Обложка
ищется

Обложка
ищется

XXXIX Сем. № 11—12.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 467-468.

Опредѣленія разстояній солнца и луны отъ земли и ихъ параллаксовъ въ прежнія времена и теперь.

Л. Гюнтера.

Переводъ съ нѣмецкаго.

Сравненіе прошлаго съ настоящимъ поучительно во всѣхъ областяхъ человѣческой дѣятельности и знанія; особенный же интересъ представляетъ оно въ области астрономіи. Не безъ основанія у Гёте Фаустъ говоритъ Вагнеру, когда тотъ философствуетъ о „духѣ времени", о томъ, насколько мы опередили „мудрецовъ временъ минувшихъ":

„О, да, мы далеко ушли!

„Чуть съ неба звѣздъ мы не хватаемъ!"

Стремленіе къ небесной выси, которую столь поэтически выразилъ Фаустъ въ своемъ монологѣ въ пасхальное утро, есть общечеловѣческое чувство; уже издавна недостижимая даль безпредѣльной вселенной привлекала человѣческій духъ своимъ неизвѣданнымъ просторомъ.

Это стремленіе воплотилось въ сказаніяхъ о поѣздкѣ Фаэтона на солнце, о полетѣ Икара и о человѣкѣ, изображенномъ на лунѣ. Владыка дня — солнце и нѣжная утѣшительница ночи — луна раньше другихъ свѣтилъ привлекали къ себѣ вниманіе древнихъ народовъ.

Неудивительно, что, при своей склонности къ обоготворенію природы, они съ благоговѣніемъ относились къ этимъ свѣтиламъ;

чувство почтенія и благодарности къ нимъ воплотилось въ особый культъ и нашло себѣ выраженіе въ различныхъ символахъ.

Среди множества вопросовъ астрономіи, надъ разрѣшеніемъ которыхъ издавна работала человѣческая мысль, опредѣленія разстояній солнца и луны отъ земли потребовало отъ ученыхъ наибольшихъ усилій и трудовъ. Я намѣренъ изложить здѣсь послѣдовательный ходъ работъ, благодаря которымъ мы достигли вполнѣ надежныхъ и точныхъ результатовъ; мнѣ кажется, что это благодарная задача, и я надѣюсь, что любители астрономіи отнесутся сочувственно къ этой попыткѣ.

Еще древніе приверженцы ученія о гармоніи пытались опредѣлить разстоянія свѣтилъ, которыя болѣе другихъ привлекали ихъ вниманіе; они придумывали для этого особые гармоническіе и ариѳметическіе ряды чиселъ. Вотъ одинъ такой рядъ, старѣйшій изъ всѣхъ извѣстныхъ намъ:

Если разстояніе луны отъ земли равно		1,
то разстояніе солнца	. . . .	2,
Венеры	. . . . .	3,
Меркурія	. . . .	$2^2 = 4$,
Марса	. . . . .	$2^3 = 8$,
Юпитера	. . . .	$3^2 = 9$,
Сатурна	. . . .	$3^3 = 27$.

Хотя позже древніе греки и старались поставить ученіе о небесныхъ свѣтилахъ на научную почву, но рѣшенія вопроса о разстояніи свѣтилъ они не подвинули впередъ: предположенія Пиѳагора (около 600 л. до Р. Х.), что разстояніе луны отъ земли равно отъ 3000 до 4000 миль, а разстояніе солнца приблизительно въ 3 раза больше, представляютъ собою, подобно вышеприведеннымъ числамъ, лишь продуктъ философской спекуляціи. Первыя работы, имѣющія существенное научное значеніе, относятся лишь къ философской школѣ въ Александріи.

Этотъ разсадникъ наукъ и искусствъ былъ основанъ за 300 лѣтъ до Р. Х. египетскимъ королемъ Птолемеемъ въ Александріи и процвѣталъ до 640 г. послѣ Р. Х., просуществовавъ почти тысячелѣтіе. Здѣсь ученые впервые начали производить наблюденія съ помощью соотвѣтственныхъ инструментовъ, здѣсь же были сдѣланы первыя попытки подвергнуть вопросы астрономіи основательной математической разработкѣ.

Изъ наиболѣе выдающихся ученыхъ Александрійской школы, каковы Аристархъ Самосскій (267 л. до Р. Х.), Гиппархъ Никейскій (160—125 до Р. Х.) и Клавдій Птолемей (во 2 столѣтіи нашей эры, приблизительно въ 140 г.), для насъ имѣетъ особенное значеніе первый, такъ какъ ему мы обязаны чрезвычайно остроумной попыткой опредѣлить отношеніе разстояній солнца и луны отъ земли.

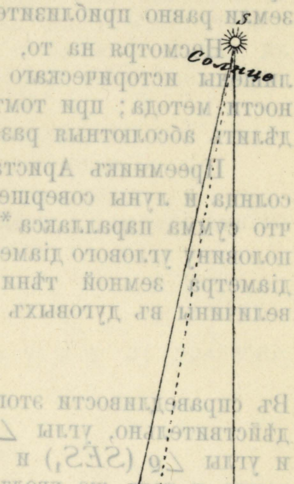
Аристархъ разсуждалъ слѣдующимъ образомъ:

Если мы знаемъ два угла треугольника, вершинами котораго служатъ солнце, земля и луна (фиг. 1), то можно вычислить отношеніе сторонъ треугольника, хотя бы величина ихъ была намъ неизвѣстна. Подмѣтимъ тотъ моментъ, когда луна кажется намъ освѣщенной какъ-разъ на половину (первая четверть): мы тогда находимся на землѣ въ плоскости, которая отдѣляетъ освѣщенную половину луны отъ темной, и уголъ EMS, вершину котораго образуетъ луна, равенъ прямому.

Если мы опредѣлимъ уголъ SEM, т. е. угловое разстояніе солнца отъ луны въ этотъ моментъ, то будемъ знать всѣ углы прямоугольнаго треугольника SME. Принявъ разстояніе EM луны отъ земли за единицу и получивъ для углового разстоянія SEM 87^0 *), мы вычислимъ разстояніе солнца ES:

$$\cos 87^0 = \frac{EM}{ES}\text{; слѣдовательно, } ES = \frac{EM}{\cos 87^0}$$

$$= \frac{1}{\cos 87^0} = \frac{1}{0{,}0523}, = 19{,}12.$$



Фиг. 1.

Аристархъ вывелъ отсюда заключеніе, что разстояніе солнца отъ земли въ 19 разъ больше разстоянія луны отъ земли.

Хотя теоретически этотъ способъ представляется безупречнымъ, но практическое осуществленіе его сопряжено съ большими затрудненіями. Трудно уловить точно моментъ, когда солнце, земля и луна занимаютъ вышеуказанное расположеніе другъ относительно друга; при этомъ малѣйшая ошибка въ измѣреніи углового разстоянія весьма сильно отражается на правильности результата. Въ этомъ обстоятельствѣ и заключается причина неудачи Аристарха. Тѣмъ не менѣе послѣдній не ограничился относительными разстояніями солнца и луны: онъ сдѣлалъ попытку опредѣлить также дѣйствительное разстояніе луны отъ земли, и затѣмъ вычислилъ въ абсолютныхъ числахъ разстояніе солнца и т. д. Мнѣ нѣтъ надобности останавливаться на его вычисленіяхъ, достаточно привести лишь результаты. Онъ нашелъ, что разстояніе луны равно приблизительно 19 радіусамъ земного шара, при

*) Въ дѣйствительности этотъ уголъ, какъ мы увидимъ ниже, больше 87^0 Само собою разумѣется, что непосредственно мы можемъ измѣрить не уголъ SEM, а уголъ SAM, гдѣ A означаетъ положеніе наблюдателя. Но въ виду чрезвычайной удаленности наблюдаемыхъ объектовъ эти углы отличаются другъ отъ друга, во всякомъ случаѣ, не больше, чѣмъ на $9''$, такъ что ихъ можно считать равными другъ другу.—Ради простоты я велъ вычисленія помощью тригонометріи. Аристарху же, которому тригонометрія была неизвѣстна, приходилось прибѣгать къ длиннымъ приближеннымъ вычисленіямъ.

чемъ за величину радіуса онъ принималъ около 950 нашихъ географическихъ миль.

Такимъ образомъ, по вычисленіямъ Аристарха разстояніе луны отъ земли равно 18050 геогр. милямъ, а разстояніе солнца отъ земли равно приблизительно 345120 геогр. милямъ.

Несмотря на то, что эти числа весьма неточны, они все же не лишены историческаго значенія, хотя бы по теоретической правильности метода; при томъ же здѣсь мы имѣемъ первую попытку опредѣлить абсолютныя разстоянія свѣтилъ.

Преемникъ Аристарха, Гиппархъ вычислилъ отношеніе разстояній солнца и луны совершенно новымъ, косвеннымъ путемъ. Онъ нашелъ, что сумма параллакса *) солнца (σ) и параллакса луны (μ) составляетъ половину угловаго діаметра солнца (ϱ), сложенную съ половиной угловаго діаметра земной тѣни на разстояніи луны (φ); выразивъ всѣ эти величины въ дуговыхъ единицахъ, мы, такимъ образомъ, получаемъ:

$$\sigma + \mu = \varrho + \varphi \tag{I}$$

Въ справедливости этого равенства легко убѣдиться помощью фиг. 2; дѣйствительно, углы $\angle\sigma$ (ES_1E_1) и $\angle\mu$ (EM_1E_1), съ одной стороны, и углы $\angle\varrho$ (SES_1) и $\angle\varphi$ (MEM_1), съ другой стороны, дополняютъ одинъ и тотъ же уголъ S_1EM_1 до 180^0; слѣдовательно суммы обѣихъ паръ равны другъ другу:

$$\angle\sigma + \angle\mu + \angle S_1EM_1 = 180^0$$

какъ сумма угловъ $\triangle\ S_1EM_1$;

$$\angle\varrho + \angle\varphi + \angle S_1EM_1 = 180^0,$$

какъ сумма угловъ, расположенныхъ вокругъ общей вершины E по одну сторону прямой SEM;

$$\angle\sigma + \angle\mu = 180^0 - \angle S_1EM_1,$$

$$\angle\varrho + \angle\varphi = 180^0 - \angle S_1EM_1.$$

Двѣ величины, порознь равныя одной и той же третьей, равны между собой; слѣдовательно:

$$\angle\sigma + \angle\mu = \angle\varrho + \angle\varphi.$$

Численную величину ϱ Гиппархъ зналъ уже отъ Аристарха, который, какъ полагаютъ, заимствовалъ ее у Архимеда; по Аристарху угловой діаметръ солнца равенъ 30′, и, слѣдовательно, $\varrho = 15'$. Далѣе, согласно полученному Аристархомъ отношенію разстояній солнца и луны (19,12 : 1), Гиппархъ принялъ $\mu = 19\,\sigma$.

*) Параллаксомъ вообще называется измѣненіе видимаго положенія предмета при разсматриваніи его изъ двухъ различныхъ точекъ: онъ измѣряется угломъ, который образуютъ лучи, идущіе отъ предмета къ этимъ двумъ точкамъ. Параллаксомъ высоты свѣтила по отношенію къ данной точкѣ земли называется уголъ, подъ которымъ изъ даннаго свѣтила виденъ радіусъ земли, проведенный въ данную точку.

Наконецъ, Гиппархъ зналъ еще, что луна ежедневно проходитъ черезъ меридіанъ приблизительно на 51^m (мин. времени) или на $765'$ (дуговыхъ минутъ) позже, чѣмъ въ предшествующій день, а во время полнаго луннаго затменія прохожденіе луны черезъ тѣнь земли продолжается $2{,}5^h$. Зная, такимъ образомъ, на какую часть своего пути вокругъ земли перемѣщается луна въ теченіе сутокъ, Гиппархъ нашелъ, что въ продолженіе $2{,}5^h$, т. е. за то время, въ которое луна переходитъ изъ положенія M_1 черезъ M въ положеніе M_{11}, она описываетъ дугу

$$\frac{765.5}{24.2} = 80',$$

слѣдовательно, $\angle\varphi$, т. е. половина видимаго діаметра земной тѣни на разстояніи луны,

$$= \frac{80}{2} = 40'.$$

Подставивши величины, полученныя для ϱ, μ и φ въ уравненіе (I), получимъ:

$$\sigma + 19\,\sigma = 15' + 40',$$

$$20\,\sigma = 55';$$

слѣдовательно, солнечный параллаксъ

$$\sigma = 2',75,$$

а параллаксъ луны

$$\mu = 2{,}75.19 = 52',25.$$

Принявъ радіусъ земли за единицу, легко вычислить съ помощью тригонометріи и остальныя величины.

Изъ фиг. 2 находимъ:

1. Разстояніе солнца отъ земли

$$S_1E = \frac{EE_1}{\sin\sigma} = \frac{1}{\sin 2'45''} = \ldots \quad 1250\,r\text{*)}.$$

2. Разстояніе луны отъ земли

$$EM_1 = \frac{EE_1}{\sin\mu} = \frac{1}{\sin 52'15''} = \ldots \quad 65{,}8\,r.$$

(1. и 2.: 19 : 1)

3. Радіусъ солнца

$$SS_1 = SE\ \sin\varrho = 1250.\ \sin 15' = \ldots\ 5{,}46\,r.$$

4. Радіусъ луны (если примемъ, что видимый діаметръ луны равенъ видимому діаметру солнца, и, слѣдовательно, половина его $= \varrho = 15'$) равенъ $EM_1\ \sin\varrho = 65{,}8\ \sin 15' = \ldots\ 0{,}287\,r$.

*) $x = \dfrac{1}{\sin 2'45''}$; $\begin{array}{r} 0{,}0 \\ 6{,}90306 \\ \hline \end{array}$

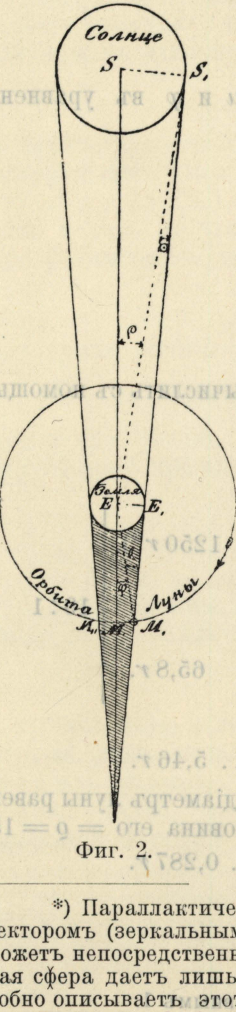
$\log x = 3{,}09694$; $x = 1250$.

Въ вычисленіяхъ мы принимаемъ земной радіусъ r равнымъ 1.

