№№ 455—456.

ВѢСТНИКЪ

ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ѳ. Кагана.

XXXVIII-го Семестра №№ 11—12-й.

ОДЕССА.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.
1908

XXXVIII Сем. №№ 11—12.

Вѣстникъ Опытной Физики и элементарной математики.

№№ 455—456.

Новое сочиненiе Архимеда.

Проф. I. Гейберга.

*(Окончанiе *).*

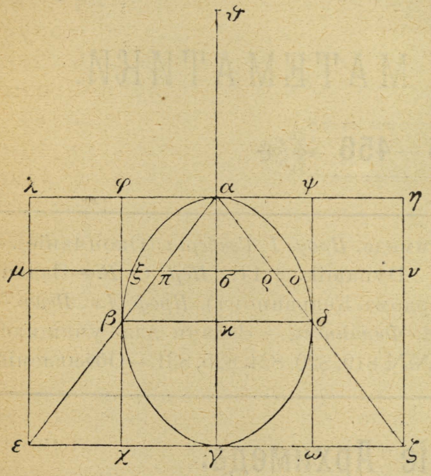
III.

Посредствомъ этого метода можно также убѣдиться въ томъ, что цилиндръ, основанiемъ котораго служитъ большой кругъ сфероида, а высотой—ось сфероида, въ полтора раза больше этого сфероида; когда же это установлено, то ясно, что, если мы пересѣчемъ сфероидъ плоскостью, проходящей черезъ его центръ, перпендикулярно къ его оси, то половина сфероида вдвое больше конуса, основанiемъ котораго служитъ основанiе сегмента, а ось та же самая.

Дѣйствительно, пересѣчемъ сфероидъ (фиг. 3) плоскостью, которая проходитъ черезъ ось; она образуетъ на его поверхности эллипсъ $\alpha\beta\gamma\delta$, главные дiаметры котораго суть $\alpha\gamma$, $\beta\delta$, а центромъ служитъ точка $\varkappa$; затѣмъ проведемъ въ сфероидѣ перпендикулярно къ $\alpha\gamma$ кругъ дiаметра $\beta\delta$; далѣе, представимъ себѣ конусъ, основанiемъ котораго служитъ указанный кругъ, а вершина находится въ α; продолжимъ затѣмъ его поверхность и плоскостью, проходящей черезъ γ параллельно основанiю, отсѣкаемъ конусъ; сѣченiе будетъ, слѣдовательно, кругомъ дiаметра $\varepsilon\zeta$, перпендикулярнымъ къ $\alpha\gamma$; далѣе, представимъ себѣ цилиндръ, основанiемъ

*) См. №№ 450—451 „Вѣстника“.

котораго служитъ тотъ же кругъ діаметра $\varepsilon\zeta$, а осью $\alpha\gamma$; отрѣзокъ $\alpha\gamma$ продолженъ, и $\alpha\vartheta = \gamma\alpha$; $\vartheta\gamma$ мы представляемъ себѣ въ видѣ коромысла вѣсовъ съ центромъ α и въ параллелограммѣ $\lambda\zeta$ проводимъ прямую $\mu\nu \| \varepsilon\zeta$, а черезъ $\mu\nu$ проводимъ плоскость, перпендикулярную къ $\alpha\gamma$; она въ сѣченіи съ цилиндромъ образуетъ



Фиг. 3.

при этомъ кругъ, діаметръ котораго есть $\mu\nu$, съ сфероидомъ—кругъ, діаметръ котораго есть ξo, и съ конусомъ—кругъ, діаметръ котораго $\pi\rho$. Такъ какъ $\gamma\alpha : \alpha\sigma = \varepsilon\alpha : \alpha\pi = \mu\sigma : \sigma\pi$[15]) и $\gamma\alpha = \alpha\vartheta$, то $\vartheta\alpha : \alpha\sigma = \mu\sigma : \sigma\pi$. Но $\mu\sigma : \sigma\pi = \mu\sigma^2 : \mu\sigma \times \sigma\pi$ и $\mu\sigma \times \sigma\pi = \pi\sigma^2 + \sigma\xi^2$.

Дѣйствительно, $\alpha\sigma \times \sigma\gamma : \sigma\xi^2 = \alpha\varkappa \times \varkappa\gamma : \varkappa\beta^2 =$[16]) $\alpha\varkappa^2 : \varkappa\beta^2$ (такъ какъ оба отношенія равны отношенію діаметровъ къ параметру [Аполлоній, „О конич. сѣч.“, I, 21]) $= \alpha\sigma^2 : \sigma\pi^2$; поэтому $\alpha\sigma^2 : \alpha\sigma \times \sigma\gamma = \pi\sigma^2 : \sigma\xi^2 = \sigma\pi^2 : \sigma\pi \times \pi\mu$[17]); а слѣдовательно, $\mu\pi \times \pi\sigma = \sigma\xi^2$. Къ обѣимъ частямъ равенства мы прибавляемъ $\pi\sigma^2$; тогда $\mu\sigma \times \sigma\pi = \pi\sigma^2 + \sigma\xi^2$.

Слѣдовательно, $\vartheta\alpha : \alpha\sigma = \mu\sigma^2 : \pi\sigma^2 + \sigma\xi^2$. Но $\mu\sigma^2 : \sigma\xi^2 + \sigma\pi^2 =$ кругу, діаметръ котораго $\mu\nu$, въ цилиндрѣ : на кругъ діаметра ξo + кругъ діаметра $\pi\rho$; слѣдовательно, кругъ діаметра $\mu\nu$ въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ въ равновѣсіи относительно точки α съ двумя кругами, діаметры которыхъ ξo и $\pi\rho$, когда они будутъ перенесены и помѣщены въ точку ϑ на коромыслѣ вѣсовъ такъ, чтобы точка ϑ была центромъ тяжести обоихъ круговъ; такъ какъ ϑ будетъ центромъ тяжести обоихъ круговъ, діаметры которыхъ суть ξo и $\pi\rho$, вмѣстѣ взятыхъ, когда они бу-

---

15) Изъ подобія треугольниковъ $\varepsilon\gamma\alpha$ и $\pi\sigma\alpha$.

16) Это, какъ и другія равенства, относящіяся къ эллипсу, мы можемъ легко провѣрить, просто приводя ихъ къ извѣстному виду уравненія эллипса. Напримѣръ, это соотношеніе, въ заданной формѣ при соотвѣтствующихъ обозначеніяхъ имѣетъ видъ:

$$\frac{(a-x)(a+x)}{y^2} = \frac{a^2}{b^2}, \text{ или } \frac{a^2-x^2}{y^2} = \frac{a^2}{b^2};$$

освобождаемся отъ знаменателя, тогда $a^2b^2 - x^2b^2 = a^2y^2$, или $x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2$, дѣлимъ обѣ части на a^2b^2 и получаемъ извѣстное уравненіе эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Можно, конечно, отъ этого уравненія исходить; можно получить то же чисто геометрически.

17) Первую пропорцію получаемъ, переставляя члены предыдущей; а вторую — изъ подобія треугольниковъ $\alpha\sigma\pi$ и $\varepsilon\mu\pi$, именно: $\alpha\sigma : \varepsilon\mu = \pi\sigma : \pi\mu$, или $\alpha\sigma : \sigma\gamma = \pi\sigma : \pi\mu$; $\alpha\sigma^2 : \alpha\sigma \times \sigma\gamma = \pi\sigma^2 : \pi\sigma \times \pi\mu$.

дутъ перенесены, то $\vartheta\alpha : \alpha\sigma =$ кругу съ діаметромъ $\mu\nu$: на оба круга, діаметры которыхъ ξo и $\pi\rho$. Такимъ же самымъ образомъ можетъ быть доказано, что, когда мы проведемъ въ параллелограммѣ $\lambda\zeta$ другую прямую $\parallel \varepsilon\zeta$ и на ней построимъ плоскость, перпендикулярную къ $\alpha\gamma$, то кругъ, образованный цилиндромъ, въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ въ равновѣсіи относительно α съ обоими образованными въ сфероидѣ и конусѣ кругами, взятыми вмѣстѣ, когда они будутъ перенесены въ точку ϑ коромысла вѣсовъ такимъ образомъ, чтобы ϑ была центромъ тяжести обоихъ. Если мы, слѣдовательно, цилиндръ, сфероидъ и конусъ наполнимъ такого рода кругами, то цилиндръ въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ относительно точки α находиться въ равновѣсіи со сфероидомъ + конусъ, когда они будутъ перенесены и помѣщены въ точкѣ ϑ на коромыслѣ вѣсовъ такъ, чтобы ϑ была центромъ тяжести обоихъ. Теперь, такъ какъ $\varkappa$ есть центръ тяжести цилиндра, а ϑ, какъ сказано, центръ тяжести сфероида и конуса, взятыхъ вмѣстѣ, то $\vartheta\alpha : \alpha\varkappa =$ цилиндру: на сфероидъ + конусъ. Но $\alpha\vartheta = 2\alpha\varkappa$; слѣдовательно, и цилиндръ $= 2 \times$ (сфероидъ + конусъ) $= 2 \times$ сфероидъ $+ 2 \times$ конусъ. Но цилиндръ $= 3 \times$ конусъ; слѣдовательно, $3 \times$ конусъ $= 2 \times$ конусъ + $+ 2 \times$ сфероидъ. Отъ обѣихъ частей равенства мы отнимаемъ $2 \times$ конусъ; тогда конусъ, осевой треугольникъ котораго есть $\alpha\varepsilon\zeta = 2 \times$ сфероидъ. Но этотъ самый конусъ $= 8$ конусамъ, осевые треугольники которыхъ $\alpha\beta\delta$; итакъ, 8 такихъ конусовъ $= 2 \times$ $\times$ сфероидъ, $4 \times$ конусъ $=$ сфероиду; слѣдовательно, сфероидъ вчетверо больше конуса, вершина котораго α, а основаніемъ служитъ кругъ діаметра $\beta\delta$, перпендикулярный къ $\gamma\alpha$, а половина сфероида вдвое больше названнаго конуса.

