлементъ имѣетъ U-образную форму и приготовленъ изъ никелевой либо константановой пластинки (толщ. 0,02 мм.), къ которой припаяна мѣдная полоска такихъ же, по возможности, размѣровъ. Чтобы сохранить полную симметрію въ отношеніи лучеиспусканія, заднія стороны покрываются чернымъ лакомъ. Переднія поверхности полосокъ гальванически покрываются тонкимъ слоемъ цинка, который потомъ обрабатывается $1^0/_0$ растворомъ хлористой платины, пока измѣненное, послѣ гальванопластическаго отложенія, сопротивленіе не возстановится. Послѣ этого, чтобы увеличить поглощательную способность прибора, полоски покрываютъ сажею. Прежде, чѣмъ вставлять ихъ въ приборъ, убѣждаются, что лучистую энергію обѣ поглощаютъ одинаково; для этого соединяютъ термоэлементъ съ чувствительнымъ гальванометромъ, обѣ пластинки подвергаютъ инсоляціи, и, если при этомъ стрѣлка гальванометра не отклонится, то это служитъ Ангстрёму критеріемъ того, что обѣ, по отношенію къ падающей на нихъ энергіи, ведутъ себя тождественно. Приготовленныя такимъ образомъ полоски вставляются въ металлическую трубку (рис. 1), снабженную тремя діафрагмами и устанавливаемую при помощи двухъ винтовъ и кремальеръ въ любыхъ азимутѣ и высотѣ. Температура внутри этой трубки измѣряется особымъ термометромъ. Посредствомъ двойной металлической ширмочки у передняго края трубки можно любую изъ пластинокъ затѣнить. Нижній конецъ трубки закрытъ эбонитовою пробкою B, изображенною на рис. 1 отдѣльно, на которой четыре зажима служатъ для проведенія тока къ полоскамъ и отъ элемента. На рис. 2 схематически изображено расположеніе прибора и его частей: P—актинометръ, G—гальванометръ, A—миллиамперметръ, R—реостатъ, E—элементъ.

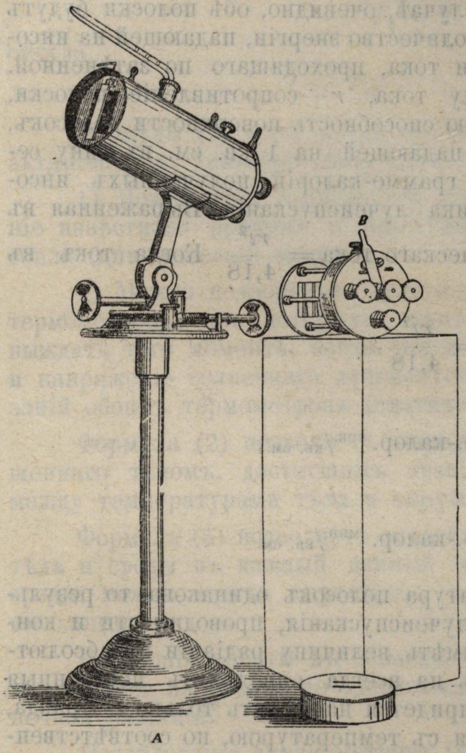

Рис. 1.

Что касается постоянныхъ прибора, то ширина полосокъ предопредѣлена при ихъ рѣзкѣ на дѣлительной машинѣ. Ширина ихъ для нашего прибора затѣмъ была провѣрена самимъ Ангстрёмомъ и оказалась равной 0,1970 см.; сопротивленіе полосокъ, опредѣленное электрометрически тѣмъ же Ангстремомъ и отнесенное къ 1 см. длины, оказалось = 0,220 ома.

При прохожденіи тока платиновая полоска нагрѣвается, и ея сопротивленіе поэтому увеличивается. Но величина этихъ измѣненій, по изслѣдованіямъ Ангстрёма, оказалась порядка возможныхъ ошибокъ. Наиболѣе затруднительно опредѣленіе поглощательной способности полосокъ. Ангстремъ предложилъ, для опредѣленія a, измѣрять разсѣяніе лучей различнаго рода. Для нашего прибора оказалось $a = 0{,}98$.

Для сужденія о существованіи тока отъ термоэлемента къ штативу прикрѣпленъ гальванометръ G (рис. 2), снабженный зеркальцемъ и трубою со шкалою, а величина компенсирующаго тока измѣряется милли-амперметромъ A.

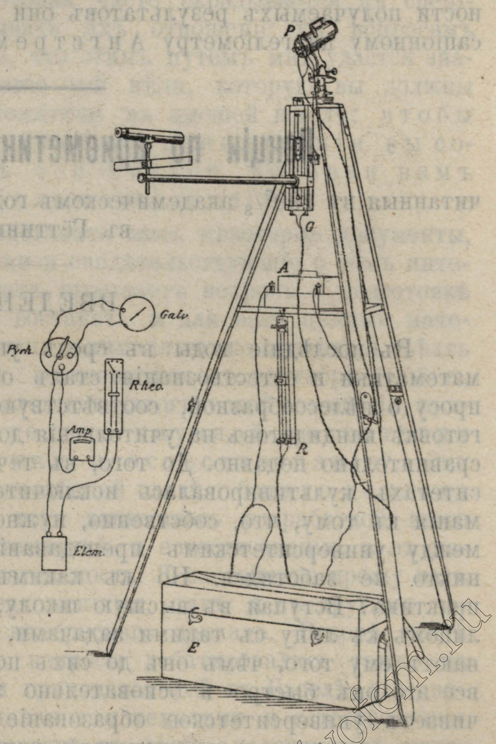

Рис. 2.

Для наблюденія необходимо прежде всего приборъ оріентировать такъ, чтобы лучи попадали на полоски нормально; для этого сдѣлана на верхней части трубы актинометра маленькая ширмочка съ дырочкою, чрезъ которую проектируется солнце на пересѣченіе черточекъ на такой же ширмочкѣ въ другомъ концѣ трубки. Когда приборъ оріентированъ, снимаютъ крышку, ставятъ двойную ширмочку такъ, чтобы инсолировались обѣ полоски, и убѣждаются въ неподвижности стрѣлки гальванометра. Послѣ этого контрольнаго наблюденія одну полоску закрываютъ ширмою и одновременно чрезъ нее же пускаютъ токъ, регулируя послѣдній реостатомъ R такъ, чтобы стрѣлка гальванометррра оставалась въ пскоѣ. Послѣ этого отмѣчаютъ силу тока, переворачиваютъ коммутаторъ и ширмочку и повторяютъ опредѣленіе. Этимъ способомъ въ теченіе нѣсколькихъ минутъ можно сдѣлать много наблюденій. Термометръ, вставленный въ трубку, даетъ температуру воздуха позади полосокъ.

Необходимо указать, какъ ввести поправки. Прежде всего ошибки могутъ происходить отъ неточности при опредѣленіи постоянныхъ, неправильности въ сужденіи о равенствѣ температуръ и въ отсчетѣ по амперметру:

$$\frac{dq}{q} = \frac{dr}{r} - \frac{db}{b} - \frac{da}{a} + \frac{2di}{i}.$$

Опытъ показалъ, что ошибка, обусловливаемая первыми тремя членами, не превосходитъ $1,3^0/_0$, а послѣднимъ—$0,6^0/_0$. Совокупная ошибка ни въ коемъ случаѣ не болѣе $2^0/_0$. Устройство этого прибора одно изъ наиболѣе важныхъ завоеваній въ области практической актинометріи.

Правда, въ послѣднее время построено было нѣсколько типовъ актинометровъ, основанныхъ на измѣненіи физическихъ свойствъ инсолируемыхъ тѣлъ (плавленіе, испареніе, гнутіе). Но пока, кажется, преждевременно думать, что эти приборы значительно будутъ способствовать успѣхамъ актинометріи, не говоря уже о томъ, что по точности получаемыхъ результатовъ они уступаютъ значительно компенсаціонному пиргеліометру Ангстрема.

Лекціи по ариѳметикѣ для учителей,

читанныя въ $190^7/_8$ академическомъ году профессоромъ Ф. Клейномъ въ Гёттингенѣ.

ВВЕДЕНІЕ.

Въ послѣдніе годы въ средѣ университетскихъ преподавателей математики и естествознанія сталъ обнаруживаться интересъ къ вопросу о цѣлесообразной, соотвѣтствующей всѣмъ потребностямъ подготовкѣ кандидатовъ на учительскія должности. Это явленіе замѣчается сравнительно недавно. До того, въ теченіе долгаго періода, въ университетахъ культивировалась исключительно высокая наука безъ вниманія къ тому, что, собственно, нужно школѣ; объ установленіи связи между университетскимъ преподаваніемъ и школьной математикой никто не заботился. Но къ какимъ послѣдствіямъ привела такая практика? Вступая въ высшую школу, молодой студентъ оказывается лицомъ къ лицу съ такими задачами, которыя совершенно не напоминаютъ ему того, чѣмъ онъ до сихъ поръ занимался; естественно, что все это онъ быстро и основательно забываетъ. Когда же онъ заканчиваетъ университетское образованіе и становится преподавателемъ, то онъ вынужденъ въ качествѣ учителя преподавать традиціонную математику; не будучи въ состояніи самостоятельно связать эту задачу съ тѣмъ, что онъ слышалъ въ высшей школѣ, онъ быстро усваиваетъ старую традицію; университетское же образованіе остается у него только въ видѣ болѣе или менѣе пріятнаго воспоминанія, не оказывающаго никакого вліянія на его преподаваніе.

Въ настоящее время возникло стремленіе уничтожить этотъ двойной разрывъ, который несомнѣнно былъ одинаково вреденъ какъ для средней, такъ и для высшей школы. Именно, мы стараемся, съ одной стороны, провести черезъ весь матеріалъ школьнаго обученія тѣ идеи, которыя отвѣчаютъ современному развитію науки и общей культуры (къ этому мы еще неоднократно будемъ возвращаться); съ другой стороны, мы стараемся въ университетскомъ преподаваніи принять во вниманіе нужды учителей. Въ этомъ именно дѣлѣ очень полезнымъ средствомъ представляются мнѣ научные обзоры, къ одному изъ которыхъ мы нынче приступаемъ. Я имѣю, слѣдовательно, предъ собой не начинающихъ; напротивъ, я считаю, что всѣмъ вамъ общій матеріалъ важнѣйшихъ математическихъ дисциплинъ хорошо знакомъ. Мнѣ придется неоднократно говорить о задачахъ алгебры, теоріи чиселъ, теоріи функцій, не входя въ детали. Вы должны быть со всѣми этими вещами до нѣкоторой степени знакомы. Моя задача будетъ постоянно заключаться въ томъ, чтобы выдвигать взаимную связь между вопросами отдѣльныхъ дисциплинъ, которая часто скрадывается въ спеціальныхъ курсахъ,—чтобы указывать ихъ отношеніе къ вопросамъ школьной математики. Я полагаю, что этимъ путемъ мнѣ удастся значительно облегчить вамъ достиженіе той цѣли, которую вы должны имѣть въ виду при изученіи математики въ высшей школѣ: чтобы позже въ вашемъ собственномъ преподаваніи вы сохранили живую связь съ той наукой, которая вамъ здѣсь преподносится въ большомъ обиліи.

Позвольте прежде всего представить вамъ нѣкоторые документы, относящіеся къ послѣднему времени и свидѣтельствующіе о томъ интересѣ, который въ широкихъ кругахъ вызываетъ вопросъ о подготовкѣ учителей; эти документы должны составить и для васъ цѣнный матеріалъ. Въ частности эти вопросы очень занимали также послѣдній съѣздъ естествоиспытателей въ Дрезденѣ, состоявшійся въ сентябрѣ 1907 г., на которомъ мы, согласно представленію педагогической коммиссіи, приняли „предложенія относительно научной подготовки преподавателей математики и естествознанія". Эти предложенія вы можете найти въ послѣдней главѣ общаго доклада коммиссіи*), которая съ 1904 года занималась разработкой всего комплекса вопросовъ обученія математикѣ и естествознанію, а въ настоящее время закончила свою дѣятельность. Я настойчиво прошу васъ ознакомиться какъ съ этими предложеніями, такъ и съ другими частями этого въ высшей степени интереснаго доклада. Вскорѣ послѣ дрезденскаго съѣзда аналогичные вопросы дебатировались также на съѣздѣ германскихъ филологовъ и преподавателей въ Базелѣ, гдѣ движеніе въ пользу реформы преподаванія математики и естествознанія представляло собой только одно звено въ цѣпи аналогичныхъ стремленій, параллельно возникающихъ также въ филологическихъ кругахъ. Одновременно съ моимъ рефератомъ о нашихъ реформаторскихъ стремленіяхъ въ области математики П. Вендландъ (P. Wendland) докладывалъ о вопросахъ, относящихся къ классическимъ наукамъ; Н. Брандль (N. Brandl)—о новыхъ языкахъ, А. Гарнакъ (A. Harnack)—

*) Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte, hrsg. von A. Gutzmer (Leipzig und Berlin 1908).

объ исторіи и религіи*). Всѣ четыре доклада соединены въ одной брошюрѣ, на которую я также настойчиво обращаю ваше вниманіе. Я считаю чрезвычайно важнымъ прокладываемый этимъ путь къ совмѣстному культивированію нашихъ наукъ, такъ какъ связь и взаимное пониманіе въ высшей степени желательны между тѣми группами, которыя обыкновенно чужды, а нерѣдко даже враждебны другъ другу. Мы всегда должны стремиться поддерживать эти добрыя товарищескія отношенія, хотя бы иногда, когда мы находимся въ своемъ кругу, у насъ и проскальзывало острое словцо по отношенію къ филологамъ, что, конечно, не разъ происходитъ и въ ихъ средѣ. Будьте выше этой обособленности спеціалистовъ и помните, что вамъ именно и придется въ школѣ работать совмѣстно съ филологами на общую пользу, а для этого совершенно необходимы взаимное уваженіе и взаимное пониманіе.

Въ качествѣ введенія въ настоящій курсъ я хочу сдѣлать вамъ нѣкоторыя болѣе спеціальныя указанія, именно, я хотѣлъ обратить ваше вниманіе на нѣкоторыя полезныя для васъ сочиненія. Три года тому назадъ я читалъ лекціи, преслѣдовавшія такую же цѣль, какъ и настоящій курсъ. Мой тогдашній ассистентъ г. Ш и м м а к ъ (R. Schimmack) разработалъ эти лекціи, такъ что первая часть ихъ недавно появилась въ печати**). Здѣсь идетъ рѣчь о различнаго рода школахъ, включая и высшія школы, объ общемъ ходѣ школьнаго преподаванія въ нихъ, о взаимной связи между этими школами. Ниже, при случаѣ, мнѣ придется и здѣсь указывать на изложенные въ этомъ сочиненіи вопросы, не повторяя ихъ; но тѣмъ подробнѣе я буду здѣсь, какъ бы въ видѣ продолженія того же изложенія, останавливаться на томъ, что относится собственно къ математикѣ, и что имѣетъ то или иное отношеніе къ преподаванію. Касаясь при этомъ часто преподавательской практики, я основываюсь при этомъ не на однихъ только расплывчатыхъ соображеніяхъ о томъ, какъ это дѣло могло бы обстоять, или же на собственныхъ старыхъ школьныхъ воспоминаніяхъ; напротивъ, я нахожусь въ постоянномъ общеніи съ г. Ш и м м а к о м ъ, который въ настоящее время преподаетъ здѣсь въ гимназіи и который постоянно освѣдомляетъ меня о настоящемъ положеніи преподаванія, несомнѣнно ушедшемъ далеко впередъ по сравненію съ прошлымъ. Въ настоящемъ семестрѣ я намѣренъ изложить „три великія А“: ариѳметику, алгебру, и анализъ; продолженіе же этого курса въ слѣдующемъ семестрѣ будетъ посвящено геометріи. Замѣчу кстати, что въ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ эти три отдѣла нерѣдко именуются общимъ названіемъ ариѳметики; да и вообще мы не разъ встрѣтимся съ уклоненіемъ терминологіи, принятой въ школѣ отъ той, которая царитъ въ высшемъ учебномъ заведеніи. Только живое общеніе, какъ вы видите на этомъ незначительномъ простомъ примѣрѣ, можетъ привести ко взаимному пониманію.

