Обложка
ищется

Обложка
пщется

XXXIX Сем. № 2.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 458.

Содержаніе: Современная постановка задачи объ обоснованіи геометріи. (Продолженіе). *Прив.-доц. В. Кагана.* — Замѣтка о вычисленіи π. (Окончаніе). *П. С. Флорова.* — Объ анодныхъ лучахъ. — Рецензіи: О. Д. Хвольсонъ. Курсъ физики. *Н. Р.* — Задачи для учащихся №№ 7—12 (5 сер.). — Рѣшенія задачъ №№ 807, 808, 832. — Объявленія.

Современная постановка задачи объ обоснованіи геометріи.

Привата-доцента *В. Кагана.*

Рѣчь, произнесенная при защитѣ диссертаціи*) на степень магистра чистой математики.

(*Продолженіе* **).

Къ какому выводу, однако, приводитъ эта новая геометрія по отношенію къ пятому постулату Евклида? Какъ мы сказали выше, доказать этотъ постулатъ—значило бы обнаружить, что, принимая остальные постулаты Евклида, мы логически вынуждены принять и этотъ. Но если оказывается, что мы вовсе не вынуждены принять также пятый постулатъ, что, сохраняя остальные постулаты Евклида, мы можемъ построить геометрію, замѣнивъ пятый постулатъ противоположнымъ допущеніемъ, то это означаетъ, что пятый постулатъ не представляетъ собой логическаго слѣдствія изъ остальныхъ постулатовъ Евклида, что онъ и не можетъ быть доказанъ. Этотъ выводъ неизбѣженъ, если правильна геометрія Лобачевскаго, если она не приводитъ къ абсурду, какъ бы далеко мы ее ни развивали. Итакъ, мы стоимъ передъ дилеммой: либо геометрія Лобачевскаго въ своемъ развитіи необходимо должна привести къ абсурду, и тогда постулатъ Евклида доказанъ; либо геометрія Лобачевскаго не содержитъ противорѣчія, тогда

*) *В. Каганъ.* „Основанія геометріи“. Часть I. Опытъ обоснованія евклидовой геометріи. Часть II. Историческій очеркъ развитія ученія объ основаніяхъ геометріи.

**) См. № 457 „Вѣстника“.

невозможно доказать Евклидова постулата. Если бы Лобачевскій доказалъ, что его геометрія не можетъ привести къ абсурду, сколько бы мы ее ни развивали, то вопросъ былъ бы рѣшенъ. „Какъ это ни странно“, говоритъ Оствальдъ, „но общая черта въ психологіи всякаго изслѣдователя заключается въ томъ, что онъ не доходитъ до конца того пути, который онъ нашелъ и проложилъ“. У Лобачевскаго здѣсь дѣло было не въ психологіи. Всю жизнь онъ старался доказать, что его система не можетъ привести къ противорѣчію, но это ему не удавалось. Онъ былъ чрезвычайно близокъ къ этому,—если хотите, въ скрытомъ видѣ это доказательство у него уже есть, но онъ не можетъ надлежащимъ образомъ его формулировать; ему не хватаетъ для этого еще одной идеи.

Въ началѣ шестидесятыхъ годовъ Петерсъ началъ издавать переписку между Гауссомъ и Шумахеромъ. Во второмъ томѣ, появившемся въ 1860 г., помѣщены два письма отъ 1831 г., изъ которыхъ второе содержитъ краткое изложеніе взглядовъ Гаусса на основы геометріи. Въ пятомъ томѣ, появившемся въ 1863 г., помѣщено письмо, въ которомъ Гауссъ даетъ восторженный отзывъ о работѣ Лобачевскаго.

Эти письма обратили вниманіе всего математическаго міра на работы Лобачевскаго, и его „Воображаемая геометрія“ вновь была призвана къ жизни. Оставляя въ сторонѣ скромные труды Бальцера, Батгальини и Гуэля, имѣвшіе цѣлью выяснить идеи Лобачевскаго, мы обращаемся къ работѣ Бельтрами, появившейся въ 1868 г.

Бельтрами много занимался теоріей поверхностей; цѣлый рядъ мемуаровъ, опубликованныхъ имъ по этому предмету, относится къ обширному циклу тѣхъ работъ, которыя имѣютъ въ виду развить идеи, изложенныя Гауссомъ въ его безсмертномъ мемуарѣ „Disquisitiones generales circa superficies curvas“.

Какъ плоскость имѣетъ свою геометрію, которую мы называемъ планиметріей, такъ и кривая поверхность можетъ имѣть свою геометрію. Наиболѣе извѣстна въ этомъ смыслѣ геометрія сферы, на которой окружности большихъ круговъ замѣняютъ прямыя линіи плоской геометріи. Сферическая геометрія изучаетъ образы на сферической поверхности, сферическіе треугольники, условія ихъ конгруэнтности, измѣреніе ихъ площадей. Эта геометрія естественно отличается отъ плоской геометріи, такъ какъ мы имѣемъ здѣсь другую поверхность, другіе образы. Замѣчательное свойство сферы заключается въ томъ, что части этой поверхности могутъ передвигаться по ней безъ разрыва и складокъ; она вездѣ имѣетъ, какъ говорятъ геометры, одинаковую, или постоянную кривизну. Изслѣдованіемъ такого рода поверхностей, на которыхъ возможно такое передвиженіе, много занимались еще до Бельтрами; при этомъ обнаружилось, что существуютъ два главныхъ типа этихъ поверхностей: одинъ—сферическій, другой—Бельтрами называлъ псевдосферическимъ. И вотъ совершенно неожиданно Бельтрами обнаружилъ, что на этихъ поверхностяхъ имѣетъ мѣсто плоская геометрія Лобачевскаго. Это значитъ: на каждой части такой поверхности образы сохраняютъ здѣсь совершенно тѣ же соотношенія, какія имѣютъ мѣсто между соотвѣтствующими образами въ планиметріи

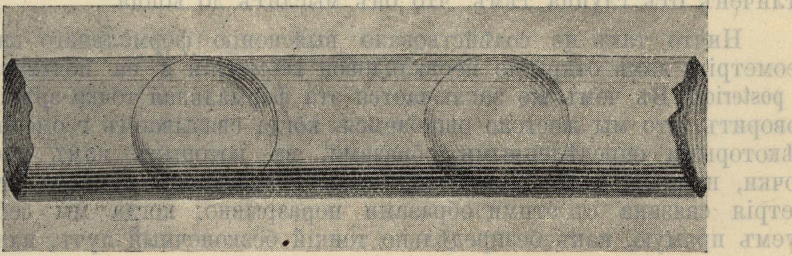
Лобачевскаго. Подобно тому, какъ на сферѣ стороны сферическаго треугольника связаны уравненіями сферической тригонометріи, элементы псевдосферическаго треугольника связаны тѣми уравненіями, которыя составляютъ тригонометрію Лобачевскаго. Всѣ странности плоской геометріи Лобачевскаго находятъ себѣ здѣсь не только подтвержденіе, но и поясненіе.

Мемуаръ Бельтрами въ короткое время получилъ широкое распространеніе въ математическомъ мірѣ. Впечатлѣніе, произведенное имъ, было громадно. Причина отрицательнаго отношенія къ неевклидовой геометріи заключалась въ томъ, что геометры связывали съ геометрическими понятіями опредѣленныя представленія, съ которыми геометрія считалась неразрывно связанной. Поэтому геометрическая система, находившаяся въ прямомъ противорѣчіи съ тѣми образами, съ которыми геометрія считалась неразрывно связанной, казалась непонятной однимъ и даже нелѣпостью другимъ. Съ появленіемъ мемуара Бельтрами все сразу измѣнилось. Двумѣрная гиперболическая геометрія получила реальное истолкованіе, былъ указанъ рядъ образовъ, къ которымъ она примѣняется. Говорить о нелѣпости этой системы сдѣлалось невозможнымъ; напротивъ, построеніе этой системы a priori и ея подтвержденіе a posteriori служили лучшимъ подтвержденіемъ формальнаго характера геометріи;—точка зрѣнія, которую до нѣкоторой степени признавали, можно сказать, всѣ философы, но которую довелъ до конца и имѣлъ смѣлость формулировать во всей ея наготѣ Германъ Грассманъ, также не дожившій до признанія его идей. Но „мудрецъ отличенъ отъ глупца тѣмъ, что онъ мыслитъ до конца“.