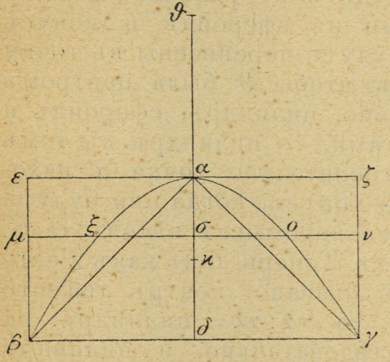
Проведемъ черезъ точки β, δ въ параллелограммѣ $\lambda\zeta$ прямыя $\varphi\chi$, $\psi\omega \parallel \alpha\gamma$ и представимъ себѣ цилиндръ, основаніями котораго служатъ круги діаметровъ $\varphi\psi$, $\chi\omega$. а осью $\alpha\gamma$. Тогда цилиндръ, осевой параллелограммъ котораго есть $\varphi\omega$, будетъ вдвое больше цилиндра, осевой параллелограммъ котораго $\varphi\delta$, такъ какъ у нихъ равныя основанія, а ось его вдвое больше этой оси; кромѣ того, цилиндръ, осевой параллелограммъ котораго $\varphi\delta$, будетъ втрое больше конуса, вершина котораго α, а основаніемъ служитъ кругъ діаметра $\beta\delta$, перпендикулярный къ $\alpha\gamma$; поэтому цилиндръ, осевой параллелограммъ котораго $\varphi\omega$, будетъ въ шесть разъ больше названнаго конуса. Но было доказано, что сфероидъ въ четыре раза больше, чѣмъ этотъ самый конусъ; слѣдовательно, цилиндръ въ полтора раза больше сфероида, что и требовалось доказать.

IV.

Что сегментъ прямоугольнаго коноида[18]), отсѣченный плоскостью, перпендикулярной къ оси, въ полтора раза больше конуса, имѣющаго то же основаніе и ось, что и сегментъ, можно обнаружить посредствомъ названнаго метода слѣдующимъ образомъ.

[18]) Подъ коноидомъ греческіе геометры разумѣли тѣло вращенія. Въ данномъ случаѣ рѣчь идетъ о параболоидѣ вращенія.

Положимъ, что данъ (фиг. 4) прямоугольный коноидъ, разсѣченный плоскостью, проходящей черезъ ось; при пересѣченiи съ его поверхностью эта плоскость образуетъ параболу; положимъ, что онъ пересѣченъ также и другой плоскостью, перпендикулярной къ оси; линiей пересѣченiя этихъ двухъ плоскостей будетъ $\beta\gamma$, а осью сегмента будетъ $\delta\alpha$, которая продолжена до ϑ, такъ что $\vartheta\alpha = \alpha\delta$; представимъ себѣ $\delta\vartheta$, какъ коромысло вѣсовъ съ центромъ въ точкѣ α; кругъ дiаметра $\beta\gamma$, перпендикулярный къ $\alpha\delta$, будетъ служить основанiемъ сегмента; представимъ себѣ теперь конусъ, основанiемъ котораго служитъ кругъ дiаметра $\beta\gamma$, а вершиной α; возьмемъ еще цилиндръ, основанiемъ котораго служитъ кругъ дiаметра $\beta\gamma$, а осью $\alpha\delta$; въ параллелограммѣ проведемъ прямую $\mu\nu \parallel \beta\gamma$ и черезъ $\mu\nu$ проведемъ плоскость перпендикулярно къ $\alpha\delta$; она образуетъ при этомъ въ сѣченiи съ цилиндромъ кругъ дiаметра $\mu\nu$, а съ сегментомъ прямоугольнаго коноида—кругъ дiаметра ξo. Такъ какъ $\beta\alpha\gamma$ есть парабола. $\alpha\delta$ ея дiаметръ, а $\xi\sigma$ и $\beta\delta$ ординаты, то [Quadrat. parab., 3] $\delta\alpha : \alpha\sigma = \beta\delta^2 : \xi\sigma^2$. Но $\delta\alpha = \alpha\vartheta$; слѣдовательно $\vartheta\alpha : \alpha\sigma = \mu\sigma^2 : \sigma\xi^2$. Но $\mu\sigma^2 : \sigma\xi^2 =$ кругу дiаметра $\mu\nu$ въ цилиндрѣ : на кругъ дiаметра ξo въ сегментѣ прямоугольнаго коноида; итакъ, $\vartheta\alpha : \alpha\sigma =$ кругу дiаметра $\mu\nu$: на кругъ дiаметра ξo; слѣдовательно, кругъ дiаметра $\mu\nu$ въ цилиндрѣ въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ въ равновѣсiи относительно точки α съ кругомъ, дiаметръ котораго ξo, когда этотъ кругъ перенесенъ въ точку ϑ на коромыслѣ вѣсовъ и помѣщенъ такъ, чтобы точка ϑ была его центромъ тяжести. Центръ тяжести круга, дiаметръ котораго есть $\mu\nu$, будетъ σ, а другого круга, дiаметръ котораго есть ξo, когда мы его перенесемъ, будетъ ϑ, и мы имѣемъ, такимъ образомъ, обратное отношенiе: $\vartheta\alpha : \alpha\sigma =$ кругу дiаметра $\mu\nu$: на кругъ дiаметра ξo. Такимъ же образомъ можетъ быть доказано, что, когда мы проведемъ въ параллелограммѣ $\varepsilon\gamma$ другую прямую $\parallel \beta\gamma$, то образовавшiйся въ цилиндрѣ кругъ [19]) въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ въ равновѣсiи относительно точки α съ кругомъ, образовавшимся въ сегментѣ прямоугольнаго коноида, когда этотъ кругъ будетъ перенесенъ въ ϑ на коромыслѣ вѣсовъ такъ, чтобы точка ϑ была его центромъ тяжести. Поэтому, если цилиндръ и сегментъ прямоугольнаго коноида будутъ наполнены, то цилиндръ въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ въ равновѣсiи относительно точки α съ сегментомъ прямоугольнаго коноида, когда онъ будетъ перенесенъ и помѣщенъ въ



Фиг. 4.

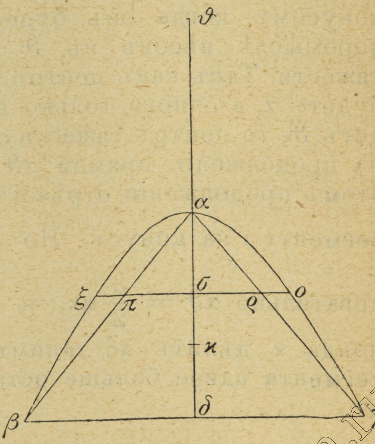
[19]) Очевидно, полученный въ сѣченiи съ плоскостью, проведенной черезъ эту прямую перпендикулярно къ оси.

точкѣ ϑ на коромыслѣ вѣсовъ такимъ образомъ, чтобы точка ϑ была его центромъ тяжести. Такъ какъ названныя величины находятся въ равновѣсіи относительно точки α, а $\varkappa$ есть центръ тяжести цилиндра, когда $\alpha\delta$ раздѣлена въ $\varkappa$ пополамъ, ϑ же есть центръ тяжести перенесеннаго туда сегмента, то имѣетъ мѣсто слѣдующая обратная пропорціональность: $\vartheta\alpha : \alpha\varkappa =$ цилиндру : на сегментъ. При этомъ $\vartheta\alpha = 2\alpha\varkappa$; слѣдовательно, и цилиндръ $= 2 \times$ сегментъ. Но этотъ самый цилиндръ въ три раза больше конуса, основаніемъ котораго служитъ кругъ діаметра $\beta\gamma$, а вершиной точка α; ясно, такимъ образомъ, что сегментъ въ полтора раза больше этого конуса.

V.

Что центръ тяжести сегмента прямоугольнаго коноида, отсѣченнаго плоскостью, перпендикулярной къ оси, лежитъ на прямой, которая служитъ осью сегмента и дѣлитъ ее такъ, что часть, принадлежащая къ вершинѣ, вдвое больше остальной части, можно обнаружить посредствомъ того же метода слѣдующимъ образомъ.

Сегментъ прямоугольнаго коноида, отсѣченный плоскостью, перпендикулярной къ оси, разсѣченъ другой плоскостью, проходящей черезъ ось; эта плоскость образуетъ (фиг. 5) въ сѣченіи съ его поверхностью параболу $\alpha\beta\gamma$, а общей линіей плоскости, отсѣкающей сегментъ, и этой сѣкущей плоскости будетъ $\beta\gamma$; осью сегмента и діаметромъ параболы $\alpha\beta\gamma$ будетъ $\alpha\delta$; продолжимъ $\delta\alpha$, отложимъ $\alpha\vartheta = \alpha\delta$ и представимъ себѣ $\delta\vartheta$, какъ коромысло вѣсовъ съ центромъ въ точкѣ α; далѣе, впишемъ въ сегментъ конусъ съ боковыми линіями $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$ и въ параболѣ проведемъ прямую $\xi o \parallel \beta\gamma$; она пересѣчетъ параболу въ точкахъ ξ и o, а стороны конуса въ π, ρ. Такъ какъ въ параболѣ $\xi\sigma$, $\beta\delta$ проведены перпендикулярно къ діаметру, то $\delta\alpha : \alpha\sigma = \beta\delta^2 : \xi\sigma^2$ [Quadr. parab., 3]. Но $\delta\alpha : \alpha\sigma = \beta\delta : \pi\sigma = \beta\delta^2 : \beta\delta \times \pi\sigma$; а потому и $\beta\delta^2 : \xi\sigma^2 = \beta\delta^2 : \beta\delta \times \pi\sigma$. Слѣдовательно, $\xi\sigma^2 = \beta\delta \times \pi\sigma$, или $\beta\delta : \xi\sigma = \xi\sigma : \pi\sigma$, и $\beta\delta : \pi\sigma = \xi\sigma^2 : \sigma\pi^2$. Но $\beta\delta : \pi\sigma = \delta\alpha : \alpha\sigma = \vartheta\alpha : \alpha\sigma$; слѣдовательно и $\vartheta\alpha : \alpha\sigma = \xi\sigma^2 : \sigma\pi^2$. Черезъ ξo проводимъ плоскость перпендикулярно къ $\alpha\delta$; она образуетъ въ сегментѣ прямоугольнаго коноида кругъ, діаметръ котораго есть ξo, а въ конусѣ кругъ, діаметръ котораго есть $\pi\rho$. Такъ какъ теперь $\vartheta\alpha : \alpha\sigma = \xi\sigma^2 : \sigma\pi^2$, а $\xi\sigma^2 : \sigma\pi^2 =$ кругу діаметра ξo : на кругъ діаметра $\pi\rho$, то $\vartheta\alpha : \alpha\sigma =$ $=$ кругу, діаметръ котораго есть ξo : на кругъ, діаметръ котораго есть $\pi\rho$. Слѣдовательно, кругъ, діаметръ котораго есть ξo, въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ въ равновѣсіи относительно



Фиг. 5.