---

*) „Universität und Schule“. Vorträge ..., gehalten von F. K l e i n, P. W e n d l a n d, Al. B r a n d l, A. H a r n a c k (Leipzig, 1907).

**) F. K l e i n. „Vorträge über den mathematischen Unterricht an höheren Schulen“. Bearbeitet von R. S c h i m m a c k. Teil 1: Von der Organisation des mathematischen Unterrichts. Leipzig 1907. Ниже это сочиненіе мы будемъ цитировать подъ названіемъ „K l e i n - S c h i m m a c k“.

Во вторую очередь, обращу ваше вниманіе на обширное сочиненіе, которое въ общемъ преслѣдуетъ тѣ же цѣли, которыя имѣю и я въ виду, — это „Энциклопедія элементарной математики“ Вебера и Вельштейна*).

Въ настоящемъ семестрѣ намъ придется имѣть дѣло съ I-мъ томомъ — съ „Энциклопедіей элементарной алгебры“ Вебера. Укажу сейчасъ же на нѣкоторое различие между этимъ сочиненіемъ и планомъ настоящаго курса. У Вебера и Вельштейна вся система элементарной математики систематически и логически развивается на зрѣломъ математическомъ языкѣ, доступномъ студенту, далеко подвинувшемуся въ своихъ занятіяхъ. О томъ, въ какомъ собственно видѣ этотъ матеріалъ долженъ фигурировать въ школѣ, объ этомъ вовсе нѣтъ рѣчи. Между тѣмъ изложеніе въ школѣ, выражаясь образно, должно быть психологическое, а не систематическое. Учитель долженъ быть, такъ сказать, дипломатомъ; онъ долженъ учитывать и душевныя движенія юноши, онъ долженъ умѣть возбудить его интересъ, а это будетъ ему удаваться только тогда, если онъ будетъ излагать вещи въ наглядной, доступной формѣ. Лишь въ старшихъ классахъ возможно также и болѣе абстрактное изложеніе. Приведемъ примѣръ. Ребенокъ никогда не пойметъ, если мы будемъ вводить числа аксіоматически, какъ объекты, не имѣющіе никакого содержанія, надъ которыми мы оперируемъ по формальнымъ правиламъ, установленнымъ нашими собственными соглашеніями. Напротивъ, онъ соединяетъ съ числами реальное представленіе; они являются для него ничѣмъ инымъ, какъ количествами орѣховъ, яблокъ и тому подобныхъ хорошихъ вещей; только въ этой формѣ эти вещи можно передавать въ начальномъ обученіи, только въ этой формѣ ихъ и будутъ въ дѣйствительности передавать дѣтямъ. Но и вообще, во всемъ ходѣ обученія математикѣ, даже въ высшей школѣ, необходимо всегда указывать связь между этой наукой и тѣми интересами, которые занимаютъ учащагося въ повседневной жизни. Это именно имѣютъ въ виду новыя тенденціи, стремящіяся поднять прикладную математику въ университетѣ. Впрочемъ, въ школѣ этимъ требованіемъ никогда не пренебрегали въ такой мѣрѣ, какъ въ университетѣ. Эти психологическіе моменты я и намѣренъ особенно подчеркнуть въ своихъ лекціяхъ. Другое различіе между книгой Вебера и Вельштейна и моей точкой зрѣнія заключается въ разграниченіи матеріала школьной математики. Въ этомъ отношеніи Веберъ и Вельштейнъ настроены „консервативно“, я же — „прогрессивно“. Эти вопросы подробно разобраны въ книгѣ Клейнъ-Шиммакъ. Мы, которыхъ называютъ теперь реформаторами, стремимся положить въ основу преподаванія понятіе о функціи, ибо это есть то понятіе, которое въ теченіе послѣднихъ 200 лѣтъ заняло центральное мѣсто всюду, гдѣ только мы встрѣчаемъ математическую мысль. Это понятіе мы желаемъ выработать при преподаваніи столь рано, какъ это только возможно, постоянно примѣняя графическую методу изображенія каждаго закона системой

*) „Encyklopädie der Elementarmathematik“ von H. Weber und J. Wellstein; томъ I-й вышелъ въ русскомъ переводѣ подъ редакціей прив.-доц. В. Ф. Кагана, изд. „Mathesis“; второй томъ печатается.

$x-y$'ковъ, которая теперь употребляется при всякомъ практическомъ примѣненіи математики. Чтобы сдѣлать возможнымъ это нововведеніе, мы готовы отказаться отъ многихъ частей матеріала, входящаго въ составъ дѣйствующихъ программъ; эти вопросы, несомнѣнно, интересны сами по себѣ; но по общему своему значенію и по связи со всей современной культурой они представляются менѣе существенными. Сильное развитіе пространственныхъ представленій должно при этомъ играть первенствующую роль. Обученіе въ школѣ должно проникнуть вверхъ, въ область началъ исчисленія безконечно малыхъ въ такой мѣрѣ, чтобы молодой человѣкъ выходилъ уже изъ средней школы во всеоружіи того математическаго матеріала, безъ котораго будущій естествоиспытатель или страховой дѣятель совершенно не въ состояніи обойтись. Въ противоположность этимъ сравнительно современнымъ идеямъ Веберъ и Вельштейнъ по существу держатся стараго разграниченія матеріала. Въ настоящихъ лекціяхъ я имѣю, конечно, цѣлью пропагандировать тѣ идеи, которыхъ я придерживаюсь.

Наконецъ, въ третью очередь, я хочу указать вамъ еще одну весьма интересную книгу, принадлежащую М. Симону, работающему какъ и Веберъ и Вельштейнъ, въ Страсбургѣ, именно,—„Дидактика и методика счета и математики"; новое изданіе этой книги только-что вышло въ свѣтъ*). Во многихъ вопросахъ Симонъ соглашается съ нашими тенденціями, но во многомъ онъ съ нами рѣшительно расходится. Такъ какъ это ясно выраженная субъективная личность съ горячимъ темпераментомъ, то именно этимъ разногласіямъ онъ нерѣдко даетъ острое выраженіе. Приведемъ примѣръ. Предложенія педагогической коммиссіи съѣзда естествоиспытателей настаиваютъ на одномъ часѣ геометрической пропедевтики уже во второмъ классѣ, между тѣмъ какъ въ настоящее время геометрія начинается только въ третьемъ классѣ. Вопросъ о томъ, какая собственно система предпочтительнѣе, дебатируется очень давно, да и въ самой школьной практикѣ та и другая система уже не разъ смѣняли другъ друга. Мы имѣемъ предъ собой, такимъ образомъ, вопросъ, о которомъ, во всякомъ случаѣ, можно спорить. Между тѣмъ Симонъ категорически заявляетъ, что позиція, которую коммиссія заняла въ этомъ вопросѣ, „хуже, чѣмъ преступленіе", и, главное, этого своего утвержденія онъ не обосновываетъ ни единымъ словомъ. Такихъ мѣстъ можно было бы указать еще много. Въ качествѣ предшественницы названнаго сочиненія укажу еще книгу того же автора—„Методика элементарной ариѳметики въ связи съ алгебраическимъ анализомъ**).

Послѣ этого короткаго введенія обратимся къ главному предмету нашихъ занятій.

---

*) Max Simon. „Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik". 2 Auflage. München 1908. Sonderausgabe aus Baumeisters Handbuch der Erziehungs und Unterrichtslehre für höhere Schulen.

**) M. Simon. „Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis". Leipzig 1906.

Твердые растворы.

Проф. Г. Бруни.

(*Окончанiе* *).

Перейдемъ теперь къ явленiямъ замерзанiя. Эти явленiя были исходнымъ пунктомъ теорiи Ван'тъ Гоффа и вмѣстѣ съ тѣмъ самымъ блестящимъ ея примѣненiемъ. Какъ Ван'тъ Гоффъ къ ней пришелъ, исходя изъ аномальныхъ явленiй при замерзанiи нѣкоторыхъ растворовъ, было уже выяснено въ началѣ статьи.

Изслѣдованiя въ этой области продолжались въ большомъ масштабѣ преимущественно въ Болоньѣ, гдѣ ими занимались, по предложенiю профессора Чамичана, его ученики и, главнымъ образомъ, Гарелли (Garelli) и я. Раньше всего подтвердилось, что вещества, очень сходныя между собой, даютъ очень незначительное пониженiе точки замерзанiя, если одно изъ нихъ употреблять, какъ растворитель, а другое, какъ растворенное вещество. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ,—напримѣръ, для бензола и фенола, для бензойной и салициловой кислоты,—Гарелли удалось непосредственно доказать выдѣленiе твердыхъ растворовъ, пользуясь методомъ, указаннымъ Ванъ Бюлертомъ (von Bijlert).

Въ растворителѣ для этого растворяютъ, кромѣ вещества, которое по предположенiю даетъ твердый растворъ, еще другое вещество, несходное съ нимъ по составу и о которомъ извѣстно, что оно даетъ нормальное пониженiе точки замерзанiя; затѣмъ заставляютъ кристаллизоваться небольшую часть смѣси, и кристаллы отдѣляютъ и изслѣдуютъ. По количеству найденнаго въ нихъ нормальнаго вещества можно судить о количествѣ поглощенной кристаллизацiонной воды и вычислить такимъ образомъ истинный составъ выдѣленныхъ кристалловъ. Затѣмъ уже легко вычислить, заключается ли въ нихъ интересующее насъ вещество, избѣгнувъ ошибки, которую мы сдѣлали бы, если бы не приняли во вниманiе жидкости, заключающейся въ кристаллахъ.

Въ это мънаправленiи можно пойти еще дальше и подвергнуть повѣркѣ численныя данныя, полученныя теоретическимъ путемъ. Это сдѣлали Бекманъ (Beckmann) и я. Изложить здѣсь тѣ выводы, на которыхъ основывается эта повѣрка, было бы трудно. Я скажу только, что по уравненiю, найденному Бекманомъ, степень аномалiи пропорцiональна такъ называемому коэффицiенту распредѣленiя, т. е. отношенiю между концентрацiями въ твердомъ и жидкомъ растворахъ. Съ одной стороны, можно найти это отношенiе непосредственно,—вышеизложеннымъ способомъ, съ другой стороны, его можно вычислить изъ аномалiи въ пониженiи точки замерзанiя; затѣмъ остается только сравнить результаты.

Бекманъ произвелъ такое изслѣдованiе надъ растворами iода и тiофена въ бензолѣ, а я—надъ растворомъ пиперидина въ бензолѣ и iодоформа въ бромоформѣ. Числовыя данныя, полученныя тѣмъ и другимъ путемъ, согласуются между собою очень хорошо, если принять во

*) См. „Вѣстникъ", № 478.

вниманіе степень точности тѣхъ аналитическихъ методовъ, которые пришлось примѣнять.

Изъ этого изслѣдованія можно вывести еще другое слѣдствіе, тоже имѣющее большое значеніе и касающееся молекулярнаго вѣса веществъ, находящихся въ твердомъ состояніи и въ кристаллическомъ видѣ. При этомъ приходится сослаться на одинъ весьма общій законъ, принципъ распредѣленія, заключающійся въ слѣдующемъ. Пусть два тѣла, представляющія одно и то же вещество въ различныхъ состояніяхъ, находятся въ соприкосновеніи; тогда коэффиціентъ распредѣленія между этими двумя состояніями остается постояннымъ, если только величина молекулы та же самая въ обоихъ случаяхъ. Если въ одномъ изъ этихъ состояній (или фазъ) увеличивается концентрація, то она должна увеличиться пропорціонально и въ другомъ, если только выполнено вышеуказанное условіе.

Обратно, изъ того обстоятельства, что коэффиціентъ распредѣленія остается постояннымъ, можно вывести заключеніе, что молекулы одинаковы въ обоихъ состояніяхъ. Если въ одномъ состояніи молекулярный вѣсъ вдвое или втрое больше, чѣмъ въ другомъ, то остается постояннымъ другое отношеніе, въ которое вмѣсто соотвѣтствующей концентраціи входитъ квадратъ или кубъ ея.

На самомъ дѣлѣ оказывается, что въ большинствѣ случаевъ коэффиціентъ распредѣленія между твердыми и соотвѣтствующими жидкими растворами остается постояннымъ. Отсюда слѣдуетъ, что растворенное вещество имѣетъ одинаковый молекулярный вѣсъ въ обоихъ состояніяхъ. Почти во всѣхъ случаяхъ другими методами найдено, что въ жидкомъ состояніи мы имѣемъ простыя молекулы, — значитъ, таковы же онѣ и въ твердомъ состояніи.

Такимъ образомъ опровергнуто мнѣніе, которое раньше было общепринятымъ среди кристаллографовъ. Они думали, что молекулы кристалловъ и вообще твердыхъ тѣлъ имѣютъ гораздо болѣе сложное строеніе, чѣмъ тѣ молекулы, изъ которыхъ состоятъ тѣла, находящіяся въ другихъ аггрегатныхъ состояніяхъ.

Противъ этого мнѣнія говоритъ еще одинъ фактъ, о которомъ рѣчь шла уже раньше. Выше было указано, что твердый растворъ нитрозобензойной кислоты въ нитробензалдегидѣ имѣетъ голубой цвѣтъ; я показалъ также, что то же самое имѣетъ мѣсто для твердыхъ растворовъ всѣхъ нитрозосоединеній въ соотвѣтствующихъ нитропроизводныхъ. Многочисленные опыты доказываютъ между тѣмъ, что нитрозосоединенія имѣютъ голубой цвѣтъ только въ томъ случаѣ, когда они находятся въ мономолекулярномъ состояніи.

Перейдемъ теперь къ другому важному пункту. Образованіе жидкихъ растворовъ обыкновенно сопровождается поглощеніемъ или выдѣленіемъ тепла. Согласно извѣстному общему положенію, растворимость возрастаетъ или уменьшается съ повышеніемъ температуры, въ зависимости отъ того, имѣемъ ли мы дѣло съ первымъ или со вторымъ изъ вышеуказанныхъ случаевъ; измѣненіе растворимости для нѣкотораго опредѣленнаго измѣненія температуры тѣмъ больше, чѣмъ больше количество выдѣляемаго или поглощаемаго тепла.

Образованіе твердыхъ растворовъ также сопровождается нѣкоторымъ тепловымъ эффектомъ—положительнымъ или отрицательнымъ. Въ первый разъ это доказалъ экспериментально Зоммерфельдъ (Sommerfeld) слѣдующимъ образомъ. Онъ взялъ, съ одной стороны, механическую смѣсь двухъ изоморфныхъ солей, съ другой—такое же вѣсовое количество смѣшанныхъ кристалловъ того же состава, растворилъ то и другое въ большомъ количествѣ воды и опредѣлилъ въ обоихъ случаяхъ теплоту растворенія. Онъ нашелъ значительную разницу, которая служитъ мѣрой количества тепла, поглощеннаго при образованіи смѣшанныхъ кристалловъ; другими словами, онъ нашелъ теплоту растворенія для твердаго раствора. Результаты этихъ опытовъ недавно подтверждены другими изслѣдователями,—главнымъ образомъ, Курнаковымъ.