Ничто такъ не содѣйствовало выясненію формальнаго значенія геометріи, какъ открытіе неевклидовой геометріи и ея подтвержденіе a posteriori. Въ чемъ же заключается эта формальная точка зрѣнія? Она говоритъ, что мы жестоко ошибаемся, когда связываемъ геометрію съ нѣкоторыми опредѣленными образами, въ которыхъ намъ рисуются точки, прямыя, углы, плоскости,—главное, когда мы думаемъ, что геометрія связана съ этими образами неразрывно; когда мы себѣ рисуемъ прямую, какъ безпредѣльно тонкій безконечный лучъ, или плоскость, какъ безконечно тонкую пластинку. Напротивъ, съ этими образами геометрія совершенно не связана. Она исходитъ только изъ нѣкоторыхъ терминовъ, съ которыми не связываетъ никакихъ опредѣленныхъ представленій, и изъ нѣсколькихъ основныхъ предложеній, изъ которыхъ она разматывается по законамъ силлогистики, путемъ послѣдовательнаго замѣщенія терминовъ, совершенно независимо отъ того содержанія, которое въ эти термины вкладывается. И если мы этихъ основныхъ терминовъ не умѣемъ выдѣлить, если мы не умѣемъ указать этихъ основныхъ предложеній, то это только потому, что мы ихъ не знаемъ,—потому, что процессъ этотъ совершался ощупью, безсознательно, что шелъ онъ фактически не по тому пути, который соотвѣтствуетъ его дѣйствительному значенію.

Ту систему образовъ на псевдосферѣ, на которой осуществляется плоская геометрія Лобачевскаго, Бельтрами называетъ *интерпретаціей* этой геометріи. Съ такой точки зрѣнія тѣ образы, въ которыхъ мы привыкли себѣ представлять основные объекты геометріи,—точки, прямыя, плоскости и т. д.—представляютъ собой также только интерпретацію, иллюстрацію обыкновенной Евклидовой геометріи. Это есть одна система образовъ, какъ теперь говорятъ—одно многообразіе, въ которомъ наша геометрія находитъ осуществленіе. Но это *не единственная* совокупность объектовъ, *не единственное* многообразіе, къ которому примѣняется наша геометрія. Возможны другія системы объектовъ, другія многообразія, къ которымъ также примѣняется обыкновенная Евклидова геометрія.

Постараюсь выяснить это на простѣйшемъ примѣрѣ. Выберемъ опредѣленный радіусъ, скажемъ въ 1 футъ, и представимъ себѣ всѣ безъ исключенія сферы въ пространствѣ, имѣющія этотъ радіусъ. Они представляютъ собой нѣкоторую совокупность, комплексъ, какъ мы уже сказали, *многообразіе*. Забудемъ теперь на короткое время, что мы прежде обычно разумѣли подъ терминами „точка“, „прямая“ и т. д., и условимся подъ словомъ „*точка*“ разумѣть каждую изъ нашихъ сферъ; эти *сферы* мы будемъ называть *точками* *). Представимъ себѣ далѣе безконечные цилиндры того же радіуса; эти цилиндры мы будемъ называть *прямыми*. Мы будемъ говорить, что *точка лежитъ на прямой*, когда соотвѣтствующая сфера цѣликомъ лежитъ внутри соотвѣтствующаго цилиндра, т. е. вписана въ этотъ цилиндръ: цилиндръ касается сферы по окружности большого круга въ виду равенства діаметровъ, какъ это видно на фиг. 3. Мы будемъ говорить,

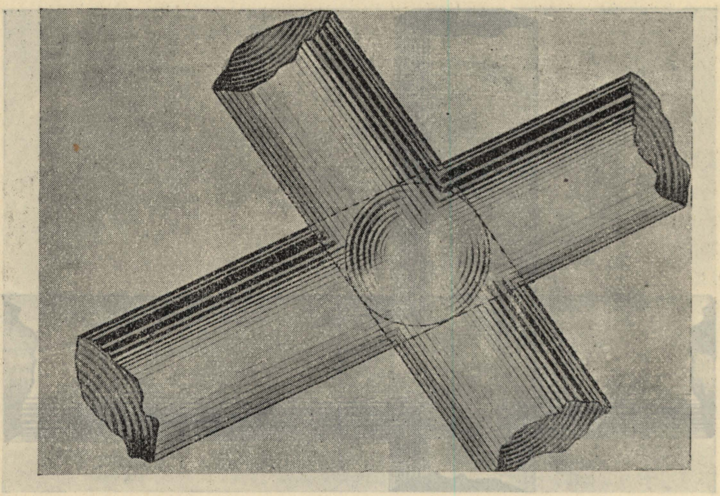


Фиг. 3.

что наши *прямыя пересѣкаются*, когда они имѣютъ (фиг. 4) *общую точку*, т. е. когда соотвѣтствующіе цилиндры имѣютъ общую сферу, и т. д. Въ такомъ случаѣ къ этимъ образамъ, къ этому многообразію вполнѣ примѣняется Евклидова геометрія. Фигура 3 изображаетъ, что двѣ наши точки вполнѣ опредѣляютъ проходящую черезъ нихъ *прямую* линію. Фигура 5 изображаетъ, что черезъ одну и ту же точку проходитъ множество *прямыхъ*, имѣющихъ эту общую *точку*. Фигура 6 изображаетъ, что черезъ *точку*, лежащую внѣ *прямой* можно къ ней провести только одинъ перпендикуляръ;

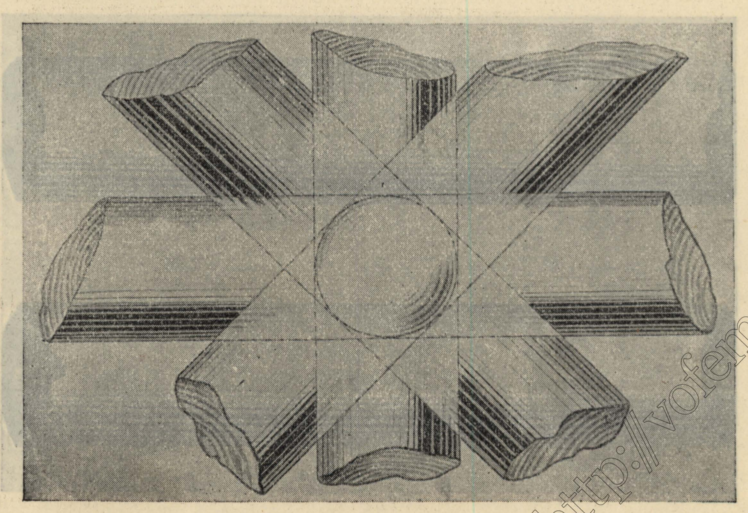
*) Для ясности мы отмѣчаемъ разрядкой, когда слова „точка“ и „прямая“ употребляются въ этомъ новомъ своемъ значеніи.

фигура 7 изображаетъ, что черезъ *точку*, лежащую внѣ *прямой*, можно къ ней провести только одну параллельную *прямую и т. д.*



Фиг. 4.

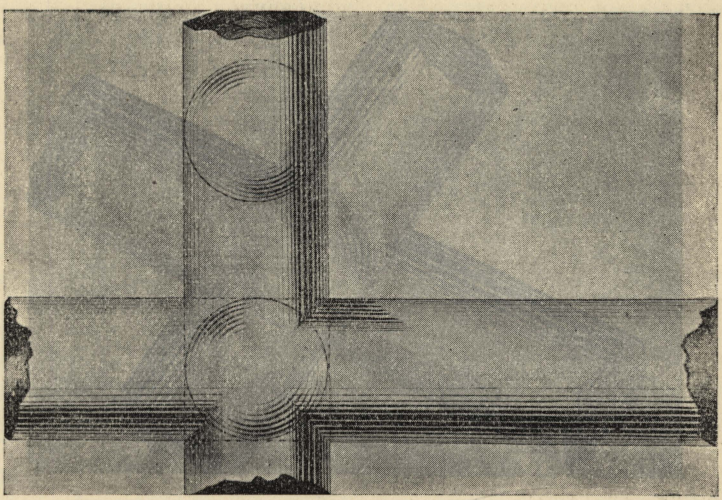
Это, кажется, очень ясно; къ этому многообразію такъ же примѣняется обыкновенная Евклидова геометрія, какъ она примѣняется къ тѣмъ образамъ, съ которыми мы обычно соединяемъ понятія о точкахъ, пря-



Фиг. 5.

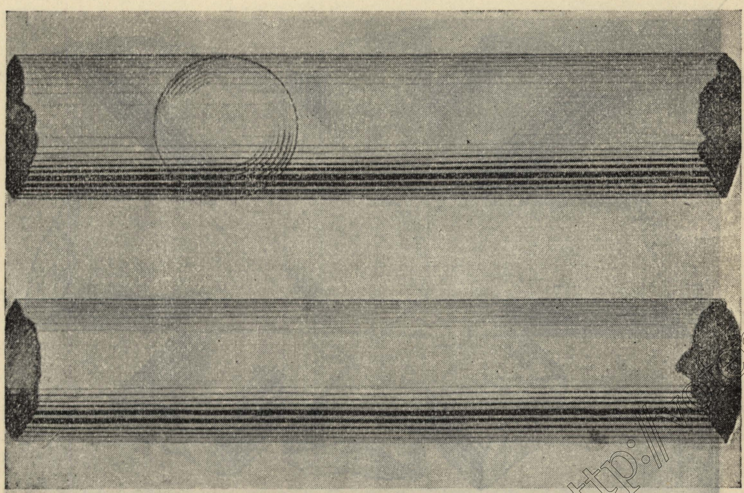
мыхъ и т. д. Это *другая* интерпретація Евклидовой геометріи, другое многообразіе, къ которому она примѣняется.