Для сравненія я приведу значенія тѣхъ же величинъ, полученныя новѣйшими изслѣдованіями:

Видимый радіусъ солнца	$16',0$;
Радіусъ солнца	$109,2\,r$;
Параллаксъ солнца	$8'',80$;
Разстояніе солнца отъ земли	$23480\,r$;
Половина углового діаметра луны .	$15',535$;
Радіусъ луны	$0,273\,r$;
Параллаксъ луны	$57',045$;
Разстояніе луны отъ земли . . .	$60,4\,r$.

Сравнивая эти числа съ вышеприведенными, мы замѣчаемъ, что результаты, относящіеся къ лунѣ, до нѣкоторой степени согласуются другъ съ другомъ, для солнца же различіе результатовъ весьма велико. Причина этого заключается въ погрѣшности, которую совершаютъ, принимая отношеніе разстояній луны и солнца равнымъ 1:19.



Фиг. 2.

Для полноты исторической перспективы замѣтимъ, что въ I столѣтіи до Р. Х. Посидоній, преемникъ Гиппарха, получилъ, какъ передаютъ, слѣдующія числа: для разстояній солнца и луны $13100\,r$ и $52,4\,r$, а для соотвѣтствующихъ параллаксовъ $15'',6$ и $65',9$. По сравненію съ числами Гиппарха первые результаты представляютъ собою нѣкоторый шагъ впередъ, а вторые результаты значительный шагъ назадъ.

По наступленіи новой эры рѣшеніе интересующаго насъ вопроса долгое время не подвигалось впередъ. Правда, Птолемей пытался опредѣлить параллаксъ луны непосредственнымъ измѣреніемъ зенитныхъ разстояній, и изобрѣлъ съ этой цѣлью новаго рода приборъ, такъ называемый трикветръ (Triquetrum)*); онъ пытался также опредѣлить солнечный параллаксъ, наблюдая во время луннаго затменія тѣнь земли на дискѣ луны; но всѣ его усилія не увѣнчались успѣхомъ: величина солнечнаго параллакса, имъ найденная, равна $2'5''$, т. е. приблизительно въ 15 разъ больше дѣйствительной.

Въ срединѣ VIII вѣка вновь наступаетъ расцвѣтъ науки, на этотъ разъ въ Аравіи, подъ покровительствомъ Багдадскихъ калифовъ. Арабы усердно переводили и разрабатывали произведенія древнихъ, въ особенности Альмагестъ

*) Параллактическая линейка, по идеѣ сходная съ нашимъ круговымъ секторомъ (зеркальнымъ секстантомъ). Помощью этого прибора наблюдатель можетъ непосредственно измѣрять зенитныя разстоянія, тогда какъ армиллярная сфера даетъ лишь прямыя восхожденія и склоненія. Вольфъ (Wolf) подробно описываетъ этотъ измѣрительный приборъ, его конструкцію и теорію. См. Wolf, „Geschichte der Astronomie“, стр. 125 и слѣд.

Птолемея, и такимъ образомъ сохранили ихъ для насъ; но для опредѣленія параллакса они не сдѣлали ничего новаго. Такимъ образомъ, въ этомъ отношеніи наука еще долго послѣ Регіомонтана (1436—1476) не пошла дальше Гиппарха. Результатами Аристарха и Гиппарха удовлетворялись астрономы еще на протяженіи всего XVI столѣтія; не было сдѣлано ни одной попытки вновь опредѣлить солнечный параллаксъ; послѣднимъ либо вовсе пренебрегали, либо же, грубо округляя число Гиппарха, принимали солнечный параллаксъ равнымъ 3′, что̀ невыгодно отражалось на правильности астрономическихъ вычисленій.

Лишь въ началѣ XVII столѣтія, по почину Кеплера, вновь занялись опредѣленіемъ параллакса. Кеплеръ (1571—1630) опредѣлялъ видимые размѣры солнца и луны, а также ихъ затменій, помощью усовершенствованной имъ камеры-обскуры (или лучше сказать темной*) камеры); онъ же развилъ теорію вычисленія параллакса, близкую къ современной.

Вслѣдъ за тѣмъ Готфридъ Венделинъ (1580—1643) произвелъ повѣрку вычисленія Аристарха: съ этой цѣлью онъ непосредственно измѣрилъ во время первой четверти угловое разстояніе SEM (фиг. 1) и нашелъ величину $89^0 45'$; свое измѣреніе онъ произвелъ на островѣ Средиземнаго моря—Майоркѣ, при чемъ пользовался зрительной трубой, снабженной угломѣромъ. Такимъ образомъ оказалось, что отношеніе разстояній солнца и луны равно

$$\cos 89^0 45' = \sim 1 : 229.$$

Хотя и это число еще далеко отъ истиннаго, все же оно гораздо ближе, чѣмъ всѣ прежніе результаты.

Отсюда же видно, какое огромное увеличеніе испытываетъ число, выражающее разстояніе свѣтила, отъ малѣйшаго увеличенія углового разстоянія; понятно поэтому, что для полученія правильныхъ результатовъ, угловое разстояніе должно быть измѣрено съ величайшей точностью.

Если введемъ вновь найденное значеніе углового разстоянія въ уравненіе Гиппарха, то получимъ:

$$\text{солнечный параллаксъ } \sigma + 229{,}18\,\sigma = 15' + 40',$$

$$\text{т. е. } 230{,}18\,\sigma = 55';\ \sigma = 14'',34;$$

$$\text{параллаксъ луны } \mu = 14'',34 \,.\, 229{,}18 = 55';$$

и далѣе:

---

*) Кеплеръ часто пользовался этой камерой для своихъ наблюденій, потому что благодаря слабости зрѣнія онъ долженъ былъ избѣгать сильныхъ свѣтовыхъ ощущеній. Во время одного такого наблюденія онъ первый (если не считать одного подобнаго наблюденія, относящагося къ среднимъ вѣкамъ (въ 807 г.), достовѣрность котораго не вполнѣ установлена), самъ того не сознавая, увидалъ солнечное пятно; это было 18 мая 1607 г. Кеплеръ принялъ его за Меркурія, проходящаго по диску солнца. См. объ этомъ сочиненіе Кеплера: „Mercurius in Sole“; тамъ же дано описаніе темной камеры.

1. Разстояніе солнца отъ земли

$$S_1E = \frac{EE_1}{\sin \sigma} = \frac{1}{\sin 14'',34} = \ldots 14398{,}2\, r,$$

2. Разстояніе луны отъ земли

$$EM_1 = \frac{EE_1}{\sin \mu} = \frac{1}{\sin 55'} = \ldots \quad 62{,}5\, r,$$

$\Big\}$ 230:1.

3. Радіусъ солнца

$$SE = S_1E \sin \varrho = 14398{,}2 \,.\, \sin 15' = \ldots \; 62{,}8\, r,$$

и, наконецъ,

4. Радіусъ луны

$$= EM_1 \sin \varrho = 62{,}5 \sin 15' = \ldots \; 0{,}273\, r.$$

Эти числа, въ особенности для луны, гораздо ближе къ дѣйствительности, чѣмъ всѣ прежде полученныя. (Сравни вышеприведенные результаты современныхъ изслѣдованій).

Перейдемъ къ новому методу опредѣленія параллакса, основанному на предварительномъ измѣреніи большого земного базиса.

Сначала, однако, этотъ планъ потерпѣлъ неудачу, что слѣдуетъ приписать, главнымъ образомъ, тому обстоятельству, что въ то время градусныя измѣренія и опредѣленія мѣста еще не отличались достаточной точностью; хотя градусныя измѣренія того времени: Снелліуса (Snellius, 1615 г.), Норвуда (Norwood, 1633 г.) и Риччіоли-Гриммальди (Riccioli-Grimaldi, 1645 г.), были выполнены различными способами, но полученные результаты при всемъ ихъ значеніи представляли собою лишь приближенныя величины. Лишь послѣ того, какъ Пикаръ окончилъ*) въ 1669 г. свое градусное измѣреніе, можно было приступить къ осуществленію вышеупомянутаго плана. Старѣйшая работа въ этомъ направленіи принадлежитъ Жану Рише (Jean Richer) и Доминику Кассинни (Dominique Cassini), которые производили свои наблюденія отъ 1671 до 1673 г. по порученію Парижской Академіи: первый наблюдалъ въ Кайенѣ, второй на разстояніи 8000 километровъ отъ него — въ Парижѣ. Къ описанію самаго пріема мы еще вернемся, теперь же замѣтимъ предварительно, что оба астронома одновременно наблюдали не самое солнце, а планету Марса и сосѣднюю звѣзду ψ^1 Aquarii; измѣривъ ихъ зенитныя разстоянія, они нашли, что параллаксъ Марса равенъ 25",33; такъ

*) Согласно градусному измѣренію Снелліуса діаметръ земного шара оказался равнымъ 12300 килом., по Норвуду — 12800 километровъ, а по Риччіоли-Гримальди — 13900 километровъ. Число, полученное Норвудомъ, наиболѣе близко къ дѣйствительности. По Пикару длина земного градуса равна 342175 парижскихъ футовъ; слѣдовательно, діаметръ земли равенъ 12742 килом.

какъ тогда уже было извѣстно, что отношеніе разстояній Марса и солнца отъ земли равно 1 : 0,372, то они вычислили отсюда, что солнечный параллаксъ равенъ 9″,424.

Позже, въ срединѣ XVIII столѣтія, этотъ же методъ примѣнили Лакай (Lacaille) и Лаландъ (Lalande); они наблюдали каждый отдѣльно луну, Марсъ и Венеру, при чемъ разстояніе, ихъ отдѣлявшее, составляло, приблизительно, 10000 километровъ: одинъ былъ въ Берлинѣ, другой на мысѣ Доброй Надежды. Въ результатѣ ихъ измѣреній средняя величина параллакса луны оказалась равной 57′5″, откуда слѣдовало, что діаметръ луны равенъ 3458 килом., т. е. 466 геогр. миль, а среднее разстояніе ея отъ земли равно 384356 килом. = 51800 геогр. миль: результаты эти все же значительно точнѣе, чѣмъ числа, полученныя Вenделиномъ.

При всей теоретической безупречности этого метода полученными результатами нельзя было удовлетвориться, потому что здѣсь требовалось весьма точное измѣреніе чрезвычайно малыхъ угловъ. Вообще методы вычисленія, основанные на измѣреніи весьма малыхъ угловъ, мало надежны: это легко понять, если принять во вниманіе, что разница на одну сотую секунды въ величинѣ солнечнаго параллакса измѣняетъ величину разстоянія на 24000 геогр. миль.

Теперь мы объяснимъ теорію метода, о которомъ мы до сихъ поръ говорили. Для этого покажемъ сперва, какъ при помощи этого метода опредѣляется параллаксъ луны и разстояніе ея отъ земли. Пусть наблюдатель (I) (фиг. 3) видитъ луну въ зенитѣ и вмѣстѣ съ тѣмъ на томъ же лучѣ зрѣнія неподвижную звѣзду F; чтобы увидѣть въ тотъ же моментъ луну на горизонтѣ, наблюдатель (II) долженъ находиться на разстояніи 90°, т. е. на разстояніи земного квадранта отъ перваго; вслѣдствіе безконечной отдаленности неподвижной звѣзды F, наблюдатель (II) увидитъ ее въ направленіи IIF_1, параллельномъ первоначальному направленію IF, такъ что высота неподвижной звѣзды F, т. е. $\angle a_1$ равный $\angle a$, въ этомъ случаѣ непосредственно даетъ намъ величину параллакса луны. Зная уголъ a, мы находимъ изъ прямоугольнаго треугольника $M\,\mathrm{II}\,E$:

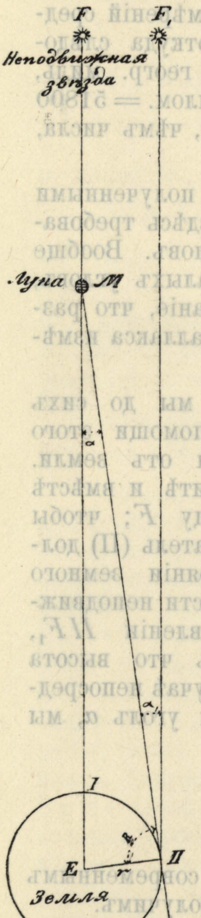
$$\sin a = \frac{r}{EM} \text{ и, слѣдовательно, } EM = \frac{r}{\sin a};$$

подставивъ сюда вмѣсто a его численное значеніе по современнымъ даннымъ, т. е. $a = 0^0{,}95075 = 57'{,}045$ или $57'2''{,}7$, мы получимъ:

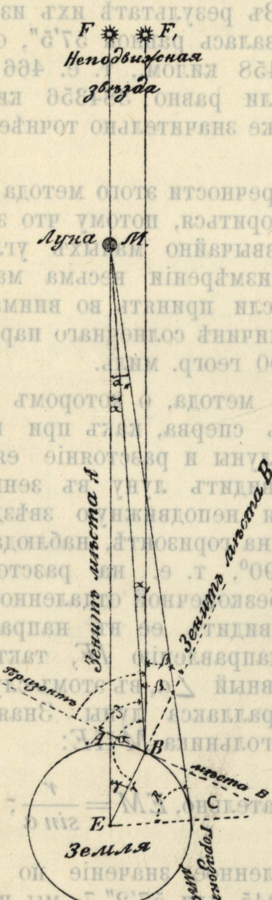
$$EM = \frac{1}{\sin 57'2''{,}7} = 60{,}4\, r.$$

Легко понять, что такое рѣшеніе задачи практически невыполнимо, и потому оно имѣетъ лишь теоретическое значеніе.

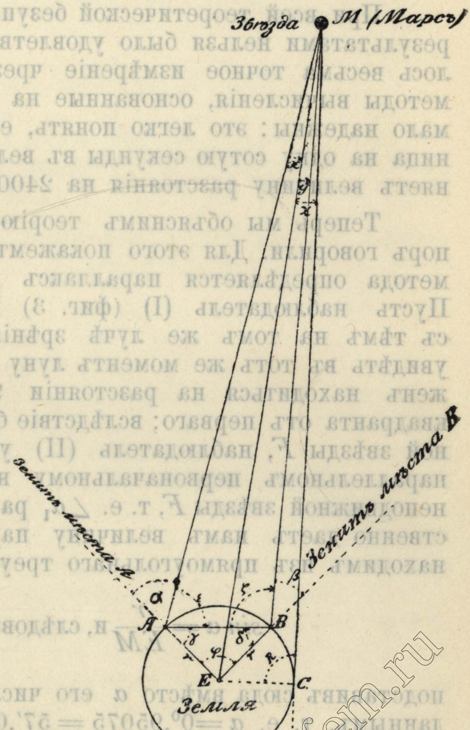
Но тотъ же пріемъ съ незначительнымъ лишь видоизмѣненіемъ можетъ быть осуществленъ на дѣлѣ, если пункты I и II удалены другъ отъ друга не на 90°, а меньше. Наблюдатель A (фиг. 4) и теперь имѣетъ въ зенитѣ луну и неподвижную звѣзду F; пусть въ этотъ моментъ высо́ты луны и звѣзды F и ихъ зенитныя разстоянія въ точкѣ B на угловомъ разстояніи γ отъ A равны соотвѣтственно δ, δ_1 и β, β_1; отсюда получимъ $\alpha_1 = \delta_1 - \delta = \beta - \beta_1$. Углы $\angle \alpha$ и $\angle \alpha_1$ равны другъ другу, какъ внутренніе накрестъ-лежащіе углы при параллельныхъ прямыхъ; слѣдовательно, всѣ углы треугольника EMB намъ извѣстны: $\angle \alpha = \delta_1 - \delta$, $\angle \sigma = 90^0 + \delta$, и $\angle \gamma = 180^0 - (\alpha + \sigma)$.



Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Такъ какъ радіусъ земли r мы считаемъ извѣстнымъ, то по извѣстной формулѣ тригонометріи мы получимъ:

$$r : \sin \alpha = EM : \sin \sigma, \text{ или } EM \sin \alpha = r \sin \sigma;$$

слѣдовательно, разстояніе луны отъ земли

$$EM = \frac{r \sin \sigma}{\sin \alpha}.$$

Уголъ α представляетъ собою не горизонтальный параллаксъ луны, но такъ называемый параллаксъ высоты луны по отношенію къ точкѣ B земли. Оба параллакса связаны между собою формулой, позволяющей вычислить одну изъ этихъ величинъ, если извѣстна другая. А именно:

$$\sin \alpha = \sin \alpha_{11} \cos \delta, \text{ и, слѣдовательно, } \sin \alpha_{11} = \frac{\sin \alpha}{\cos \delta}\text{*)}.$$

Здѣсь α означаетъ параллаксъ высоты свѣтила по отношенію къ точкѣ B земли, α_{11} — горизонтальный параллаксъ свѣтила, δ — высоту свѣтила для наблюдателя, находящагося въ B.

Скажемъ теперь нѣсколько словъ о самомъ пріемѣ измѣренія. На фиг. 5 точки A и B обозначаютъ два пункта, возможно дальше отстоящіе другъ отъ друга; оба пункта находятся на одномъ и томъ же меридіанѣ, и широты ихъ точно опредѣлены.

Если въ обоихъ этихъ пунктахъ измѣрить зенитныя разстоянія α и β свѣтила M,—напримѣръ, планеты Марса, въ тотъ моментъ, когда Марсъ проходитъ черезъ тотъ же меридіанъ,— т. е. когда центръ земли E, оба пункта A и B, и свѣтило M находятся въ одной и той же плоскости, то мы сумѣемъ помощью формулъ тригонометріи опредѣлить параллаксъ свѣтила и разстояніе его отъ земли.

Ходъ вычисленія таковъ:

Радіусъ земли $= r$.

Разность широтъ пунктовъ A и $B = \angle \varphi$.

$$\angle \gamma = \angle \delta = \frac{180^0 - \varphi}{2} = 90^0 - \frac{1}{2}\varphi.$$

Зенитное разстояніе свѣтила M въ точкѣ $A = \angle \alpha$.

Зенитное разстояніе свѣтила M въ точкѣ $B = \angle \beta$.

$$\angle \varepsilon = 180^0 - (\alpha + \gamma).$$

$$\angle \zeta = 180^0 - (\beta + \delta).$$

$$\angle x + \angle y = 180^0 - (\varepsilon + \zeta).$$

$$\text{Сторона } AM = \frac{AB \sin \zeta}{\sin (x + y)} = \frac{AB \sin \zeta}{\sin (\varepsilon + \zeta)}.$$

$$\text{Разстояніе } EM = \frac{r \sin (\varepsilon + \gamma)}{\sin x};$$

уголъ x вычисляется предварительно изъ $\triangle EMA$, въ которомъ извѣстны двѣ стороны $AE = r$ и AM и заключенный между ними уголъ $\angle EAM = \varepsilon + \gamma$.

*) Изъ $\triangle EMC$ (фиг. 4) имѣемъ: $EC = EM \sin \alpha_{11}$; изъ $\triangle EMB : EB : EM = \sin \alpha : \sin \sigma$; но $EB = EC$, и $\sin \sigma = \sin\ (90^0 + \delta) = \cos \delta$, слѣдовательно: $EC : EM = \sin \alpha_{11}$; $EC : EM = \sin \alpha : \cos \delta$;

откуда $\sin \alpha_{11} = \sin \alpha \,.\, \cos \delta$.

Отсюда найдемъ, наконецъ, величину z параллакса свѣтила

$$\sin z = \frac{r}{EM}.$$

Мы предполагали здѣсь, что оба пункта наблюденія, центръ земли и наблюдаемое свѣтило, находятся въ одной плоскости. Въ дѣйствительности это не всегда имѣетъ мѣсто, но осуществляется лишь приближенно. Однако, указанное условіе не является необходимымъ: отсутствіе его дѣлаетъ лишь вычисленія болѣе длинными и сложными. Эти вычисленія по своей сложности выходятъ за предѣлы общедоступной статьи, и потому мы не будемъ здѣсь ихъ излагать. Мы поставили себѣ цѣлью изложить лишь методы и суть пріемовъ, которые легли въ основаніе изслѣдованій Р и ш е, К а с с и н и, Л а л а н д а и др.

Астрономы послѣдующихъ временъ не довольствовались, однако, полученными результатами; они добивались и добились еще болѣе точныхъ и надежныхъ методовъ, въ особенности для нахожденія солнечнаго параллакса и опредѣляемаго посредствомъ него разстоянія солнца отъ земли. Въ слѣдующей статьѣ мы представимъ сущность э т и х ъ методовъ, основанныхъ на прохожденіи нижнихъ планетъ,—главнымъ образомъ, Венеры,—по диску солнца.

(Окончаніе слѣдуетъ).

О періодическихъ дробяхъ.

А. Филиппова.

Оглавленіе. § 1. Алгориѳмъ безконечнаго умноженія. § 2. Алгориѳмъ безконечнаго дѣленія. § 3. Производящій множитель. § 4. Вычисленіе производящаго множителя. § 5. Обращеніе обыкновенной дроби, не содержащей въ знаменателѣ множителей 2 и 5, въ десятичную. § 6. То же. Второй способъ. § 7. Алгебраическій методъ. § 8. Случай, когда знаменатель дѣлится на 2 или на 5. § 9. „Дѣленіе безъ дѣленія и вычитанія“. § 10. Частные случаи. § 11. О нѣкоторыхъ свойствахъ алгориѳмовъ безконечнаго умноженія и дѣленія.

§ 1. Алгориѳмъ безконечнаго умноженія.

Пусть α есть нѣкоторое однозначное число натуральнаго ряда чиселъ. Пусть n есть какое-нибудь число натуральнаго ряда чиселъ, не равное нулю.

Умножимъ α на n и послѣднюю цифру произведенія $\alpha . n$, которую обозначимъ черезъ α_1, припишемъ слѣва числа α, а снизу остальныя цифры произведенія $\alpha . n$ такъ, чтобы послѣдняя изъ оставшихся цифръ произведенія была подъ α_1.

Умножимъ α_1 на n и къ произведенію $\alpha_1 . n$ прибавимъ число, стоящее подъ α_1. Послѣднюю цифру полученной суммы, которую (цифру) обозначимъ черезъ α_2, припишемъ слѣва числа α_1 и т. д.

Установленный такимъ образомъ алгориѳмъ назовемъ алгориѳмомъ „безконечнаго умноженія“.

Примѣръ 1. Умножить 5 на 2 способомъ безконечнаго умноженія.

$$\begin{array}{r|l} \ldots 105263157894736842105 & 2 \\ 1\;1\;\;1111\;1\;11\;\;\;\;\;\;\;1 & \end{array}$$

$\longleftarrow$ направленіе алгориѳма.

Изъ опредѣленія этого алгориѳма слѣдуетъ, что результатомъ безконечнаго умноженія является безконечный рядъ чиселъ.

Далѣе мы докажемъ, что этотъ рядъ есть рядъ чисто періодическій.

Пусть при безконечномъ умноженіи α на n получился періодъ: $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k$, гдѣ α_k есть α и рядъ $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k$ составленъ по методу положенія, т. е. $\alpha_{k-1}\alpha_k$ есть $10\alpha_{k-1}+\alpha_k$ и т. д. Согласимся это записывать такъ:

$$\alpha * n = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k). \tag{1}$$

Такимъ образомъ знакъ $*$ есть знакъ безконечнаго умноженія. Число α назовемъ множимымъ безконечнаго умноженія, n — множителемъ, періодъ $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k$ — произведеніемъ.

Изъ вышесказаннаго слѣдуетъ, что

$$0 * n = (0), \tag{2}$$

$$\alpha * 1 = (\alpha), \tag{3}$$

$$\alpha * 10 = (0\alpha), \tag{4}$$

$$\alpha * 10^k = (\overbrace{000\ldots00}^{k\text{ нулей}}\alpha). \tag{5}$$

§ 2. Алгориѳмъ безконечнаго дѣленія.

Пусть α есть однозначное, цѣлое, положительное число; пусть n есть какое угодно число натуральнаго ряда чиселъ, не равное нулю. Раздѣлимъ α на n, пусть въ частномъ получилось α_1, въ остаткѣ β_1. Записываемъ этотъ результатъ такъ:

$$\begin{array}{c} \alpha_1. \\ \beta_1 \end{array}$$

Число $\beta_1\alpha_1$ (въ цифрахъ) меньше $10n$, ибо $\beta_1 < n$. Дѣлимъ $\beta_1\alpha_1$ на n. Пусть въ частномъ получилось α_2 (однозначное число) и въ остаткѣ q. Приписываемъ α_2 къ α_1, а q подписываемъ внизу такъ, чтобы послѣдняя цифра q, которую обозначимъ черезъ β_2, была подъ α_1, а остальныя подъ β_1 и лѣвѣе.

Число $q\alpha_2$ дѣлимъ на n, получаемъ въ частномъ α_3—число однозначное и остатокъ $r < n$.

Пусть въ частномъ получается α_3 и въ остаткѣ r. Приписываемъ α_3 справа къ α_2 и т. д.

Примѣръ 2. Раздѣлить 7 на 12 способомъ безконечнаго дѣленія.

$$\begin{array}{l} 7|12|\ 0588235294117647\ldots \\ \quad\ \ 709246314129758\ 7 \\ \qquad\ 1 \qquad\ 1 \end{array}$$

направленіе алгориѳма: $\twoheadrightarrow$

Изъ опредѣленія этого алгориѳма слѣдуетъ, что результатомъ его является безконечный рядъ чиселъ. Далѣе мы докажемъ, что этотъ рядъ есть рядъ чисто періодическій.

Пусть при безконечномъ дѣленіи a на n получился періодъ $a_1 a_2 a_3 \ldots a_k$. Согласимся это записывать такъ:

$$a \overset{*}{\underset{*}{}} n = (a_1 a_2 a_3 \ldots a_k). \tag{6}$$

Число a назовемъ дѣлимымъ безконечнаго дѣленія, n — дѣлителемъ, періодъ $(a_1 a_2 \ldots a_k)$ — частнымъ. Будемъ обозначать это дѣйствіе знакомъ $\overset{*}{\underset{*}{}}$.

Изъ опредѣленія этого алгориѳма слѣдуетъ, что операція $a \overset{*}{\underset{*}{}} 0$ недопустима.

Далѣе слѣдуетъ:

$$0 \overset{*}{\underset{*}{}} a = (0), \tag{7}$$

$$a \overset{*}{\underset{*}{}} 1 = (a), \tag{8}$$

$$1 \overset{*}{\underset{*}{}} 1 = (1), \tag{9}$$

$$a \overset{*}{\underset{*}{}} 10 = (0a), \tag{10}$$

$$a \overset{*}{\underset{*}{}} 10^k = (\overbrace{00\ldots00}^{k \text{ нулей}}a). \tag{11}$$

Далѣе докажемъ формулу:

$$a \overset{*}{\underset{*}{}} n = a * n, \tag{12}$$

гдѣ знакъ $=$ означаетъ тожество періодовъ.

§ 3. Производящій множитель.

Пусть $\frac{1}{b}$ есть дробь, обращающаяся при обращеніи въ десятичную въ чистую періодическую; слѣдовательно, пусть b не содержитъ множителей 2 и 5.

Пусть

$$\frac{1}{b} = 0,(a_1 a_2 a_3 \ldots a_k), \tag{13}$$

то есть:

$$\frac{1}{b} = \frac{a_1 a_2 a_3 \ldots a_k}{10^k - 1}. \tag{14}$$

Пусть при дѣленіи 1 на b получились остатки въ послѣдовательности:

$$r_1,\ r_2,\ r_3, \ldots r_k. \tag{15}$$

Очевидно, что

$$\frac{r_i}{b} = \frac{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_k) \cdot r_i}{10^k - 1}. \tag{16}$$

Съ другой стороны, если r_i дѣлить на b, то получимъ остатки:

$$r_i,\ r_{i+1},\ r_{i+2}, \ldots r_k,\ r_1,\ r_2, \ldots r_{i-1}. \tag{17}$$

Совокупности (15) и (17) покрываютъ другъ друга. Отсюда слѣдуетъ, что числитель дроби $\frac{r_i}{b}$ есть нѣкоторая круговая перестановка основной послѣдовательности:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_k. \tag{18}$$

Давая указателю i k значеній: 1, 2, 3 ... k, получимъ такимъ образомъ k дробей: $\frac{r_1}{b}, \frac{r_2}{b}, \ldots, \frac{r_k}{b}$ и соотвѣтственно k различныхъ круговыхъ перестановокъ основной послѣдовательности. Такъ какъ мы такимъ образомъ исчерпали всѣ возможныя круговыя перестановки, то можемъ сказать, что каждой круговой перестановкѣ послѣдовательности (18) соотвѣтствуетъ дробь $\frac{r_s}{b}$, гдѣ s получаетъ одно изъ значеній: 1, 2, 3 ... k.

Такимъ образомъ, перестановкѣ

$$\alpha_k\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_{k-1} \tag{19}$$

соотвѣтствуетъ дробь $\frac{c}{b}$.

Число c, слѣдовательно, опредѣляется такимъ образомъ:

$$c = \frac{b \cdot (\alpha_k\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{k-1})}{10^k - 1}. \tag{20}$$

Назовемъ это число **производящимъ множителемъ** дроби $\frac{1}{b}$.

Предыдущими разсужденіями мы установили теорему:

Теорема 1. Если b, число натуральнаго ряда, не равно ни 0 ни 1 и не содержитъ множителей 2 и 5, то дробь $\frac{1}{b}$ имѣетъ производящій множитель.