И здѣсь при образованіи твердыхъ растворовъ бываютъ случаи какъ выдѣленія, такъ и поглощенія тепла,—послѣдніе, впрочемъ, встрѣчаются чаще,—точно такъ же, какъ и для жидкихъ. Отсюда слѣдуетъ, что обыкновенно растворимость въ кристаллическомъ состояніи увеличивается съ повышеніемъ температуры.

Это выраженіе „растворимость" требуетъ для твердыхъ тѣлъ нѣкотораго разъясненія, которое представитъ намъ случай познакомиться еще съ одной аналогіей между твердыми и жидкими растворами. Существуетъ масса жидкостей, которыя смѣшиваются между собой во всякомъ отношеніи (какъ, напримѣръ, вода и алкоголь); но существуютъ, какъ извѣстно, и другія, которыя смѣшиваются только въ отношеніяхъ, заключающихся между извѣстными предѣлами (какъ, напримѣръ, вода и эфиръ). Если смѣшать равныя количества воды и эфира, то образуются два слоя жидкости; нижній состоитъ изъ воды, въ которой растворено около 10% эфира, верхній—изъ эфира съ приблизительно 2% воды. Эти два слоя представляютъ изъ себя соотвѣтственно насыщенные растворы эфира въ водѣ и воды въ эфирѣ.

Аналогичныя явленія наблюдаются и въ твердыхъ растворахъ. Вещества изоморфныя, въ тѣсномъ смыслѣ этого слова,—какъ, напримѣръ, разные квасцы, входятъ въ смѣшанные кристаллы во всякихъ отношеніяхъ, для другихъ же существуютъ ограниченія. Знакомый всѣмъ примѣръ представляютъ сѣрнокислыя соли желѣза и магнія. Изъ растворовъ, въ которые первая соль входитъ въ большемъ количествѣ, чѣмъ вторая, выдѣляются кристаллы, содержащіе до 46% магніевой соли; если же растворъ былъ болѣе богатъ этой послѣдней, то содержаніе соли желѣза въ получающихся кристаллахъ доходитъ до 23%. Если обѣ соли растворены въ равныхъ количествахъ, то выдѣляются кристаллы обоихъ этихъ предѣльныхъ видовъ. Ихъ можно съ полнымъ правомъ называть насыщенными растворами сѣрнокислаго магнія въ сѣрнокисломъ желѣзѣ и наоборотъ.

Мы уже раньше говорили, что растворимость въ твердомъ состояніи увеличивается съ повышеніемъ температуры. Особенно интересны нѣкоторые опыты Курнакова, которые онъ производилъ надъ хлористымъ, бромистымъ и іодистымъ каліемъ и натріемъ. Изъ жидкихъ сплавовъ этихъ веществъ выдѣляются смѣшанные кристаллы;

но, если ихъ оставить при обыкновенной температурѣ, то они скоро превращаются въ механическую смѣсь изъ входящихъ въ нихъ веществъ.

Аналогичное явленіе наблюдается для многихъ металлическихъ сплавовъ. Особенно важенъ въ практическомъ отношеніи сплавъ углерода съ желѣзомъ. Изъ расплавленнаго чугуна выдѣляется твердый растворъ углерода въ желѣзѣ, извѣстный подъ именемъ мартензита; въ моментъ выдѣленія онъ содержитъ максимальное количество—2°/$_0$ углерода. При пониженіи температуры мартензитъ разлагается, теряя углеродъ, который отлагается въ видѣ графита. Когда температура падаетъ съ 1180° до 1000°, предѣльная концентрація уменьшается съ 2°/$_0$ до 1,8°/$_0$.

Тамманъ (Tammann) произвелъ въ послѣднее время огромное количество опытовъ надъ отвердѣваніемъ сплавовъ, и онъ далъ правило, находящееся въ полномъ согласіи съ тѣмъ, что сказано выше. Правило это заключается въ томъ, что металлъ съ болѣе высокой точкой плавленія растворяетъ другой металлъ въ большемъ количествѣ, чѣмъ наоборотъ. На 49 сплавовъ, изъ которыхъ смѣшанные кристаллы выдѣляются не во всѣхъ отношеніяхъ, 44 подтверждаютъ правило.

Большой интересъ представляютъ явленія электропроводности въ нѣкоторыхъ твердыхъ тѣлахъ. Объ одномъ изъ нихъ мы уже говорили въ началѣ статьи. Что проводимость многихъ твердыхъ тѣлъ,—главнымъ образомъ, твердыхъ растворовъ,—происхожденія электролитическаго, слѣдуетъ уже изъ того, что она возрастаетъ съ повышеніемъ температуры, точно такъ же, какъ проводимость растворовъ солей; проводимость металловъ подчиняется противоположному закону.

Для стекла это было уже доказано Гельмгольцемъ и Варбургомъ (Warburg); въ болѣе позднее время Нернстъ (Nernst) получилъ аналогичные результаты для своихъ „Glühstifte", палочекъ, сдѣланныхъ изъ смѣси окисей нѣкоторыхъ металловъ (магнія, цирконія и др.). Эти палочки употребляются въ его системѣ освѣщенія; онѣ накаливаются при прохожденіи черезъ нихъ электрическаго тока и испускаютъ яркій свѣтъ. Наконецъ, Габеръ изслѣдовалъ съ этой точки зрѣнія фарфоръ.

Наблюденія показываютъ, что всѣ эти тѣла проводятъ электричество, какъ электролиты, т. е. ихъ составъ мѣняется при прохожденіи черезъ нихъ тока. Особенно замѣтно это на палочкахъ Нернста; на одномъ концѣ ихъ все время выдѣляется магній. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ электролитическій характеръ явленія выраженъ такъ ясно, что удается, въ предѣлахъ ошибокъ наблюденія, провѣрить законы Фарадея, состоящіе въ томъ, что химическое дѣйствіе пропорціонально силѣ тока, и что равныя количества электричества выдѣляютъ разныя вещества въ количествахъ, пропорціональныхъ ихъ химическимъ эквивалентамъ. Отношеніе между массой и количествомъ электричества здѣсь численно то же самое, что и для жидкихъ растворовъ.

Эти процессы очень важны въ томъ отношеніи, что доказываютъ существованіе диффузіи въ твердыхъ тѣлахъ. Больше того, здѣсь, какъ и для жидкихъ растворовъ, можно вычислить скорости миграцiи различныхъ iоновъ. Для стекла и фарфора найдено, что въ перенесенiи электричества играютъ главную роль катiоны—щелочные металлы.

Теперь мы должны были перейти къ высшей степени важному вопросу о связи между химическимъ строенiемъ разныхъ веществъ, формой ихъ кристалловъ и ихъ способностью образовывать другъ съ другомъ твердые растворы. Сколько-нибудь основательное обсужденiе этого вопроса завело бы насъ слишкомъ далеко, тѣмъ болѣе, что пришлось бы вмѣстѣ съ тѣмъ обсуждать вызвавшiй столько споровъ вопросъ объ изоморфизмѣ; поэтому мы только вкратцѣ перечислимъ полученные результаты. Вспомнимъ только, что о настоящемъ изоморфизмѣ условились говорить лишь въ томъ случаѣ, когда, кромѣ сходства формъ кристалловъ, вещества способны образовывать смѣшанные кристаллы.

Въ этой области сдѣлано очень много изслѣдованiй. Сначала они касались, главнымъ образомъ, неорганическихъ веществъ (солей) и производились кристаллографическимъ методомъ. Брали кристаллы разныхъ веществъ и путемъ сравненiя устанавливали, изоморфны ли они или нѣтъ.

Позже сюда присоединились,—особенно благодаря Гарелли и пишущему эти строки,—опыты съ органическими веществами и, наконецъ, очень важныя изслѣдованiя о сплавахъ металловъ и вообще объ изоморфизмѣ элементовъ; эти послѣднiя изслѣдованiя принадлежатъ, главнымъ образомъ, Тамману. Въ этихъ новѣйшихъ работахъ употреблялся прежде всего термическiй и крiоскопическiй методъ; другими словами, объ образованiи смѣшанныхъ кристалловъ судили по тому, какъ отвердѣваетъ расплавленная смѣсь.

Результаты, полученные этимъ методомъ, гораздо важнѣе, чѣмъ тѣ, которые получены методомъ кристаллографическимъ, и вотъ почему. Рядомъ съ изоморфизмомъ существуетъ явленiе изодиморфизма. Два вещества называются изодиморфными въ томъ случаѣ, когда они въ чистомъ видѣ не изоморфны, но все-таки даютъ твердые растворы, если ихъ сплавить. Отрицательный результатъ кристаллографическихъ измѣренiй не рѣшаетъ, такимъ образомъ, дѣла окончательно:—всегда еще можно предположить, что вещества изодиморфны. Это обстоятельство тѣмъ болѣе заслуживаетъ вниманiя, что изополиморфизмъ, согласно изслѣдованiямъ Лемана, Таммана и другихъ, оказался явленiемъ гораздо болѣе распространеннымъ, чѣмъ думали раньше.

Оба эти метода повели къ установленiю довольно общихъ законностей. Нѣкоторые элементы и группы атомовъ объединяютъ въ ряды, члены которыхъ называются изоморфогенами. Если въ молекулѣ какого-нибудь соединенiя замѣстить одинъ членъ такого ряда другимъ, то получится вещество, кристаллизирующееся въ сходныхъ формахъ и дающее съ первымъ смѣшанные кристаллы.

Обратно, если установлено, что два вещества имѣютъ сходныя кристаллическiя формы и даютъ твердый растворъ, то отсюда съ большой долей достовѣрности можно заключить, что они имѣютъ одинаковое химическое строенiе. Если при этомъ извѣстенъ составъ одного изъ веществъ, то мы можемъ сдѣлать важныя заключенія о составѣ другого, который можетъ быть еще неизвѣстенъ.

Извѣстно, какое значеніе имѣлъ изоморфизмъ нѣкоторыхъ неорганическихъ соединеній для установленія ихъ химическихъ формулъ и для опредѣленія этимъ путемъ атомнаго вѣса соотвѣтственнаго элемента. Изъ нашихъ изслѣдованій о твердыхъ растворахъ органическихъ веществъ также удалось вывести нѣкоторыя слѣдствія, не лишенныя значенія.

Общіе законы, которымъ должны подчиняться всѣ явленія въ этой столь важной области химіи, до сихъ поръ, однако, не найдены, и кто знаетъ, скоро ли они будутъ найдены. Этому не нужно удивляться, если подумать, какъ мало разнообразны условія, при которыхъ мы дѣлаемъ опыты, и какія разнообразныя условія возможны. Мы еще можемъ довольно легко измѣнять температуру, и даже измѣнять ее въ довольно широкихъ предѣлахъ, но работа при давленіяхъ, отличныхъ отъ атмосфернаго, представляетъ огромныя трудности, и наши данныя въ этой области крайне ограничены.

Съ другой стороны, то немногое, что мы знаемъ (благодаря, главнымъ образомъ, Тамману), показываетъ, что примѣненіе высокихъ давленій вызываетъ огромныя измѣненія въ процессахъ формированія и преобразованія кристалловъ.

Въ заключеніе разсмотримъ еще одинъ вопросъ, касающійся твердыхъ растворовъ. Можно ли считать, что въ образованіи ихъ играетъ роль химическое сродство, и разсматривать ихъ поэтому, какъ своего рода химическія соединенія?

Соотвѣтствующій вопросъ для жидкихъ растворовъ обсуждается уже давно. Въ нашемъ журналѣ о немъ уже писалъ П. Вальденъ (P. Walden); я бы могъ повторить для твердыхъ растворовъ почти все, что онъ сказалъ. Онъ выяснилъ, какъ отъ химическаго объясненія явленій растворенія перешли, около четверти вѣка тому назадъ — съ появленіемъ теоріи Ванʼтъ Гоффа, къ чисто физическому объясненію; и, наконецъ, какъ теперь, съ каждымъ днемъ все сильнѣе и сильнѣе, проявляется стремленіе вернуться къ химической теоріи, на которую надо смотрѣть не какъ на противоположность физической теоріи, а какъ на дополненіе ея.

И въ примѣненіи къ твердымъ растворамъ физическая теорія казалась еще недавно совершенно неуязвимой; химики и кристаллографы почти единодушно считали, что между изоморфными смѣсями или смѣшанными кристаллами, съ одной стороны, и опредѣленными соединеніями, съ другой, существуетъ ясная граница, и что между ними нѣтъ переходныхъ ступеней. Я самъ вплоть до послѣднихъ лѣтъ придерживался этого мнѣнія, но затѣмъ въ моихъ взглядахъ на этотъ предметъ произошла внезапно большая перемѣна.

Дѣйствительно, уже раньше были извѣстны факты, которые трудно было согласовать съ вышеизложенной точкой зрѣнія. Укажемъ, напримѣръ, на доломитъ. Судя по формѣ кристалла, это была изоморфная смѣсь углекислыхъ солей кальція и магнія, судя по составу—двойная соль, изоморфная съ обѣими простыми солями.

Были извѣстны и другія тѣла съ нѣкоторыми особенностями, какъ, напримѣръ, зеолиты. Они могутъ постепенно отдавать воду, при чемъ не измѣняется ихъ кристаллическая форма и не нарушается однородность. Ихъ можно, значитъ, разсматривать, какъ нѣчто среднее между соединеніями и твердыми растворами. Нужно, однако, замѣтить, что тутъ мы имѣемъ дѣло, по всей вѣроятности, съ явленіемъ поглощенія, гдѣ большую роль играетъ состояніе поверхности и гдѣ такимъ образомъ все дѣло очень усложняется.

Въ послѣднее время въ нашихъ свѣдѣніяхъ по этому предмету сразу произошелъ большой прогрессъ,—главнымъ образомъ, благодаря изслѣдованіямъ Таммана и его учениковъ о сплавахъ металловъ, о которыхъ я уже нѣсколько разъ упоминалъ. Необходимо въ краткихъ словахъ коснуться этого пункта.

Я уже говорилъ, что основное свойство, по которому различаются между собой растворы и соединенія, это измѣняемость состава. Если кристаллическое тѣло можетъ хоть немного измѣнять свой составъ, оставаясь физически однороднымъ, то мы условились говорить, что это твердый растворъ; если малѣйшее измѣненіе состава влечетъ за собой нарушеніе однородности, то мы считаемъ такое тѣло химическимъ соединеніемъ. Послѣднія, кромѣ того, характеризуются тѣмъ, что они могутъ переходить изъ одного состоянія въ другое, не распадаясь на части различнаго состава, а растворы можно, какъ говорятъ, фракціонировать (подвергать дробной перегонкѣ).

Вышеупомянутыя изслѣдованія не оставляютъ сомнѣнія въ существованіи такихъ кристаллическихъ тѣлъ, которыхъ нельзя фракціонировать, и въ которыя составныя части входятъ въ простыхъ отношеніяхъ, пропорціональныхъ ихъ атомнымъ вѣсамъ; съ другой стороны, они въ тоже время могутъ измѣнять свой составъ, сохраняя однородность, и поэтому ихъ слѣдовало бы считать смѣшанными кристаллами.

Мы принуждены, такимъ образомъ, допустить существованіе тѣлъ, представляющихъ собою переходныя ступени между растворами и соединеніями въ собственномъ смыслѣ слова.