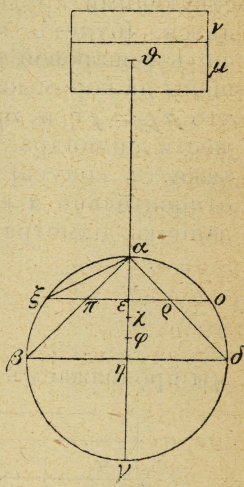
точки α съ кругомъ, діаметръ котораго есть $\pi\rho$, когда онъ перенесенъ въ точку ϑ на коромыслѣ вѣсовъ такъ, чтобы точка ϑ была его центромъ тяжести. Такъ какъ теперь σ есть центръ тяжести круга, діаметръ котораго есть ξo, когда этотъ кругъ остается на томъ же мѣстѣ, а ϑ — круга, діаметръ котораго есть $\pi\rho$, когда онъ, какъ сказано, перенесенъ, и такъ какъ имѣетъ мѣсто обратная пропорціональность: $\vartheta\alpha : \alpha\sigma =$ кругу діаметра ξo : на кругъ діаметра $\pi\rho$, то эти круги находятся въ равновѣсіи относительно точки α. Такимъ же образомъ можетъ быть доказано, что, когда въ параболѣ будетъ проведена другая прямая $\parallel \beta\gamma$ и черезъ эту прямую будетъ проведена плоскость, перпендикулярная къ $\alpha\delta$, то образовавшійся въ сегментѣ прямоугольнаго коноида кругъ въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ въ равновѣсіи относительно точки α съ кругомъ, образуемымъ конусомъ, когда этотъ кругъ будетъ перенесенъ въ точку ϑ на коромыслѣ вѣсовъ и помѣщенъ такъ, чтобы точка ϑ была его центромъ тяжести. Такимъ образомъ, если сегментъ и конусъ будутъ наполнены такими кругами, то всѣ круги въ сегментѣ въ томъ мѣстѣ, гдѣ они находятся, будутъ въ равновѣсіи относительно точки α со всѣми кругами конуса, когда они будутъ перенесены и такъ помѣщены на коромыслѣ вѣсовъ въ точкѣ ϑ, чтобы точка ϑ была ихъ центромъ тяжести; а слѣдовательно, и сегментъ прямоугольнаго коноида въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ въ равновѣсіи относительно точки α съ конусомъ, когда онъ будетъ перенесенъ и такъ помѣщенъ на коромыслѣ вѣсовъ въ ϑ, чтобы точка ϑ была его центромъ тяжести. Такъ какъ центръ тяжести обоихъ тѣлъ, взятыхъ вмѣстѣ, будетъ α, а одного только конуса, когда мы его перенесемъ, будетъ ϑ, то центръ тяжести остальной величины будетъ находиться на продолженіи прямой $\alpha\vartheta$ за точкой α, когда мы отложимъ на этомъ продолженіи отрѣзокъ $\alpha\varkappa$ такимъ образомъ, чтобы $\alpha\vartheta : \alpha\varkappa =$ сегменту : на конусъ. Но сегментъ составляетъ $\frac{3}{2}$ конуса; слѣдовательно $\alpha\vartheta = \frac{3}{2}\alpha\varkappa$, и центръ тяжести прямоугольнаго коноида $\varkappa$ дѣлитъ $\alpha\delta$ такимъ образомъ, что часть отъ вершины сегмента вдвое больше остальной части.

VI.

(Центръ тяжести полушарія лежитъ на его оси и дѣлитъ послѣднюю такимъ образомъ), что часть отъ поверхности полушарія относится къ остальной части, какъ $5:3$.

Пусть шаръ (фиг. 6) разсѣченъ плоскостью, проходящей черезъ его центръ; она образуетъ въ сѣченіи съ его поверхностью кругъ $\alpha\beta\gamma\delta$; $\alpha\gamma$ и $\beta\delta$ будутъ два взаимно-перпендикулярныхъ діаметра этого круга; черезъ $\beta\delta$ проведена плоскость перпендикулярно къ $\alpha\gamma$; представимъ себѣ теперь конусъ, основаніемъ котораго служитъ кругъ діаметра $\beta\delta$, вершиной α, а боковыми линіями $\beta\alpha$ и $\alpha\delta$; прямая $\gamma\alpha$ продолжена и $\alpha\vartheta = \gamma\alpha$; мы представляемъ себѣ $\vartheta\gamma$, какъ коромысло вѣсовъ съ центромъ въ точкѣ α и въ полукругѣ $\beta\alpha\delta$ проводимъ прямую $\xi o \parallel \beta\delta$; она пересѣчетъ дугу полукруга въ ξ и o, боковыя стороны конуса въ π, ρ и $\alpha\gamma$ въ ε; через ξo мы проводимъ плоскость перпендикулярно къ $\alpha\varepsilon$; она образуетъ въ сѣченіи съ полушаріемъ кругъ діаметра ξo, а съ конусомъ—кругъ діаметра $\pi\rho$. Такъ какъ теперь $\alpha\gamma : \alpha\varepsilon = \xi\alpha^2 : \alpha\varepsilon^2$,[20]) $\xi\alpha^2 = \alpha\varepsilon^2 + \varepsilon\xi^2$ и $\alpha\varepsilon = \varepsilon\pi$, то $\alpha\gamma : \alpha\varepsilon = \xi\varepsilon^2 + \varepsilon\pi^2 : \varepsilon\pi^2$. Но $\xi\varepsilon^2 + \varepsilon\pi^2 : \varepsilon\pi^2 =$ кругу діаметра $\xi o +$ кругъ діаметра $\pi\rho$: на кругъ діаметра $\pi\rho$. Итакъ, оба круга, діаметры которыхъ суть ξo и $\pi\rho$, въ томъ мѣстѣ, гдѣ они находятся, будутъ въ равновѣсіи относительно точки α съ кругомъ, діаметръ котораго есть $\pi\rho$, когда онъ перенесенъ и помѣщенъ въ ϑ такъ, чтобы точка ϑ была его центромъ тяжести. Такъ какъ теперь центръ тяжести обоихъ круговъ, діаметры которыхъ суть ξo и $\pi\rho$, въ томъ мѣстѣ, гдѣ они находятся,[21]) . . .

. . . .



Фиг. 6.

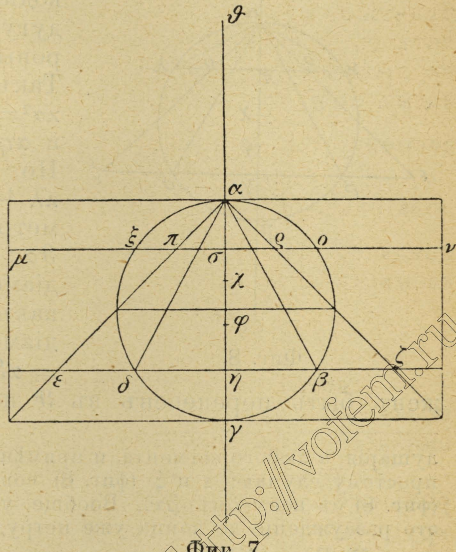
VII.

(Посредствомъ этого метода) можно еще уяснить, (что произвольный шаровой сегментъ) относится къ конусу (съ тѣмъ же основаніемъ и высотой, какъ радіусъ шара + высота противоположнаго сегмента относится къ высотѣ противоположнаго сегмента) .

. . . .

. . . .

и (фиг. 7) черезъ $\mu\nu$ проводимъ плоскость, перпендикулярную къ $\alpha\gamma$; она образуетъ, такимъ образомъ, въ сѣченіи съ цилиндромъ кругъ, діаметръ котораго есть $\mu\nu$, съ шаровымъ сегментомъ — кругъ, діаметръ котораго есть ξo, съ конусомъ, у котораго основаніемъ служитъ кругъ діаметра $\varepsilon\zeta$, а вершиной α,—кругъ, діаметръ котораго есть $\pi\rho$. Такимъ же образомъ, какъ и раньше, можно теперь доказать, что кругъ, діаметръ котораго есть $\mu\nu$, въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ въ равновѣсіи относительно точки α съ обоими кругами,



Фиг. 7.