Но можетъ быть, это слишкомъ ясно, можетъ быть, я взялъ слишкомъ тривіальное многообразіе, я, такъ сказать, сохранилъ тѣ же точки



Фиг. 6.

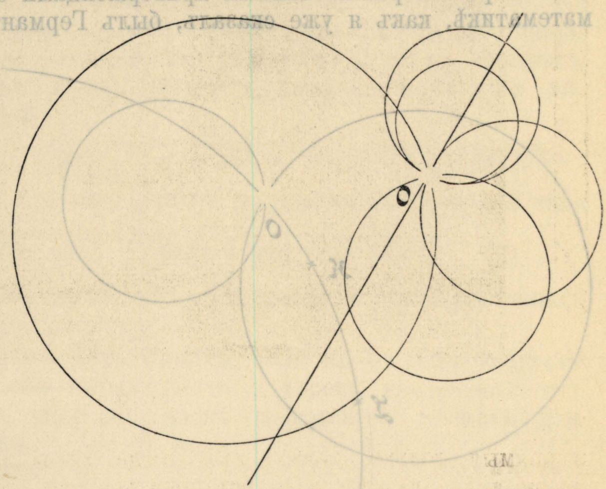
и прямыя, только сдѣлалъ ихъ толще. Позвольте для выясненія этой чрезвычайно важной идеи остановиться еще на одномъ примѣрѣ, на



Фиг. 7.

одномъ многообразіи, указанномъ талантливымъ французскимъ геометромъ Пуанкаре.

Представьте себѣ на плоскости всевозможныя окружности всевозможныхъ радіусовъ, проходящихъ черезъ одну и ту же точку O, связку окружностей, какъ ее принято называть. Будемъ теперь подъ точками разумѣть, какъ обыкновенно, точки нашей плоскости, за исключеніемъ только точки O; мы выбросимъ, мы опустимъ эту точку, мы исключимъ ее изъ плоскости, ея нѣтъ въ нашемъ новомъ многообразіи. Я грубо это выразилъ на этой фигурѣ (фиг. 8), вырѣзавъ кружокъ вокругъ точки O. Итакъ, нашими новыми точками будутъ служить прежнія точки нашей плоскости, кромѣ точки O. Но подъ прямыми мы будемъ теперь разумѣть окружности и прямыя проходящія черезъ выключенную точку O (фиг. 8). Какъ это ни странно, на первый взглядъ, но въ этомъ многообразіи при этомъ пониманіи точекъ и прямыхъ безусловно сохранится Евклидова геометрія; каждое предложеніе обыкновенной геометріи выражаетъ свойство этому многообразію дѣйствительно присущее. Нужно не много вниманія, чтобы уяснить себѣ, что черезъ любыя двѣ наши точки проходитъ всегда одна и только одна наша прямая, т. е. окружность нашей связки (фиг. 9), что двѣ наши прямыя могутъ пересѣкаться только въ одной точкѣ, что изъ точки, взятой на прямой, къ ней можно провести одинъ и только одинъ перпендикуляръ (фиг. 10), что черезъ точку, взятую внѣ прямой, можно провести къ ней только одну параллельную прямую (фиг. 11) и т. д.



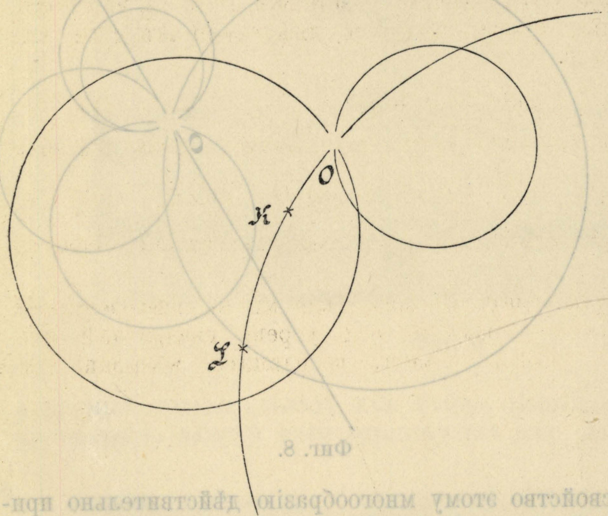
Фиг. 8.

Я нѣсколько забѣгаю, быть можетъ, впередъ, но я долженъ сказать, что такихъ многообразій, осуществляющихъ обыкновенную геометрію, можно теперь указать множество. Въ публичной рѣчи, повторяю, можно развѣ только охватить самую идею; но кто продумаетъ эти многообразія глубоко, тому становится кристаллически ясно, что связывать нашу геометрію съ какой-либо опредѣленной системой образовъ нѣтъ ни малѣйшихъ основаній.

Итакъ, различіе между представителями стараго дедуктивизма и строгаго формализма заключается въ томъ, что первые утверждали, что наша геометрія развивается чисто дедуктивно, и въ то же время связывали ее съ опредѣленной системой привычныхъ пространственныхъ образовъ; послѣдніе же утверждаютъ, что старая геометрія далека отъ такого совершенства, но что истины ея, добытыя чисто эмпирически, абсолютно не зависятъ отъ того субстрата, съ которымъ ее обыкновенно связываютъ, а потому она можетъ и должна быть построена сама изъ себя, т. е. изъ собственныхъ посылокъ, независимо отъ всякаго субстрата опредѣленной формаціи.

Быть можетъ, по существу, эта разница только, такъ сказать, количественная; но при извѣстныхъ размѣрахъ количественныхъ разница сама собой становится качественной.

Первыми рѣшительными приверженцами строгаго формализма въ математикѣ, какъ я уже сказалъ, былъ Германъ Грассманъ; онъ провелъ свои идеи черезъ науку чиселъ и написалъ первую дѣйствительно научную ариѳметику. Въ геометрію же твердой и смѣлой рукой ввели такую постановку вопроса Бернгардъ Риманъ и Германъ ф.-Гельмгольцъ. Физіологъ и математикъ, исходя изъ тонкихъ проблемъ теоріи функцій—одинъ, а другой — отъ вопросовъ физіологической оптики, пришли къ однимъ и тѣмъ же взглядамъ на основы геометріи. Вслѣдъ за появленіемъ работы Бельтрами Дедекиндъ опубликовалъ посмертный мемуаръ Римана „Ueber die Hypothesen, die der Geometrie zu Grunde liegen“, а вслѣдъ за нимъ и Гельмгольцъ напечаталъ свою работу подъ аналогичнымъ заглавіемъ „Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen“.



Фиг. 9.

Риману принадлежитъ и самое слово „многообразіе“ (Mannigfaltigkeit), которое я уже неоднократно употреблялъ.

Впрочемъ, элементомъ многообразія, къ которому примѣняется геометрія, у Римана является просто нѣкоторая совокупность чиселъ. Если совокупность трехъ вещественныхъ чиселъ x, y, z будемъ называть **точкой**, если мы каждой парѣ такихъ **точекъ** x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 отнесемъ число

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)+(z_1-z_2)^2},$$

которое назовемъ **разстояніемъ** между этими точками, если мы будемъ разумѣть подъ **плоскостью** совокупность такихъ точекъ, числа которыхъ (x, y, z) удовлетворяютъ линейному уравненію

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

а подъ прямой—совокупность точекъ, удовлетворяющихъ двумъ такимъ уравненiямъ, то всякому, кто знакомъ съ началами аналитической геометрiи, ясно, что въ этомъ численномъ многообразiи, или, какъ теперь чаще говорятъ, „аналитическомъ пространствѣ“, вполнѣ осуществляется геометрiя Евклида.

Но если такъ, если, принимая извѣстныя числовыя группы за точки, извѣстныя функцiи отъ координатъ за разстоянiя, мы получаемъ многообразiе, къ которому примѣняется Евклидова геометрiя, то что собственно связываетъ насъ съ этимъ именно выраженiемъ разстоянiя? Что будетъ, если мы иначе распредѣлимъ разстоянiя. Риманъ, впрочемъ, ставитъ вопросъ нѣсколько иначе. Элементъ, дифференцiалъ дуги выражается обычно формулой

$$\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}, \qquad (1)$$

а въ косоугольныхъ или криволинейныхъ координатахъ формулой вида

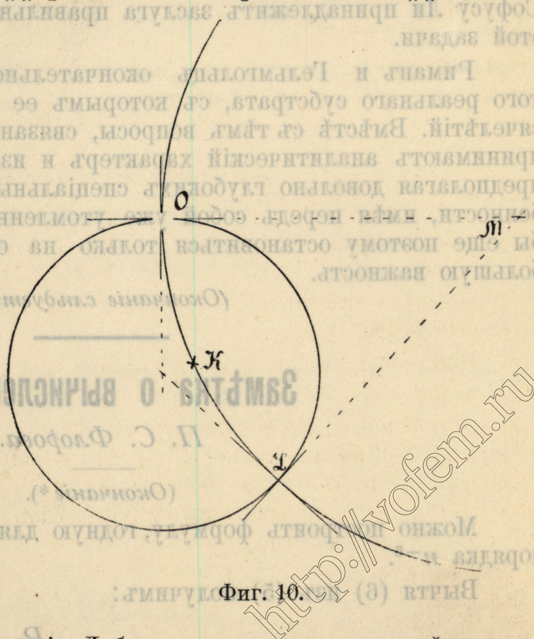
$$\sqrt{adx^2+bdy^2+cdz^2+fdxdy+gdydz+hdxdz}, \qquad (2)$$

гдѣ коэффицiенты опредѣленнымъ образомъ зависятъ отъ перемѣнныхъ x, y, z.