Въ виду такихъ явленій наша мысль невольно обращается къ смѣлымъ идеямъ, высказаннымъ Францемъ Вальдомъ (F. Wald). Онъ оспариваетъ законность самыхъ основъ нынѣшней химіи, законовъ постоянныхъ и кратныхъ отношеній и атомистической гипотезы. Эти идеи вызвали со всѣхъ сторонъ возраженія; но большинство химиковъ ограничилось тѣмъ, что пожали плечами и покачали головой.

Я долженъ заявить, что я еще не становлюсь въ ряды послѣдователей Вальда или Оствальда послѣдняго періода, что я еще вѣрю въ законность и цѣлесообразность атомистической теоріи; я придерживаюсь еще ортодоксальныхъ взглядовъ. Но я нахожу, что на вышеуказанные факты нельзя отвѣтить только пожиманіемъ плечъ и качаніемъ головы, какъ это дѣлаютъ строгіе химики—ортодоксы.

Все теперь заставляетъ думать, что и твердые и жидкіе растворы надо разсматривать, какъ соединенія съ растворителемъ, только въ перемѣнныхъ отношеніяхъ.

Въ газообразномъ состояніи природа процесса растворенія еще чисто физическая; переходя къ жидкому и твердому состоянію, мы видимъ, что химическое вліяніе проявляется все сильнѣе и сильнѣе.

Допущеніе, что жидкіе и твердые растворы образуются при участіи силъ сродства, можетъ вызвать слѣдующее возраженіе. Это не можетъ быть такое же сродство, благодаря какому образуются соединенія въ собственномъ смыслѣ слова. Мы вѣдь знаемъ, что два тѣла соединяются тѣмъ легче, чѣмъ больше различіе между ними, и что они растворяются другъ въ другѣ тѣмъ легче, чѣмъ больше ихъ сходство.

Мы пришли, такимъ образомъ, къ необходимости допустить существованіе двухъ видовъ силъ сродства, которыя можно было бы называть гомополярными и гетерополярными. Между этими двумя видами нѣтъ, конечно, рѣзкаго отличія, а долженъ быть послѣдовательный переходъ.

Вопросъ о томъ, возможно ли привести въ систему тѣ силы сродства, которыя участвуютъ въ образованіи растворовъ, распространивъ на нихъ, напримѣръ, теорію валентности, согласно геніальному указанію Абегга (Abegg), — этотъ вопросъ остается еще открытымъ.

О необходимости новыхъ изслѣдованій относительно силы тяготѣнія.

Н. Морозова.

Въ своемъ докладѣ на засѣданіи Физическаго Отдѣленія Русскаго Физико-Химическаго Общества 11 Декабря 1907 года*) и въ недавно вышедшей книгѣ „Основы качественнаго физико-математическаго анализа и новые физическіе факторы, обнаруживаемые имъ въ различныхъ явленіяхъ природы“ я подробно разбиралъ формулу Ньютона съ точки зрѣнія ея изотезичности, т. е. однородности, и указалъ на необходимость введенія въ нее двухъ новыхъ физическихъ факторовъ.

Въ послѣднее время, излагая коротко этотъ предметъ для сообщенія въ англійскихъ научныхъ журналахъ, я случайно нашелъ новый упрощенный способъ доказательства того же самаго. Въ виду важности рѣшенія вопроса сообщаю этотъ новый способъ.

Принимая во вниманіе, что притяженіе между тѣлами, по современнымъ воззрѣніямъ, можетъ совершаться только черезъ премежуточную среду, мы неизбѣжно приходимъ къ необходимости разложить силу

*) Журн. Русск. Физ.-Хим. Общ., 1908 г., вып. II.

тяготѣнія F между двумя тѣлами на два слагаемыя: 1) на силу F_1, зависящую отъ дѣйствія поля притяженія Q_1 перваго тѣла на массу M_2 второго, и 2) на силу F_2, зависящую отъ дѣйствія поля Q_2 второго тѣла на массу M_1 перваго. Обѣ эти силы можно считать не односторонними, геометрическими, а стягивающими, т. е. образующими алгебраическую сумму

$$F = F_1 + F_2. \tag{1}$$

Но очевидно, что первая сила будетъ *прямо* пропорціональна интенсивности перваго поля Q_1 и массѣ M_2, попавшаго въ него сферически однороднаго тѣла и *обратно* пропорціональна квадрату разстоянія L между центрами обоихъ:

$$F = Q_1 \frac{M_2}{L^2}. \tag{2}$$

По тѣмъ же причинамъ вторая сила будетъ *прямо* пропорціональна интенсивности второго поля Q_2 и массѣ M_1 перваго и *обратно* пропорціональна тому же квадрату разстоянія L:

$$F_2 = Q_2 \frac{M_1}{L^2}. \tag{3}$$

Это только старая формула Ньютона, приспособленная къ современнымъ взглядамъ на тяготѣніе.

Но что же за факторы Q_1 и Q_2? Каковъ ихъ размѣръ или функціональный составъ?—Извѣстно, что всякое силовое поле въ пространствѣ трехъ измѣреній опредѣляется вполнѣ произведеніемъ ускоренія G въ какой-либо его точкѣ на квадратъ ея разстоянія L отъ центра поля. Это произведеніе GL^2 различно для разныхъ полей, но постоянно для всѣхъ точекъ того же поля, такъ какъ ускоренія въ средѣ трехъ измѣреній *ослабѣваютъ* пропорціонально квадратамъ разстоянія, а потому ихъ произведеніе на этотъ квадратъ есть величина постоянная, почему она и называется константой Q даннаго поля, или его мѣрой. Итакъ:

$$Q = GL^2. \tag{4}$$

Но изъ механики мы знаемъ, что самоускореніе G прямо пропорціонально дѣйствующей силѣ F и обратно пропорціонально сопротивляющейся ей инертной массѣ M. И внеся это въ выраженіе (4), имѣемъ:

$$Q = FL \cdot \frac{L}{M}.$$

Здѣсь множитель FL, какъ то же извѣстно изъ элементарной механики, есть выраженіе работы, или энергіи E, а отношеніе $\frac{M}{L}$, обратное появившемуся въ послѣдней формулѣ, есть линейная плотность δ, т. е. величина массы на данной длинѣ. Слѣдовательно, имѣемъ вообще:

$$Q = \frac{E}{\delta}. \tag{5}$$

Нетрудно видѣть, что полученное такимъ образомъ выраженіе для константы Q динамическаго поля есть факторъ высшаго постоянства въ жизни природы. Возьмемъ хотя бы работу E распиливанія доски. При той же толщинѣ доски она прямо пропорціональна раскалывающей силѣ F и длинѣ L сдѣланнаго разрѣза: $E = FL$. Но это вѣрно лишь до тѣхъ поръ, пока линейная плотность δ доски, т. е. количество раздробляемой пилою массы M дерева, на всей длинѣ L разрѣза постоянно. Если линейная плотность мѣняется отъ измѣненія общей плотности и толщины доски, то факторомъ постоянства будетъ уже отношеніе $\frac{E}{\delta}$, т. е. тотъ же самый факторъ, что и въ выраженіи (5) для константы Q динамическаго поля.

Внеся это выраженіе въ наши формулы (2) и (3), а эти послѣднія въ (1), получимъ:

$$F = (F_1 + F_2) = \frac{E_1}{\delta_1} \cdot \frac{M_2}{L^2} + \frac{E_2}{\delta_2} \cdot \frac{M_1}{L^2} \cdot \tag{6}$$

Или, если считать, что линейныя плотности δ_1 и δ_2 относятся къ веществу самихъ полей и одинаковы въ эфирѣ для каждаго поля и каждой его силовой линіи:

$$F = \frac{E_1 M_2 + E_2 M_1}{\delta L^2} \cdot \tag{7}$$

Тогда сила тяготѣнія F между двумя тѣлами окажется 1) прямо пропорціональной произведенію полевызывающей энергіи E_1 перваго тѣла (или аггрегата энергіи) на массу M_2 второго, сложенному съ произведеніемъ полевызывающей энергіи E_2 второго тѣла (или аггрегата энергіи) на массу M_1 перваго, и 2) обратно пропорціональна произведенію линейной плотности δ эфирной среды на квадратъ разстоянія L между центрами обоихъ тѣлъ (или аггрегатовъ энергіи), предполагаемыхъ сферическими и концентрически однородными.

Это приспособленіе формулы Ньютона къ современнымъ энергетическимъ воззрѣніямъ сразу поднимаетъ рядъ новыхъ вопросовъ, которые необходимо рѣшить.

Если поле тяготѣнія зависитъ не отъ одной массы находящагося въ его центрѣ тѣла, а отъ его полевызывающей энергіи, то мы должны здѣсь принимать въ расчетъ не только массы, но и движенія, входящія въ общее выраженіе $\frac{1}{2} MV^2$ всѣхъ родовъ энергіи. Движенія эти могутъ быть конечно только вибраціоннаго характера. Это вибраціи молекулъ, или атомовъ, или отдѣльныхъ участковъ у атомовъ, составляющихъ скопленія энергіи, называемыя физическими тѣлами. Поступательныя движенія этихъ скопленій энергіи, взятыхъ какъ одно цѣлое, могутъ, при значительныхъ скоростяхъ, только искажать концентрически однородный видъ ихъ полей, какъ искажается звуковое поле у летящаго ядра, а не увеличивать ихъ.

Но вибраціонныя движенія атомовъ или ихъ участковъ неизбѣжно должны находиться въ какой-либо функціональной зависимости отъ силъ ихъ столкновенія другъ съ другомъ, а эти силы должны быть пропорціональны абсолютнымъ температурамъ тѣлъ. Значитъ, температура должна до нѣкоторой степени вліять на полевызывающую энергію тѣлъ, а, слѣдовательно, и притяженіе между ними будетъ не только функція массъ и разстояній, но и нѣкоторая функція отъ температуры тѣлъ, если увеличеніе E_1 и E_2 вслѣдствіе нагрѣванія (въ формулѣ 6) не сопровождается такимъ же увеличеніемъ δ_1 и δ_2, что мало вѣроятно a priori.

Какова бы могла быть эта послѣдняя функція?

Взявъ выведенную мною формулу (6) и замѣтивъ, что по общему механическому выраженію энергіи

$$E_1 = \frac{1}{2} M_1 V_1^2 \text{ и } E_2 = \frac{1}{2} M_2 V_2^2,$$

мы получимъ выраженіе, несравненно болѣе напоминающее первоначальную формулу Ньютона

$$F = \frac{M_1 M_2}{GL^2}\left(\frac{V_1^2}{\delta_1} + \frac{V_2^2}{\delta_2}\right). \tag{8}$$

Что здѣсь значатъ V_1 и V_2?

По самому своему происхожденію это скорости полевызывающихъ колебаній у атомныхъ участковъ того и другого тѣла. Атомы всѣхъ тѣлъ, постоянно сталкиваясь другъ съ другомъ благодаря своимъ температурнымъ поступательнымъ движеніямъ, должны вибрировать, какъ ударяющіеся другъ о друга микроскопически малые камертоны V_1 и V_2, и должны представлять собою среднія скорости амплитудныхъ колебаній ихъ концовъ или срединныхъ участковъ. Эти скорости V_1 и V_2, очевидно, не могутъ возрастать отъ нуля до безконечности, какъ кинетическія скорости молекулъ, обусловливающія температуру тѣлъ. Скорости V_1 и V_2 могутъ возрастать только до опредѣленнаго предѣла по общимъ законамъ періодической деформаціи упруго-измѣненныхъ тѣлъ. А потому и зависящая отъ нихъ сила тяготѣнія никакъ не можетъ быть признана пропорціональной абсолютной температурѣ тѣлъ, а должна быть какой-либо своеобразной функціей этой температуры.

Если-бы мы признали V_1 и V_2 какой-либо ассимптотической функціей температуры — вродѣ, напримѣръ, функціи арктангенса, — съ поправочнымъ коэффиціентомъ пропорціональности, то для обнаруженія вліянія температуры пришлось бы изслѣдовать на вѣсахъ Кавендиша уменьшеніе притяженія между тѣлами при очень низкихъ температурахъ, такъ какъ при современной температурѣ и выше вліяніе этого фактора можетъ быть уже почти постояннымъ, близкимъ къ верхнему предѣлу такой функціи.

Наоборотъ, еслибъ мы признали V_1 и V_2 пропорціональными энергіи излученія тѣлъ (конечно, общаго, суммарнаго, а не только свѣтового и теплового), то, по закону Стефана, пришлось бы ожидать сильнаго увеличенія притяженія при очень высокихъ температурахъ, но въ такомъ случаѣ, чтобъ объяснить незамѣтность измѣненій въ вѣсѣ обычныхъ, нагрѣтыхъ и охлажденныхъ, тѣлъ, пришлось бы приписать земному шару среднюю температуру не ниже 10000^0 abs.

Все это показываетъ до какой степени желательно въ интересахъ науки, чтобы лица, имѣющія въ своемъ распоряженіи удобныя для такихъ изслѣдованій вѣсы Кавендиша, изслѣдовали притяженіе между очень сильно нагрѣтыми и очень сильно охлажденными тѣлами, особенно между послѣдними.

Простое изложеніе ученія о всемірномъ притяженіи и о вычисленіи массъ въ солнечной системѣ.

І. Лемуана.

Преподавателю математической географіи не легко выяснить ученикамъ старшихъ классовъ ученіе о всемірномъ тяготѣніи, объ измѣреніи массы солнца, земли, планетъ и луны. Достаточная разработка этого вопроса требуетъ настоящаго курса астрономіи. Мы ставимъ себѣ здѣсь цѣлью указать, какъ можно было бы элементарно обработать этотъ вопросъ. Приступая къ изложенію, надо прежде всего выяснить законъ всемірнаго тяготѣнія.

Законъ притяженія земли. 1) Вблизи поверхности земли свободно падающее тѣло пробѣгаетъ въ первую секунду 4900 мм. 2) Луна L описываетъ въ промежутокъ времени, нѣсколько меньшій мѣсяца (27 дней 8 часовъ), окружность, имѣющую центръ въ точкѣ T, гдѣ находится земля (см. рис. 1), и радіусъ, равный 60 земнымъ радіусамъ. Отсюда легко опредѣлить, что скорость движенія луны составляетъ 1000 метровъ въ секунду. Если бы луна не падала на землю, то, вышедши изъ точки L, она въ теченіе секунды прошла бы по касательной 1000 метровъ и пришла бы въ точку L_1; слѣдовательно, въ теченіе секунды она упала съ высоты L_1L_2. Всѣ наши ученики сумѣютъ вычислить высоту этого паденія по формулѣ

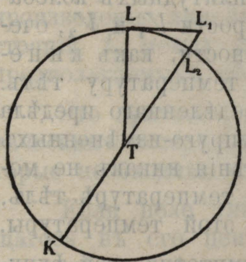

Рис. 1.

$$LL_1^2 = L_1L_2 \times L_1K = \text{(приближенно)}\ L_1L_2 \times L_2K.$$

Мы получимъ: $LL_1 = 1{,}36$ мм. Умноживъ 1,36 на 60^2, мы получимъ точно 4900 мм., т. е. получимъ скорость паденія снаряда на поверхности земли. Итакъ, когда разстояніе тѣла отъ центра земли возрастаетъ въ 60 разъ, падающее тѣло движется медленнѣе въ 60^2 разъ; иными словами, оно подвергается дѣйствію силы, которая въ 60^2 разъ меньше. Обобщая это, мы отсюда заключаемъ: сила притяженія земли обратно пропорціональна квадрату разстоянія.

Законъ солнечнаго притяженія. Этотъ законъ выводится путемъ сличенія движенія планетъ,—напримѣръ, путемъ сравненія движенія земли и Юпитера.