[20]) Это можно получить изъ соотношенія : $\alpha\gamma . \alpha\varepsilon = \alpha\xi^2$. *Прим. перевод.*

[21]) Главу VI можно продолжать, воспользовавшись разсужденіями Архимеда въ главѣ VIII, гдѣ онъ разсматриваетъ уже не центръ тяжести по-

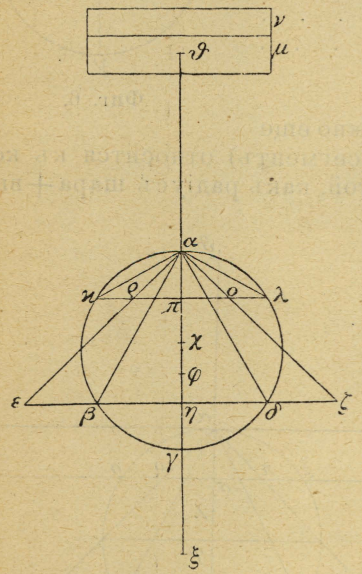
[діаметры которыхъ суть ξo и $\pi\rho$, когда они будутъ перенесены и помѣщены на коромыслѣ вѣсовъ въ ϑ. И это самое можетъ быть доказано относительно всѣхъ указанныхъ круговъ]. Если мы теперь цилиндръ, конусъ и шаровой сегментъ наполнимъ соотвѣтствующими кругами, то цилиндръ въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, [будетъ въ равновѣсіи относительно точки α] съ конусомъ $+$ шаровой сегментъ, когда они будутъ перенесены и помѣщены на коромыслѣ вѣсовъ въ точку ϑ. Дѣлимъ $\alpha\eta$ въ φ и χ такъ, что $\alpha\chi = \chi\eta$ и $\alpha\varphi = 3\varphi\eta$; слѣдовательно, χ будетъ центромъ тяжести цилиндра, такъ какъ это средина оси $\alpha\eta$, [а φ есть центръ тяжести конуса]. Такъ какъ теперь названныя тѣла находятся относительно α въ равновѣсіи, то цилиндръ : къ конусу съ основаніемъ діаметра $\varepsilon\zeta$ $+$ шаровой сегментъ $\alpha\beta\delta = \vartheta\alpha : \alpha\chi$ [22]) . . . .

. . . .

VIII.

. . . .

мы продолжаемъ (фиг. 8) [23]) $\alpha\gamma$ и откладываемъ $\alpha\vartheta = \alpha\gamma$ и $\gamma\xi =$ радіусу круга; $\gamma\vartheta$ мы представляемъ себѣ, какъ коромысло вѣсовъ съ центромъ α, и въ плоскости, отсѣкающей сегментъ, описываемъ кругъ съ центромъ η и съ радіусомъ $= \alpha\eta$ [24]); на этомъ кругѣ мы строимъ конусъ съ вершиной въ α, боковыми линіями котораго будутъ $\alpha\varepsilon$, $\alpha\zeta$; далѣе, мы проводимъ прямую $\varkappa\lambda \parallel \varepsilon\zeta$; она пересѣчетъ дугу сегмента въ $\varkappa$ и λ, боковыя стороны конуса $\alpha\varepsilon\zeta$ въ ρ и o и $\alpha\gamma$ въ π. Такъ какъ теперь $\alpha\gamma : \alpha\pi = \alpha\varkappa^2 : \alpha\pi^2$, $\varkappa\alpha^2 = \alpha\pi^2 + \pi\varkappa^2$ и $\alpha\pi^2 = \pi o^2$ (такъ какъ и $\alpha\eta^2 = \varepsilon\eta^2$), то $\gamma\alpha : \alpha\pi = \varkappa\pi^2 + \pi o^2 : o\pi^2$. Но $\varkappa\pi^2 + \pi o^2 : \pi o^2 =$ кругу діаметра $\varkappa\lambda$ $+$ кругъ діаметра $o\rho$: на кругъ діаметра $o\rho$, а $\gamma\alpha = \alpha\vartheta$; слѣдовательно, $\vartheta\alpha : \alpha\pi =$ кругу діаметра $\varkappa\lambda$ $+$ кругъ діаметра $o\rho$: на кругъ діаметра $o\rho$. Такъ какъ теперь кругъ діаметра $\varkappa\lambda$ $+$ кругъ діаметра $o\rho$: на кругъ діаметра $o\rho = \alpha\vartheta : \pi\alpha$, то кругъ діаметра $o\rho$ долженъ быть перенесенъ въ ϑ на коромыслѣ вѣсовъ и помѣщенъ



Фиг. 8.

лушарія, а любого сегмента, и примѣнить эти разсужденія къ частному болѣе простому случаю; ε и ξ (фиг. 8) совпадаютъ тогда съ β и δ, и конусъ $\varepsilon\alpha\zeta$ (фиг. 8) съ конусомъ $\beta\alpha\delta$. Вообще, уяснивъ себѣ методъ Архимеда, довести это разсужденіе до конца уже нетрудно.

[22]) Глава VII устанавливаетъ въ общемъ случаѣ соотношенія, которыя для частнаго случая установлены въ главѣ II, и имѣетъ вспомогательное значеніе для главы VIII, которая эту главу значительно уясняетъ.

[23]) Недостающее начало главы VIII можно себѣ уяснить, дочитавъ ее до конца.

[24]) Очевидно, $\varepsilon\eta = \alpha\eta$.

такъ, чтобы точка ϑ была его центромъ тяжести; слѣдовательно, $\vartheta\alpha : \alpha\pi =$ кругу діаметра $\varkappa\lambda +$ кругъ діаметра $o\rho$ въ томъ мѣстѣ, гдѣ они находятся, : на кругъ діаметра $o\rho$, когда онъ перенесенъ въ точку ϑ на коромыслѣ вѣсовъ и помѣщенъ такъ, чтобы точка ϑ была его центромъ тяжести; слѣдовательно, круги въ сегментѣ $\beta\alpha\delta$ и въ конусѣ $\alpha\varepsilon\zeta$ находятся въ равновѣсіи относительно точки α съ кругомъ въ конусѣ $\alpha\varepsilon\zeta$. Такимъ же образомъ всѣ круги въ сегментѣ $\beta\alpha\delta$ и въ конусѣ $\alpha\varepsilon\zeta$ въ томъ мѣстѣ, гдѣ они находятся, будутъ въ равновѣсіи относительно точки α со всѣми кругами въ конусѣ $\alpha\varepsilon\zeta$, когда они перенесены въ ϑ на коромыслѣ вѣсовъ и помѣщены такъ, чтобы точка ϑ была ихъ центромъ тяжести; слѣдовательно, и шаровой сегментъ $\alpha\beta\delta$ съ конусомъ $\alpha\varepsilon\zeta$ въ томъ мѣстѣ, гдѣ они находятся, будутъ въ равновѣсіи относительно точки α съ конусомъ $\varepsilon\alpha\zeta$, когда онъ перенесенъ въ ϑ на коромыслѣ вѣсовъ и такъ помѣщенъ, чтобы ϑ была его центромъ тяжести. Пусть цилиндръ $\mu\nu$ равняется конусу, основаніемъ котораго служитъ кругъ діаметра $\varepsilon\zeta$, а вершиной α, и пусть $\alpha\eta$ будетъ раздѣлена въ φ такъ, что $\alpha\eta = 4\varphi\eta$; φ будетъ, слѣдовательно, центромъ тяжести конуса $\varepsilon\alpha\zeta$, что уже доказано раньше. Далѣе, мы разсѣкаемъ цилиндръ $\mu\nu$ посредствомъ перпендикулярно-сѣкущей плоскости такъ, чтобы цилиндръ μ находился въ равновѣсіи съ конусомъ $\varepsilon\alpha\zeta$. Такъ какъ теперь сегментъ $\alpha\beta\delta +$ конусъ $\varepsilon\alpha\zeta$ въ томъ мѣстѣ, гдѣ они находятся, будутъ въ равновѣсіи относительно α съ конусомъ $\varepsilon\alpha\zeta$, когда онъ перенесенъ въ ϑ на коромыслѣ вѣсовъ и помѣщенъ такъ, чтобы ϑ была его центромъ тяжести; цилиндръ $\mu\nu =$ конусу $\varepsilon\alpha\zeta$; оба цилиндра μ и ν помѣщены въ ϑ и $\mu\nu$ находится въ равновѣсіи съ обѣими тѣлами, то цилиндръ ν находится въ равновѣсіи съ шаровымъ сегментомъ относительно точки α. И такъ какъ шаровой сегментъ $\beta\alpha\delta$: на конусъ, основаніемъ котораго служитъ кругъ діаметра $\beta\delta$, а центромъ тяжести α, $= \xi\eta : \eta\gamma$ (это уже доказано раньше [„О сфер. и цил.“, II, 2]), а конусъ $\alpha\beta\delta$: на конусъ $\varepsilon\alpha\zeta =$ кругу діаметра $\beta\delta$: на кругъ діаметра $\varepsilon\zeta = \beta\eta^2 : \eta\varepsilon^2$ и $\beta\eta^2 = \gamma\eta \times \eta\alpha$, $\eta\varepsilon^2 = \eta\alpha^2$ и $\gamma\eta \times \eta\alpha : \eta\alpha^2 = \gamma\eta : \eta\alpha$ то конусъ $\beta\alpha\delta$: на конусъ $\varepsilon\alpha\zeta = \gamma\eta : \eta\alpha$. Но мы доказали, что конусъ $\beta\alpha\delta$: на сегментъ $\beta\alpha\delta = \gamma\eta : \eta\xi$; слѣдовательно, также сегментъ $\beta\alpha\delta$: на конусъ $\varepsilon\alpha\zeta = \xi\eta : \eta\alpha$. И такъ какъ $\alpha\chi : \chi\eta = \eta\alpha + 4\eta\gamma : \alpha\eta + 2\eta\gamma$, [25]) то и обратно: $\eta\chi : \chi\alpha = 2\gamma\eta + \eta\alpha : 4\gamma\eta + \eta\alpha$ и посредствомъ сложенія: $\eta\alpha : \alpha\chi = 6\gamma\eta + 2\eta\alpha : \eta\alpha + 4\eta\gamma$. Но $\eta\xi = \frac{1}{4}(6\eta\gamma + 2\eta\alpha)$ и $\gamma\varphi = \frac{1}{4}(4\eta\gamma + \eta\alpha)$; все это очевидно; слѣдовательно, $\eta\alpha : \alpha\chi = \xi\eta : \gamma\varphi$, а слѣдовательно, и $\xi\eta : \eta\alpha = \gamma\varphi : \chi\alpha$. Но было доказано, что $\xi\eta : \eta\alpha =$ сегменту, вершина котораго въ α, а основаніемъ служитъ кругъ діаметра $\beta\delta$, : на конусъ, вершина котораго въ α, а основаніемъ служитъ кругъ діаметра $\varepsilon\zeta$; такимъ образомъ, сегментъ $\beta\alpha\delta$: на конусъ $\varepsilon\alpha\zeta = \gamma\varphi : \chi\alpha$. И такъ какъ цилиндръ μ съ конусомъ $\varepsilon\alpha\zeta$ находятся

[25]) Этой пропорціей опредѣляется положеніе точки χ. Доказываемая теорема, формулировка которой, утраченная въ этой главѣ, сохранилась въ главѣ IX, въ томъ именно и заключается, что центромъ тяжести сегмента служитъ точка χ, опредѣляемая этой пропорціей.