§ 4. Вычисленіе производящаго множителя.

Вычисленіе производящаго множителя нетрудно произвести. Для этого нужно знать послѣднюю цифру періода α_k.

Теорема 2. Если b оканчивается одной изъ цифръ: 1, 3, 7, 9, то α_k получаетъ соотвѣтственно значенія: 9, 3, 7, 1.

Доказательство:

$$\frac{1}{b} = \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_k}{999 \ldots 9},$$

$$999\ldots 9 = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k)\,.\,b.$$

Такимъ образомъ произведенiе α_k на послѣднюю цифру b оканчивается цифрой 9, откуда слѣдуетъ доказываемая теорема.

Теорема 3.

$$c = \frac{\alpha_k\,.\,b + 1}{10}. \tag{21}$$

Доказательство:

$$\frac{1}{b} = \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k}{10^k - 1};\quad b = \frac{10^k - 1}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k};$$

$$c = \frac{b\,.\,(\alpha_k\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1})}{10^k - 1} = \frac{\alpha_k\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k} =$$

$$= \frac{\alpha_k\,.\,10^{k-1} + \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k} = \frac{\alpha_k\,.\,10^{k-1}}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} + \frac{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}\,.\,10}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\,.\,10} =$$

$$= \frac{\alpha_k\,.\,10^{k-1}}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} + \frac{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k - \alpha_k}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\,.\,10} =$$

$$= \frac{\alpha_k(10^k - 1)}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\,.\,10} + \frac{1}{10} = \frac{\alpha_k\,.\,b + 1}{10}.$$

Замѣчанiе. Формула (21), очевидно, даетъ для c цѣлыя значенiя, меньшiя b.

Примѣръ 3. Опредѣлить послѣднюю цифру перiода дробей $\frac{1}{13}, \frac{1}{19}, \frac{1}{17}, \frac{1}{41}$ и вычислить производящiй множитель.

1) $b = 13,\ \alpha_k = 3,\ c = \dfrac{13\,.\,3 + 1}{10} = 4$; 2) $b = 19,\ \alpha_k = 1,\ c = 2$;

3) $b = 17,\ \alpha_k = 7,\ c = 12$; 4) $b = 41,\ \alpha_k = 9,\ c = 37$.

§ 5. Обращенiе обыкновенной дроби, не содержащей въ знаменателѣ множителей 2 и 5, въ десятичную.

Разсмотримъ формулу:

$$\alpha_k\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1} = c\,.\,(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k). \tag{22}$$

Изъ этой формулы слѣдуетъ, что послѣдняя цифра произведенiя $\alpha_k\,.\,c$ есть α_{k-1}, что α_{k-2} есть послѣдняя цифра числа $\alpha_{k-1}\,.\,c + \beta$, гдѣ β есть цифра десятковъ произведенiя $c\,.\,\alpha_k$ и т. д.

Такимъ образомъ, для вычисленiя перiода дроби $\frac{1}{b}$ мы можемъ пользоваться алгориѳмомъ безконечнаго умноженiя. Такимъ образомъ, если перiодъ дроби $\frac{1}{b}$ есть $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k)$, то есть

$$\frac{1}{b} = 0,(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k), \tag{23}$$

то
$$(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k) = \alpha_k * c. \tag{24}$$

Конечно, этотъ способъ имѣетъ преимущества передъ обыкновеннымъ, такъ какъ въ этомъ случаѣ мы производимъ только сложенiе и умноженiе, не пользуясь вычитанiемъ и дѣленiемъ и кромѣ того c меньше b*). Въ нѣкоторыхъ случаяхъ облегченiе операцiй весьма значительно. Такъ, если число b имѣетъ видъ:

$$\alpha\overbrace{999\ldots9}^{s\ \text{девятокъ}},$$

то

$$c = \frac{\alpha 999\ldots9 \times 1 + 1}{10} = \frac{\alpha'\overbrace{000\ldots0}^{s\ \text{нулей}}}{10} = \alpha'00\ldots0,$$

гдѣ $\alpha' = \alpha + 1$.

Отсюда вытекаютъ весьма простые методы обращенiя дробей $\frac{1}{19}, \frac{1}{29}, \frac{1}{39}, \ldots \frac{1}{199}, \frac{1}{299}, \ldots$

Также значительно упрощенiе, если b оканчивается тройкой. Если же b оканчивается 1, то c меньше b на $\frac{b-1}{10}$ единицъ. Если b оканчивается 7, то c меньше b на $\frac{3b-1}{10}$ единицъ.

Примѣръ 4. Обратить дробь $\frac{1}{19}$ въ десятичную:

$$b = 19; \quad \alpha_k = 1; \quad c = \frac{19 \,.\, 1 + 1}{10} = 2;$$

$$\begin{array}{r|l} \ldots 105263157894736842 1 & 2 \\ 1\ 1\ \ \ 1111\ 1\ \ 11 & \end{array}$$

$$1 * 2 = (052631578947368421), \quad \frac{1}{19} = 0,(052631578947368421).$$

Примѣръ 5. Обратить дробь $\frac{1}{17}$ въ десятичную:

$$b = 17; \quad \alpha_k = 7; \quad c = \frac{17 \,.\, 7 + 1}{10} = 12;$$

$$7 * 12 = (0588235294117647), \quad \frac{1}{17} = 0,(0588235294117647).$$

Расположенiе вычисленiй:

$$\begin{array}{r|l} 0588235294117647 & 12 \\ 09246144129758\ \ & \\ 1\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ & \end{array}$$

---

*) Признавая значенiе этихъ любопытныхъ соображенiй, мы не можемъ признать за ними значенiя практическаго, какъ способа, дѣйствительно болѣе удобнаго для обращенiя простой дроби въ десятичную въ обычной практикѣ. Ред.

Примѣръ 6. Обратить дробь $\frac{1}{63}$ въ десятичную:

$$b=63;\quad \alpha_k=3;\quad c=\frac{63\,.\,3+1}{10}=19;$$

$$\begin{array}{r|l} \ldots 3015873 & 19 \\ 11135 & \\ 205 & \end{array}$$

$$3 * 19=(015873),$$

$$\frac{1}{63}=0,(015873).$$

§ 6. Второй способъ.

Формулу (22) можно записать такъ:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k=\frac{1}{c}\cdot(\alpha_k\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}). \tag{25}$$

Отсюда слѣдуетъ, что $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k)$ можно разсматривать, какъ частное безконечнаго дѣленія:

$$\alpha_k \overset{*}{\underset{*}{}} c=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k). \tag{26}$$

Такимъ образомъ, пользуясь алгориѳмомъ безконечнаго умноженія, можно вычислить періоды дробей $\frac{1}{b}$ съ конца, пользуясь алгориѳмомъ безконечнаго дѣленія — съ начала.

Примѣръ 7. Обратить дробь $\frac{1}{19}$ въ періодическую алгориѳмомъ безконечнаго дѣленія:

$$b=19;\quad \alpha_k=1;\quad c=2 \quad \text{(см. примѣръ 4)};$$

$$1 \overset{*}{\underset{*}{}} 2=(052631578947368421).$$
$$\phantom{1 \overset{*}{\underset{*}{}} 2=(0}1\;1\quad 1111\;\;1\;\;11$$

Примѣръ 8. Обратить дробь $\frac{1}{17}$ въ десятичную алгориѳмомъ безконечнаго дѣленія:

$$7 \overset{*}{\underset{*}{}} 12=(0588235294117647),$$
$$709246314129758\;\;7$$
$$1\qquad 1$$

$$\frac{1}{17}=0,(0588235294117647).$$

Примѣръ 9. Обратить дробь $\frac{1}{43}$ въ десятичную алгориѳмомъ безконечнаго дѣленія:

$$b = 43; \quad \alpha_k = 3; \quad c = \frac{43 \cdot 3 + 1}{10} = 13;$$

$$3 \overset{*}{\underset{*}{}} 13 = (023255813953488372093);$$
$$343770152646104921 23$$
$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

$$\frac{1}{43} = 0,(023255813953488372093).$$

§ 7. Алгебраическій методъ.

Алгориѳмъ безконечнаго дѣленія примѣнялся многими. Но основанія, на которыхъ покоятся эти методы, содержатся въ извѣстномъ законѣ образованія коэффиціентовъ частнаго отъ дѣленія $f(x)$ на $x-a$. На страницѣ 178 перваго тома книги E. Lucas'a „Théorie des nombres" находимъ слѣдующія строки:

Exemple VI.

Division d'un nombre entier par 19.

On applique la règle de la division de $f(x)$ par $x - \frac{1}{2}$ pour $x = 10$. Ainsi on a tout de suite:

$$\frac{10^{18}-1}{19} = 5'263'1'57'89'47'3'68421.$$

Chaque chiffre est la moitié du précédent, ou la moitié du précédent augmenté de 10, si la division antérieure donne pour reste 1; c'est ce dernier cas que nous avons indiqué par un petit chiffre 1 placé audessus et à gauche. On opère de même pour $x = 100$, $x = 1000\ldots$, en calculant par groupes de deux, trois... chiffres; ainsi:

$$\frac{10^{198}-1}{190} = 5025'125628140703'51'75'87'93'9698\ldots$$

$$\frac{10^{1998}-1}{1998} = 500250125'062531'265'632\ldots$$

On connait de même des procédés rapides pour la division par 29, 39, 49...; par 299, 399, 499...etc.

Изъ этой замѣтки видно, что основы примѣненія алгориѳма безконечнаго дѣленія въ такомъ видѣ лишь пригодны для частныхъ случаевъ и что алгориѳму не достаетъ въ такомъ видѣ простоты и легкости.

Замѣчаніе. Напомнимъ читателю, что

$$f(x):(x-a) = a_0 x^{n-1} + (a_0 a + a_1) x^{n-2} + (a_0 a^2 + a_1 a + a_2) x^{n-3} + \ldots$$

Въ данномъ случаѣ

$$x = 10, f(x) = x^{18} - 1; a = \frac{1}{2}\cdot$$

Слѣдовательно,

$$\frac{10^{18}-1}{19}=\frac{10^{18}-1}{\left(10-\frac{1}{2}\right)2}=\frac{1}{2}\left[10^{17}+\frac{1}{2}\,.\,10^{16}+\frac{1}{4}\,.\,10^{15}+\ldots\right]=$$

$$=5\,.\,10^{16}+2\,.\,10^{15}+6\,.\,10^{14}+\ldots$$

§ 8. Случай, когда знаменатель дѣлится на 2 или на 5.

Пусть $b=d\,.\,5^k\,.\,2^r$, гдѣ d есть число взаимно-простое съ 5 и 2. Тогда

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{d\,.\,5^k\,.\,2^r}.$$

Если

$$k>r,\ k-r=s,$$

то

$$\frac{1}{b}=\frac{2^s}{d\,.\,10^k}.$$

Такимъ образомъ, обращаемъ дробь $\frac{1}{d}$ въ десятичную, умножаемъ ее (см. § 9) на 2^s и дѣлимъ на 10^k.

Если

$$k<r,\ r-k=q,$$

то получаемъ дробь

$$\frac{1}{b}=\frac{5^q}{d\,.\,10^r}.$$

Обращаемъ дробь $\frac{1}{d}$ въ десятичную и переносимъ запятую влѣво на r знаковъ и умножаемъ на 5^q и т. д.

§ 9. „Дѣленіе безъ дѣленія и вычитанія“.

Пусть a и b суть какія-нибудь числа натуральнаго ряда, $b\neq 0$; пусть $b=d\,.\,2^r\,.\,5^q$ и d есть число взаимно-простое съ 2 и 5.

Тогда $a:b=a:d\,.\,2^r\,.\,5^q$.

Пусть $1:d=0,(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\ldots\alpha_k)$.

Такимъ образомъ,

$$a:b=\frac{a\,.\,0,(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\ldots\alpha_k)}{2^r\,.\,5^q}= \tag{27}$$

$$=\frac{a\,.\,0,(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\ldots\alpha_k)\,.\,5^r\,.\,2^q}{10^{r+q}} \tag{28}$$

Изъ послѣдней формулы видно, что дѣленіе натуральныхъ чиселъ можно производить, не пользуясь алгориѳмами вычитанія и дѣленія, если не считать дѣленія на 10.

Такимъ образомъ, если $b = d \,.\, 2^r \,.\, 5^q$, а α_k есть послѣдняя цифра періода дроби $\frac{1}{d}$, то

$$\frac{a}{b} = 0,\left(\alpha_k * \frac{\alpha_k \,.\, d + 1}{10}\right) . \, a \,.\, 2^q \,.\, 5^r : 10^{q+r} \qquad (29)$$

При этомъ замѣтимъ, что умноженіе чисто періодической дроби на число натуральнаго ряда нужно производить, пользуясь извѣстнымъ пріемомъ, въ силу котораго умножаютъ періодъ на число, отдѣляютъ въ произведеніи запятой столько десятичныхъ знаковъ, сколько было въ періодѣ; часть, находящуюся влѣво отъ запятой, подписываютъ подъ произведеніемъ, отдѣливши въ ней опять столько знаковъ, сколько было въ періодѣ и т. д. Записанныя числа складываютъ; часть, стоящая вправо, образуетъ періодъ.

Примѣръ 10. Раздѣлить 300000001 на 7:

1) $b = 7, \alpha_k = 7, c = 5$; $7 * 5 = (142857)$; $\frac{1}{7} = 0,(142857)$;

2)
$$\begin{array}{r} 0,142857 \\ \times\, 300000001 \\ \hline 142857 \\ 4285710000000 \\ \hline 42857100,142857 \end{array} \Big\} +$$

3)
$$\begin{array}{r} 42857100,142857 \\ 42,857100 \\ 42 \\ \hline 42857142,999999 \end{array} \Big\} +$$

Такимъ образомъ,

$$300000001 : 7 = 42857142,(9) = 42857143.$$

§ 10. Частные случаи.

Въ частныхъ случаяхъ можно обратить дробь $\frac{a}{b}$ въ десятичную другими пріемами.

Пусть b есть число взаимно простое съ 2 и 5, $a < b$, $\frac{a}{b} = 0,(\beta_1 \beta_2 \beta_3 \ldots \beta_k)$.

Теорема 4.

Если число $b \,.\, \beta_k + a$ дѣлится на число $10\,a$ безъ остатка, то

$$(\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_k) = \beta_k * \left(\frac{b \,.\, \beta_k + a}{10\, a}\right), \qquad (30)$$

то есть: періодъ дроби $\frac{a}{b}$ можно образовать алгориѳмомъ безконечнаго умноженія β_k на число $\frac{b \,.\, \beta_k + a}{10\, a}$.

Доказательство.