Зная разстояніе земли отъ солнца (150 000 000 кил.) и продолжительность ея обращенія, мы вычисляемъ, какъ мы это сдѣлали раньше для луны, высоту паденія земли на солнце въ теченіе каждой секунды. Мы находимъ $T_1T_2 = 2,9$ мм. Мы знаемъ также разстояніе Юпитера отъ солнца и продолжительность его оборота (11 лѣтъ); отсюда мы получаемъ паденіе въ секунду

$$J_1J_2 = 0,16 \text{ мм.}$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ мы заключимъ, что

$$0,16 \text{ мм.} \times 5^2 = 2,9 \text{ мм.},$$

т. е. Юпитеръ, разстояніе котораго отъ солнца превышаетъ разстояніе земли въ 5 разъ, падаетъ въ 25 разъ менѣе быстро. Литръ воды, взятый на Юпитерѣ, притягивается солнцемъ въ 25 разъ слабѣе, нежели литръ, взятый на поверхности земли. Обобщая это, мы заключаемъ: сила притяженія, оказываемая солнцемъ, измѣняется обратно пропорціонально квадрату разстоянія.

Если мы позволимъ себѣ, такимъ образомъ, послѣднее обобщеніе, то этотъ законъ превращается въ законъ всемірнаго тяготѣнія. По этому, именно, закону притягиваются любыя два тѣла. Съ другой стороны, сила притяженія, которую они оказываютъ другъ на друга, возрастаетъ въ 2 или 3 раза, если одно изъ нихъ увеличивается также въ 2 или 3 раза.

Лабораторное доказательство закона всемірнаго тяготѣнія. Уже слишкомъ 100 лѣтъ мы умѣемъ измѣрить въ лабораторіи силу притяженія, оказываемаго двумя взаимными тѣлами другъ на друга. Къ тѣлу, уравновѣшенному на весьма чувствительныхъ вѣсахъ, мы приближаемъ другое матеріальное тѣло, которое его притягиваетъ на весьма небольшое разстояніе. Вѣсы измѣряютъ силу притяженія и обнаруживаютъ справедливость высказаннаго выше закона. Численный результатъ, къ которому мы, такимъ образомъ, приходимъ, сводится къ слѣдующему: одинъ килограммъ притягиваетъ другой килограммъ, помѣщенный отъ него на разстояніи одного метра, съ силой, которая равна вѣсу $\frac{7}{1\,000\,000\,000\,000}$ килограмма въ Парижѣ.

Масса земли. Земля притягиваетъ килограммъ, помѣщенный на ея поверхности, съ силой, равной вѣсу одного килограмма. Если бы центръ земли находился на разстояніи одного метра, то мы отсюда заключили бы, что ея масса составляетъ $\frac{1\,000\,000\,000\,000}{7}$ килограммовъ. Но такъ какъ ея центръ отстоитъ на разстоянiи 6 400 000 метровъ, то ея масса должна быть въ 6400000^2 разъ больше. Она составляетъ, слѣдовательно,

$$\frac{1\,000\,000\,000\,000}{7}\,(6\,400\,000)^2 \text{ килограммовъ} =$$

$$= 6\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 \text{ килограммовъ.}$$

Масса солнца. Мы опредѣляемъ массу солнца, сравнивая притяженiя, которыя оказываютъ земля и солнце на одно и то же разстоянiе и на одно и то же тѣло. Выберемъ за разстоянiе радiусъ земной орбиты. Мы знаемъ, что на этомъ разстоянiи солнце вызываетъ паденiе,— именно, паденiе земли на разстоянiе 2,9 мм. въ секунду. Съ другой стороны, земля заставляетъ тѣло, находящееся на ея поверхности, падать со скоростью 4900 мм. въ секунду. Такъ какъ радiусъ земной орбиты составляетъ 23 000 земныхъ радiусовъ, то тѣло, помѣщенное на этомъ разстоянiи, подъ влiянiемъ притяженiя земли падало бы съ высоты со скоростью $\frac{4900}{(23\,000)^2}$ въ одну (первую) секунду.

Отношенiе массы солнца къ массѣ земли равно отношенiю тѣхъ паденiй, которыя эти два свѣтила соотвѣтственно вызываютъ, т. е.

$$\frac{\text{масса солнца}}{\text{масса земли}} = \frac{2{,}9}{\dfrac{4900}{(23000)^2}} = \frac{29 \times 23^2 \times 1000}{49} = 300\,000;$$

$$\text{масса солнца} = 300\,000 \times \text{масса земли.}$$

Масса планетъ и луны. Предыдущее вычисленiе вполнѣ выясняетъ принципъ, который приходится постоянно примѣнять при измѣренiи массъ всѣхъ свѣтилъ. Наблюдаютъ движенiе, вызываемое на нѣкоторомъ извѣстномъ намъ разстоянiи свѣтиломъ, которое мы желаемъ взвѣсить. Такимъ движенiемъ можетъ быть движенiе спутника этого свѣтила (спутниковъ Юпитера, Марса и т. д. или же пертурбацiя, которая вызываетъ свѣтило въ правильномъ движенiи сосѣдняго свѣтила,— притяженiе кометы планетой, притяженiе земли луной), затѣмъ мы сравниваемъ это движенiе съ тѣмъ, которое вызывала бы земля на такомъ же разстоянiи. Отсюда мы опредѣляемъ массу свѣтила, какъ это было выяснено подробно въ примѣненiи къ солнцу.

Построенiе корней квадратнаго уравненiя.

1. Какъ извѣстно, обычное построенiе корней квадратнаго уравненiя ведется различно въ зависимости отъ знаковъ, которые имѣютъ коэффицiенты уравненiй. Мы предлагаемъ здѣсь построенiе, которое выполняется одинаково, совершенно независимо отъ того, какiе именно знаки имѣютъ коэффицiенты.

Разсмотримъ двѣ сѣкущія Ox и Oy и окружность ω, пересѣкающую сѣкущую Ox въ точкахъ X_1 и X_2, а сѣкущую Oy въ точкахъ P и Q. Пусть M будетъ середина отрѣзка X_1X_2 (рис. 1). Употребляя установившееся обозначеніе $\overline{AB}$ для выраженія абсолютной величины отрѣзка, ограничиваемаго точками A и B, мы непосредственно получаемъ слѣдующія два равенства:

$$\left.\begin{aligned}\overline{OX_1}+\overline{OX_2}&=2\overline{OM},\\ \overline{OP}\,.\,\overline{OQ}&=\overline{OX_1}\,.\,\overline{OX_2},\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

которыя устанавливаютъ алгебраическую сумму и алгебраическое произведеніе абсциссъ точекъ X_1 и X_2.

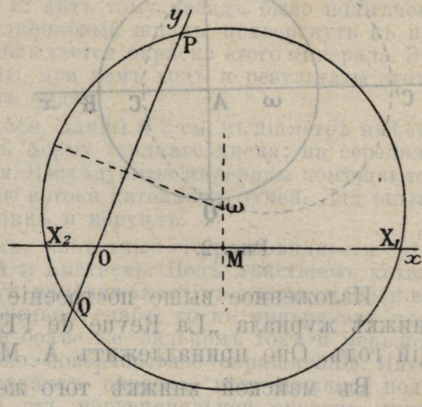

Рис. 1.

2. Пусть данное уравненіе 2-й степени будетъ

$$x^2+mx+pq=0.$$

Мы предполагаемъ, что корни этого уравненія x_1 и x_2 представляютъ собою алгебраически два отрѣзка. Въ силу принципа однородности m, p, q также выражаютъ отрѣзки.

Совершенно понятно, что я разсматриваю только тотъ случай, когда оба корня вещественны. Если теперь сравнимъ соотношенія

$$\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{m}{2},$$

$$x_1x_2=pq$$

съ соотношеніями (1), то мы убѣдимся, что точки X_1 и X_2 на оси Ox представляютъ собой пересѣченія послѣдней съ окружностью, центръ которой лежитъ на перпендикулярѣ, возстановленномъ къ прямой Ox изъ точки M на оси Ox, имѣющей абсциссу $-\frac{m}{2}$, и которая въ то же время проходитъ черезъ двѣ точки P и Q, опредѣляемыя на оси Oy равенствами

$$OP=p,\quad OQ=q.$$

Вытекающее отсюда построеніе совершенно очевидно; расположеніе прямой Oy относительно прямой Ox вполнѣ зависитъ отъ насъ; часто бываетъ полезно провести ее перпендикулярно къ Ox.

3. Этотъ методъ даетъ хорошіе результаты во всѣхъ случаяхъ, когда построеніе отрѣзка приводится къ уравненію 2-й степени. Оно приводитъ, напримѣръ, къ изящному дѣленію отрѣзка AB въ с р е д н е м ъ и к р а й н е м ъ о т н о ш е н і и.

Пусть a будетъ длина отрѣзка $\overline{AB}$. Намъ нужно будетъ построить корни уравненія

$$x^2+ax-a^2=0.$$

Пусть A будетъ начало координатъ (рис. 2). Мы положимъ

$$p = a, \quad q = -a.$$

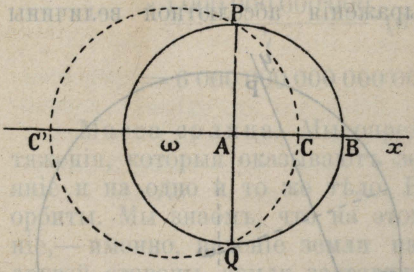

Рис. 2.

Чертежъ освобождаетъ насъ отъ необходимости распространяться относительно построенія.

4. Врядъ ли нужно прибавлять, что изслѣдованіе вещественности корней, а также ихъ расположеніе относительно оси непосредственно вытекаютъ изъ этого построенія. Послѣднее опредѣляется знакомъ степени точки O относительно окружности.

Изложенное выше построеніе было опубликовано въ февральской книжкѣ журнала „La Revue de l'Enseignement des Sciences" за текущій годъ. Оно принадлежитъ А. Марижону (A. Marijon).

Въ майской книжкѣ того же журнала Р. Берарь (R. Bérard) предлагаетъ другое построеніе, которое съ точки зрѣнія геометрографіи представляется нѣсколько болѣе простымъ.

Для построенія корней того же уравненія, построимъ окружность совершенно произвольнымъ радіусомъ съ тѣмъ лишь условіемъ, чтобы діаметръ былъ больше каждаго изъ отрѣзковъ m и $p+q$. (рис. 3) Построимъ хорду $AB = p + q$, на которой возьмемъ $AC = p$, а также построимъ хорду $DE = m$. Затѣмъ опишемъ окружность, имѣющую центръ въ той же точкѣ O и радіусъ, авный OC. Эта окружность пересѣкаетъ хорду DE въ точкахъ F и G; длины FD и FE или GD и GE суть требуемые отрѣзки, ибо сумма ихъ, очевидно, равна m, а произведеніе $DF . FE = AC . CB = pq$.

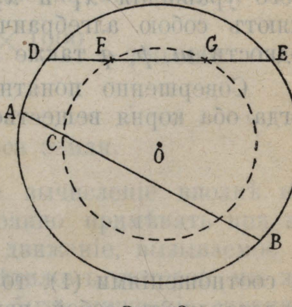

Рис. 3.

Этому построенію нельзя, конечно, отказать въ изяществѣ; при всемъ томъ нужно замѣтить, что оно не разрѣшаетъ именно той задачи, которую поставилъ себѣ авторъ первой замѣтки. Здѣсь рѣчь идетъ, очевидно, только о построеніи двухъ отрѣзковъ по даннымъ суммѣ ихъ и произведенію. Авторъ, впрочемъ, на это указываетъ и прибавляетъ, что построеніе отрѣзковъ по данной разности ихъ и произведенію не потребуетъ существенныхъ измѣненій. Для этого нужно будетъ описать окружность радіусомъ, большимъ, нежели каждый изъ двухъ отрѣзковъ m и $p - q$ (мы принимаемъ $p > q$). Далѣе построимъ хорду $DE = m$ и хорду $AB = p - q$; послѣднюю продолжимъ такимъ образомъ, чтобы $BC = q$. Затѣмъ проведемъ окружность, имѣющую центръ въ точкѣ O и радіусъ OC. Эта окружность пересѣчетъ прямую DF въ точкахъ F и G. Тогда FD и FE суть искомые отрѣзки. Въ этомъ случаѣ построеніе всегда возможно.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Измѣненіе цвѣта нѣкоторыхъ минераловъ подъ вліяніемъ катодныхъ лучей (Physical Review, August). Около 12 лѣтъ тому назадъ было подмѣчено интересное явленіе: если безцвѣтный плавиковый шпатъ подвергнуть въ пустотѣ дѣйствію катодныхъ лучей, то наблюдается окраска этого минерала. Это явленіе часто подвергалось изслѣдованію, при чемъ ходъ и результаты этихъ опытовъ представляются въ слѣдующемъ видѣ.

Прямая стеклянная трубка около 15см. длины и 2 см. въ діаметрѣ имѣетъ два электрода, при чемъ одинъ имѣетъ форму гладкаго диска; на серединѣ пути помѣщается полоска изъ аллюминія. Изслѣдуемые минералы помѣщаются за этой стѣнкой и подвергаются дѣйствію потока катодныхъ лучей. Для опыта были взяты; плавиковый шпатъ, турмалинъ и корундъ.

Плавиковый шпатъ. Наиболѣе извѣстныя его разновидности суть: безцвѣтный плавиковый шпатъ, зеленый и аметистъ. Подъ дѣйствіемъ катодныхъ лучей первые два вида по окраскѣ приближаются къ аметисту. Если же пустота образована большая, а токъ довольно слабъ, то въ минералахъ происходитъ двойное измѣненіе цвѣта; при болѣе же сильномъ токѣ и меньшей пустотѣ, интенсивнѣе происходитъ только поверхностное окрашиваніе. Интересно здѣсь отмѣтить, что во всѣхъ случаяхъ окраска, получившаяся подъ вліяніемъ катодныхъ лучей, неотличима отъ первоначальной окраски минерала; небольшое различіе можно найти только въ интенсивности ея.

Турмалинъ. Эти минералы большей частью розоватой или зеленоватой окраски. Для опыта розоватый турмалинъ былъ сломанъ на двѣ части; одна его часть была подвергнута дѣйствію катодныхъ лучей, вторая же осталась безъ измѣненія. Первая находилась въ трубкѣ въ продолженіе двадцати минутъ и послѣ опыта оказалась окрашенной въ зеленоватый цвѣтъ. Правда, кристаллъ получился не вполнѣ прозрачный, но окраска эта оказалась постоянной. Во избѣжаніе возраженій. что окраска вызывается нагрѣваніемъ Гютчинсъ (Hutchins) подогрѣвалъ въ продолженіе 1½ часовъ вторую половину, но безъ достиженія какихъ-нибудь благопріятныхъ результатовъ.

Корундъ. Полу-прозрачный кристаллъ корунда былъ разломанъ на три части. Одна часть оставалась для сравненія, вторая подвергалась дѣйствію катодныхъ лучей въ продолженіе 5 минутъ, третья—20 минутъ.

Обыкновенная его окраска неоднообразна; въ нѣкоторыхъ мѣстахъ синеватая, въ другихъ—красноватая, общій же видъ окраски—свѣтлый пурпуръ. Оказалось, что часть кристалла, подвергшаяся наиболѣе длительному дѣйствію лучей, получила какой-то блѣдноватый тонъ.

Дѣйствіе катодныхъ лучей на окраску различныхъ минераловъ можно сравнивать съ окраской корунда подъ вліяніемъ эманаціи радія; какъ слѣдствіе, можно было высказать предположеніе, что измѣненіе окраски нѣкоторыхъ минераловъ, находящихся въ землѣ, обязано этимъ измѣненіемъ явленію радіоактивности. Авторъ сообщенія высказываетъ предположеніе, что въ „нашихъ подземныхъ пустыняхъ“ измѣненіе окраски происходитъ съ невѣроятной быстротой.