относительно α въ равновѣсіи и ϑ есть центръ тяжести цилиндра, а φ—конуса $\varepsilon\alpha\zeta$, то конусъ $\varepsilon\alpha\zeta$: на цилиндръ $\mu = \vartheta\alpha : \alpha\varphi = \gamma\alpha : \alpha\varphi$. Но цилиндръ $\mu\nu =$ конусу $\varepsilon\alpha\zeta$; слѣдовательно, посредствомъ вычитанія, цилиндръ μ : цилиндръ $\nu = \alpha\varphi : \gamma\varphi$. И цилиндръ $\mu\nu =$ конусу $\varepsilon\alpha\zeta$; слѣдовательно, конусъ $\varepsilon\alpha\zeta$: цилиндру $\nu = \gamma\alpha : \gamma\varphi = \vartheta\alpha : \gamma\varphi$. Но было доказано, что и сегментъ $\beta\alpha\delta$: на конусъ $\varepsilon\alpha\zeta = \gamma\varphi : \chi\alpha$; слѣдовательно, $\delta\iota'\iota\sigma o\upsilon$ сегментъ $\beta\alpha\delta$: цилиндръ $\nu = \vartheta\alpha : \alpha\chi$. И такъ какъ было доказано, что сегментъ $\beta\alpha\delta$ съ цилиндромъ ν находятся въ равновѣсіи относительно α, при чемъ ϑ есть центръ тяжести цилиндра ν, то χ будетъ, слѣдовательно, центромъ тяжести сегмента $\beta\alpha\delta$.

IX.

Такимъ же образомъ, какъ и въ вышеизложенномъ, можно обнаружить, что центръ тяжести произвольнаго шарового сегмента лежитъ на прямой, которая служитъ осью сегмента, раздѣленной въ той точкѣ такъ, что часть ея отъ вершины сегмента относится къ остальной части, какъ ось сегмента + учетверенная ось противоположнаго сегмента къ оси сегмента + удвоенная ось противоположнаго сегмента [26]).

X.

Далѣе, посредствомъ этого метода можно сдѣлать очевиднымъ, что [гиперболическій сегментъ] относится [къ конусу], который имѣетъ то же основаніе [и высоту, равную его высотѣ, какъ ось сегмента + утроенный] остатокъ діаметра относится къ оси + + удвоенный его остатокъ [О коноид., 25], и еще многое другое, что я, считая этотъ методъ уже выясненнымъ посредствомъ приведенныхъ до сихъ поръ примѣровъ, хочу оставить въ сторонѣ, чтобы еще воспользоваться имъ только для доказательства вышеуказанныхъ теоремъ.

XI.

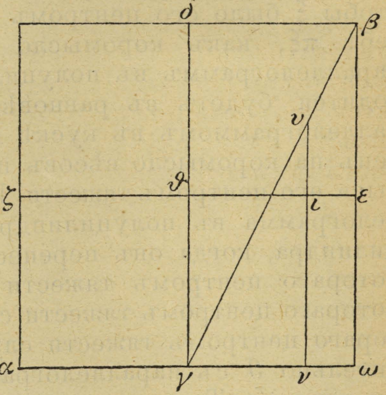
Если мы въ прямую призму съ квадратнымъ основаніемъ впишемъ цилиндръ, основанія котораго лежатъ въ противоположныхъ квадратахъ, а кривая поверхность касается четырехъ остальныхъ параллелограммовъ, и затѣмъ черезъ центръ круга, который служитъ основаніемъ цилиндра, и сторону противолежащаго квадрата проведемъ плоскость, то тѣло, которое будетъ отсѣчено этой плоскостью [отъ цилиндра], составляетъ $\frac{1}{6}$ всей призмы. Можно посредствомъ того-же метода это обнаружить, и когда теорема будетъ такимъ образомъ уяснена, мы перейдемъ къ ея геометрическому доказательству.

Представимъ себѣ прямую призму съ квадратными основаніями и цилиндръ, вписанный въ эту призму указаннымъ обра-

---

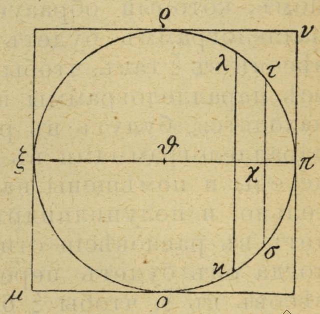
[26]) Смыслъ главы IX заключается въ томъ, что глава VIII устанавливаетъ эти соотношенія только при опредѣленныхъ условіяхъ чертежа. Можно однако, и при другихъ условіяхъ воспользоваться разсужденіями, аналогичными приведеннымъ въ главѣ VIII.

зомъ. Положимъ, что эта призма пересѣчена плоскостью, которая къ плоскости, отсѣкающей часть цилиндра, перпендикулярна и которая проходитъ черезъ ось; сѣченіе призмы и цилиндра [фиг. 9] будетъ параллелограммъ $\alpha\beta$, а общая прямая плоскости, отсѣкающей часть цилиндра, и плоскости, проходящей черезъ ось перпендикулярно къ плоскости, отсѣкающей эту часть цилиндра, будетъ $\beta\gamma$; осью призмы и цилиндра будетъ $\gamma\delta$; посредствомъ прямой $\varepsilon\zeta$ она пересѣчена пополамъ подъ прямымъ угломъ, черезъ $\varepsilon\zeta$ проведена плоскость перпендикулярно къ $\gamma\delta$; эта плоскость образуетъ, слѣдовательно, въ сѣченіи съ призмой квадратъ и съ цилиндромъ кругъ.



Фиг. 9.

Положимъ, что [фиг. 10] [27]) квадратъ $\mu\nu$ будетъ сѣченіемъ призмы, кругъ $\xi o\pi\rho$ — цилиндра и что этотъ кругъ будетъ касаться сторонъ квадрата въ точкахъ ξ, o, π и ρ; общая линія пересѣченія плоскости, отсѣкающей часть цилиндра, и плоскости, проходящей черезъ $\varepsilon\zeta$ перпендикулярно къ оси цилиндра, будетъ $\varkappa\lambda$, которая раздѣлена пополамъ прямой $\pi\vartheta\xi$. Въ полукругѣ $o\pi\rho$ мы проводимъ прямую $\sigma\tau$ перпендикулярно къ $\pi\chi$, черезъ $\sigma\tau$ проводимъ плоскость перпендикулярно къ $\xi\pi$ и продолжаемъ ее по обѣ стороны круга $\xi o\pi\rho$; въ сѣченіи съ полуцилиндромъ, основаніемъ котораго служитъ полукругъ $o\pi\rho$, а высотой ось призмы, она образуетъ параллелограммъ, одна сторона котораго $= \sigma\tau$, а другая $=$ $=$ боковой сторонѣ цилиндра; въ кускѣ цилиндра она также образуетъ параллелограммъ, одна сторона котораго $= \sigma\tau$, а другая $= \nu\upsilon$; и вслѣдствіе этого въ параллелограммѣ $\delta\varepsilon$ прямая $\nu\upsilon$ проходитъ $\parallel \beta\omega$ и отрѣзокъ $\varepsilon\iota = \pi\chi$. Такъ какъ теперь



Фиг. 10.

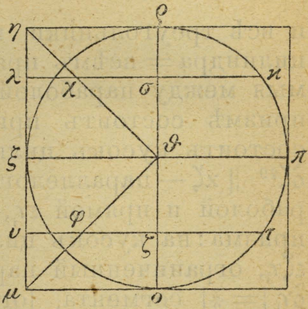
$\varepsilon\gamma$ параллелограммъ и $\nu\iota \parallel \vartheta\gamma$, а $\varepsilon\vartheta$ и $\beta\gamma$ эти параллельныя пересѣкаютъ, то $\varepsilon\vartheta : \vartheta\iota = \omega\gamma : \gamma\nu = \beta\omega : \upsilon\nu$. Но $\beta\omega : \upsilon\nu =$ параллелограмму въ половинѣ цилиндра : на параллелограммъ въ кускѣ

[27]) Чертежи 9 и 10 замѣчательны тѣмъ, что даютъ проекціонное изображеніе разсматриваемой фигуры 3-хъ измѣреній на 2-хъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостяхъ и вмѣстѣ даютъ для этой фигуры дѣйствительно чертежъ, а не плохой рисунокъ, какимъ является обычный чертежъ пространственной фигуры, стремящійся соблюдать перспективу и посредствомъ нажимовъ передать даже тѣни, а поэтому, какъ чертежъ, всегда затруднительный. Въ современной начертательной геометріи методъ изображенія, которымъ Архимедъ здѣсь пользуется, возведенъ, какъ извѣстно, въ принципъ.