Пусть $c_a = \frac{\beta_k \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{k-1}}{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \ldots \beta_k}$. Вычисляя c_a аналогично вычисленію c, мы найдемъ, что

$$c_a = \frac{b \cdot \beta_k + a}{10\,a}. \tag{31}$$

Но

$$(\beta_k \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{k-1}) = c_a \cdot (\beta_1 \beta_2 \beta_3 \ldots \beta_k). \tag{31'}$$

Изъ этой формулы слѣдуетъ, что, если c_a есть число цѣлое, то

$$(\beta_1 \beta_2 \beta_3 \ldots \beta_k) = \beta_k * c_a. \tag{32}$$

Изъ формулы (31′) слѣдуетъ, что, если c_a есть число цѣлое, то

$$(\beta_1 \beta_2 \beta_3 \ldots \beta_k) = \beta_k * c_a. \tag{33}$$

Опредѣленіе β_k нетрудно. Дѣйствительно, β_k есть послѣдняя цифра произведенія α_k на a.

Примѣръ 11. Обратить дробь $\frac{7}{19}$ въ десятичную:

$$\frac{a}{b} = \frac{7}{19}; \quad \alpha_k = 1; \quad \beta_k = 7; \quad c_7 = \frac{19 \cdot 7 + 7}{7 \cdot 10} = 2.$$

Отсюда

$$7 * 2 = (368421052631578947),$$

$$\frac{7}{19} = 0,(368421052631578947).$$

Если b есть число полнопеіодное, т. е. если періодъ дроби $\frac{1}{b}$ содержитъ $b - 1$ цифру, то всѣ періоды дробей вида $\frac{a}{b}$ суть различныя круговыя перестановки основного періода дроби $\frac{1}{b}$. Въ этомъ случаѣ весьма легко, зная основной періодъ, вычислять періоды дробей $\frac{a}{b}$. Для этого опредѣляемъ достаточное число послѣднихъ цифръ періода дроби $\frac{a}{b}$, умножая послѣднія цифры основного на a, и пишемъ соотвѣтствующую перестановку.

Примѣръ 12. Обратить дробь $\frac{5}{17}$ въ десятичную, зная, что $\frac{1}{17} = 0,(058\ldots47)$ (см. примѣръ 5).

Такъ какъ 17 есть число полнопеіодное, то умножаемъ 47 на 5 и видимъ, что періодъ дроби $\frac{5}{17}$ оканчивается цифрами 35.

Поэтому

$$\frac{5}{17} = 0,(2941176470588235).$$

Можно опредѣлить въ томъ же случаѣ начальныя цифры періода, раздѣливъ обыкновеннымъ способомъ 5 на 17. Получимъ:

$$\begin{array}{r|l} 5 & 17 \\ 34 & 0,\ 9 \\ \hline 160\ldots & \end{array}$$

Теорема 4 въ этомъ случаѣ непримѣнима, ибо

$$\beta_k = 5, c_5 = \frac{17 . 5 + 5}{5 . 10} = 1{,}8.$$

§ 11. О нѣкоторыхъ свойствахъ алгориѳмовъ безконечнаго умноженія и дѣленія.

Теорема 5. Если α и n суть числа натуральнаго ряда, $n \neq 0$, α— однозначно, то результатъ безконечнаго умноженія $\alpha * n$ есть чисто періодическій рядъ цифръ.

Доказательство. Составимъ неопредѣленное уравненіе:

$$n = \frac{\alpha x + y}{10y}. \qquad (34)$$

Отсюда

$$(10n - 1)y - \alpha x = 0,$$

$$x = (10n - 1) . t,$$

$$y = \alpha . t.$$

Разсмотримъ дробь $\frac{y}{x} = \frac{\alpha}{10n - 1}$. (35)

Эта дробь обращается въ чисто періодическую. По теоремѣ 4 ея періодъ есть результатъ безконечнаго умноженія $\alpha * n$.

Теорема 6. Если α и n удовлетворяютъ условіямъ теоремы 5, то результатъ безконечнаго дѣленія $\alpha \overset{*}{\underset{*}{}} n$ есть чисто періодическій рядъ.

Доказательство. Разсматривая дробь $\frac{\alpha}{10n - 1}$, которая обращается въ чистую періодическую, видимъ, что $\beta_k = \alpha$; $c = \frac{\alpha(10n - 1) + \alpha}{10\alpha} = n$. Такимъ образомъ, періодъ дроби $\frac{\alpha}{10n - 1}$ есть результатъ безконечнаго дѣленія $\alpha \overset{*}{\underset{*}{}} n$.

Теорема 7. Если α и n удовлетворяютъ условіямъ теоремы 5, то

$$\alpha \overset{*}{\underset{*}{}} n = \alpha * n. \qquad (36)$$

Доказательство слѣдуетъ изъ того, что $\alpha \overset{*}{\underset{*}{}} n$ и $\alpha * n$ суть результаты обращенія въ десятичную дробь одной и той же дроби $\frac{\alpha}{10n - 1}$.

Объ электромагнитной массѣ.

Т. Леви-Чивита.

Переводъ съ италіанскаго *Ю. Г. Рабиновича.*

(*Окончаніе* *).

Лучи положительнаго электричества.

Наше вниманіе до сихъ поръ было обращено на радіацію отрицательнаго электричества. Самъ собою возникаетъ вопросъ, существуютъ ли аналогичныя явленія для электричества положительнаго. Такія явленія дѣйствительно были констатированы (хотя они менѣе устойчивы и менѣе замѣтны, чѣмъ явленія, обязанныя своимъ происхожденіемъ отрицательному электричеству), напримѣръ, каналовые лучи Гольдштейна[1]), которые образуются во время электрическаго разряда въ сильно разрѣженныхъ газахъ, лучи, испускаемые раскаленной проволокой, предварительно заряженной положительнымъ электричествомъ, одинъ изъ трехъ видовъ лучей, характеризующихъ радіоактивныя тѣла (такъ называемые α-лучи).

Винъ (Wien)[2]), Эверсъ (Ewers)[3]), Дж. Дж. Томсонъ (J. J. Thomson)[4]) и Рётгерфордъ (Rutherford)[5]) изучали эти типы радіацій при помощи пріемовъ, изложенныхъ выше въ примѣненіи къ катоднымъ и тому подобнымъ лучамъ. Удостовѣрившись, что они имѣютъ дѣло съ положительными зарядами, они установили (пользуясь обычнымъ способомъ электромагнитныхъ отклоненій), что $\frac{e}{m}$ или, точнѣе, $\frac{e}{m+m_0}$, если принимать во вниманіе собственное поле, есть величина одного порядка съ η, даже часто меньшая (почти какъ разъ половина для α-лучей), тогда какъ мы видѣли, что для отрицательныхъ лучей это отношеніе приблизительно въ 1800 разъ больше.

Кромѣ того,—сошлемся, напримѣръ, на каналовые лучи—было найдено, что $\frac{e}{m+m_0}$ измѣняется съ природой электродовъ и газа въ разрядной трубкѣ. При этихъ условіяхъ тѣ соображенія, которыя при-

*) См. № 465—466 „Вѣстника“.

[1]) См. статьи въ „Вѣстникѣ“: „Объ анодныхъ лучахъ“ № 458 и Дж. Дж. Томсона „Корпускулярная теорія матеріи“ гл. I, № 459.

[2]) Wien. Untersuchungen über die elektrische Entladung in verdünnten Gasen. „Annalen der Physik“, 65, 1898 г.

[3]) Ewers. Zur Mechanik der Kanal-und Kathodenstrahlen. „Annalen der Physik“, 69; 1899 г.

[4]) J. J. Thomson. Conduction of electricity through gases. Cambridge University Press, 1903 г., стр, 119. Rays of positive electricity. „Phil. Mag.“, (6), 13 и 14, май и сентябрь 1907 г.

[5]) Rutherford. The mass and velocity of the α particles... Mass of the α particles of Thorium (въ сотрудничествѣ съ O. Hahn'омъ). „Phil. Mag.“, (6), 12, октябрь, 1906 г.

вели насъ въ случаѣ отрицательнаго электричества къ исключенію всякаго участія вѣсомой матеріи, не имѣютъ уже такого значенія. Здѣсь, наоборотъ (принимая во вниманіе зависимость радіаціи отъ того вещества, въ присутствіи котораго она происходитъ), болѣе вѣроятнымъ является то предположеніе, что мы имѣемъ дѣло съ самыми настоящими матеріальными частицами, заряженными положительнымъ электричествомъ.

Говоритъ въ пользу этого предположенія то обстоятельство, что значеніе—обозначимъ его η_1—отношенія $\frac{e}{m+m_0}$, хотя и измѣняется отъ случая къ случаю, однако, оказывается всегда менѣе η, какъ того требуетъ атомистическая гипотеза. Въ самомъ дѣлѣ, согласно этой гипотезѣ, $\frac{e}{m}$ должно было бы быть равно $\frac{\eta}{\nu}$ (ν — химическій эквивалентъ матеріальнаго заряда); поэтому $\frac{e}{m} \leqslant \eta$. Но $\frac{e}{m+m_0}$ еще меньше, чѣмъ $\frac{e}{m}$, а потому a fortiori

$$\frac{e}{m+m_0} \leqslant \eta.$$

Если дана, напримѣръ, частица водорода, то атомистическая гипотеза даетъ $\frac{e}{m} = \eta$. Исключая m изъ уравненія

$$\frac{e}{m+m_0} = \eta_1,$$

получаемъ:

$$\frac{e}{\frac{\eta}{e} + m_0} = \eta_1,$$

или

$$m_0 = e\left(\frac{1}{\eta_1} - \frac{1}{\eta}\right);$$

мы, такимъ образомъ, въ состояніи (принимая обѣ гипотезы, что въ положительныхъ лучахъ есть матеріальное ядро, и что электричество имѣетъ атомное строеніе) не только указать на то, что кажущаяся масса $m+m_0$ имѣетъ сложный характеръ, но и отличить, какая часть въ ней обязана своимъ происхожденіемъ обыкновенной инерціи и какая — электромагнитной.

β-лучи и опыты Кауфмана[1]).

Одно изъ самыхъ блестящихъ приложеній теоріи Абрагама было сдѣлано Кауфманомъ въ его знаменитыхъ опытахъ надъ β-лучами радія.

[1]) Kaufmann. Ueber die elektromagnetische Masse der Elektronen. „Göttingener Nachrichten“ 1902 и 1903 года.

Предварительные опыты позволили ему предположить, что онъ имѣетъ дѣло съ радіацiей отрицательнаго электричества, обладающей большей скоростью, чѣмъ катодные лучи, даже довольно близкой къ скорости свѣта.

Упрощенiе, состоящее въ томъ, что собственному полю приписываютъ только увеличенiе инерцiи атома, считая, что $m_1 = m_2 = m + m_0$ здѣсь уже никакъ не допустимо. Кауфманъ интерпретировалъ свои опыты, принимая для силы собственнаго поля болѣе сложныя выраженiя (7) и (8).

Матерiалъ наблюденiй оказался въ отличномъ согласiи съ формулами, если прямо положить $m = 0$.

При этомъ скорости электроновъ оказываются заключенными между $^2/_3$ и $^9/_{10}$ скорости свѣта.

Послѣ этихъ именно знаменательныхъ открытiй Кауфманъ и Абрагамъ высказали пять лѣтъ тому назадъ гипотезу, которую всѣ считаютъ теперь вѣрной; гипотеза эта заключается въ томъ, что отрицательные лучи имѣютъ чисто электро-магнитный характеръ, лишены всякихъ матерiальныхъ ядеръ и все же обладаютъ инерцiей: это явленiе инерцiи тожественно обычному, пока скорость достаточно мала, но инерцiя возрастаетъ безпредѣльно по величинѣ и дѣлается перемѣнной по направленiю при возрастанiи скорости.

Различныя механики электрона[1]).

Вспомнимъ, изъ чего мы исходили, когда сопоставляли результаты опытовъ съ теорiей.

Сначала мы приняли матерiальный неизмѣняемый остовъ (благодаря которому распредѣленiе электричества въ каждой частицѣ должно было само по себѣ оставаться неизмѣннымъ въ теченiе движенiя) и стали разсматривать случай равномѣрно наэлектризованнаго шара.

Затѣмъ, чтобы привести теорiю въ согласiе съ результатами опытовъ, намъ пришлось принять крайнее предположенiе, что матерiальный остовъ исчезаетъ.

Шаровую форму и равномѣрное распредѣленiе, какъ ясно всякому, мы приняли только ради удобства,—для того, чтобы облегчить дѣйствительное вычисленiе и скорѣе стать на почву чиселъ.

Гораздо большее принципiальное значенiе имѣетъ отрицанiе всякаго матерiальнаго субстрата. Пока мы имѣли такой субстратъ, какъ бы онъ ни былъ тонокъ, достаточно предположить, какъ мы это сдѣлали, что онъ состоитъ изъ твердаго вещества, и неизмѣняемая форма заряда во время движенiя будетъ уже необходимымъ слѣдствiемъ.

Но если исчезаетъ вещество, и электричество можетъ подчиняться каждому случайному электромагнитному дѣйствiю, то нѣтъ уже a priori

[1]) Въ послѣдующихъ разсужденiяхъ можно понимать подъ электрономъ любой зарядъ электричества, разсматриваемый самъ по себѣ, не утверждая, что онъ какъ разъ равенъ элементарному количеству электричества (заряду электролитическаго iона), которое мы до сихъ поръ и называли электрономъ.

никакой причины, по которой движеніе должно происходить безъ деформаціи.

Гипотеза неизмѣняемости, какъ и всякая другая, напередъ предписывающая характеръ деформаціи, оставляетъ насъ неудовлетворенными и вызываетъ вопросъ, откуда происходятъ, если исключить всякій слѣдъ вещества, эти кинематическія связи; или, что то же самое, какимъ образомъ можно ввести для каждаго электрона силы связей электромагнитнаго происхожденія, если по допущенію электромагнитная сила, дѣйствующая на каждый элементъ, опредѣлена закономъ Лоренца. Чтобы устранить противорѣчіе, надо было бы разсматривать не отдѣльный электронъ, а цѣлую группу ихъ и предположить, что для каждаго электрона I группы силы связей вызываются другими электронами (въ то время какъ внѣшнія силы происходятъ отъ причинъ, постороннихъ группѣ, а собственное поле отъ электрона I). Тогда дѣло обстояло бы такъ, какъ будто мы имѣемъ отдѣльные электроны, подверженные дѣйствію (нематеріальныхъ) связей.

Эти вопросы,—если въ нихъ углубиться, какъ слѣдуетъ,—приводятъ насъ къ той строгой постановкѣ задачи, которой мы хотѣли избѣжать.

Вспомнимъ, въ самомъ дѣлѣ, что гипотеза неизмѣняемаго ядра была введена для того, чтобы имѣть возможность сдѣлать нѣкоторыя конкретныя предсказанія; мы имѣли въ виду использовать для этого теорію лишь отчасти, но не пытались размотать всю нить дедукціи, что казалось очень труднымъ.