Что же будетъ, спрашиваетъ Риманъ, если мы за дифференцiалы длины примемъ любое такое выраженiе, т. е. корень квадратный изъ квадратичной формы отъ дифференцiаловъ координатъ, коэффицiенты которой суть совершенно произвольныя функцiи отъ координатъ. Риманъ обнаружилъ, что, коль скоро въ этомъ многообразiи возможно свободное движенiе, то выраженiе это можетъ быть всегда преобразованiемъ координатъ приведено къ виду:

$$\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{1+\frac{a}{4}(x^2+y^2+z^2)}. \qquad (3)$$

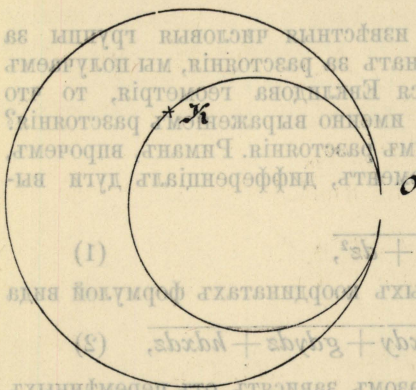
Здѣсь a есть постоянная, которую Риманъ называлъ кривизной многообразiя. Если эта постоянная равна нулю, то мы возвращаемся къ выраженiю (1), т. е. мы получаемъ Евклидову геометрiю. Если a имѣетъ отрицательное значенiе, то мы получаемъ геометрiю Лобачевскаго; если же a имѣетъ положительное значенiе, то мы получаемъ третью геометрiю, открытую Риманомъ. Эта геометрiя еще больше отличается отъ Евклидовой, такъ какъ въ ней не имѣетъ мѣста также и постулатъ, что прямая вполнѣ



Фиг. 10.

опредѣляется двумя точками; всѣ прямыя имѣютъ въ этой геометріи конечную длину и попарно пересѣкаются въ двухъ точкахъ и т. д.

Гельмгольцъ дополнилъ этотъ результатъ очень важнымъ указаніемъ; его не такъ просто выразить въ немногихъ словахъ, но я полагаю, я буду очень близокъ къ истинѣ, если формулирую идею Гельмгольца такъ:



Фиг. 11.

Если въ пространствѣ возможно всякое движеніе, коль скоро къ этому не встрѣчается препятствія со стороны того единственнаго требованія, что разстоянія не должны мѣняться при движеніи, то дифференціалъ дуги необходимо долженъ выражаться формулой (3), т. е. мы необходимо приходимъ къ одной изъ трехъ геометрическихъ системъ.

Этому мемуару нельзя достаточно надивиться. Если хотите, здѣсь все неправильно. Неправильна постановка вопроса, неправильны методы его рѣшенія. И черезъ это сплетеніе ошибокъ Гельмгольцъ благополучно приходитъ къ результату, по существу, совершенно правильному. Софусу Ли принадлежитъ заслуга правильной постановки и рѣшенія этой задачи.

Риманъ и Гельмгольцъ окончательно оторвали геометрію отъ того реальнаго субстрата, съ которымъ ее связывали въ теченіе тысячелѣтій. Вмѣстѣ съ тѣмъ вопросы, связанные съ основами геометріи, принимаютъ аналитическій характеръ и излагать ихъ содержаніе, не предполагая довольно глубокихъ спеціальныхъ знаній, трудно, въ особенности, имѣя передъ собой уже утомленныхъ слушателей. Я хотѣлъ бы еще поэтому остановиться только на одномъ вопросѣ, имѣющемъ большую важность.

(Окончаніе слѣдуетъ).

Замѣтка о вычисленіи π.

П. С. Флорова.

(*Окончаніе* *).

Можно построить формулу, годную для вычисленія π до величинъ порядка n^{-6}.

Вычтя (6) изъ (5) получимъ:

$$16A_{4n} - A_{2n} - (16A_{2n} - A_n) = \frac{P_{2n}P^2_{4n} - P_{4n}P^2_{8n}}{3 . 4 . 16 . 16 . n^4},$$

*) См. № 457 „Вѣстника“.

что посредствомъ обозначенія (7) можно представить въ видѣ:

$$15(B_{2n} - B_n) = \frac{P_{4n}(P_{2n}P_{4n} - P^2{}_{8n})}{3 . 4 . 16 . 16 . n^4}. \qquad (11)$$

Помощью тождества

$$P_{2n}P_{4n} - P^2{}_{8n} = (P_{4n} + P_{8n})(P_{4n} - P_{8n}) + P_{4n}(P_{2n} - P_{4n})$$

и формулъ:

$$P_{4n} - P_{8n} = \frac{P_{4n}P^2{}_{8n}}{16 . 16n^2},$$

$$P_{2n} - P_{4n} = \frac{P_{2n}P^2{}_{4n}}{16 . 4 . n^2}$$

найдемъ:

$$B_{2n} - B_n = \frac{P^2{}_{4n}(P^3{}_{8n} + P_{4n}P^2{}_{8n} + 4P_{2n}P^2{}_{4n})}{15 . 3 . 4 . 16 . 16 . 16 . 16 . n^6}. \qquad (12)$$

Перемѣнивъ здѣсь n на $2n$, получимъ:

$$64(B_{4n} - B_{2n}) = \frac{P^2{}_{8n}(P^3{}_{16n} + P_{8n}P^2{}_{16n} + 4P_{4n}P^2{}_{8n})}{15 . 3 . 4 . 16 . 16 . 16 . 16 . n^6}. \qquad (13)$$

Сопоставляя (12) и (13) и замѣчая, что периметры правильныхъ описанныхъ многоугольниковъ съ возрастаніемъ числа сторонъ уменьшаются, находимъ:

$$64(B_{4n} - B_{2n}) < B_{2n} - B_n.$$

Представивъ это неравенство въ видѣ:

$$64B_{2n} - B_n > 64B_{4n} - B_{2n}$$

и замѣтивъ, что при $k = \infty$

$$lim\ B_k = \frac{1}{2\pi},$$

будемъ имѣть:

$$64B_{2n} - B_n > \frac{63}{2\pi}. \qquad (14)$$

Пусть

$$64B_{2n} - B_n = 63C_n. \qquad (15)$$

Тогда на основаніи (8) и (14) получимъ:

$$B_n < \frac{1}{2\pi} < C_n. \qquad (16)$$

Чтобы опредѣлить точность вычисленія $\frac{1}{2\pi}$ по этому неравенству составимъ разность $C_n - B_n$. По формулѣ (15) находимъ:

$$63(C_n - B_n) = 64(B_{2n} - B_n).$$

Отсюда на основаніи (12) будемъ имѣть:

$$C_n - B_n = \frac{P^2{}_{4n}(P^3{}_{8n} + P_{4n}P^2{}_{8n} + 4P_{2n}P^2{}_{4n})}{63\,.\,15\,.\,3\,.\,16\,.\,16\,.\,16\,.\,n^6}.$$

Числитель правой части этого равенства меньше

$$6\,.\,P_{4n}\,.\,P^4{}_{2n} < 6\,.\,P_4\,P^4{}_6 = 6\,.\,8\,.\,48\,.\,48.$$

Слѣдовательно,

$$C_n - B_n < \frac{1}{3\,.\,5\,.\,7\,.\,n^6}.$$

На этомъ основаніи неравенство (16) можно переписать такъ:

$$B_n < \frac{1}{2\pi} < B_n + \frac{1}{3\,.\,5\,.\,7\,.\,n^6}, \qquad (17)$$

гдѣ, какъ это видно изъ формулъ (7) и (3),

$$B_n = \frac{16A_{2n} - A_n}{15} = \frac{1}{45}\left(\frac{64}{P_{4n}} - \frac{20}{P_{2n}} + \frac{1}{P_n}\right). \qquad (18)$$

Примѣнимъ неравенство (17) къ случаю $n = 6$. Предварительно выведемъ нѣкоторыя формулы.