цилиндра, такъ какъ оба параллелограмма имѣютъ ту же самую сторону $\sigma\tau$; $\varepsilon\vartheta = \vartheta\pi$, $\iota\vartheta = \chi\vartheta$; и такъ какъ $\pi\vartheta = \vartheta\xi$, то $\vartheta\xi : \vartheta\chi =$ параллелограмму въ половинѣ цилиндра : на параллелограммъ въ кускѣ цилиндра. Мы представляемъ себѣ параллелограммъ въ кускѣ цилиндра перенесеннымъ и помѣщеннымъ въ ξ такъ, чтобы ξ было его центромъ тяжести; далѣе, мы представляемъ себѣ $\pi\xi$, какъ коромысло вѣсовъ съ центромъ въ ϑ; тогда параллелограммъ въ полуцилиндрѣ въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ въ равновѣсіи относительно точки ϑ съ параллелограммомъ въ кускѣ цилиндра, когда онъ будетъ перенесенъ на коромысло вѣсовъ и такъ помѣщенъ въ ξ, чтобы точка ξ была его центромъ тяжести. И такъ какъ χ центръ тяжести параллелограмма въ полуцилиндрѣ, а ξ — параллелограмма въ кускѣ цилиндра, когда онъ перенесенъ, и $\xi\vartheta : \vartheta\chi =$ параллелограмму, у котораго центромъ тяжести служитъ χ, : на параллелограммъ, у котораго центромъ тяжести служитъ ξ, то параллелограммъ, у котораго центромъ тяжести служитъ χ, будетъ въ равновѣсіи относительно ϑ съ параллелограммомъ, у котораго центромъ тяжести служитъ ξ. Такимъ же самымъ образомъ можно доказать, что когда мы проведемъ въ полукругѣ $o\pi\rho$ другую прямую, перпендикулярную къ $\pi\vartheta$, и черезъ эту прямую проведемъ перпендикулярно къ $\pi\vartheta$ плоскость, которую продолжимъ въ обѣ стороны плоскости, заключающей кругъ $\xi o\pi\rho$, то параллелограммъ, образовавшійся въ полуцилиндрѣ въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ въ равновѣсіи относительно точки ϑ съ параллелограммомъ, который образуется въ кускѣ цилиндра, когда этотъ параллелограммъ будетъ перенесенъ и помѣщенъ на коромыслѣ вѣсовъ въ ξ такъ, чтобы точка ξ была его центромъ тяжести; итакъ, всѣ параллелограммы въ полуцилиндрѣ въ томъ мѣстѣ, гдѣ они находятся, будутъ въ равновѣсіи относительно точки ϑ со всѣми параллелограммами въ кускѣ цилиндра, когда они будутъ перенесены и помѣщены на коромыслѣ вѣсовъ въ точкѣ ξ; слѣдовательно, и полуцилиндръ въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ въ равновѣсіи относительно точки ϑ съ кускомъ цилиндра, когда онъ будетъ перенесенъ и такъ помѣщенъ на коромыслѣ вѣсовъ въ ξ, чтобы ξ была его центромъ тяжести.

XII.

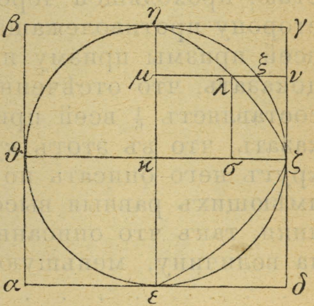
Возьмемъ [фиг. 11] отдѣльно начерченный перпендикулярный къ оси параллелограммъ [$\mu\nu$ вмѣстѣ съ кругомъ $\xi o\pi\rho$ и его діаметрами $\xi\pi$, $o\pi$. Проведемъ] $\vartheta\mu$ и $\vartheta\eta$ и черезъ эти прямыя двѣ плоскости, перпендикулярныя къ плоскости, въ которой лежитъ полукругъ $o\pi\rho$; эти плоскости продолжимъ по обѣ ея стороны; мы получимъ такимъ образомъ призму, основаніемъ которой служитъ треугольникъ $\vartheta\mu\eta$, а высота равна оси цилиндра; эта призма составляетъ $\frac{1}{4}$ всей призмы, заключающей цилиндръ. Въ полукругѣ $o\pi\rho$ и въ квадратѣ $\mu\nu$ мы проводимъ затѣмъ двѣ прямыя $\varkappa\lambda$ и $\tau\upsilon$ на одинаковомъ разстояніи отъ $\pi\xi$; онѣ пересѣкутъ дугу полукруга $o\pi\rho$ въ точкахъ $\varkappa$ и τ, діаметръ $o\rho$ въ σ и ζ, прямыя $\vartheta\eta$ и $\vartheta\mu$ въ φ и χ. Черезъ $\varkappa\lambda$, $\tau\upsilon$ мы проводимъ двѣ плоскости перпендикулярно $o\rho$ и продолжаемъ ихъ по обѣ стороны плоскости, на которой лежитъ кругъ $\xi o\pi\rho$; въ полуцилиндрѣ, основаніемъ котораго служитъ полукругъ $o\pi\rho$, а высота — та же, что у цилиндра, онѣ образуютъ, какъ сѣченіе, параллелограммъ, одна сторона котораго $=\varkappa\sigma$, другая равна оси цилиндра; въ призмѣ $\vartheta\eta\mu$ — тоже параллелограммъ, одна сторона котораго $=\lambda\chi$, другая же $=$ оси, такимъ же самымъ образомъ въ полуцилиндрѣ — параллелограммъ, одна сторона котораго $=\tau\zeta$, а другая $=$ оси цилиндра, и въ призмѣ — параллелограммъ, одна сторона котораго $=\upsilon\varphi$, другая же $=$ оси цилиндра . . . .



Фиг. 11.

XIII.

Положимъ, что дана прямая призма съ квадратнымъ основаніемъ, и однимъ ея основаніемъ [фиг. 12] служитъ квадратъ $\alpha\beta\gamma\delta$; въ призму вписанъ цилиндръ, и его основаніемъ служитъ кругъ $\varepsilon\zeta\eta\vartheta$, который касается сторонъ параллелограмма $\alpha\beta\gamma\delta$ въ ε, ζ, η и ϑ; чрезъ его центръ и черезъ соотвѣтствующую сторонѣ $\gamma\delta$ сторону квадрата, лежащаго противъ даннаго квадрата $\alpha\beta\gamma\delta$, мы проводимъ плоскость; она отсѣчетъ отъ данной призмы другую призму, которая составитъ $\frac{1}{4}$ всей призмы и будетъ ограничена 3 параллелограммами и 2 противолежащими треугольниками. Въ полукругъ $\varepsilon\zeta\eta$ мы вписываемъ параболу, у которой основаніемъ будетъ $\eta\varepsilon$, а осью $\varkappa\zeta$, и въ параллелограммѣ $\delta\eta$ проводимъ $\mu\nu \parallel \varkappa\zeta$; она пересѣчетъ дугу полукруга въ ξ, а параболу въ λ и, слѣдовательно, $\mu\nu\times\nu\lambda=\nu\zeta^2$ (что уже извѣстно [Аполлоній, Кон., I, 11]). Отсюда $\mu\nu:\nu\lambda=\eta\varkappa^2:\lambda\sigma^2$ [28]). Черезъ $\mu\nu$ мы проводимъ плоскость перпендикулярно къ $\varepsilon\eta$; она образуетъ, какъ сѣченіе, въ призмѣ, отсѣченной отъ всей призмы, прямоугольный треугольникъ, у котораго однимъ катетомъ будетъ $\mu\nu$, а другимъ прямая, которая лежитъ въ плоскости, перпендикулярной къ $\gamma\delta$ въ ν, и которая равна оси цилиндра, гипотенуза же — въ сѣкущей плоскости. Далѣе, въ части, которая отсѣчена отъ цилиндра плоскостью, проведенной черезъ $\varepsilon\eta$ и сторону квадрата, лежащую противъ стороны $\gamma\delta$, она, какъ сѣченіе, образуетъ прямоугольный треугольникъ,



Фпг. 12.

[28]) Ясно, что $\nu\mu:\nu\lambda=\mu\nu^2:\nu\lambda.\mu\nu$, а въ виду предыдущаго соотношенія $\mu\nu:\nu\lambda=\mu\nu^2:\nu\xi^2=\eta\varkappa^2:\lambda\sigma^2$.

у котораго однимъ катетомъ служитъ, $\mu\xi$, а другимъ прямая, которая проведена на цилиндрической поверхности перпендикулярно къ плоскости $\varkappa\nu$, гипотенуза же . . . .

и всѣ треугольники въ призмѣ : на всѣ треугольники въ кускѣ цилиндра $=$ всѣмъ прямымъ въ параллелограммѣ $\delta\eta$: на всѣ прямыя между параболой и прямой $\varepsilon\eta$. Но изъ треугольниковъ въ призмѣ состоитъ призма, [и изъ нихъ же въ кускѣ цилиндра состоитъ кусокъ цилиндра; изъ] прямыхъ въ параллелограммѣ $\delta\zeta$[29]) $\|\ \varkappa\zeta$ — параллелограммъ $\delta\eta$, а изъ прямыхъ, отсѣкаемыхъ параболой и прямой $\varepsilon\eta$,—параболическій сегментъ; слѣдовательно, призма : на кусокъ цилиндра $=$ параллелограмму $\delta\eta$: на сегментъ $\varepsilon\zeta\eta$, ограниченный параболой и прямой $\varepsilon\eta$. Но параллелограммъ $\delta\eta$ $[= \frac{3}{2}]$ сегмента, [ограниченнаго параболой и прямой $\varepsilon\eta$], что уже доказано въ вышеизложенномъ; поэтому и призма $= \frac{3}{2}$ куска цилиндра. Если, слѣдовательно, кусокъ цилиндра $= 2$, то призма $= 3$, а вся призма, заключающая цилиндръ, $= 12$, такъ какъ она въ 4 раза больше другой призмы; и такимъ образомъ кусокъ цилиндра $= \frac{1}{6}$ призмы, что и требовалось доказать.

XIV.