Съ той же точки зрѣнія надо смотрѣть на другія гипотезы, которыя могутъ стать на мѣсто только-что упомянутой, напримѣръ, на всякую кинематическую гипотезу о поведеніи электрона, разсматриваемаго a priori, какъ чистое электричество.

При такомъ положеніи вещей абстрактному разсужденію не можетъ быть мѣста. Достаточно удостовѣриться въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ, что дѣло идетъ о гипотезѣ, недалекой отъ истины. Тогда вполнѣ законно можно предположить, что вниманія будутъ заслуживать также не только ихъ качественные выводы, но даже и количественные результаты,—по крайней мѣрѣ, относительно порядка ихъ величины.

Для того, чтобы составить себѣ представленіе о тѣхъ различныхъ кинематическихъ гипотезахъ, которыя были дѣйствительно предложены, разсмотримъ движущійся электронъ. Предположимъ что онъ такъ малъ, что безъ существенной ошибки его можно считать безконечно малымъ.

Съ другой стороны, предположимъ,—что вполнѣ естественно въ первомъ приближеніи, когда мы имѣемъ дѣло съ движеніями, ходъ которыхъ правиленъ и непрерывенъ,—что деформація, которую можетъ испытывать электронъ во время движенія, также можетъ быть разсматриваема, какъ безконечно малая.

Наконецъ, для опредѣленности, допустимъ еще, что электронъ имѣетъ въ началѣ движенія форму шара.

При этихъ условіяхъ — учитъ кинематика — электронъ можетъ принять только форму эллипсоида (близкую, во всякомъ случаѣ, къ шару), однако, зависящую, еще неизвѣстнымъ образомъ, отъ обстоятельства движенія. Всякая гипотеза о такой зависимости, если только деформація остается въ достаточно тѣсныхъ предѣлахъ, заслуживаетъ испытанія.

Отсюда различныя механики электроновъ.

Если принять неизмѣняемость,—мы имѣемъ теорію Абрагама, на которой мы уже останавливались, представивъ ее какъ предѣльный случай связей, осуществленныхъ въ видѣ твердаго остова. Разница здѣсь только въ точкѣ зрѣнія. Въ оригиналѣ у Абрагама,—какъ, впрочемъ, во всякой механикѣ электроновъ—a priori исключается всякое участіе вѣсомаго вещества.

Теорія Лоренца[1]) получается, если предположить, что электронъ немного сплющивается въ направленіи движенія; точнѣе, пусть R будетъ радіусъ первоначальнаго шара; мы предполагаемъ, что онъ превращается въ эллипсоидъ вращенія, экваторіальный радіусъ котораго по прежнему есть R, а полярный есть $R\sqrt{1-\beta^2}$ (β все время обозначаетъ отношеніе между скоростями электрона и свѣта).

Бухереръ (Bucherer)[2]) и Ланжвенъ (Langevin)[3]) разсматриваютъ несжимаемые электроны, подверженные сплющиванію такому, какъ у Лоренца. Если R_1 и R_2 суть экваторіальный и полярный радіусы деформированнаго электрона, то для несжимаемости нужно, чтобы $R_1{}^2 R_2 = R^3$, при чемъ отношеніе $\frac{R_2}{R_1}{}^2$ принимается равнымъ $\sqrt{1-\beta^2}$, какъ въ электронѣ Лоренца. Отсюда слѣдуетъ:

$$R_1 = R(1-\beta^2)^{-\frac{1}{6}}; \quad R_2 = R(1-\beta^2)^{\frac{1}{3}}.$$

Наконецъ, Пуанкарэ[4]) разсматривалъ типъ связей, который охватываетъ всѣ предшествующіе, какъ частные случаи. Онъ разбиралъ различные случаи съ разныхъ точекъ зрѣнія, главнымъ образомъ, имѣя въ виду одно аналитическое преобразованіе, открытое Лоренцомъ[5]), которое соотвѣтствуетъ (въ нѣсколько болѣе широкомъ смыслѣ, чѣмъ обыкновенно) принципу относительности[6]): независимость электромагнитныхъ явленій отъ поступательнаго движенія системы.

---

[1]) Lorentz. Electromagnetic phenomena in a system moving ect. „Akademie van Wetenschappen te Amsterdam" Proceedings... (англійское изданіе), Апрѣль 1904 г.—Abraham, l. c. § 22.

[2]) Bucherer. Mathematische Einführung in die Elektronentheorie. Leipzig, Teubner, 1904. стр. 57.

[3]) Langevin. La physique des électrons, „Revue générale des Sciences" 30 марта 1905 г.

[4]) Poincaré. Sur la dynamique de l'electron „Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo" 21, 1906.

[5]) Lorentz, l. c. или Poincaré l. c. § 1. Въ болѣе изящномъ видѣ у Marcolongo. Sugli integrali delle equazioni dell'eletrodinamica „Ren. dei Lincei" (5), 15; 1 апрѣля 1906 г.

[6]) Ср. интересныя синтетическія разсужденія объ этомъ принципѣ Эйнстейна (Zur Elektrodynamik bewegter Körper, „Annalen der Physik", (4), 17, 1905). Что касается электродинамики движущагося тѣла, то эти разсужденія показываютъ, что гипотезы Лоренца суть единственныя, совмѣстныя съ

Относительно этихъ различныхъ теорій надо отмѣтить, что твердый электронъ Абрагама, а также варіантъ Бухерера и Лангевина являются болѣе удовлетворительными съ точки зрѣнія энергетики, чѣмъ электронъ Лоренца.

Въ самомъ дѣлѣ, какъ для твердаго, такъ и для несжимаемаго электрона Бухерера и Лангевина выраженіе лонгитудинальной массы, полученное энергетическимъ путемъ, находится въ полномъ согласіи съ тѣмъ, которое дается, какъ отношеніе силы къ ускоренію.

Если же принять гипотезу Лоренца, то согласіе можетъ быть достигнуто только при допущеніи, что электронъ, кромѣ энергіи электромагнитнаго происхожденія, обладаетъ извѣстнымъ добавочнымъ запасомъ внутренней энергіи (происхожденія которой мы не могли бы указать).

Наоборотъ, гипотеза Лоренца имѣетъ надъ всѣми другими[1]) то преимущество, что при ней справедливъ принципъ относительности (въ вышеуказанномъ расширенномъ смыслѣ слова).

Основное значеніе этого принципа состоитъ въ томъ, что онъ объясняетъ a priori, на основаніи электромагнитной теоріи свѣта, отрицательный результатъ всѣхъ оптическихъ опытовъ, разсчитанныхъ на то, чтобы сдѣлать очевиднымъ движеніе земли.

Послѣдніе опыты Кауфмана[1]). Какія изслѣдованія желательны въ будущемъ. Ихъ отношеніе къ теоріи Лармора[2]).

Отсюда видно, что ни одна изъ кинематическихъ гипотезъ не удовлетворительна безусловно; съ другой стороны (въ предѣлахъ той точности, какой можно требовать), оказывается, что онѣ всѣ одинаково хорошо согласуются съ опытами Кауфмана 1902—1903 годовъ, на которыхъ первой была испытана гипотеза Абрагама.

Для того, чтобы рѣшить, какой изъ разныхъ теорій слѣдуетъ отдать предпочтеніе, Кауфманъ предпринялъ въ прошломъ году рядъ новыхъ и болѣе тонкихъ опытовъ.

Эти послѣдніе какъ будто болѣе благопріятны для теорій Абрагама, Бухерера и Ланжвена (безъ замѣтнаго различія между обѣими), чѣмъ для теорій Лоренца; такимъ образомъ, они косвенно опровергаютъ принципъ относительности и опять ставятъ вопросъ о распознаваніи абсолютнаго движенія путемъ электромагнитныхъ (или, въ частности, оптическихъ) опытовъ.

расширеннымъ принципомъ относительности (извѣстно, что, если принять его въ обычномъ смыслѣ, то только теорія Герца удовлетворила бы ему). Затѣмъ надо замѣтить, что Cohn (Ueber die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes für bewegte Körper, „Göttinger Nachrichten, 1901) пришелъ нѣсколько времени тому назадъ къ дифференціальнымъ уравненіямъ, которыя эквиваленты (если оставить въ сторонѣ интерпретацію) теоріи Лоренца. См. Cohn, Zur Elektrodynamik bewegter Systeme (двѣ замѣтки), „Berliner Berichte“, 1904.

[1]) Cp. Poincaré, l. c. § 7.

[2]) Kaufmann. Ueber die Konstitution des Elektrons, „Annalen der Physik“, (4), 19, 1906.

[3]) Larmor. Aether and matter, Cambridge, University Press, 1900, гл. VI и приложеніе *A*.

Впрочемъ, не надо забывать, что всѣ разсматриваемыя гипотезы имѣютъ временный и приближенный характеръ.

При оцѣнкѣ того факта, что болѣе утонченные опыты находятся въ лучшемъ согласiи съ одной гипотезой, чѣмъ съ другой, надо принять во вниманiе, что предположенiя, на которыхъ основаны эти гипотезы, не вполнѣ строги.

Нельзя, значитъ, разсуждать такъ, какъ будто электронъ, подверженный кинематическимъ связямъ, вполнѣ соотвѣтствуетъ физической дѣйствительности.

Въ частности, падаетъ поэтому возраженiе противъ принципа относительности, который съ перваго взгляда какъ будто опровергается послѣдними опытами Кауфмана.

Скорѣе нужно придти къ тому заключенiю, что экспериментальныя средства теперь уже такъ усовершенствованы, что позволяютъ достичь большей степени точности, чѣмъ та, которую даютъ разныя кинематическiя гипотезы.

Онѣ всѣ не строго обоснованы, хотя цѣнны, какъ эвристическое средство, для того чтобы найти первое приближенiе.

Не имѣетъ поэтому смысла прибѣгать къ опыту, чтобы сдѣлать выборъ между ними; скорѣе можно сказать, что пришло время перестать искуственными прiемами искать первыхъ приближенiй, а надо опять приняться за точную теорiю и такимъ образомъ достичь дальнѣйшихъ приближенiй.

Первый примѣръ строгаго рѣшенiя уже данъ недавно[1]). Онъ позволяетъ надѣяться, что появятся еще другiе, и будетъ выясненъ характеръ движенiя наэлектризованнаго электрона, по крайней мѣрѣ, для того случая, когда онъ настолько малъ, что за исключенiемъ влiянiя собственнаго поля, его можно считать точкой.

Вопросъ, упрощенный такимъ образомъ, вѣроятно, можетъ быть рѣшенъ помощью перехода къ предѣлу; т. е. можно разсматривать зарядъ, который стремится сосредоточиться въ (движущейся) геометрической точкѣ и найти предѣльное выраженiе для собственнаго поля.

Этотъ прiемъ не новъ, его можно найти уже въ работѣ Лармора[2]) (въ связи съ механическимъ представленiемъ эфира и съ предположенiемъ, что все управляется принципомъ наименьшаго дѣйствiя).

Впрочемъ, Ларморъ не довелъ своего изслѣдованiя до послѣднихъ математическихъ выводовъ, а ограничился приближенiями, не провосходящими тѣхъ, которыя достигаются кинематическими гипотезами.

Въ настоящее время важно, чтобы теоретическiя изслѣдованiя достигли дальнѣйшихъ степеней точности.

---

[1]) Ср. замѣтку Sur le mouvement de l'électricité sans liaisons, ni forces extérieures Comptes Rendus, 18 августа 1907 г.

[2]) Larmor, l. c. Ср. въ особенности стр. 265.

Электромагнитная модель вещества.

Да будетъ мнѣ позволено указать еще на новѣйшія идеи Дж. Дж. Томсона[1]) о строеніи вѣсомыхъ атомовъ. По мнѣнію этого автора, можно получить полную модель молекулы, если вообразито нѣчто вродѣ туманности (очень разрѣженной) изъ положительнагь электричества, въ которой погружены одинъ или нѣсколько отрицательныхъ электроновъ (общій зарядъ которыхъ равнопротивоположенъ заряду туманности).

Слѣдующее говоритъ въ пользу такой модели:

Отъ числа отрицательныхъ электроновъ и отъ ихъ статическаго расположенія (или вообще отъ характера ихъ стаціонарнаго движенія) зависятъ различные виды вѣсомаго вещества.

Малыя колебанія около положенія равновѣсія (или около средняго положенія въ стаціонарномъ движеніи) со свойственными имъ періодами объясняютъ состояніе спектральныхъ линій.

Вызванныя столкновеніями этихъ микрокосмовъ катастрофы и переходъ къ новымъ формамъ равновѣсія (или стаціонарнаго движенія) вызываютъ химическія явленія, при чемъ остается мѣсто и для предполагаемыхъ гиперхимическихъ преобразованій.

Если столкновенія не вызываютъ катастрофъ, но все-таки сопровождаются сильными колебаніями и освобождаютъ электроны, то мы имѣемъ явленія радіоактивности.

Далѣе, молекулярныя силы (ощутимыя только на крайне малыхъ разстояніяхъ) легко объясняются электромагнитными притяженіями и отталкиваніями. Послѣдними можно пренебречь, когда разстояніе между молекулами велико (сравнительно съ ихъ собственными размѣрами), такъ какъ полный зарядъ молекулы равенъ нулю; но онѣ могутъ проявиться различнымъ образомъ и въ сильной степени (какъ это и должно быть для молекулярныхъ силъ), когда молекулы достаточно близки.

Все это, безъ сомнѣнія, блестяще и заманчиво. Но при попыткѣ достичь большей точности возникаютъ многочисленныя затрудненія.

Счастливыя сближенія и слабыя стороны ясно указаны и разобраны съ широкой точки зрѣнія въ цитированной уже книжкѣ Лоджа[2]). Однако, мы не можемъ коснуться этой критики, которая оперируетъ съ такимъ большимъ разнообразіемъ физикохимическихъ явленій.

Мы ограничимся тѣмъ, что глубже вникнемъ въ ту часть вопроса, которая касается механики.

Въ первомъ энтузіазмѣ къ такъ называемому электромагнитному объясненію вселенной можно было удовольствоваться грубымъ разсужденіемъ. Вотъ оно.

---

[1]) J. J. Thomson. Ср. уже цитированную Electricity and matter, глава V и два мемуара въ „Phil. Mag," (6), 7, Мартъ, 1904; (6), 11, Іюнь, 1906 — а также Corpuscular Theory of Matter, London, Constable, 1907. (Первыя главы напечатаны въ №№ 459, 460 и 461 В. О. Ф. Все сочиненіе печатается издательствомъ Mathesis).

[2]) Oliver Lodge. Electrons, гл. XV и слѣд.

Зарядъ e, равномѣрно распредѣленный въ шарѣ радіуса R, обладаетъ электромагнитной массой, которая для скоростей, малыхъ сравнительно со скоростью свѣта, проявляетъ себя точно такъ, какъ обыкновенная матеріальная масса.