А. Л.

Величина молекулъ и зарядъ электрона (Comtes Rendus, Octobre, № 14). Число N молекулъ, содержащихся въ каждой граммъ-молекулѣ, зарядъ e электрона и частное a отъ дѣленія средней энергіи молекулы на ея абсолютную температуру T суть постоянныя величины, которыя всѣ становятся извѣстными, какъ только найдена одна изъ нихъ. Дѣйствительно, при электролизѣ одновалентной соли N атомовъ переносятъ 96 550 кулоновъ, что даетъ намъ

$$Ne = 3.10^9 \cdot 96\,550 = 29.10^{13} \text{ (электростат. единицъ C. G. S.).}$$

Съ другой стороны, согласно кинетической теоріи газовъ, живая сила переноса измѣряется произведеніемъ $3RT$, гдѣ эта живая сила приходится въ одинъ моментъ времени на N молекулъ одной граммъ-молекулы:

$$2Na = 3R = 3.83,2.10^6.$$

Для опредѣленія N Перренъ (I. Perrin) пользуется особымъ методомъ, основаннымъ на слѣдующемъ допущеніи: равные зерна на поверхности какой-нибудь эмульсіи устанавливаются точно такъ же, какъ это бы сдѣлали молекулы, подчиняясь закону идеальныхъ газовъ. Руководствуясь этимъ, мы получимъ уравненіе:

$$2,3.\log_{10}\frac{n_0}{n}=\frac{N}{RT}\cdot\frac{4}{3}\pi a^3 g\,(d-\sigma)\,h.$$

гдѣ n и n_0 суть концентраціи зеренъ находящихся въ различныхъ точкахъ на высотѣ h, a—радіусъ зеренъ, а $(d-\sigma)$ — разность между плотностями зеренъ и воды.

Такъ какъ опытъ при повтореніи давалъ для N почти одну и ту же величину, то можно съ увѣренностью утверждать, что

$$N=71.10^{22},$$

что близко согласуется съ предѣлами, указанными для N Рётгерфордомъ utherford)

$$62.10^{22}-72.10^{22}.$$

Отсюда уже мы получимъ для e величину $e=4{,}1.10^{-10}$, а для a

$$a=1{,}7.10^{-10}.$$

Такимъ образомъ, масса молекулы кислорода выразится черезъ $0{,}45.10^{-22}$ гр., а водорода $1{,}40.10^{24}$ гр.

А. Л.

Новое опредѣленіе механическаго эквивалента теплоты (Comtes Rendus, Novembre, № 18). Постоянная ошибка опредѣленія J кроется въ трудности достигнуть при опытѣ постоянной температуры. Для того, чтобы избѣжать этой ошибки, Кремье и Распайль (Cremieu et Raspail) воспользовались бунзеновскимъ калориметромъ, въ которомъ можно поддерживать въ продолженіе нѣсколькихъ часовъ температуру тающаго льда. Назовемъ черезъ μ вѣсъ ртути, поглощенной калориметромъ, черезъ d — плотность ртути, черезъ c — теплоту испаренія льда, черезъ D — плотность льда и черезъ D' — плотность воды при 0^0; тогда мы получимъ:

$$\mu=\frac{d}{c}\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{D'}\right).$$

Если же вѣсъ ртути въ калориметрѣ есть M, и въ теченіе опыта, произведена работа T, то

$$J=\frac{T}{M}\frac{d}{c}\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{D'}\right).$$

Для опредѣленія J, такимъ образомъ, необходимо:

1) измѣрить количество работы $T=2\pi\,l\cdot n\,P$, гдѣ $l=6,181$ см. n — число оборотовъ, а P — вѣсъ, необходимый для равновѣсія;

2) измѣрить количество тепла $Q=\frac{M}{\mu}$, откуда уже

$$J=\frac{2\pi\,ln\,P\mu}{M}.$$

Средняя изъ значеній для $J=4{,}1851.10^7$ эрговъ съ точностью до 0,0027.

А. Л.

Восьмой спутникъ Юпитера. Астероидъ *CS*, открытый въ январѣ 1908 г. на фотографіи, полученной Мелло (Mellot) въ Гриничской обсерваторіи, и тогда же, въ виду его близости къ Юпитеру, заподозрѣнный въ принадлежности къ системѣ этого гиганта, въ настоящее время уже, безъ сомнѣнія, долженъ считаться восьмымъ спутникомъ Юпитера.

Обратное движеніе и большое удаленіе спутника привлекли къ нему усиленное вниманіе и дали поводъ къ нѣсколькимъ гипотезамъ. Такъ, Форбсъ указалъ на сходство его пути съ путемъ кометы Лекселя, исчезнувшей изъ солнечной системы съ 1779 г., когда она подошла къ Юпитеру на 0.01 разстоянія земли отъ солнца. На этомъ разстояніи притяженіе Юпитера превосходитъ солнечное въ 200 разъ, и потому Юпитеръ могъ обратить комету въ своего спутника.

Вліяніе вращенія земли на теченіе рѣкъ. Dr. Ф. Гильгендорфъ (F. Hilgendorf) произвелъ очень тщательныя наблюденія надъ возможнымъ вліяніемъ вращенія земли на теченіе рѣкъ, которыя омываютъ равнины Кентербери въ Новой Зеландіи. Въ виду очень однороднаго строенія этихъ равнинъ, они представляютъ превосходный случай для подтвержденія „закона Ферреля" объ уклоняющей силѣ вращенія земли; и дѣйствительно, удалось подмѣтить, что эта сила, по всѣмъ вѣроятіямъ, была дѣйствительной причиной образованія отмелей рѣкъ, которыя текутъ по долинамъ съ сѣверо-востока на юго-западъ.

Изв. Р. Астр. О-ва.

О химическомъ дѣйствіи эманаціи радія. Камеронъ и Рамсай предприняли серію опытовъ, въ которыхъ подвергали дѣйствію эманаціи радія воду и различные газы. Въ опытахъ съ водой объемъ жидкости и газа все время оставался постояннымъ, измѣненія же массы газа отмѣчались измѣненіемъ его упругости. Въ такихъ условіяхъ опыта эманація радія постольку, поскольку она слѣдуетъ закону Генри (закону парціональнаго давленія), должна распредѣлиться въ извѣстномъ отношеніи между двумя газами. Рамсай и Камеронъ считаютъ установленнымъ, что окружающая среда не имѣетъ вліянія на скорость разложенія эманаціи радія, отношеніе же массъ эманаціи въ состояніи газообразномъ и раствора должно оставаться постояннымъ во все время хода опыта. Добытые такимъ путемъ результаты были очень просты: кривая разложенія воды подъ вліяніемъ эманаціи радія на водородъ и кислородъ была экспоненціальная. Анализъ показалъ, что періодъ разложенія на половину воды тѣмъ ближе къ 3,86 дня (періоду разложенія на половину эманаціи радія), чѣмъ тщательнѣй обставленъ опытъ. Рамсай и Камеронъ получили аналогичные результаты для реакціи соединенія водорода съ кислородомъ подъ вліяніемъ эманаціи радія.

Вслѣдъ затѣмъ они подвергли дѣйствію эманаціи радія углекислый газъ, амміакъ, хлористый водородъ, смѣсь азота съ водородомъ и пары воды. Углекислый газъ подъ дѣйствіемъ эманаціи радія распадается на углеродъ, окись углерода и кислородъ; амміакъ — на азотъ и водородъ; хлористый водородъ — на хлоръ и водородъ; поглощеніе же хлора ртутью позволяетъ прослѣдить ходъ разложенія количественно.

Изъ изслѣдованныхъ Рамсаемъ и Камерономъ газовъ пары воды одни только не поддаются дѣйствію эманаціи радія. Такое явленіе тѣмъ болѣе замѣчательно, что при тѣхъ же условіяхъ вода энергично разлагается на кислородъ и водородъ.

Въ общемъ изъ двадцати сдѣланныхъ Рамсаемъ и Камерономъ опытовъ въ четырехъ эманація радія дѣйствовала на воду, въ пяти—на смѣсь водорода и кислорода въ трехъ—на углекислоту, въ трехъ же—на амміакъ и въ одномъ — на углекислоту, смѣсь азота и водорода и пары воды при 130°. Предполагая, что каждая частица эманаціи радія, распадаясь, производитъ химическое дѣйствіе опредѣленной величины, нужно допустить, что количество реагирующихъ веществъ пропорціонально измѣненію ея объема. Скорость разложенія воды, соединенія азота и водорода, разложенія углекислоты подтверждаютъ эту гипотезу, хотя въ послѣднемъ случаѣ происходитъ много реакцій одновременно.

Описанныя превращенія можно объяснить, допуская, что они обязаны своимъ происхожденіемъ альфа-лучамъ, которые обладаютъ несравненно большей энергіей, чѣмъ бета-лучи, судя по ихъ способности іонизировать газы. Когда смѣсь водорода и кислорода бомбардируется альфа-частицами, образуются заряженные іоны обоихъ газовъ, что и вызываетъ частичное соединеніе газовъ. Можно предвидѣть, что дѣйствіе выдѣляющихся альфа-частицъ въ водѣ болѣе энергично; достаточно лишь сравнить дѣйствіе заряда пироксилина въ закрытомъ и открытомъ помѣщеніи. Ударъ альфа-частицы разрушаетъ огромное число частицъ воды и производитъ заряженные іоны водорода и кислорода. Нѣкоторые изъ нихъ вновь соединяются. Опытъ съ дѣйствіемъ эманаціи радія на пары воды при 130° не подтверждаетъ гипотезы. Къ тому же эманація радія испускаетъ только альфа-лучи и разрушается, образцу *RaA*, *RaB*, *RaC*; первый изъ нихъ испускаетъ только альфа-лучи, второй же и третій также и бета-лучи. Періодъ разложенія на половину этихъ веществъ— менѣе получаса. Въ теченіе первыхъ четырехъ часовъ послѣ введенія эманаціи радія въ закрытое помѣщеніе съ водой активность альфа-лучей возрастаетъ почти втрое противъ первоначальной. Если бы каждая частица альфа-лучей производила опредѣленное химическое дѣйствіе, то соединеніе водорода и кислорода должно было бы возрастать въ томъ же отношеніи, что, однако, не подтверждается опытомъ. Увеличеніе объема газовой смѣси, которое происходитъ вначалѣ, достигаетъ въ концѣ перваго часа максимальной величины; въ опытахъ съ гремучимъ газомъ, какъ при 130°, такъ и при обыкновенной температурѣ, съ углекислотой и со смѣсью азота и водорода, его можно приписать мѣстному повышенію температуры отъ дѣйствія эманаціи радія, которое настолько значительно, что даже при 130° замѣтно увеличиваетъ давленіе. Съ другой стороны, можно было бы ожидать, что дѣйствіе на пары воды и соляную кислоту носитъ такой же характеръ. Въ послѣднемъ случаѣ наблюдается разложеніе, въ то время какъ на пары воды не наблюдалось никакого дѣйствія.

Единственное объясненіе, которое можетъ согласовать данное явленіе съ другими, состоитъ въ допущеніи, что при температурѣ опыта обратная реакція соединенія водорода и кислорода скрываетъ разложеніе воды.

Работа Рамсая и Камерона относится лишь къ молекулярнымъ превращеніямъ. Когда эманація радія производитъ подобную реакцію, часть энергіи тратится на разрушеніе атомовъ; но, оставляя этотъ вопросъ въ сторонѣ, Рамсай и Камеронъ довольствуются выводомъ, что всякій разъ, когда эманація радія вызываетъ химическое превращеніе, частицы эманаціи производятъ каждая, разрушаясь, дѣйствіе одной и той же величины.

Е. Б.

РЕЦЕНЗІИ.

Проф. **П. О. Сомовъ.** *Векторіальный анализъ и его приложенія.* VIII + 263 стр. С.-Петербургъ. 1907.

Какъ извѣстно, идеи Грассмана и Гамильтона въ свое время встрѣтили мало сочувствія. Если Гамильтона цѣнили, по крайней мѣрѣ, соотечественники, то Грассмана въ Германіи почти не читали. Лишь позже, и именно благодаря совпаденію идей Грассмана съ идеями Гамильтона, на нихъ обратили вниманіе, но все еще долгое время эти вещи считались наиболѣе отвлеченными отраслями математическаго анализа и наиболѣе лишенными какихъ бы то ни было приложеній. Однако, по почину Максвелля и В. Томсона, эти методы были введены въ математическую физику и въ настоящее время заняли такое прочное мѣсто въ изложеніи этихъ дисциплинъ, что безъ нихъ чтеніе новыхъ сочиненій по математической физикѣ, какъ, напримѣръ, „Курса электричества" Абрагама и Фёппля, становится невозможнымъ. Правда, теорія векторовъ, принятая въ настоящее время въ этихъ сочиненіяхъ, не совпадаетъ ни съ ученіемъ о кватерніонахъ ни съ исчисленіемъ протяженій Грассмана. Но во всякомъ случаѣ она, по выраженію Фёппля *), составляетъ компромиссъ между этими теоріями и осуществляетъ собой идею распространенія ариѳметическихъ и аналитическихъ дѣйствій на объекты, гораздо болѣе объемлющіе, нежели вещественныя и даже комплексныя числа. Въ русской литературѣ этимъ идеямъ совсѣмъ не повезло, и книга проф. П. О. Сомова является, насколько намъ извѣстно, первымъ систематическимъ изложеніемъ

*) M. Abraham и A. Föppl, „Theorie der Elektrizität".

современной теоріи векторовъ на русскомъ языкѣ. Въ этомъ сочиненіи подробно изложены операціи надъ векторами въ томъ видѣ, въ какомъ они находятъ себѣ приложеніе въ механикѣ и математической физикѣ, а также важнѣйшія ихъ приложенія къ геометріи, механикѣ и математической физикѣ. Вѣрнѣе изложены не самыя приложенія, а тѣ общія основы, которыя находятъ себѣ приложенія въ различныхъ частяхъ механики и математической физики. Изложеніе отличается ясностью, при чемъ первыя пять главъ, а, если угодно, то и первыя шесть главъ, собственно, совершенно элементарны.

Какъ мы уже сказали, теорія векторовъ въ настоящее время примѣняется очень широко и, сообразно этому, получила и сама широкое развитіе. Врядъ ли, однако, найдется другая отрасль математики, въ которой царила бы такая разноголосица въ смыслѣ терминологіи, какъ въ теоріи векторовъ. Жалобы на это обстоятельство въ послѣднее время раздаются очень часто, и возникли даже попытки объединить эту терминологію особымъ конгрессомъ. При такихъ условіяхъ выборъ термина въ значительной мѣрѣ, понятно, является дѣломъ вкуса; при всемъ томъ намъ кажется, что нѣкоторые термины выбраны и переведены авторомъ неудачно. Такъ, напримѣръ, мы считаемъ, что терминъ „геометрическое произведеніе“ долженъ былъ бы характеризовать геометрическую величину, а не скаляръ. Намъ представляется, поэтому, страннымъ, что авторъ предпочелъ его болѣе употребительному, насколько мы можемъ судить, термину „скалярное произведеніе“. Неудачнымъ представляется также намъ терминъ „передвижной векторъ“. О названіяхъ, конечно, трудно спорить, и можно разумѣть подъ „передвижнымъ“ векторомъ именно такой, который можетъ передвигаться только вдоль по своей прямой; но не насилуется ли при этомъ установившееся значеніе слова „передвижной“, и не есть ли „свободный“ векторъ — передвижной въ обычномъ смыслѣ этого слова. Нѣмцы имѣютъ для прямолинейнаго отрѣзка очень удобный терминъ „Verschiebung“ (передвиженіе вдоль по своей прямой), который трудно переводится на русскій языкъ. Такихъ примѣровъ можно было бы указать еще нѣсколько, но, повторяемъ, о терминахъ, въ концѣ концовъ, трудно спорить.