Положимъ, что дана прямоугольная призма съ квадратными основаніями [и въ нее вписанъ цилиндръ; она разсѣчена плоскостью, проходящей черезъ центръ основанія цилиндра и черезъ сторону противолежащаго квадрата]. Эта плоскость отсѣкаетъ отъ всей призмы призму и отъ цилиндра — кусокъ цилиндра. Можно доказать, что отсѣченный этой плоскостью отъ цилиндра кусокъ составляетъ $\frac{1}{6}$ всей призмы. Но предварительно мы хотимъ доказать, что въ этотъ кусокъ цилиндра возможно вписать и вокругъ него описать по фигурѣ, которая состоитъ изъ призмъ, имѣющихъ равныя высоты и въ основаніяхъ—подобные треугольники, такъ что описанная фигура будетъ превосходить вписанную на величину, меньшую всякой произвольной величины[30]). . .
. . . .

Но было доказано, что призма, отсѣченная наклонной плоскостью, меньше $\frac{3}{2}$ тѣла, вписаннаго въ кусокъ цилиндра. При этомъ призма, отсѣченная наклонной плоскостью, : на тѣла, вписанныя въ кусокъ цилиндра, $=$ параллелограмму $\delta\eta$: на паралле-

[29]) Должно означать $\delta\eta$.

[30]) Замѣчательно, что въ этой главѣ, которую Архимедъ приводитъ, какъ дѣйствительное доказательство, онъ не разсматриваетъ тѣло, состоящимъ изъ плоскостей, а плоскость, состоящей изъ линій, и вообще, къ предѣльнымъ значеніямъ безконечно малыхъ величинъ не прибѣгаетъ. Онъ стоитъ, такимъ образомъ, на современной намъ точкѣ зрѣнія и объемъ данной фигуры, отличный отъ нуля, не разсматриваетъ, какъ сумму нулей. Это видно изъ того, что онъ вписываетъ и описываетъ фигуры, состоящія изъ призмъ, отъ нуля отличныхъ, и ихъ разность не дѣлаетъ равной нулю, а дѣлаетъ только меньше произвольной величины.

лограммы, вписанные въ сегментъ, ограниченный параболой и прямой; слѣдовательно, параллелограммъ $\delta\eta < \frac{3}{2}$ параллелограммовъ въ сегментѣ, ограниченномъ параболой и прямой $\varepsilon\eta$. Но это невозможно, такъ какъ мы въ другомъ мѣстѣ доказали, что параллелограммъ $\delta\eta$ составляетъ $\frac{3}{2}$ сегмента, ограниченнаго параболой и прямой $\varepsilon\eta$. Слѣдовательно . . . .
. . . . не больше
. . . .

И всѣ призмы въ отсѣченной наклонной плоскостью призмѣ : на всѣ призмы фигуры, описанной вокругъ куска цилиндра = всѣмъ параллелограммамъ въ параллелограммѣ $\delta\eta$: на всѣ параллелограммы въ фигурѣ, которая описана вокругъ сегмента, ограниченнаго параболой и прямой $\varepsilon\eta$, т. е. призма, отсѣченная наклонной плоскостью, : на фигуру, описанную вокругъ куска цилиндра, = паралелограмму $\delta\eta$: фигуру, заключенную внутри параболы и прямой $\varepsilon\eta$. Но призма, отсѣченная наклонной плоскостью $> \frac{3}{2}$ фигуры, описанной вокругъ куска цилиндра . . .
. . . .

Задача о падающей кошкѣ.

[Föppl. IV. Dynamik. § 14].

Однимъ изъ простѣйшихъ и важнѣйшихъ случаевъ примѣненія закона площадей является разрѣшеніе вопроса о томъ, можетъ ли предоставленная самой себѣ система матеріальныхъ точекъ, между частями которой дѣйствуютъ нѣкоторыя произвольныя внутреннія силы, сама собой повернуться въ пространствѣ, и, если можетъ, то при какихъ именно условіяхъ. При рѣшеніи этого вопроса обыкновенно пользуются закономъ площадей и закономъ движенія центра тяжести; согласно этому послѣднему, никакая система матеріальныхъ точекъ не можетъ сама собою, помощью однѣхъ только внутреннихъ силъ, придти въ поступательное движеніе, такъ какъ центръ тяжести системы, каковы бы ни были относительныя перемѣщенія ея частей, долженъ всегда оставаться въ покоѣ. Подобнымъ же образомъ и законъ площадей прежде нерѣдко выражали такъ: покоющаяся система точекъ не можетъ также и придти во вращеніе сама собою, безъ посторонней помощи, т. е. безъ воздѣйствія на нее внѣшнихъ силъ. И хотя это толкованіе закона площадей совершенно ложно, оно долгое время было всѣми принято и было признано ошибочнымъ лишь послѣ того, какъ обнаружилось, что оно противорѣчитъ даннымъ опыта.

Впрочемъ, въ формулировку закона, не говоря уже о формулахъ, выводахъ и доказательствахъ, можно бы не вносить никакихъ измѣненій; нужно было только, примѣняя его къ конкретному случаю, поступать осмотрительнѣе, чѣмъ это дѣлалось прежде.

Вопросъ былъ поднятъ и разъясненъ только сравнительно недавно—въ 1894 году въ Парижской Академіи Наукъ. Потребовалось объяснить механическими причинами, почему кошка при паденіи съ достаточно большой высоты всегда ухитряется стать на лапы. И, основываясь на томъ толкованіи закона площадей, которое было нѣкогда общепринятымъ, представители механики высказали сначала мнѣніе, что кошка поворачивается на лету только потому, что успѣваетъ подходящимъ образомъ оттолкнуться въ тотъ мигъ, когда только начинаетъ падать, т. е. когда еще находится въ соприкосновеніи съ другими тѣлами. Исходя изъ закона площадей, разсуждали, скажемъ, такъ: если бы тѣлу при паденіи не было раньше сообщено вращательнаго движенія, то кошка, пожалуй, и могла бы повернуть въ угодномъ ей направленіи переднюю половину своего тѣла; но въ то же время ея задняя половина должна была бы, сообразно съ закономъ площадей, повернуться въ противоположномъ направленіи. И если вначалѣ у кошки всѣ четыре лапы торчали, допустимъ, кверху, то, чтобы затѣмъ направить ихъ книзу, она должна была бы вывернуть все свое тѣло, какъ переднюю, такъ и заднюю половину, на подобіе спиральнаго витка.

Подобное разсужденіе было само по себѣ правильно; но при этомъ просмотрѣли, что возможны и иные способы поворота частей тѣла другъ по отношенію къ другу, кромѣ того поворота задней и передней половины, который былъ единственно принятъ въ разсчетъ Что это такъ, показали вскорѣ безупречные опыты, при которыхъ подвѣшивали кошекъ лапами вверхъ на шнуркахъ и затѣмъ осторожно перерѣзывали эти шнурки, такъ что кошка, разобщенная съ посторонними тѣлами, не могла оттолкнуться отъ нихъ, чтобы пріобрѣсти вращательное движеніе. Затѣмъ она падала въ совершенно темное пространство, такъ что не могла заранѣе оцѣнить высоту паденія и, не смотря на все это, она постоянно при самыхъ различныхъ (но не слишкомъ малыхъ) высотахъ паденія становилась прямо на лапы. Кромѣ этого опыта, рядомъ быстро смѣнявшихъ другъ друга моментальныхъ фотографическихъ снимковъ удалось отмѣтить и самыя движенія тѣла, которыя кошка выполняла на лету.

Послѣ того, какъ былъ съ несомнѣнностью установленъ тотъ фактъ, что тѣло, падая, можетъ само повернуться, вскорѣ затѣмъ дали и механическое объясненіе этому. И я, чтобы лучше выяснить суть дѣла, оставивъ пока въ сторонѣ данный историческій примѣръ, изберу болѣе простой случай. Ошибка, которую совершали въ разсужденіи, подобномъ вышеприведенному, заключается прежде всего въ слѣдующемъ: упустили изъ виду, что бываютъ случаи, когда одна часть тѣла вращается сколько угодно относительно другой части все въ томъ же направленіи и при этомъ тѣло послѣ каждаго оборота *принимаетъ прежнюю форму*. Примѣръ: человѣкъ, взявши, скажемъ, въ правую руку палку, саблю и т. п., вытянувъ затѣмъ эту руку вертикально кверху и вращая палку въ горизонтальной плоскости вокругъ сочлененія кисти, можетъ произвести это движеніе сколько угодно разъ все въ томъ же направленіи. Если бы притомъ онъ, не подвергаясь дѣйствію внѣшнихъ силъ, свободно и неподвижно парилъ въ пространствѣ, то, вращая вышеописаннымъ образомъ палку надъ своей головой, онъ самъ сталъ бы вращаться въ обратномъ направленіи. Найдя проекцію его тѣла на плоскость, перпендикулярную къ его продольной оси, т. е. къ оси вращенія палки, мы весьма просто опредѣлимъ угловую скорость его вращенія, исходя изъ условія, что сумма произведеній секторіальныхъ скоростей (отнесенныхъ къ любой точкѣ, напримѣръ, къ проекціи продольной оси) его точекъ на соотвѣтствующія массы равна по величинѣ подобному же выраженію, составленному для массы палки. Продолжая вращать палку, человѣкъ будетъ вращаться въ противоположномъ направленіи; прекративъ же движеніе палки, онъ самъ перестанетъ вращаться. Итакъ, его тѣло снова будетъ находиться въ состояніи покоя, но будетъ обращено теперь въ другую сторону, чѣмъ прежде. Такимъ образомъ, онъ можетъ какъ угодно поворачиваться въ пространствѣ вокругъ своего центра тяжести.

Вернемся теперь къ случаю падающей кошки: если она будетъ своимъ хвостомъ продѣлывать движеніе, подобное вышеописанному вращенію палки, т. е. будетъ сколь угодно часто вращать его вокругъ продольной оси своего тѣла, то она располагаетъ уже однимъ способомъ повернуть свое тѣло внизъ. Но этотъ способъ не единственный, какъ покажетъ намъ слѣдующее разсужденіе.