Она выражается формулой

$$m_0 = \frac{4}{5} \frac{e^2}{c^2 R}. \tag{6}$$

Для любой формы и при любомъ распредѣленіи (при условіи, что возможно только поступательное движеніе, а скорость достаточно мала сравнительно со скоростью свѣта) мы тоже будемъ имѣть электромагнитную массу, аналогичную обыкновенной. Если обозначить черезъ R радіусъ шара, имѣющаго объемъ, равный объему, занятому зарядомъ, то найдемъ выраженія типа

$$m_0 = K \frac{e^2}{c^2 . R}, \tag{10}$$

гдѣ K есть отвлеченное число и можетъ, слѣдовательно, зависѣть только отъ отношеній величинъ (а не отъ самихъ величинъ): отъ геометрической формы пространства, занятаго зарядомъ e, и отъ закона, по которому онъ тамъ распредѣленъ.

Самый естественный способъ представить себѣ обыкновенную инерцію, какъ явленіе электромагнитное, состоитъ въ томъ, что отождествляютъ матеріальную точку съ нѣкоторымъ электрическимъ зарядомъ крайне малыхъ размѣровъ, при чемъ выраженіе для массы опредѣляется формулой (10).

Но такой пріемъ слишкомъ поверхностенъ. Существенное возраженіе, на которое мнѣ указалъ Энрикесъ, заключается въ томъ, что это противорѣчитъ аддитивному свойству массы.

Мы можемъ убѣдиться въ этомъ, разсматривая какой нибудь частный случай.

Вообразимъ, напримѣръ, зарядъ e, имѣющій форму куба и равномѣрно распредѣленный.

Формула (10) даетъ $m_0 = K \frac{e^2}{c^2 R}$, при чемъ K и R имѣютъ опредѣленныя численныя значенія. Возьмемъ еще семь такихъ же точно кубовъ и сложимъ кубъ съ ребромъ, въ два раза большимъ. Новый зарядъ будетъ $8e$, множитель K будетъ тотъ же самый, такъ какъ онъ зависитъ отъ формы, а R нужно замѣнить на $2R$.

Если обозначить массу новаго куба черезъ M_0, то по формулѣ (10) будетъ

$$M_0 = K \frac{64 . e^2}{c^2 . 2R} = 32\, m_0. \tag{10'}$$

Если бы былъ справедливъ аддитивный законъ, то должно было бы быть: $M_0 = 8\, m_0$.

Такимъ образомъ, никакъ невозможно представить себѣ обыкновенное вещество просто какъ чистое электричество. Правда, модель Томсона уже болѣе утонченна; однако, возраженіе остается въ силѣ.

Въ отвѣтъ можно было бы сказать, что, если разсматривать вѣсомый атомъ, какъ систему, состоящую изъ очень большого числа электроновъ (по Томсону это не такъ, каждый атомъ у него состоитъ изъ числа электроновъ, сравнимаго съ атомнымъ вѣсомъ), то произойдетъ какая-нибудь статистическая компенсація, которая, можетъ быть, возстановитъ аддитивное свойство для электромагнитной массы.

Но это только смутныя догадки; было бы скороспѣло основывать на нихъ какія бы то ни было заключенія.

Я въ этомъ дѣлѣ, сознаюсь, скорѣе скептикъ, и отношусь къ этому съ предубѣжденіемъ.

Предположимъ на время, что электромагнитная модель вещества вышеуказаннаго типа можетъ быть построена безъ противорѣчія.

Будетъ ли это успѣхомъ, который можно сравнить съ тѣми, блестящіе примѣры которыхъ даетъ намъ механика?

(Укажу для опредѣленности на подведеніе законовъ Кеплера подъ болѣе простой и болѣе общій законъ всемірнаго тяготѣнія).

Сейчасъ видно, что условія тутъ различны.

Электромагнитное объясненіе обыкновенной механики должно было бы соотвѣтствовать слѣдующей схемѣ:

Мы исходимъ изъ электромагнитныхъ принциповъ, независимыхъ или, по крайней мѣрѣ, отличныхъ отъ обычныхъ постулатовъ механики, и потомъ опять находимъ эти постулаты, какъ частный или предѣльный случай болѣе общихъ выводовъ.

(Такимъ образомъ дѣло обстоитъ съ объясненіемъ законовъ Кеплера: вмѣсто нихъ принимаютъ одинъ болѣе общій принципъ— законъ Ньютона — и изъ него, въ частности, выводятся тѣ три закона, какъ результаты перваго приближенія).

Въ электромагнитной механикѣ, въ томъ видѣ, какъ она установлена теперь, наоборотъ, прибѣгаютъ, въ извѣстной степени, къ основному принципу обыкновенной механики: сила = масса $\times$ ускореніе, только приравнивая второй членъ нулю.

Я не нахожу, чтобы стоило изъ этихъ принциповъ выводить электромагнитное объясненіе вещества; скажу даже, что это похоже на circulus vitiosus.

Можетъ быть, возможно будетъ избѣгнуть его какимъ-нибудь измѣненіемъ въ постановкѣ вопроса?

Onus probandi лежитъ на утверждающемъ.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Наивысшая абсолютная температура (Physikal. Zeitschr., № 8). Наинизшей абсолютной температурой является температура нуля (абсолютнаго). До сихъ поръ не было сдѣлано ни одного указанія, что же можно считать за наивысшую абсолютную температуру? Если взять за основаніе кинетическую теорію газовъ, то абсолютная температура есть не что иное, какъ масса кинетической энергіи молекулы; въ такомъ случаѣ, наивысшей абсолютной температурой можетъ считаться та, которая соотвѣтствуетъ наибольшей скорости, сообщенной матеріальному атому наиболѣе тяжелой массы, иначе говоря, наибольшаго атомнаго вѣса *). По теоріи свѣтового давленія наивысшей возможной скоростью является скорость свѣта. Лучеиспускающее тѣло, въ томъ числѣ и атомъ, послѣ разсѣянія лучей по всѣмъ направленіямъ въ одинаковыхъ размѣрахъ, испытываетъ обратное давленіе равной силы, которое выражается въ тѣхъ же размѣрахъ децимегадинами на кв. метръ, какъ и въ случаяхъ энергіи лучеиспусканія въ джоуляхъ на куб. метръ. Если тѣло находится въ движеніи, то свѣтовое давленіе по теоріи явленія Допплера на лицевой сторонѣ увеличивается, на задней—уменьшается: тѣлу при движеніи приходится преодолѣвать сопротивленіе, которое ведетъ, въ свою очередь, къ измѣненію лучеиспускательной способности. Это сопротивленіе растетъ по мѣрѣ увеличенія скорости и будетъ безконечно, когда эта скорость сдѣлается равной скорости свѣта, такъ какъ въ этомъ случаѣ плотность энергіи на лицевой сторонѣ безконечна, а на задней—равна 0. Большая скорость, равно какъ и большая температура врядъ ли возможны. Такое предположеніе уже невозможно потому, что лучеиспускающіе атомы должны обладать электрическими зарядами, что явствуетъ изъ многочисленныхъ явленій (Зеемановскій эффектъ, дисперсія, поглощеніе лучей Ленара (Lenard) и т. п.). Движущійся же электрическій зарядъ возбуждаетъ вокругъ себя магнитное поле, которое находится въ зависимости отъ энергіи движенія; ускореніе встрѣтитъ безконечное сопротивленіе тогда, когда положительный зарядъ окружитъ отрицательный, т. е. когда магнитное поле будетъ находиться внутри атома. *А. Л.*

Корпускулы въ атомѣ (Comptes Rendus, № 13). Проф. Дж. Дж. Томсонъ опытнымъ путемъ пришелъ къ нѣкоторымъ выводамъ, касающимся современной атомистической теоріи. Число корпускулъ не такъ уже велико и находится въ зависимости отъ атомнаго вѣса.

Въ своемъ трудѣ „Electricity and Matter" проф. Томсонъ вычислилъ потенціальную энергію, содержащуюся въ 1 граммѣ водорода, принимая содержаніе 1000 корпускулъ въ атомѣ; результатъ, полученный имъ, былъ 10^{-10} эрговъ. Пусть n есть неизвѣстное число электроновъ въ атомѣ; e — ихъ зарядъ, равный $3{,}2 . 10^{-10}$ *U. E. S.*; N—число атомовъ въ одномъ граммѣ, приблизительно 10^{24}; испусканіе атома $a = 10^{-8}$; тогда общій зарядъ атома ne, расходуемая энергія выразится числомъ $\frac{N(ne)^2}{a}$ или $n^2 10^{13}$ эрговъ.

Кюри нашелъ, что 1 граммъ радія испускаетъ 100 cal. въ часъ или 876000 въ годъ, а Рётгерфордъ даетъ цифру средней жизни атома $T =$ 1300 лѣтъ. Вся энергія, содержащаяся въ 1 граммѣ, радія выразится въ видѣ $3 . 10^{16}$ эрговъ **). Послѣднія работы Томсона указываютъ, что n пропорціонально атомному вѣсу. Такъ какъ N измѣняется въ обратномъ отношеніи, то количество энергіи, даваемое 1 граммомъ радія, пропорціонально атомному вѣсу. Съ другой стороны, объемъ атома измѣняется въ зависимости отъ атом-

---

*) Молекулы не принимаются во вниманіе, такъ какъ при высокой температурѣ происходитъ диссоціація. Прим. автора.

**) Если пользоваться интегральнымъ исчисленіемъ, то число калорій будетъ

$$876000 \int_o^T e^{-\lambda t} dt = 876000 \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda}, \text{ гдѣ } \lambda = 6 . 10^{-4}.$$

наго вѣса, и для радія можемъ принять, что a втрое превышаетъ объемъ атома водорода. Тогда потенціальная энергія 1 грамма радія возрастетъ до $\frac{225}{3} xn^2 10^{13}$ или $10^{15}n^2$ эрговъ. Сопоставляя этотъ результатъ съ полученнымъ изъ опыта, мы видимъ, что число n корпускуловъ атома водорода должно быть выражено въ единицахъ. Такимъ образомъ, число 1700, выведенное предыдущими предположеніями, врядъ ли можетъ быть признано точнымъ. *А. Л.*

Гелій въ атмосферѣ (Nature, № 2006). Недавнія изслѣдованія обнаружили присутствіе инертныхъ газовъ въ кристаллическихъ скалахъ; Стрѣтъ (Strutt) показалъ, что содержимое этихъ газовъ состоитъ, главнымъ образомъ, изъ азота, но есть также весьма малые, но все же опредѣлимые слѣды аргона и и гелія. При вывѣтриваніи скалъ часть этихъ газовъ должна уйти въ атмосферу; здѣсь чрезвычайно интересенъ вопросъ, поглощаетъ ли атмосфера выдѣленія земной коры?

Воздухъ, изслѣдованный въ лабораторіяхъ, показалъ, что въ немъ содержится 1 на 100 аргона и 1—2 частицъ на милліонъ частицъ гелія. Это минимальное содержаніе даетъ поводъ думать, что гелій исчезаетъ изъ атмосферы тотчасъ же послѣ своего проникновенія туда. Бріанъ (Bryan) вычислилъ, что при температурѣ 127°C полоска изъ гелія въ 1 сант. толщины сможетъ подняться съ земли за періодъ въ 84000 милліоновъ лѣтъ; иначе говоря, давленіе этого газа, найденное надъ поверхностью земли на разстояніи 1 сант., къ концу упомянутаго періода окажется на поверхности земли. Стоней предполагаетъ, что молекулярная скорость движенія частицъ гелія зависитъ, главнымъ образомъ, отъ столкновенія частицъ; зная температуру атмосферы и распредѣленіе гелія въ земной корѣ, мы сможемъ когда-нибудь вычислить настоящее количество свободнаго гелія. *А. Л.*

РЕЦЕНЗІИ.

Н. Соколовъ. *Элементарная физика*. Курсъ женскихъ гимназій. Москва. 1907 г.

Нынче предъявляются столь различныя требованія къ учебникамъ физики, что нельзя не пожалѣть, что авторъ не снабдилъ своей книги надлежащимъ предисловіемъ, изъ котораго читатель могъ бы усмотрѣть, какую задачу поставилъ себѣ составитель учебника, и какія цѣли онъ преслѣдовалъ, принимаясь за свой трудъ. Поскольку, однако, изъ разсмотрѣнія книги можно дѣлать заключенія о намѣреніяхъ автора, приходится думать, что имѣлось въ виду написать, въ легкомъ и общедоступномъ изложеніи, учебникъ физики для лицъ съ минимальнымъ математическимъ развитіемъ, при томъ такой, чтобы проштудировавшіе его научились смотрѣть трезвыми глазами на происходящія вокругъ нихъ физическія явленія, умѣли бы разбираться въ нихъ и, кромѣ того, не остались бы въ невѣдѣніи относительно новѣйшихъ успѣховъ физики.

Слѣдуетъ, однако, сказать, что, на какую бы точку зрѣнія ни стать въ оцѣнкѣ данной книги, надо признать ее неудовлетворяющей своему назначенію. Авторъ не только благоговѣйно повторилъ тѣ ошибки и недоразумѣнія старыхъ нашихъ учебниковъ, которыя давно и столь жестоко осуждены, но и уснастилъ свой курсъ новыми. Чтобы не быть голословными, приведемъ нѣкоторые примѣры.