Мы хотѣли бы еще указать на одинъ пунктъ, изложенный неясно, а, можетъ быть, даже слабо; тѣмъ болѣе, что неясность эта встрѣчается очень часто въ изложеніи теоріи векторовъ. Мы говоримъ о векторіальномъ изображеніи площади. Какъ указано въ § 31, этотъ векторъ долженъ откладываться по нормали площади такимъ образомъ, чтобы человѣкъ, стоящій головой по направленію вектора и обходящій контуръ площади, всегда имѣлъ бы самую площадь съ правой стороны. Въ §§ 35 и 36 установлено понятіе о векторіальномъ произведеніи, и при этомъ говорится: „уже по принятому въ § 31 правилу векторіальнаго изображенія площади естественно и это произведеніе изображать въ видѣ вектора и при томъ направить этотъ векторъ перпендикулярно къ плоскости параллелограмма, т. е. перпендикулярно къ обоимъ векторамъ“. О томъ, въ какую сторону нормали должно откладывать векторъ, представляющій собой векторіальное произведеніе двухъ векторовъ, не сказано ничего. По предыдущей фразѣ можно было бы думать, что его нужно откладывать именно по правилу, указанному въ § 31, но тогда останется совершенно неяснымъ, почему съ перестановкой множителей мѣняется знакъ векторіальнаго произведенія. Векторъ, выражающій векторіальное произведеніе, откладывается, конечно, не по правилу § 31, и, болѣе того, не по этому правилу надо откладывать векторъ при составленіи векторіальнаго выраженія многогранной поверхности. Можетъ быть, это именно и разумѣетъ авторъ въ § 33, когда онъ говоритъ, что за положительное направленіе нормали во всѣхъ точкахъ поверхности онъ будетъ принимать направленіе во внѣшнюю сторону отъ тѣла, ограниченнаго этой поверхностью, и только при этомъ, именно, предположеніи, т. е. если откладывать векторъ, изображающій каждую грань, по внѣшней нормали, и будетъ справедлива теорема въ § 33. Итакъ, мы имѣемъ одно правило, когда откладываемъ векторъ, изображающій какую-нибудь площадь, самое по себѣ; другое правило, когда откладываемъ векторъ, изображающій грань многогранной поверхности; третье правило, когда строимъ векторіальное произведеніе. На какомъ же основаніи теорема § 33 примѣняется въ § 43 къ доказательству распредѣлительности векторіальнаго произведенія, когда она выведена при совершенно иныхъ соглашеніяхъ относительно построенія вектора? Во всякомъ случаѣ все это изложено недостаточно ясно и точно, и доказательство Фёппля представляется намъ гораздо болѣе правильнымъ. Мы не хотимъ, впрочемъ, сказать, что этого доказательства нельзя провести со всей необходимою точностью, но полагаемъ, что это не сдѣлано авторомъ.

Впрочемъ, повторяемъ, что мы остановились на этомъ пунктѣ потому, что онъ обычно излагается не достаточно ясно. Настоящая же книга написана, какъ мы уже сказали, очень ясно. *В. Каганъ.*

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 121 (5 сер.). Доказать справедливость тожества

$$(k+1)^{k-1}-2C_k^{k-1}(k+1)^{k-2}+3C_k^{k-2}(k+1)^{k-3}-\ldots+(-1)^{k-1}kC_k^1+(-1)^k=0.$$

В. Шлыгинъ (Москва).

№ 122 (5 сер.). Упростить выраженіе

$$\sqrt[3]{52+47i},$$

гдѣ $i=\sqrt{-1}$.

Я. Назаревскій (Харьковъ).

№ 123 (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\cos^3 x-\sin^3 x+2\sin^3 x\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2 x\,(1+\sin x)=0.$$

Н. С. (Одесса).

№ 124 (5 сер.). Дано, что въ нѣкоторомъ треугольникѣ отношеніе $\frac{r_1r_2r_3}{r^3}$ (гдѣ r, r_1, r_2, r_3 суть соотвѣтственно радіусы вписаннаго и внѣвписанныхъ круговъ), достигаетъ *maximum*'а. Доказать, что отношеніе $\frac{r}{R}$, гдѣ R — радіусъ круга описаннаго, также достигаетъ для этого треугольника *maximum*'а, и опредѣлить видъ треугольника, отличающагося указаннымъ свойствомъ.

И. Коровинъ (Петербургъ).

№ 125 (5 сер.). Доказать, что если A есть число, взаимно простое съ 546, то произведеніе $(A^6+1)(A^6-1)$ кратно 4368.

(Заимств.).

№ 126 (5 сер.). Доказать формулу

$$\operatorname{tg}\frac{(n+1)x}{2}=\frac{\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\ldots+\cos nx}.$$

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 765 (4 сер.). *Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе*

$$10y + x = x^y.$$

Записавъ данное уравненіе въ видѣ:

$$x^y - x - 10y = 0, \tag{1}$$

мы видимъ, что оно не можетъ быть рѣшено въ цѣлыхъ числахъ, если предположить, что y отрицательно. Дѣйствительно, пусть $y = -z$, гдѣ $z > 0$. Тогда

$$-10z + x = x^{-z}. \tag{2}$$

Но при $x = 0$ лѣвая часть равенства (2) обращается въ $(-10z)$, а правая теряетъ всякій смыслъ; если $x \neq 0$ и при томъ $|x| = 1$, то абсолютная величина правой части равна 1, а абсолютная величина лѣвой части болѣе 1; если же $x \neq 0$ и $|x| > 1$, то лѣвая часть равенства (2) есть цѣлое число (z — цѣлое число по условію), а правая — дробное число, а потому равенство (2) также невозможно. Покажемъ теперь, что при цѣлыхъ значеніяхъ x и y равенство (1) не можетъ имѣть мѣста, коль скоро $y > 5$. Пусть $y > 5$, т. е. $y = 6 + m$, гдѣ m — цѣлое число, удовлетворяющее условію $m \geqq 0$. Тогда уравненіе (1) приметъ видъ:

$$x^{6+m} - x - 10(6+m) = 0, \tag{3}$$

гдѣ $m \geqq 0$. Уравненіе (3) не удовлетворяется при $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, такъ какъ при каждомъ изъ этихъ значеній x лѣвая часть его принимаетъ отрицательныя значенія. При $x = 2$ лѣвая часть уравненія (3) принимаетъ положительное значеніе, а потому это уравненіе невозможно рѣшить въ цѣлыхъ числахъ, полагая $x = 2$. Въ самомъ дѣлѣ, при $m = 0$ лѣвая часть этого уравненія обращается, полагая $x = 2$, въ $2^6 - 2 - 60 = 64 - 62 > 0$. При $m > 0$, полагая $m = 1 + k$, гдѣ $k \geqq 0$, находимъ:

$$\begin{aligned} 2^{6+m} - 2 - 10(6+m) &= 2^{7+k} - 2 - 10(7+k) = \\ = 128 \,.\, 2^k - 72 - 10k &= 72(2^k - 1) + 10(2^k - k) + 46 \,.\, 2^k. \end{aligned} \tag{4}$$

Но, при $k \geqq 0$, имѣемъ:

$$2^k - 1 \geqq 0 \quad \text{и} \quad 2^k - k \geqq 0,$$

такъ какъ $2^0 - 0 = 1$, $2^1 - 1 = 1$, а при $k \geqq 2$ справедливы соотношенія

$$2^k - k = (1+1)^k - k = 1 + k + \ldots + 1 - k = 1 + \ldots + 1 \geqq 2,$$

т. е. $2^k - k$ не отрицательно при k неотрицательномъ; наконецъ, $2^k \geqq 1$. Поэтому [см. (4)], при $m > 0$, находимъ:

$$2^{6+m} - 2 - 10(6+m) \geqq 46 \,.\, 2^k \geqq 46 > 0. \tag{5}$$

Пусть теперь $x > 2$. Полагая $x = 2 + n$, гдѣ n есть цѣлое число, удовлетворяющее условію $n > 0$, записываемъ лѣвую часть уравненія (3) въ видѣ:

$$\begin{aligned} (2+n)^{6+m} - (2+n) - 10(6+m) &= (2+n)^{6+m} - (2+n) - 2^{6+m} + \\ + 2 + 2^{6+m} - 2 - 10(6+m) &= 2^{6+m} + (6+m)\,2^{5+m} n + \ldots + \\ + n^{6+m} - 2 - n - 2^{6+m} &+ 2 + [2^{6+m} - 2 - 10(6+m)]. \end{aligned} \tag{6}$$

Но при $n > 0$ имѣемъ:

$$n^{6+m} - n > 0,$$

а такъ какъ [см. (5)] $2^{6+m} - 2 - 10(6+m) > 0$, то [см. (6)]

$$(2+n)^{6+m} - (2+n) - 10(6+m) > 0. \tag{7}$$

Наконецъ, если x есть отрицательное число, при чемъ $|x| \geqq 2$, т. е. $x = -(2+n)$ гдѣ $n \geqq 0$, то

$$x^y - x - 10y = (2+n)^{6+m} \cdot (-1)^{6+m} + 2 + n - 10(6+m). \qquad (8)$$

Но изъ формулы (7) вытекаетъ:

$$|(2+n)^{6+m} \cdot (-1)^{6+m} + 2 + n| \geqq (2+n)^{6+m} - (2+n) > 10(6+m),$$

т. е. $|(2+n)^{6+m} \cdot (-1)^{6+m} + 2 + n| \neq |10(6+m)|$,

а потому

$$(2+n)^{6+m} \cdot (-1)^{6+m} + 2 + n - 10(6+m) \neq 0,$$

т. е. при x и y цѣлыхъ и удовлетворяющихъ условіямъ $x < 0$ и $y > 5$ (слѣдуетъ замѣтить, что значеніе $x = -1$ было испытано раньше) уравненіе (1) невозможно. Итакъ, остаются лишь предположенія

$$y = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5. \qquad (9)$$

При $y = 0$ равенство (1) принимаетъ видъ: $x^0 - x - 10 \cdot 0 = 1 - x = 0$, откуда $x = 1$; при $y = 1$ равенство (1) даетъ $x - x - 10 = 0$, что невозможно. При $y = 2$ имѣемъ: $x^2 - x - 20 = 0$, откуда $x_1 = 5$, $x_2 = -4$. При $y = 3, 4, 5$ уравненіе (1) принимаетъ соотвѣтственно видъ:

$$x^3 - x - 30 = 0, \quad x^4 - x - 40 = 0, \quad x^5 - x - 50 = 0. \qquad (10)$$

Но ни одно изъ уравненій (10) не имѣетъ цѣлыхъ корней. Чтобы понизить число испытаній, съ помощью которыхъ мы можемъ въ этомъ убѣдиться, введемъ обозначеніе $|x| = a$; тогда при x цѣломъ

$$|x^3 - x| = a^3 - a = (a-1)(a^2 + a + 1) > a^2, \quad |x^4 - x| \geqq a^4 - a =$$
$$= (a-1)(a^3 + a^2 + \ldots + 1) > a^3, \quad |x^5 - x| = a^5 - a = (a-1)(a^4 + a^3 + \ldots + 1) > a^4$$

Если $a > 5$, то (при x цѣломъ) $a \geqq 6$, $a^2 > 30$, а потому первое изъ уравненій (10) можетъ имѣть цѣлые корни лишь при $a < 6$, откуда вытекаетъ необходимость испытать лишь дѣлителей ± 1, ± 2, ± 3, ± 5 свободнаго члена 30, которые не даютъ ни одного цѣлаго корня. Точно такъ же при $a > 3$ (и x цѣломъ) $a^3 \geqq 64 > 40$, а потому, отыскивая цѣлые корни второго изъ уравненій (10), достаточно испытывать лишь дѣлителей ± 1, ± 2 числа 40; но ни одинъ изъ нихъ не даетъ искомаго цѣлаго корня. Если $a > 2$, то (при x цѣломъ) $a^4 \geqq 81 > 50$; поэтому при отысканіи цѣлыхъ корней третьяго изъ уравненій (10) можно ограничиться предположеніями $x = \pm 1$, ± 2 (такъ какъ слѣдующій по величинѣ дѣлитель 5 числа 50 болѣе 2); но ни одно изъ этихъ предположеній не даетъ цѣлаго корня. Изъ всего произведеннаго нами анализа задачи вытекаетъ, что всѣ рѣшенія уравненія (1) въ цѣлыхъ числахъ суть: $x_1 = 1$, $y_1 = 0$; $x_{2,1} = 5$, $x_{2,2} = -4$, $y = 2$.

Л. Лебедевъ (Обоянь); *Н. С.* (Одесса).

№ 887 (4 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$x^4 + 8a(x + a) + 1 = 0.$$

(Заимств. изъ *Supplemento al Periodico di matematica*).

Представивъ лѣвую часть даннаго уравненія въ видѣ:

$$x^4 + 8a(x+a) + 1 = x^4 + 8ax + 8a^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 + 2x^2 + 8ax + 8a^2 =$$
$$= (x^2 - 1)^2 + 2(x + 2a)^2 = [x^2 - 1 + i\sqrt{2}(x + 2a)][x^2 - 1 - i\sqrt{2}(x + 2a)] = 0,$$

мы видимъ, что она распадается на два квадратныхъ уравненія

$$x^2 + i\sqrt{2}\,x + (2a\sqrt{2}\,i - 1) = 0 \qquad (1)$$

и $$x^2 - i\sqrt{2}\,x - (2a\sqrt{2}\,i + 1) = 0, \qquad (2)$$

гдѣ $i = \sqrt{-1}$. Рѣшая каждое изъ квадратныхъ уравненій, получимъ всѣ четыре корня предложеннаго уравненія.

Н. Агрономовъ (Ревель); *Э. Лейнѣкъ* (Рига).

№ 891 (4 сер.). *Построить треугольникъ* ABC *по внутренней и внѣшней биссектрисамъ* $AD = l$ *и* $AD' = l'$ *и по* 1^0 *медіанѣ* $AM = m_a$ *или* 2^0 *симедіанѣ* $AN = n_a$ *угла* A.