Если положимъ

$$D_n = \frac{2n}{P_n} \quad \text{и} \quad D_{2n} = \frac{4n}{P_{2n}},$$

то уравненіе (1) приведется къ виду:

$$D^2{}_{2n} - 2D_nD_{2n} - 1 = 0,$$

откуда

$$D_{2n} = D_n + \sqrt{1 + D^2{}_n}.$$

Замѣтивъ, что

$$D_6 = \frac{12}{P_6} = \sqrt{3},$$

посредствомъ предыдущей формулы послѣдовательно найдемъ:

$$D_{12} = 2 + \sqrt{3} \quad \text{и} \quad D_{24} = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{P_6}=\frac{\sqrt{3}}{12},\quad \frac{1}{P_{12}}=\frac{2+\sqrt{3}}{24},\quad \frac{1}{P_{24}}=\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{48}.$$

На основаніи (18) получаемъ:

$$B_6=\frac{1}{45}\left(\frac{64}{P_{24}}-\frac{20}{P_{12}}+\frac{1}{P_6}\right).$$

Слѣдовательно,

$$B_6=\frac{12+16\sqrt{2}+7\sqrt{3}+16\sqrt{6}}{540}.$$

Посредствомъ формулы (17) находимъ

$$\frac{1}{\pi}>\frac{12+16\sqrt{2}+7\sqrt{3}+16\sqrt{6}}{270}$$

и

$$\frac{1}{\pi}<\frac{12+16\sqrt{2}+7\sqrt{3}+16\sqrt{6}}{270}+\frac{1}{2449440}.$$

Произведя вычисленія получимъ:

$$0{,}3183096<\frac{1}{\pi}<0{,}3183101.$$

Каждое изъ этихъ чиселъ представляетъ собою $\frac{1}{\pi}$ съ точностью до 0,0000005. Изъ предыдущаго неравенства находимъ:

$$3{,}141590<\pi<3{,}141596.$$

Объ анодныхъ лучахъ.

По докладу, сдѣланному на 79 съѣздѣ германскихъ естествоиспытателей и врачей.

На Дрезденскомъ съѣздѣ германскихъ естествоиспытателей *Герке* (E. Gehrke) и *Рейхенгеймъ* (O. Reichenheim изъ Берлина) сообщили результаты своихъ изслѣдованій по вопросу объ анодныхъ лучахъ. Для пониманія ихъ доклада полезно будетъ обратиться къ прежнимъ работамъ этихъ изслѣдователей въ той же области, о которыхъ они съ конца 1906 г. напечатали рядъ сообщеній въ запискахъ Германскаго Физическаго общества.

Какъ всѣмъ извѣстно, катодъ Гейслеровой трубки при достаточномъ разрѣженіи газа испускаетъ особаго рода лучи — т. н. катодные лучи. Что касается анода, то его форма и положеніе въ трубкѣ не оказываютъ замѣтнаго вліянія на явленія, сопровождающія прохожденіе тока. Тѣмъ не менѣе въ нѣкоторомъ отношеніи между анодомъ и катодомъ существуетъ аналогія: сюда, напримѣръ, относится анодное свѣченіе и паденіе потенціала у анода. Въ особенности послѣднее обстоятельство заставляетъ насъ предположить, „что при соотвѣтствующихъ условіяхъ анодъ также можетъ оказаться источникомъ излученія и будетъ испускать положительно заряженные іоны". Герке и Рейхенгеймъ занялись отысканіемъ условій, при которыхъ анодъ испускаетъ лучи, и, какъ мы увидимъ, усилія ихъ увѣнчались успѣхомъ.

Прежде всего напомнимъ, что лучи, открытые Гольдштейномъ, т. н. *каналовые* лучи (Kanalstrahlen), которые, какъ доказано Виномъ, обладаютъ положительнымъ зарядомъ, исходятъ не изъ анода: согласно новѣйшимъ изслѣдованіямъ они возникаютъ вблизи катода и на поверхности самого катода.

Герке и Рейхенгеймъ пропускали токъ въ 110 вольтъ сквозь Гейслерову трубку съ анодомъ изъ платиновой проволоки длиной въ 3 см. и толщиною въ 0,3 мм. и катодомъ, который былъ изготовленъ по способу Венельта (Wehnelt) изъ платиновой жести, покрытой окисью барія, и прокаливался помощью электрическаго тока. Тогда они наблюдали рѣзкіе лучи желтоватаго цвѣта, исходившіе изъ маленькой свѣтлой точки на анодѣ; лучи, вначалѣ весьма яркіе, быстро меркли и по прошествіи нѣсколькихъ секундъ гасли. Они затѣмъ не появлялись вторично, хотя сила тока доводилась до того, что анодъ начиналъ плавиться. Подробное изслѣдованіе показало, что „дѣйствительная причина возникновенія желтоватыхъ лучей заключается въ примѣси постороннихъ веществъ, загрязненій, находившихся на анодѣ. Если же для опыта брать весьма тщательно очищенный платиновый анодъ, то лучи вовсе не показывались; когда же анодъ приводили въ соприкосновеніе съ какой-нибудь солью, напримѣръ, съ поваренной солью или съ бурой, то желтоватые лучи показывались снова и при томъ отличались особенной яркостью". Но и въ этомъ случаѣ явленіе продолжалось лишь нѣсколько секундъ.

Названные изслѣдователи занялись изготовленіемъ анодовъ съ большимъ содержаніемъ соли. Такимъ анодомъ служила имъ трубочка изъ платиновой жести, наполненная солью; этотъ анодъ накаливался помощью аккумуляторной батареи, изолированной отъ батареи, служившей для накаливанія катода. Устроенный такимъ образомъ анодъ они наполнили углекислымъ натріемъ и, придѣлавъ его къ шарообразной Гейслеровой трубкѣ, доводили до темнокраснаго каленія. Тотчасъ же изъ отверстія анодной трубочки показывался яркій пучокъ желтаго свѣта то шарообразной, то продолговатой формы, который простирался до стѣнокъ сосуда. „Катодъ при этомъ былъ окруженъ синей свѣтовой оболочкой, и такимъ образомъ и катодъ и анодъ являлись центрами и источниками блестящаго свѣтового излученія". Въ спектрѣ свѣтового пучка на анодѣ рѣзко выдѣлялись линіи D. Спустя нѣсколько минутъ явленіе на анодѣ теряло свою яркость и постепенно прекращалось. Подобнымъ же образомъ протекало явленіе, когда анодной солью служилъ *NaCl*, но въ этомъ случаѣ линіи *D* оказывались также и въ спектрѣ синихъ лучей, исходившихъ отъ катода. При употребленіи хлористаго таллія получался прекрасный зеленый свѣтъ у анода, при чемъ въ спектрѣ рѣзко выдѣлялась лишь зеленая линія таллія.— Соли прочихъ щелочныхъ металловъ давали анодные свѣтовые пучки съ характерными для взятаго металла окраской и спектромъ. Рѣзко очерченныя спектральныя линіи вездѣ, повидимому, соотвѣтствовали линіямъ, получаемымъ въ пламени Бунзеновой горѣлки. Что касается солей щелочно-земельныхъ металловъ, столь удобныхъ въ качествѣ матеріала для Венельтовскихъ катодовъ, то для анодовъ они оказывались совершенно непригодными. Описанное явленіе не наблюдалось также и при употребленіи другихъ окисловъ. „Повидимому, для данной цѣли болѣе всего подходящими оказываются соли, сильно диссоцiирующія и вызывающія испареніе“.

Когда токъ, проходившій черезъ трубку, былъ достаточно силенъ, то этимъ же токомъ достигалось и нагрѣваніе анода, такъ что въ этомъ случаѣ отдѣльный токъ для нагрѣванія оказывался излишнимъ.

Противъ анода изслѣдователи помѣстили Фарадэевскій цилиндръ; наружная оболочка его была отведена непосредственно въ землю, а внутренняя сообщалась съ гальванометромъ, отведеннымъ въ землю. Когда токъ проходилъ черезъ трубку, гальванометръ указывалъ на присутствіе сильнаго положительнаго заряда все время, пока на анодѣ продолжалось свѣченіе; съ угасаніемъ аноднаго свѣта отклоненіе гальванометра уменьшалось до нуля, и затѣмъ стрѣлка показывала отрицательный зарядъ. Послѣднее показаніе можно приписать дѣйствію катодныхъ лучей, дошедшихъ отъ катода до Фарадэевскаго цилиндра. Послѣдній можно было передвигать: чѣмъ болѣе онъ былъ обращенъ въ сторону катода, тѣмъ слабѣе были положительныя показанія гальванометра; они достигали нуля и становились рѣзко отрицательными, когда цилиндръ помѣщался противъ катода. Изъ этихъ наблюденій Герке и Рейхенгеймъ дѣлаютъ выводъ, что „нагрѣтый анодъ изъ соли испускаетъ лучи, несущіе положительный зарядъ, которые мы для краткости назовемъ *анодными лучами*“.