На стр. 7, говоря о томъ, что сила тяжести дѣйствуетъ совершенно одинаково на двѣ находящіяся въ одинаковыхъ условіяхъ частицы тѣла, авторъ заявляетъ: „Въ справедливости этихъ соображеній можно убѣдиться на весьма простомъ приборѣ, извѣстномъ подъ названіемъ пружинныхъ вѣсовъ“. На стр. 8: „Вслѣдствіе вращенія земли около оси и по причинѣ сплюснутости земли у полюсовъ, притяженіе земли дѣйствуетъ не вездѣ одинаково“. Что хотѣлъ сказать авторъ послѣдними словами? Коэффиціентъ ньютоніанскаго притяженія не вездѣ одинаковъ, что ли? Впрочемъ, еще болѣе крупное недоразумѣніе встрѣчается на стр. 10. Въ § 12—„Взаимное тяготѣніе физическихъ тѣлъ“—написано буквально: „Тщательными опытами найдено, что гора притягиваетъ къ себѣ свободно висящій на нити шаръ. Вода, медленно выливаемая изъ стакана, измѣняетъ направленіе своего паденія и притягивается къ его стѣнкѣ“. На стр. 15. „Если сила дѣйствуетъ на тѣло продолжительное время, какъ, напримѣръ, сила тяги лошади, сила упругости часовой пружины и т. п., то и малой силой можно преодолѣть инерцію большой массы и привести постепенно тѣло въ движеніе“. Смѣемъ увѣрить автора, что, если лошадь, при максимальномъ напряженіи своихъ мускуловъ, не въ состояніи сдвинуть нѣкоторое тѣло съ мѣста, то и въ сколь угодно продолжительное время она его не сдвинетъ. Авторъ не принялъ во вниманіе, что законы Ньютона относятся къ свободнымъ тѣламъ. На стр. 20 имѣется параграфъ, озаглавленный: „Уничтоженіе противоположныхъ силъ“, въ которомъ, и въ самомъ дѣлѣ, говорится, что двѣ равныя и противоположно направленныя силы, приложенныя къ одной точкѣ, уничтожаются. На стр. 358 авторъ утверждаетъ, что „при соединеніи двухъ проводниковъ съ разнородными потенціалами происходитъ уничтоженіе электрическаго состоянія (если потенціалы были равные)“. А если электроемкости не равны? На стр. 396, объясняя дѣйствіе катушки Румкорфа, авторъ говоритъ: „Полученный такимъ путемъ индуктивный токъ собирается на клеммахъ“ вторичной спирали. Мѣстъ въ такомъ родѣ попадается довольно много.—Не можемъ мы согласиться съ нѣкоторыми терминами автора (элементъ поверхности сферическаго зеркала названъ частицей зеркала; лучъ, проходящій черезъ центръ зеркала,—центральнымъ и т. п.), а также съ нѣкоторыми способами выраженій: говоря о состояніи проводника, внесеннаго въ электростатическое поле, авторъ пишетъ: „Такое электрическое состояніе называется электричествомъ черезъ вліяніе“. Объясняя дѣйствіе спирали Румкорфа, авторъ пользуется фразой: „Во второй катушкѣ вырабатывается индуктивный токъ помощью магнетизма и тока первичной катушки“. Многія вѣрныя понятія, каковы, напримѣръ, понятія о количествѣ теплоты, объ электрической плотности, потенціалѣ, электроемкости, силѣ тока, изложены неясно, даже сбивчиво (электрическій потенціалъ опредѣленъ какъ „общее (?) напряженіе электричества на проводникѣ“).

Вопросы и задачи, сопровождающіе каждый отдѣлъ курса и долженствующіе, повидимому, способствовать лучшему усвоенію курса и развитію въ учащихся пониманія происходящихъ въ обыденной жизни явленій природы, иногда составлены неудачно. Послѣ главы, трактующей объ общихъ свойствахъ вещества, имѣются вопросы: „Почему небольшимъ количествомъ мѣла можно выбѣлить цѣлую стѣну?“, „Почему небольшимъ количествомъ хины можно сдѣлать горькимъ большое количество воды?“ Неужели только потому, что мѣлъ и хининъ обладаютъ свойствомъ дѣлимости? Тамъ же имѣется вопросъ: „Чѣмъ выразится сила тяжести, если камень, выпущенный изъ руки, упадетъ въ воду?„ Или что можно отвѣтить на такой вопросъ: „Муха, летающая въ вагонѣ, сообразуется ли въ своихъ движеніяхъ съ движущимся прямолинейно и равномѣрно поѣздомъ?“. Въ отдѣлѣ свѣта встрѣчаемъ вопросъ: „Почему масляное пятно на бѣлой бумагѣ темнѣе самой бумаги?“ Въ какомъ свѣтѣ?

Нельзя, наконецъ, сказать, чтобы книга была написана безукоризненнымъ языкомъ.

Въ заслугу автора нужно поставить обиліе вопросовъ, помѣщенныхъ почти послѣ каждой главы. Вопросы эти носятъ чисто физическій характеръ и несомнѣнно заставляютъ учащихся задумываться надъ физическими явленіями; къ сожалѣнію, нѣкоторые изъ этихъ вопросовъ также довольно неудачны.

Въ книгѣ имѣется довольно много оригинальныхъ рисунковъ.

К. И.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 55 (5 сер.). Построить прямоугольный треугольникъ, зная отношеніе катета и неприлещаго отрѣзка гипотенузы (отсѣкаемаго высотой изъ вершины прямого угла) и какой-нибудь линейный или плоскостной элементъ треугольника (напримѣръ, радіусъ вписаннаго круга или площадь). Обобщить задачу.

И. Александровъ (Москва, реальное училище Бажанова).

№ 56 (5 сер.). Рѣшить систему уравненій:

$$z(x+y)-\sqrt{xyz}\,(\sqrt{x}+\sqrt{y})=a,$$

$$x(y+z)-\sqrt{xyz}\,(\sqrt{y}+\sqrt{z})=b.$$

$$y(z+x)-\sqrt{xyz}\,(\sqrt{z}+\sqrt{x})=c.$$

Н. Агрономовъ (Ревель).

№ 57 (5 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе:

$$4x^2y^2-4x^2y-3x^2-y^2-4xy+12x-6y-9=0.$$

Н. С. (Одесса).

№ 58 (5 сер.). Рѣшить уравненіе:

$$(x^2+2\alpha x+\beta)(x^2+\beta)^3=3\alpha^4x^4+(x^2+3\alpha x+\beta)(x^2-2x+\beta)^3.$$

(Заимств.).

№ 59 (5 сер.). Доказать, что при всякомъ цѣломъ значеніи n число

$$n^3(n^3-1)(n^3+1)$$

кратно 504.

(Заимств.).

№ 60 (5 сер,). Рѣшить неравенство

$$\sqrt{1-4\sin^2 x}>2\cos x-1.$$

(Заимств.)

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 856 (4 сер.). *Составить уравненіе, изъ котораго опредѣляются стороны* a, b, c *треугольника, если даны радіусъ круга описаннаго* R, *радіусъ круга вписаннаго* r *и площадь* S. *Вычислить выраженіе* $a^3+b^3+c^3$ *въ функціи* R, r *и* S.

Называя черезъ p полупериметръ треугольника и пользуясь формулами:

$$R=\frac{abc}{4S}, \qquad (1)$$

$$S=pr=\frac{(a+b+c)r}{2}, \quad S^2=p(p-a)(p-b)(p-c), \qquad (2)$$

находимъ:

$$a+b+c=\frac{2S}{r}, \qquad (3)$$

$$abc=4RS, \qquad (4)$$

$$S^2=p^4-(a+b+c)p^3+(ab+bc+ca)p^2-abcp=p^4-2p^4+(ab+bc+ca)p^2-abcp=$$
$$=(ab+bc+ca)p^2-abcp-p^4,$$

откуда

$$ab+bc+ca=\frac{S^2+abcp+p^4}{p^2}=\left(\frac{S}{p}\right)^2+\frac{abc}{p}+p^2.$$

Подставляя въ послѣднее равенство значенія abc и p изъ формулъ (1) и (2), получимъ:

$$ab+bc+ca=r^2+4Rr+\frac{S^2}{r^2}. \qquad (5)$$

Изъ равенствъ (3), (4), (5) вытекаетъ, что a, b, c суть корни уравненія третьей степени

$$x^3-\frac{2S}{r}x^2+\left(r^2+4Rr+\frac{S^2}{r^2}\right)x-4RS=0.$$

Пользуясь тожествами:

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3ab(a+b)+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2=$$
$$=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(ab+bc+ca)+3c(ac+bc+ab)-3abc=$$
$$=a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc,$$

и формулами (3), (4), (5), находимъ:

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)+3abc=$$
$$=\left(\frac{2S}{r}\right)^3-3\cdot\frac{2S}{r}\left(r^2+4Rr+\frac{S^2}{r^2}\right)+12RS=\frac{2S^3}{r^3}-12RS-6rS.$$

С. Розенблатъ (Кіевъ); *Г. Лебедевъ* (Обоянь).

№ 864 (4 сер.). *Съ обрыва надъ пропастью и съ высоты* 40 *метровъ надъ обрывомъ начинаютъ одновременно свободное паденіе на дно обрыва два камня. Опредѣлить глубину пропасти, если извѣстно, что камни коснулись дна пропасти на* $\frac{1}{2}$ *секунды одинъ послѣ другого.*

Обозначимъ ускореніе силы тяжести въ мѣстѣ опыта (въ метрахъ) черезъ g и время паденія камня, начинающаго свое движеніе съ края обрыва, на дно черезъ t. Тогда, называя глубину обрыва черезъ x и замѣчая, что, по условію, второй камень, начинающій свое паденіе съ высоты 40 метровъ надъ краемъ обрыва, проходитъ пространство до дна обрыва за $t+\frac{1}{2}$ секунды, имѣемъ:

$$\frac{g\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}{2}=40+x, \qquad (1)$$

$$\frac{gt^2}{2}=x. \qquad (2)$$

Вычитая уравнеиіе (2) изъ (1), получимъ:

$$\frac{g}{2}\left(t+\frac{1}{4}\right)=40,$$

откуда

$$t=\frac{80}{g}-\frac{1}{4}.$$

Подставляя это значеніе t въ равенство (2) и принимая $g=9{,}8$ метра, получимъ:

$$x=\frac{g}{2}\left(\frac{80}{g}-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{(320-g)^2}{32\,g}=\frac{310{,}2^2}{32\,.\,9{,}8}=306,\ 8 \text{ метр.}$$

(съ недост., съ точн. до 0,1 метра).

С. Розенблатъ (Кіевъ); *А. Турчаниновъ* (Одесса).

№ 882 (4 сер.). *Для прохожденія наклонной плоскости нѣкоторой длины тѣло употребляетъ* 3,1 *секунды. Для прохожденія наклонной плоскости той же длины при прежнемъ углѣ наклоненія, но при производствѣ опыта въ водѣ, то же тѣло употребляетъ* 4,3 *секунды. Пренебрегая треніемъ, вычислить плотность этого тѣла.*

Обозначая длину наклонной плоскости черезъ l, уголъ ея наклоненія къ горизонту черезъ α, ускореніе силы тяжести въ мѣстѣ опыта черезъ g и время прохожденія наклонной плоскости черезъ $t=3{,}1$ сек., имѣемъ:

$$\frac{gt^2}{2}\sin\alpha=l. \tag{1}$$

Называя массу тѣла черезъ m, а плотность его черезъ δ, находимъ, что вѣсъ тѣла равенъ mg, а объемъ равенъ $\frac{m}{\delta}$. Поэтому вытѣсняемая тѣломъ вода вѣситъ $\frac{m}{\delta}g$ динъ, а само тѣло, по закону Архимеда, имѣетъ въ водѣ вѣсъ, равный $mg-\frac{m}{\delta}g$. Эта сила сообщаетъ тѣлу въ вертикальномъ направленіи (внизъ) ускореніе g', опредѣляемое равенствомъ

$$mg-\frac{m}{\delta}g=mg',$$

откуда $g'=g\,(1-\frac{1}{\delta})$. Такимъ образомъ, называя время прохожденія наклонной плоскости тѣломъ въ водѣ черезъ $T=4{,}3$ сек. и пренебрегая, по условію, треніемъ, получимъ:

$$\frac{g'T^2}{2}\sin\alpha=\frac{g\,(1-\frac{1}{\delta})\,T^2}{2}\sin\alpha=l. \tag{2}$$

Дѣля равенство (2) на (1), находимъ:

$$1-\frac{1}{\delta}=\frac{t^2}{T^2},$$

откуда

$$\delta=\frac{T^2}{T^2-t^2}=\frac{4{,}3^2}{4{,}3^2-3{,}1^2}=\frac{1849}{888}=2{,}08$$

(съ недостаткомъ, съ точностью до 0,005).

В. Обуховичъ (Гродно).

№ 890 (4 сер.). *Доказать, что во всякомъ прямоугольномъ треугольникѣ кубъ гипотенузы болѣе суммы кубовъ катетовъ.*

Обозначая длины гипотенузы и катетовъ соотвѣтственно черезъ a, b, c и замѣчая, что числа $\frac{b}{a}$ и $\frac{c}{a}$ суть правильныя дроби, находимъ:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^3 < \left(\frac{b}{a}\right)^2, \ \left(\frac{c}{a}\right)^3 < \left(\frac{c}{a}\right)^2.$$

Сложивъ эти неравенства, получимъ:

$$\frac{b^3}{a^3} + \frac{c^3}{a^3} < \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = 1,$$

откуда

$$a^3 > b^3 + c^3.$$

Э. Лейнъкъ (Москва); *Ф. Доброхотовъ* (Петербургъ); *Н. Агрономовъ* (Ревель); *М. Субботинъ* (Сув. корп.).

№ 893 (4 сер.). *Доказать, что число*

$$\left[n - \frac{t^{2^k} - 1}{2^{2^k}}\right]^{2^{2^k - k}.\,n} - 1$$

дѣлится на $2^{2^k}.\,n + 1$, *если* $2^{2^k}.\,n + 1$ *есть простое число, котораго* t *не кратно, и если* $t^{2^k} - 1$ *дѣлится на* 2^{2^k}.

Помноживъ разсматриваемое выраженіе на множитель $[2^{2^k}]^{2^{2^k-k}.\,n}$, не кратный простого числа $2^{2^k}.\,n + 1$, представимъ это выраженіе въ видѣ:

$$\left\{\left[n - \frac{t^{2^k} - 1}{2^{2^k}}\right]^{2^{2^k-k}.\,n} - 1\right\}(2^{2^k})^{2^{2^k-k}.\,n} =$$

$$= (2^{2^k}.\,n - t^{2^k} + 1)^{2^{2^k-k}.\,n} - (2^{2^k})^{2^{2^k-k}.\,n} = \quad (1)$$

$$= \left[(2^{2^k}.\,n - t^{2^k} + 1)^{2^{2^k-k}.\,n} - (t^{2^k})^{2^{2^k-k}.\,n}\right] +$$

$$+ (t^{2^{2^k}.\,n} - 1) - (2^{2^{2^k}.\,n} - 1).$$

Разность четныхъ степеней $(2^{2^k}.\,n - t^{2^k} + 1)^{2^{2^k-k}.\,n} - (t^{2^k})^{2^{2^k-k}.\,n}$ кратна суммы $2^{2^k}.\,n - t^{2^k} + 1 + t^{2^k} = 2^{2^k}.\,n + 1$. Число 2 не кратно простого числа $2^{2^k}.\,n + 1$ и t, по условію, также не кратно этого простого числа, а потому, по теоремѣ *Fermat'a*, разности $t^{2^{2^k}\cdot n} - 1$ и $2^{2^{2^k}\cdot n} - 1$ также кратны простого числа $2^{2^k \cdot n} + 1$. Слѣдовательно, выраженіе (1) дѣлится на $2^{2^k \cdot n} + 1$, а потому и число

$$\left[n - \frac{t^{2^k} - 1}{2^{2^k}}\right]^{2^{2^k-k}.\,n} - 1$$

дѣлится на $2^{2^k}.\,n + 1$.

Н. Агрономовъ (Ревель).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
ищется

Обложка
пщется