Предположимъ, что задача рѣшена. Описавъ окружность около искомаго треугольника ABC, продолжимъ биссектрису AD до встрѣчи съ описанной окружностью въ точкѣ S и проведемъ изъ центра O этой окружности радіусъ OA. Діаметръ круга описаннаго, проходящій черезъ середину M хорды BC, перпендикуляренъ къ ней и дѣлитъ стягиваемыя ею дуги пополамъ, а потому онъ проходитъ черезъ S. Замѣчая, что $OA = OS$ (какъ радіусы) и что внутренняя и внѣшняя биссектрисы AD и AD' взаимно перпендикулярны, приходимъ въ случаѣ 1^0 къ слѣдующему построенію: построивъ прямоугольный треугольникъ DAD' по катетамъ $AD = l$ и $AD' = l'$, дѣлаемъ на прямой DD' радіусомъ $AM = m_a$ изъ A засѣчку M (такъ, чтобы M и D' лежали по разныя стороны D), возставляемъ изъ M перпендикуляръ къ MD' до встрѣчи съ продолженіемъ AD въ точкѣ S, а затѣмъ возставляемъ перпендикуляръ къ AS изъ средины AS до встрѣчи съ MS въ точкѣ O; описавъ изъ O окружность радіусомъ OA, назовемъ черезъ B и C точки встрѣчи ея съ прямой DD'; треугольникъ ABC есть искомый; однако, задача возможна лишь тогда, какъ это видно изъ ея анализа, если соблюдено условіе $m_a > l$. Случай 2^0, когда дана симедіана $AN = n_a$, легко приводится къ предыдущему. Дѣйствительно, медіана и симедіана, по опредѣленію, симметричны относительно биссектрисы AD, т. е. AD дѣлитъ уголъ между медіаной и симедіаной пополамъ. Поэтому, построивъ, какъ и въ случаѣ 1^0, прямоугольныя треугольникъ DAD', дѣлаемъ на DD' изъ A радіусомъ $AN = n_a$ засѣчку N, затѣмъ строимъ прямую AX подъ угломъ, равнымъ углу DAN къ прямой AD (конечно, такъ, чтобы AX и AN лежали по разныя стороны AD); тогда точка M встрѣчи AX и DD' опредѣляетъ медіану AM искомаго треугольника. Такимъ образомъ, можно считать извѣстной медіану AM и, руководствуясь этимъ, закончить построеніе такъ же, какъ и въ случаѣ 1^0. Задача возможна въ случаѣ 2^0 лишь тогда, если, по крайней мѣрѣ, одна изъ двухъ вообще возможныхъ засѣчекъ N располагается между точками D и D', и если соотвѣтствующая точка M расположена такъ, что D лежитъ между M и N.

Э. Лейнѣкъ (Рига); *Н. С.* (Одесса).

№ 897 (4 сер.). *Пусть* A_2, B_2, C_2 — *вторыя точки пересѣченія медіанъ треугольника* ABC *съ описанной окружностью. Доказать, что*

$$\left(\frac{b^2+c^2}{l_a}\right)^2 + \left(\frac{c^2+a^2}{l_b}\right)^2 + \left(\frac{a^2+b^2}{l_c}\right)^2 = 3(a^2+b^2+c^2) = 3(l_a m_a + l_b m_b + l_c m_c),$$

гдѣ a, b, c *суть стороны треугольника,* l_a, l_b, l_c — *суть соотвѣтственно разстоянія* AA_2, BB_2, CC_2 *и* m_a, m_b, m_c — *медіаны* AA_1, BB_1, CC_1.

Называя отрѣзокъ A_1A_2 черезъ p_a, имѣемъ (по свойству окружности):

$$m_a \cdot p_a = BA_1 \cdot CA_1 = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4},$$

откуда

$$p_a = \frac{a^2}{4m_a}$$

и $$l_a = m_a + p_a = m_a + \frac{a^2}{4m_a} = \frac{a^2 + 4m_a^2}{4m_a}. \qquad (1)$$

Принимая во вниманіе извѣстныя формулы:

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}, \quad m_b^2 = \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4}, \quad m_c^2 = \frac{2b^2 + 2a^2 - c^2}{4}, \tag{2}$$

находимъ изъ равенства (1):

$$l_a = \frac{a^2 + 2b^2 + 2c^2 - a^2}{4m_a} = \frac{2(b^2 + c^2)}{4m_a} = \frac{b^2 + c^2}{2m_a}, \tag{3}$$

откуда

$$\frac{b^2 + c^2}{l_a} = 2m_a \tag{4}$$

и, по аналогіи,

$$\frac{c^2 + a^2}{l_b^2} = 2m_b, \quad \frac{a^2 + b^2}{l_c^2} = 2m_c. \tag{5}$$

Возвышая въ квадратъ равенства (4) и (5) и принимая во вниманіе формулы (2), получимъ:

$$\left(\frac{b^2 + c^2}{l_a}\right)^2 + \left(\frac{c^2 + a^2}{l_b}\right)^2 + \left(\frac{a^2 + b^2}{l_c}\right)^2 =$$
$$= \frac{4(2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2c^2 + 2a^2 - b^2 + 2b^2 + 2a^2 - c^2)}{4} = 3(a^2 + b^2 + c^2). \tag{6}$$

Затѣмъ съ помощью формулы (3) и аналогичныхъ ей выводимъ:

$$3(l_a m_a + l_b m_b + l_c m_c) = \frac{3[(b^2 + c^2) + (c^2 + a^2) + (a^2 + b^2)]}{2} = 3(a^2 + b^2 + c^2),$$

а потому [см. (6)]

$$\left(\frac{b^2 + c^2}{l_a}\right)^2 + \left(\frac{c^2 + a^2}{l_b}\right)^2 + \left(\frac{a^2 + b^2}{l_c}\right)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2) = 3(l_a m_a + l_b m_b + l_c m_c).$$

Э. Лейнькъ (Рига).

№ 898 (4 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$1 + \frac{a_1}{x - a_1} + \frac{a_2 x}{(x - a_1)(x - a_2)} + \frac{a_3 x^2}{(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)} + \ldots +$$
$$+ \frac{a_{2m} x^{2m-1}}{(x - a_1)\ldots(x - a_{2m})} = \frac{2px^m - p^2}{(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{2m})}.$$

Прежде всего докажемъ индуктивнымъ путемъ тожество:

$$1 + \frac{a_1}{x - a_1} + \frac{a_2 x}{(x - a_1)(x - a_2)} + \frac{a_3 x^2}{(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)} + \ldots +$$
$$+ \frac{a_k x^{k-1}}{(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_k)} = \frac{x^k}{(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_k)}. \tag{1}$$

Съ этой цѣлью допустимъ, что тожество (1) имѣетъ мѣсто для нѣкотораго опредѣленнаго значенія k. Тогда, прибавивъ къ обѣимъ его частямъ по

$$\frac{a_{k+1} x^k}{(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_k)(x - a_{k+1})}$$

получимъ:

$$1+\frac{a_1}{x-a_1}+\frac{a_2x}{(x-a_1)(x-a_2)}+\frac{a_3x^2}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}+\ldots+$$

$$+\frac{a_kx^{k-1}}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k)}+\frac{a_{k+1}x^k}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k)(x-a_{k+1})}=$$

$$=\frac{x^k}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k)}+\frac{a_{k+1}x^k}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k)(x-a_{k+1})}=$$

$$=\frac{x^k}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k)}\cdot\left(1+\frac{a_{k+1}}{x-a_{k+1}}\right)=$$

$$=\frac{x^k(x-a_{k+1}+a_{k+1})}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k)(x-a_{k+1})}=\frac{x^{k+1}}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k)(x-a_{k+1})},$$

откуда видно, что изъ правильности тожества (1) для нѣкотораго опредѣленнаго значенія k вытекаетъ правильность его и для значенія k, единицей большаго. Такимъ образомъ, замѣчая, что тожество (1) имѣетъ мѣсто при $k=1$ (это видно изъ формулы $1+\frac{a_1}{x-a_1}=\frac{x}{x-a_1}$), мы выводимъ обычнымъ способомъ, что оно вѣрно для всякаго цѣлаго положительнаго значенія k. Полагая теперь въ тожествѣ (1) $k=2m$, мы видимъ, что первая часть предложеннаго для рѣшенія уравненія тожественно равна выраженію $\frac{x^{2m}}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{2m})}$, а потому предложенное уравненіе равносильно уравненію

$$\frac{x^{2m}-2px^m+p^2}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{2m})}=\frac{(x^m-p)^2}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{2m})}=0, \qquad (2)$$

откуда вообще вытекаетъ

$$x^m-p=0,$$

$$x=\alpha\sqrt[m]{p}, \qquad (3)$$

гдѣ $\sqrt[m]{p}$ есть нѣкоторое опредѣленное значеніе этого радикала, а α должно принимать всевозможныя значенія $\sqrt[m]{1}$. Итакъ, предложенное уравненіе имѣетъ вообще m корней. Слѣдуетъ, однако, замѣтить, что въ случаѣ, если какія-либо два изъ количествъ $a_1, a_2, \ldots, a_{2m}$,—напримѣръ,—a_r и a_s равны одновременно одному изъ значеній правой части равенства (3), то числитель и знаменатель лѣвой части уравненія (2) сокращается на $(x-a_r)^2$, и сообразно съ этимъ число корней понижается.

Э. Лейнъкъ (Рига); *Н. С.* (Одесса).

№ 918 (4 сер.). *Доказать тожество*

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

(Заимств. изъ *Journal de Mathématiques speciales*).

Предложенное для доказательства равенство справедливо при $n=1$; дѣйствительно, полагая въ немъ $n=1$, имѣемъ:

$$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

Допустимъ, что оно имѣетъ мѣсто при $n = m$. Тогда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{2m} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{2m}.$$

Прибавивъ къ обѣимъ частямъ по $\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2(m+1)}$, имѣемъ:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2(m+1)} =$$

$$= \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2(m+1)} =$$

$$= \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} + \ldots + \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m+1} + \left[\frac{1}{m+1} - \frac{1}{2(m+1)}\right] =$$

$$= \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} + \ldots + \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2(m+1)} =$$

$$= \frac{1}{(m+1)+1} + \frac{1}{(m+1)+2} + \ldots + \frac{1}{2(m+1)}.$$

Итакъ, если предложенное для доказательства равенство вѣрно для $n = m$, то оно вѣрно и для $n = m + 1$; но, будучи вѣрно для $n = 1$, оно оказывается вѣрнымъ для любого цѣлаго положительнаго значенія n.

Ф. Доброхотовъ (Камчатка).

✓ **№ 934** (4 сер.). *Доказать, что перпендикуляръ, опущенный изъ средины боковой стороны равнобокой ортодіагональной трапеціи на противоположную сторону, равенъ* $\frac{\mathfrak{m}^2}{\mathfrak{b}}$, *гдѣ* $\mathfrak{b}$ *есть боковая сторона, а* $\mathfrak{m}$ *— средняя линія трапеціи.*

Пусть $ABCD$ есть равнобокая трапеція, которая при томъ ортодіагональна (т. е. діагонали ея AC и BD взаимно перпендикулярны), и пусть AB и DC суть ея параллельныя стороны. Назовемъ черезъ E и F соотвѣтственно средины сторонъ AD и BC, проведемъ среднюю линію EF, діагональ BD, высоту BH и прямую FH. Такъ какъ F есть средина гипотенузы BC прямоугольнаго треугольника BHC, то $FH = FC$, а потому $\angle FHC = \angle FCH = \angle ADC$; слѣдовательно, $ED \parallel FH$, откуда, имѣя въ виду, что $EF \parallel DH$, выводимъ равенство

$$EF = DH. \tag{1}$$

Діагонали AC и DB пересѣкаются въ нѣкоторой точкѣ O, образуя, по свойству равнобокой трапеціи, равнобедренный треугольникъ DOC, уголъ при O котораго, по условію, прямой. Поэтому $\angle ODC = \frac{\pi}{4}$, откуда слѣдуетъ, что $DH = BH$, а потому [см. (1)]

$$EF = m = BH. \tag{2}$$

Опуская изъ F перпендикуляръ FG на AD и принимая во вниманіе равенства угловъ $\angle GEF = \angle ADC = \angle BCH$, выводимъ изъ подобія прямоугольныхъ треугольниковъ GEF и BCH равенство [см. (2)]

$$\frac{FG}{EF} = \frac{BH}{BC}, \quad \frac{FG}{m} = \frac{m}{b},$$

откуда

$$FG = \frac{m^2}{b}.$$

В. Пржевальскій (Шуя); *Н. С.* (Одесса).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

ОТКРЫТА ПОДПИСКА НА 1909 ГОДЪ

НА ЕЖЕМѢСЯЧНЫЙ

литературно-политическій и популярно-научный журналъ

XVIII г. изданія. **„ОБРАЗОВАНІЕ"** XVIII г. изданія.

Съ 24 октября журналъ перешелъ въ руки новой редакціи и выходитъ своевременно.

„Образованіе" въ дальнѣйшемъ явится безпартійнымъ органомъ, поставившимъ своею задачею давать въ *беллетристическомъ* отдѣлѣ здоровую, художественную литературу. Широко ставятся *экономическій и публицистическій* отдѣлы и *обзоръ внутренней и внѣшней жизни.*

Вводятся новые отдѣлы: *научно-популярный* и *педагогическій.*

Въ *Критико-библіографическомъ отдѣлѣ* кромѣ статей историко-литературнаго и критическаго характера будетъ даваться подробный обзоръ книгъ и журналовъ, выходящихъ въ Россіи и за-границей.

Журналъ издается при редакціонномъ участіи:

Дм. Карышева, В. Тотоміанца, М. Новорусскаго, Н. Носкова.

Ближайшее участіе въ журналѣ принимаютъ:

Л. Андреевъ, Д. Айзманъ, К. Амфитеатровъ, П. Боборыкинъ, К. Баранцевичъ, П. Берлинъ, прив.-доц. М. Бернацкій, прив.-доц. Боголѣповъ, В. Богучарскій, Эд. Бернштейнъ, А Блокъ, В. Боцяновскій, Л. Бухъ, Б. Веселовскій. Н. Валентиновъ, Л. Велиховъ, Д. М. Герценштейнъ, Г. Галина, проф. Э. Гриммъ, Г. Градовскій, В. Громанъ, С. Гусевъ-Оренбургскій, А. Ельницкій, З. Журавская, Д. Зайцевъ, проф. И. Иванюковъ, Е. Игнатьевъ, А. Измайловъ, проф. А. Исаевъ, Анат. Каменскій, П. С. Карaскевичъ, М. Кеджи-Шаповаловъ, проф. Л. Козловскій, Л. Клейнбортъ, А Коллонтай, А. Котельниковъ, Дм. Крачковскій, Н. Кудринъ, А. Купринъ, Е. Кускова, Д. Лаврентьевъ, Ю. Лавриновичъ, В. Лихачевъ, проф. Т. Локоть, А. Лосицкій, Ал. Луговой, А. Лукьяновъ, В. Махновецъ (Акимовъ), С. Минцловъ, М. Морозовъ, Ник. Морозовъ, В. Муйжель, В. Мукосѣвъ, А. Новиковъ, М. Оленовъ, С. Подъячевъ, прив.-доц. С. Поварнинъ, Ив. Порошинъ-Бѣлозерскій, В. Португаловъ, В. Поссе, С. Прокоповичъ, прив.-доц. В. Святловскій, Сергѣевъ-Ценскій, Л. Синицкій (Сѣдовъ), Е. Смирновъ, Н. Соколовъ, Б. Торгашевъ, проф. М. Туганъ-Барановскій, Г. Туманова, Г. Тумимъ, В. Филатовъ, К. Фофановъ, М. Хейсинъ, Д. Цензоръ, Ѳ. Червинскій, И. Чернышевъ, В. Шарый и А Ѳедоровъ.

Двойная книга за сентябрь-октябрь находится подъ арестомъ, наложеннымъ по распоряженію Главнаго Управленія по дѣламъ печати, и по освобожденіи будетъ немедленно разослана г.г. подписчикамъ. Ноябрьскій № выходитъ 2 декабря, слѣдующіе номера будутъ выпускаться по 20 числамъ каждаго мѣсяца.

Подписная цѣна: съ доставкой и пересылкой на годъ **7 р.**, на полгода **3 р. 50 к.**, на 3 мѣсяца **2 р. 40 к.**, на 1 мѣсяцъ **85 к.** За-границу на годъ **10 р.**, на полгода **5 р.**, отдѣльные №№ продаются въ конторѣ журнала и въ книжныхъ магазинахъ по **85 к.**

Принимается подписка въ С.-Петербургѣ, 5 Рождественская, 23, въ конт. „Образованія".

Редакторъ-Издатель **Дм. Карышевъ.**