Въ заключеніе своего перваго сообщенія (Verh. d. D. Phys. Ges. 1906), изъ котораго мы, главнымъ образомъ, и заимствовали все вышеизложенное, авторы отмѣчаютъ, что описанныя явленія и нѣкоторыя аналогичныя имъ наблюдались раньше ихъ другими изслѣдователями, между прочимъ Варбургомъ въ 1890 г.

Второе сообщеніе опубликовано въ томъ же изданіи въ февралѣ 1907 г. Здѣсь прежде всего описывается, какимъ образомъ авторамъ удалось получить анодные лучи большей скорости, а также изготовить такіе аноды, при которыхъ явленіе длилось болѣе продолжительное время. Для этого они выбрали въ качествѣ анода соляной столбикъ приблизительно въ 15 мм. длины и 6 мм. толщины и просверлили его вдоль по оси; проводомъ служила платиновая проволока, введенная въ просверленный каналецъ и свободно заканчивавшаяся въ его срединѣ.

Проволока и столбикъ были окружены стекломъ, такъ что свободной оставалась лишь передняя поверхность столбика. Таково было устройство анода; катодомъ трубки служило аллюминіевое кольцо, помѣщенное сбоку отъ анода; газъ въ трубкѣ доводили до такой степени разрѣженія, что трубка флуоресцировала свѣтлозеленымъ цвѣтомъ на всемъ своемъ протяженіи, въ ней нельзя было болѣе замѣтить слѣдовъ свѣтящагося газа; тогда отъ анода исходилъ свѣтовой пучокъ подобный вышеописанному, съ окраской, соотвѣтствующей іону металла, содержащагося въ соли на анодѣ; помѣщенная противъ анода слюдяная пластинка также флуоресцировала, причемъ окраска тоже соотвѣтствовала іону металла. Въ томъ случаѣ, когда эта ширмочка не содержала соли, она вначалѣ флуоресцировала очень слабо, но чѣмъ дальше продолжался разрядъ, тѣмъ ярче и ярче флуоресцировала пластинка цвѣтомъ, соотвѣтствовавшимъ іону металла на анодѣ. „Очевидно, здѣсь происходитъ перенесеніе вещества съ анода къ ширмочкѣ".

При наибольшей степени разрѣженія, какая была достигнута авторами, внутри трубки не было замѣтно свѣченія газовъ, и зеленая флуоресценція катодныхъ лучей на стеклѣ проявлялась лишь въ слабой степени. Зато слюдяная пластинка и стекло вблизи ея испускали свѣтъ съ окраской іона соотвѣтствующаго металла. „Путь анодныхъ лучей былъ замѣтенъ лишь по свѣтовому пучку того же цвѣта у самаго анода, на дальнѣйшемъ же протяженіи свѣченія не было. Здѣсь несомнѣнно происходилъ разрядъ черезъ газъ; быстрые, пронизывающіе анодные лучи, исходившіе отъ анода, служили здѣсь главнымъ передатчикомъ тока. По всей видимости, въ данномъ случаѣ передъ нами явленіе, обратное тому, напримѣръ, процессу, который происходитъ въ Рентгеновской трубкѣ: тамъ почти вся передача совершается черезъ катодные лучи, испускаемые катодомъ".

Дальнѣйшее усовершенствованіе метода изслѣдованія состояло въ томъ, что впаивался кольцеобразный аллюминіевый катодъ, такъ что получалось нѣчто въ родѣ поршня; этимъ достигалась возможность мѣнять положеніе катода внутри трубки. Соляной стержень анода, окруженный стеклянной оболочкой, на этотъ разъ не имѣлъ осевого канала; проводящая мѣдная проволока была укрѣплена внутри стержня. Подобно катоду, анодъ былъ устроенъ въ видѣ поршня.

Когда разрѣженіе газа въ трубкѣ, имѣвшей вышеописанное устройство, доводилось до высшей степени, то изъ анода показывался свѣтло-красный иглообразный анодный лучъ; въ спектрѣ этого луча видны были линіи литія и натрія, а та часть стеклянной трубки, на которую падалъ лучъ, флуоресцировала красно-желтымъ цвѣтомъ. При благопріятныхъ условіяхъ лучъ этотъ можно видѣть и при дневномъ свѣтѣ. На своемъ пути анодный лучъ пересѣкается синимъ катоднымъ лучемъ, вызывающимъ въ стеклянной стѣнкѣ зеленую флуоресценцію.

Иногда анодный лучъ внезапно распадается на нѣсколько рѣзко разграниченныхъ лучей.

Длина аноднаго луча возрастаетъ съ увеличеніемъ степени разрѣженія. При высшей степени разрѣженія лучъ самъ по себѣ былъ еле замѣтенъ. Но тѣмъ ярче флуоресцировала стеклянная стѣнка въ томъ мѣстѣ, гдѣ на нее падалъ лучъ. Тѣла, помѣщенныя по пути лучей, отбрасываютъ рѣзкую тѣнь.

Активность анода съ теченіемъ времени ослабѣваетъ; несомнѣнной причиной этого является, между прочимъ, то обстоятельство, что анодъ теряетъ слишкомъ много соли. Соли таллія давали въ качествѣ анода удовлетворительные результаты. Примѣсь посторонняго вещества всегда оказывается полезной: въ качествѣ такой примѣси берутъ графитовый порошокъ или цинковую пыль.

Флуоресценція, вызванная анодными лучами, была такого же цвѣта, какъ и флуоресценція, возбужденная такъ называемыми каналовыми лучами. Равнымъ образомъ, свѣтовой пучекъ, наблюдавшійся во время первыхъ опытовъ, имѣлъ ту же окраску, какая получается, когда каналовые лучи падаютъ на нѣкоторыя твердыя соли.

Хорошіе результаты, полученные изслѣдователями при употребленіи литіевыхъ и натріевыхъ солей, они приписываютъ низкой точкѣ плавленія этихъ тѣлъ. Изъ холоднаго анода имъ ни разу не удалось получить анодныхъ лучей.

Таковы данныя, обнародованныя изслѣдователями въ ихъ второмъ сообщеніи; за послѣднимъ менѣе, чѣмъ черезъ 3 мѣсяца, послѣдовало третье (тотъ-же журналъ 1907 г.).

Косо срѣзавъ переднюю поверхность анода, изслѣдователи доказали, что, подобно катоднымъ лучамъ, анодные направлены перпендикулярно къ поверхности, изъ которой они исходятъ.

Для изслѣдованія анодныхъ лучей различныхъ родовъ весьма удобно помѣстить въ одной и той же трубкѣ нѣсколько анодовъ съ различными смѣсями солей.

Помощью соотвѣтствующихъ опытовъ, которыхъ мы здѣсь не будемъ описывать, можно изслѣдовать отклоненіе анодныхъ лучей въ электрическомъ и магнитномъ полѣ.

Во всѣхъ случаяхъ, судя по отклоненію, можно было заключить, что анодъ выбрасываетъ положительно заряженныя частички, и что анодное излученіе по своему составу не однородно. Всѣ эти данныя подтверждаютъ предположеніе, которое Герке и Рейхенгеймъ высказали еще въ самомъ началѣ своего изслѣдованія, а именно, что анодные лучи представляютъ собою явленіе, вполнѣ соотвѣтствующее катоднымъ лучамъ. „Дѣйствительно, анодные лучи обладаютъ всѣми свойствами катодныхъ лучей: они переносятъ электрическій зарядъ; тѣла, помѣщенныя на ихъ пути, отбрасываютъ рѣзкую тѣнь; они направлены перпендикулярно къ поверхности электрода; они испытываютъ отклоненіе въ электрическомъ и магнитномъ полѣ и, наконецъ, падая на нѣкоторыя тѣла, вызываютъ въ нихъ флуоресценцію".

Вопросъ о возможности получить анодные лучи изъ такихъ анодовъ, въ которыхъ соль не является главной составной частью, пока не рѣшенъ опытомъ. Кусокъ металлическаго натрія давалъ слабый анодный лучъ желтаго цвѣта, но натрій былъ взятъ не очень чистый. Желѣзо, цинкъ, висмутъ, теллурій, уголь не испускали анодныхъ лучей хотя бы, по крайней мѣрѣ, въ сколько-нибудь замѣтной степени. Напротивъ, іодистая сѣра давала яркій пучокъ свѣтложелтыхъ анодныхъ лучей, а при употребленіи смѣси іодистой сѣры, теллурія и угольнаго порошка получались великолѣпные синевато-фіолетовые, анодные лучи; послѣдніе, однако, лишь слабо отклонялись магнитомъ.

Въ непосредственной связи со всѣмъ вышеизложеннымъ находятся новѣйшія изслѣдованія, о которыхъ Герке и Рейхенгеймъ сообщили на Дрезденскомъ съѣздѣ.

До сихъ поръ еще не было выяснено, состоятъ ли анодные лучи изъ свѣтящихся частичекъ, или же они сами по себѣ не испускаютъ свѣта, а свѣтятся лишь благодаря столкновенію съ частичками соли, содержащейся въ трубкѣ. Въ первомъ случаѣ анодные лучи подобно каналовымъ должны подчиняться принципу Допплера. Дѣйствительно, явленіе Допплера наблюдалось уже въ первыхъ опытахъ. Подробное изслѣдованіе показало совершенное сходство этого явленія съ явленіемъ Допплера, которое Штаркъ (Stark) открылъ для каналовыхъ лучей. Фотографируя въ случаѣ анодныхъ лучей явленіе Допплера для линіи D_2 натрія, удалось измѣрить перемѣщеніе при переходѣ отъ покоя къ движенію. Исходя изъ этихъ измѣреній можно вычислить скорость анодныхъ лучей, при чемъ получаются слѣдующія числа:

$v = 1{,}4 \,.\, 10^7$ см./сек. для лучей, имѣющихъ наибольшую скорость, и
$v = 1 \,.\, 10^7$ см./сек. для лучей средней скорости.

Одновременно было измѣрено паденіе потенціала у анода; оказалось, что величина его равна отъ 2100 до 2300 вольтъ. Если мы примемъ, что скорость анодныхъ лучей, подобно катоднымъ, зависитъ отъ паденія потенціала на электродѣ, то изъ указанныхъ чиселъ мы найдемъ, что число $\frac{e}{m}$, т. е. отношеніе заряда къ массѣ, въ случаѣ анодныхъ лучей наибольшей скорости, равно $0{,}45 \,.\, 10^3$ абсол. един. для натрія и $9{,}5 \,.\, 10^3$ для водорода. Отсюда находимъ, что отношеніе массъ $\mu_{Na} : \mu_H = 21$, число, весьма мало отличающееся отъ атомнаго вѣса натрія.

Измѣреніе магнитнаго отклоненія дало такіе же результаты: разница не превышала обычной погрѣшности наблюденія.

Число, найденное для литія, нѣсколько больше, чѣмъ его атомный вѣсъ; это обстоятельство можно объяснить различнымъ образомъ, но мы на этихъ объясненіяхъ не будемъ останавливаться. Число же, найденное для стронція, вполнѣ совпадаетъ съ его атомнымъ вѣсомъ, если только мы примемъ, что, въ виду двувалентности этого металла, зарядъ e частички стронція вдвое больше соотвѣтственныхъ зарядовъ натрія и литія.

На основаніи изложенныхъ наблюденій Герке и Рейхенгеймъ приходятъ къ слѣдующему заключенію: „при данной постановкѣ опыта анодные лучи, испускаемые натріемъ, литіемъ и стронціемъ, состоятъ изъ атомовъ, выбрасываемыхъ металломъ; энергія лучей заимствуется, главнымъ образомъ, изъ электрическаго поля, въ которомъ они распространяются, т. е. въ данномъ случаѣ на счетъ паденія потенціала у анода. Кромѣ того, мы имѣемъ основаніе предполагать, что большая часть лучей исходитъ изъ самого анода, и что эти лучи подчиняются тѣмъ же законамъ, что и катодные лучи. Такимъ образомъ, сходство анодныхъ лучей съ катодными весьма велико".

(Himmel u. Erde).

РЕЦЕНЗІИ.

О. Д. Хвольсонъ. *Курсъ физики. Томъ четвертый. Ученіе о магнитныхъ и электрическихъ явленіяхъ. Первая половина.* СПБ. 1907. 750 стр.

Предпринятый профессоромъ О. Д. Хвольсономъ фундаментальный трудъ приводится имъ уже къ концу. Послѣ продолжительнаго перерыва вышла въ свѣтъ первая половина четвертаго заключительнаго тома, содержащая ученіе о постоянномъ электрическомъ и о постоянномъ магнитномъ полѣ.

Врядъ ли какая-либо наука въ теченіе послѣдней четверти вѣка въ такой мѣрѣ переформировалась, какъ физика. Огромный матеріалъ новыхъ фактовъ вызвалъ коренныя измѣненія во взглядахъ на характеръ и сущность физическихъ явленій, а новые взгляды ежедневно и ежечасно указуютъ новые пути, слѣдуя которымъ экспериментаторы развертываютъ новые факты, то ошеломляющіе своей неожиданностью, то поразительно совпадающіе съ теоретическими предсказаніями.

Здѣсь не мѣсто, конечно, указывать, въ чемъ собственно этотъ переворотъ заключается. Мы полагаемъ однако, что слѣдующій фактъ является въ этомъ отношеніи чрезвычайно характернымъ.

Еще двадцать пять лѣтъ тому назадъ настойчиво отстаивали механистическое міровоззрѣніе. Механика—масса и движеніе—должны были служить основными явленіями; привести къ нимъ, ими объяснить всякое явленіе составляло общую задачу естествознанія; всѣ естественныя науки—и физика прежде всего—ставили себѣ идеаломъ, хотя бы и недосягаемымъ, механику. Въ настоящее время глубокій переворотъ, происшедшій въ ученіи объ электричествѣ вызвалъ „нашествіе электромагнитизма на механику". Масса и ея главнѣйшее и, быть можетъ, единственное общее свойство—инерція—интерпретируются, какъ явленія электромагнитнаго характера. Склонитъ ли механика главу предъ физикой, какъ „порфироносная вдова", или подъ защитой математическаго анализа она отстоитъ свое доминирующее мѣсто—вопросъ будущаго. Но эта антитеза достаточно характеризуетъ совершившійся переворотъ.

Нужно было много смѣлости, чтобы въ эту эпоху неустойчиваго равновѣсія, въ подъемѣ приливной волны, попытаться объединить накопленный матеріалъ въ одномъ трактатѣ. И на это давно никто не рѣшался. Классическія сочиненія Жамена, Вюльнера, Мюллера пополнялись и исправлялись; но то были уже почтенные старцы, ожидавшіе своихъ наслѣдниковъ. Прекрасныя же болѣе позднія сочиненія, какъ, напримѣръ, книга Рике, преслѣдуютъ болѣе скромныя задачи. А между тѣмъ такіе трактаты необходимы, чтобы дать возможность подростающему поколѣнію научныхъ работниковъ разобраться въ этомъ безбрежномъ морѣ новыхъ фактовъ и идей.

Профессоръ О. Д. Хвольсонъ рѣшился выполнить этотъ трудъ, и въ результатѣ явилось обширное сочиненіе, которое является однимъ изъ лучшихъ украшеній русской научной литературы. Разбирать здѣсь это сочиненіе подробно врядъ ли умѣстно, какъ въ виду обширныхъ его размѣровъ, такъ и въ виду его задачъ, далеко выходящихъ за предѣлы программы „Вѣстника". Успѣхъ сочиненія самъ за него говоритъ. Кажется, физиковъ у насъ такъ мало, а въ особенности такихъ, которымъ нужна такого рода серьезная книга; кажется, нашъ читатель такъ бѣденъ, а книга не дешева. Тѣмъ не менѣе книга не была еще приведена къ концу, какъ понадобилось второе изданіе. Кажется, русская книга, научная, въ особенности, всегда осуждена на то, чтобы оставаться на русской территоріи съ ея ограниченнымъ кругомъ читателей. Но книга профессора Хвольсона еще до окончанія переведена на нѣмецкій и французскій языки; мы затрудняемся указать обширное русское сочиненіе, которое удостоилось бы такой чести.

Вышедшій недавно четвертый томъ, какъ мы уже указали, содержитъ первую половину (бо́льшую половину) ученія объ электричествѣ и магнитизмѣ. Повторяемъ, мы не имѣемъ въ виду входить въ разборъ сочиненія. Но мы хотимъ только отмѣтить одну важную черту. Въ настоящій періодъ широкихъ теорій увлеченіе излюбленнымъ ученіемъ и освѣщеніе фактовъ именно съ точки зрѣнія этого ученія является настолько обычнымъ, что трудно назвать ученаго, который этимъ не грѣшитъ. Насколько мы можемъ судить, проф. Хвольсонъ не впадаетъ въ эту ошибку. Онъ съ полнымъ спокойствіемъ оцѣниваетъ значеніе каждой теоріи, и тамъ, гдѣ ни одна изъ теорій не даетъ достаточнаго объясненія явленія, онъ это категорически заявляетъ. Онъ категорически заявляетъ также, что ни одна изъ общихъ теорій не въ состояніи охватить въ настоящее время хотя бы даже одной области электромагнитныхъ явленій.

Нужно надѣяться, что вторая половина послѣдняго тома не заставитъ себя долго ждать.

Н. Р.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 7 (5 сер.). Даны три точки A, B, C и окружность O. Провести въ окружности хорду, которая была бы видна изъ точекъ A, B, C подъ равными углами.

И. Александровъ (Москва, реальное училище Бажанова).

№ 8 (5 сер.). Изъ внѣшней точки A проведены къ данной окружности двѣ касательныя AT и AT' и сѣкущая ABC (B и C—точки пересѣченія съ окружностью). Черезъ точки B и C проводятъ окружность перемѣннаго радіуса, пересѣкающую прямыя CT и CT' соотвѣтственно въ M и N. Опредѣлить геометрическое мѣсто центра тяжести треугольника CMN.

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 9 (5 сер.). Доказать, что

$$M_a + M_b + M_c - M = 2S,$$

гдѣ M_a, M_b, M_c, M суть соотвѣтственно площади подарныхъ*) треугольниковъ центровъ внѣвписанныхъ и вписанной окружностей для треугольника ABC.

Н. Агрономовъ (Петербургъ).

№ 10 (5 сер.). Діагонали AC и BD выпуклаго четыреугольника $ABCD$ пересѣкаются въ точкѣ O. Доказать, что противоположныя стороны AB и CD этого четыреугольника параллельны, если дано, что площадь BOC есть средняя пропорціональная между площадями AOB и DOC.

Н. С. (Одесса).

№ 11 (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^2 - 12\sqrt[3]{x} + 20 = 0.$$

(Заимств.).

№ 12 (5 сер.). Въ отверстіе горизонтально расположеннаго металлическаго плоскаго кольца вложенъ шаръ, приготовленный изъ нѣкотораго другого вещества. При температурѣ t шаръ не проходитъ сквозь кольцо. Затѣмъ температура прибора повышается съ t до T градусовъ, и въ моментъ достиженія температуры T шаръ падаетъ сквозь кольцо. Опредѣлить коэффиціентъ расширенія вещества, изъ котораго сдѣланъ шаръ, зная коэффиціентъ линейнаго расширенія k вещества кольца, если при температурѣ t даны—внѣшній діаметръ кольца d, ширина кольца a и діаметръ шара D.

Л. Ямпольскій (Одесса).

---

*) *Подарнымъ* относительно треугольника ABC называется треугольникъ, вершины котораго суть проекціи нѣкоторой точки M на стороны AB, BC, CA.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 832 (4 сер.). *Рѣшить и построить прямоугольный треугольникъ по радіусу* r *круга вписаннаго и по высотѣ* h, *опущенной на гипотенузу*.

Называя черезъ A вершину прямого угла, замѣчая, что радіусъ r круга вписаннаго равенъ въ прямоугольномъ треугольникѣ отрѣзку катета отъ вершины A до одной изъ точекъ касанія съ вписаннымъ кругомъ и придерживаясь обычныхъ въ тригонометріи обозначеній, имѣемъ:

$$2rp = ah = 2s,\ r = p - a,$$

$$\frac{a}{2p} = \frac{r}{h} = \frac{a}{2(r+a)},$$

откуда

$$a = \frac{2r^2}{h - 2r}.$$

Зная такимъ образомъ a и h, легко рѣшить треугольникъ либо геометрически, либо тригонометрически, напримѣръ, при помощи равенствъ:

$$h = b\ sin\ C = a\ cos\ C\ sin\ C = \frac{a\ sin\ 2C}{2} = \frac{a\ sin\ 2B}{2},$$

откуда

$$sin\ 2B = sin\ 2C = \frac{2h(h-2r)}{2r^2} = \frac{h(h-2r)}{r^2}. \qquad (1)$$

Пусть α — наименьшій положительный уголъ, синусъ котораго равенъ $\frac{h(h-2r)}{r^2}$; тогда $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\pi-\alpha}{2}$ суть острые углы B и C. Для построенія треугольника строимъ на сторонѣ $A\beta = r$ квадратъ $A\beta\gamma\delta$, описываемъ изъ точекъ A и γ круги соотвѣтственно радіусами h и r. Пусть одна изъ внѣшнихъ общихъ касательныхъ этихъ круговъ встрѣчаетъ стороны $A\beta$ и $A\delta$ угла A въ точкахъ B и C; тогда треугольникъ ABC есть искомый. Для того, чтобы задача была возможна, необходимо и достаточно соблюсти условія:

$$\frac{h}{2} > r > h(\sqrt{2} - 1),$$

которыя вытекаютъ изъ простыхъ геометрическихъ соображеній или же изъ формулъ (1), если принять во вниманіе, что $sin\ 2B > 0$, $|sin\ 2B| < 1$.

А. Турчаниновъ (Одесса); *Э. Лейнъкъ* (Москва).

№ 807 (4 сер.). *Изъ основанія* S *симедіаны* AS *треугольника* ABC *опущены перпендикуляры* SS′ *и* SS″ *на его стороны* AB *и* AC. *Доказать, что*

$$\textit{площадь}\ SS'S'' = \frac{4\triangle^3}{(b^2+c^2)^2},$$

гдѣ $\triangle$ — *площадь*, a, b, c — *стороны треугольника* ABC.

Называя черезъ AM медіану треугольника и принимая во вниманіе равенства угловъ $\angle BAM = \angle SAC$, $\angle BAS = \angle MAC$, находимъ:

$$\frac{\text{площ. } BAM}{\text{площ. } SAC}=\frac{BM}{SC}=\frac{c\,.\,AM}{b\,.\,AS},\ \frac{\text{площ. } BAS}{\text{площ. } MAC}=\frac{BS}{MC}=\frac{c\,.\,AS}{b\,.\,AM},$$

откуда, такъ какъ $BM = MC$,

$$\frac{BS}{SC}=\frac{c^2}{b^2}.$$

Такимъ образомъ мы приходимъ къ извѣстному въ геометріи треугольника предложенію: основаніе треугольника раздѣляется симедіаной на отрѣзки, пропорціональные квадратамъ прилежащихъ сторонъ. Слѣдовательно,

$$SC=\frac{ab^2}{b^2+c^2},\ BS=\frac{ac^2}{b^2+c^2},$$

а потому изъ треугольниковъ $SS''C$ и $SS'B$ имѣемъ:

$$SS''=\frac{ab^2}{b^2+c^2}\sin C,\ SS'=\frac{ac^2}{b^2+c^2}\sin B,$$

откуда, замѣчая, что, по построенію, $\angle S'SS''=\pi-A$, находимъ:

$$\text{площ. } SS'S''=\frac{ab^2}{b^2+c^2}\sin C\,.\,\frac{ac^2}{b^2+c^2}\sin B\,.\,\frac{\sin A}{2}=$$

$$=\frac{ab\sin C}{2}\,.\,2\,.\,\frac{bc\sin A}{2}\,.\,2\,.\,\frac{ac\sin B}{2}\,.\,\frac{1}{(b^2+c^2)^2}=$$

$$=\frac{4\triangle^3}{(b^2+c^2)^2}.$$

Н. Агрономовъ (Ревель); *Н. С.* (Одесса).

№ 808 (4 сер.). *Доказать, что*

$$\mathrm{r}=\sqrt[3]{\frac{\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma'}{\varrho_1\varrho_2\varrho_3}},$$

гдѣ* r*—радіусъ вписаннаго круга,* $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$*—радіусы внѣвписанныхъ круговъ относительно треугольника* ABC*, а* $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ *суть длины перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ вершинъ треугольника на внутреннія биссектрисы его угловъ.

Обозначая черезъ A,B,C углы, черезъ a,b,c—стороны, черезъ p,s—полупериметръ и площадь треугольника ABC, имѣемъ:

$$\varrho_1=p\,tg\frac{A}{2},\ \varrho_2=p\,tg\frac{B}{2},\ \varrho_3=p\,tg\frac{C}{2}. \qquad (1)$$

Пусть обозначенія выбраны такъ, что α есть длина перпендикуляра BD, опущеннаго изъ B на биссектрису угла A. Тогда

$$\alpha=BD=AB\,.\sin\frac{A}{2}=c\sin\frac{A}{2}. \qquad (2)$$

Подобнымъ же образомъ получимъ:

$$\alpha'=b\sin\frac{A}{2},\ \beta=a\sin\frac{B}{2},\ \beta'=c\sin\frac{B}{2},\ \gamma=b\sin\frac{C}{2},\ \gamma'=a\sin\frac{C}{2}. \qquad (3)$$

Изъ равенствъ (1), (2), (3) имѣемъ:

$$\sqrt[3]{\frac{\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma'}{\varrho_1\varrho_2\varrho_3}}=\sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}{p^3\,tg\frac{A}{2}\,tg\frac{B}{2}\,tg\frac{C}{2}}}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right)\left(\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\right)\left(\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right)}{p^3}}=$$

$$=\frac{1}{p}\sqrt[3]{\frac{bc\sin A}{2}\cdot\frac{ca\sin B}{2}\cdot\frac{ab\sin C}{2}}=\frac{1}{p}\cdot\sqrt[3]{s^3}=\frac{s}{p}=r,$$

что и требовалось доказать.

Н. Агрономовъ (Ревель); *Н. С.* (Одесса).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
ищется

Обложка
пщется