Допустимъ, что какое-нибудь тѣло *измѣняемой формы* какимъ-нибудь образомъ уже приведено во вращеніе. И пусть внѣшнія силы либо совершенно отсутствуютъ, либо, какъ въ случаѣ падающаго тѣла, всѣ параллельны другъ другу и пропорціональны соотвѣтствующимъ массамъ; въ этомъ послѣднемъ случаѣ онѣ не имѣютъ никакого вліянія на вращеніе тѣла, и мы можемъ отвлечься отъ нихъ.

При условіи отсутствія внѣшнихъ силъ, моментъ количествъ движенія остается постояннымъ. Теперь представимъ себѣ, что разсматриваемое нами тѣло сократилось; тогда уменьшится каждое плечо рычага, проведенное изъ какого-нибудь общаго начала, напримѣръ, изъ проекціи центра тяжести. А такъ какъ геометрическая сумма произведеній изъ этихъ плечъ на соотвѣтствующія количества движенія должна остаться неизмѣнной, то ясно, что угловая скорость вращенія увеличится. Отсюда непосредственно слѣдуетъ, напримѣръ, то, что небесное тѣло, которое вращается вокругъ своей оси, вслѣдствіе постепеннаго сжатія должно было бы увеличивать свою угловую скорость. И если бы нашъ земной шаръ дѣйствительно сжимался вслѣдствіе охлажденія, то наши сутки стали бы короче *).

*) При этомъ утвержденіи естественно подразумѣвается, что можетъ быть задана нѣкоторая неизмѣняемая единица времени. Чтобы провѣрить,

Другой примѣръ подобнаго же ускоренія вращательнаго движенія являетъ акробатъ, когда онъ во время прыжка кувыркается въ воздухѣ (т. н. salto-mortale). Его центръ тяжести описываетъ въ воздухѣ параболу. Уже при началѣ прыжка гимнастъ сообщаетъ своему тѣлу нѣкоторую скорость вращенія вокругъ горизонтальной оси, проходящей черезъ его центръ тяжести. Но этой скорости, во всякомъ случаѣ, недостаточно для того, чтобы онъ успѣлъ, произведя на лету полный оборотъ, стать на ноги. Однако, акробатъ, который, разумѣется, продѣлываетъ свой кунстштюкъ благодаря выучкѣ и отнюдь не имѣя понятія о законѣ площадей, можетъ значительно увеличить угловую скорость своего вращенія, если во время прыжка сильно сожмется всѣмъ тѣломъ (сократится, прижметъ къ себѣ руки, ноги и т. д.). Этимъ пріемомъ ему удается сообщить своему тѣлу, за время паденія по параболѣ, вращеніе достаточно сильное, чтобы быть въ состояніи достигнуть земли ногами.

Теперь разсмотримъ нѣкоторое, находящееся сперва въ покоѣ, тѣло, составленное изъ двухъ приблизительно одинаковыхъ частей такимъ образомъ, что одна часть можетъ вращаться относительно другой не вполнѣ свободно, но лишь на нѣкоторый опредѣленный уголъ. Оказывается, что такое тѣло можетъ повернуться въ пространствѣ такъ, чтобы въ результатѣ его форма не измѣнилась. Это можно сдѣлать такъ. Сначала заставимъ половину I вращаться въ заданномъ направленіи. При этомъ половина II, конечно, вертится въ другую сторону. За этотъ первый періодъ времени постараемся, кромѣ того, какимъ-нибудь способомъ (живое существо можетъ это выполнить, вытягивая или сокращая руки и ноги) по возможности сильно сократить часть I и возможно болѣе расширить часть II. Отъ этого часть I пріобрѣтетъ гораздо большую угловую скорость, чѣмъ II.

Черезъ нѣкоторое время задержимъ вращеніе обѣихъ половинъ другъ относительно друга. Тогда прекратится всякое дальнѣйшее вращательное движеніе. Но вмѣстѣ съ тѣмъ теперь часть I успѣла повернуться въ желаемомъ направленіи на большой уголъ, въ то время какъ II повернулась въ нежелаемомъ направленіи лишь на уголъ весьма малый. Затѣмъ заставимъ половину I возможно болѣе расшириться, а половину II возможно болѣе сжаться. Если теперь снова приведемъ обѣ части во вращательное движеніе другъ относительно друга, но при этомъ часть II въ желаемомъ, а часть I въ нежелаемомъ направленіи, то II получитъ большую, а I малую угловую скорость. И въ тотъ моментъ, когда при этомъ движеніи обѣ части снова придутъ въ

измѣнились ли сутки въ теченіе долгаго періода времени, можно было бы сосчитать число свѣтовыхъ колебаній за сутки для нѣкотораго точно опредѣленнаго оттѣнка или длины свѣтовой волны. Этимъ уже дается возможность,— по крайней мѣрѣ, теоретическая—констатировать измѣненіе въ продолжительности сутокъ. Впрочемъ, кромѣ этого способа, существуетъ еще цѣлый рядъ другихъ, которые могутъ служить той же цѣли.

нормальное расположенiе одна относительно другой, т. е. тѣло возстановитъ свою первоначальную форму, оно въ результатѣ окажется повернутымъ на уголъ, равный разности большого угла, пройденнаго въ желаемомъ направленiи, и малаго угла, пройденнаго въ направленiи нежелаемомъ.

Ясно, что, если мы достаточно часто будемъ повторять вышеописанный процессъ, то мы сможемъ осуществить поворотъ свободнаго тѣла на любой заданный уголъ.

Число примѣровъ, при которыхъ подобнымъ же образомъ простѣйшее разсужденiе, безъ посредства какихъ-нибудь вычисленiй, даетъ намъ, по меньшей мѣрѣ, качественный результатъ,— весьма велико. Для болѣе полнаго уясненiя дѣла я приведу нѣкоторые изъ нихъ.

Положимъ, что пассажиры, сидящiе на воздушномъ шарѣ, пожелали такъ повернуть его, чтобы какая-нибудь другая сторона шара или корзинка была освѣщена солнцемъ. Для этого имъ нужно обходить кругомъ корзину въ противоположномъ направленiи, либо только начать кружиться вокругъ своей собственной оси, либо, наконецъ, если послѣднее имъ не нравится, взять палку и вертѣть ее надъ головой такъ, какъ это было выше описано. Повернувъ ее достаточное число разъ, мы вмѣстѣ съ тѣмъ приведемъ шаръ въ желаемое положенiе. Тогда мы, прекративъ вращенiе палки, остановимъ шаръ.

Корабль, покоящiйся на водѣ, можно, конечно, весьма легко заставить повернуться, если располагаемъ веслами или шестами, которые бы достигали до поверхности моря, и посредствомъ ихъ вызовемъ достаточныя для поворота внѣшнiя силы. Но даже и не располагая подобными средствами, можно было бы повернуть судно такъ же, какъ и воздушный шаръ. Если бы, напримѣръ, на кораблѣ имѣлось вращающееся на вертикальной оси колесо, то пассажиру стоило бы только достаточно часто оборачивать его въ какую-нибудь сторону для того, чтобы корабль повернулся въ сторону противоположную. И если бы колесо было гдѣ-нибудь въ каютѣ и совершенно разобщено съ внѣшнимъ пространствомъ, то все-таки можно было бы повернуть корабль какъ угодно, даже не выходя изъ каюты.

Можно сказать, что, въ крайнемъ случаѣ, достаточно было бы поднять кверху палецъ и повернуть на немъ соотвѣтствующее число разъ колечко, чтобы установить черезъ нѣкоторое время судно въ желаемомъ направленiи. Но, конечно, дѣйствiе этого исчезающе мало въ сравненiи съ случайными внѣшними влiянiями, которыхъ никогда нельзя вполнѣ устранить, и поэтому провѣрить такое заключенiе опытомъ совершенно невозможно.

Впрочемъ, въ приводимыхъ теперь примѣрахъ существуетъ среди внѣшнихъ влiянiй, названныхъ „случайными", одно такое, которое всегда существенно влiяетъ на результатъ въ опредѣленномъ направленiи и на которое поэтому слѣдуетъ обратить особое вниманіе. Дѣло въ томъ, что, коль скоро воздушный шаръ, либо корабль, вслѣдствіе вращательныхъ движеній, производимыхъ на немъ пассажирами, начнетъ самъ вращаться въ противную сторону, онъ при этомъ испытываетъ сопротивленіе воздуха либо воды, каковое сопротивленіе, хотя и не можетъ воспрепятствовать движенію вполнѣ, все же постепенно уменьшаетъ его скорость. И чтобы устранить это неудобное осложненіе, недостаточно было бы просто прекратить вращательное движеніе на суднѣ съ тѣмъ, чтобы потомъ начать его снова: въ самомъ дѣлѣ, въ то время, какъ пассажиры производили въ первый разъ свое вращательное движеніе, сопротивленіе среды уменьшало угловую скорость судна; когда же пассажиры остановятся, то судно не останется стоять неподвижно въ томъ самомъ положеніи, въ которомъ его засталъ данный моментъ, но станетъ вращаться въ обратномъ направленіи со скоростью, равной той потерѣ первоначальной скорости, которая была произведена сопротивленіемъ среды. И это долженъ имѣть въ виду всякій, кто хочетъ примѣнять на практикѣ предыдущія разсужденія. Но все же ясно, что, если бы кромѣ подобнаго сопротивленія не существовало никакихъ другихъ внѣшнихъ вліяній, то и въ этомъ случаѣ всегда можно было бы выполнить желаемый поворотъ.

Если бы всѣ безъ исключенія желѣзнодорожные поѣзда и всѣ пароходы стали двигаться по параллелямъ съ запада на востокъ, т. е. въ сторону вращенія земли, то отъ этого нѣсколько уменьшилась бы угловая скорость земли и, значитъ, возросла бы продолжительность дня. И какъ только поѣзда и пароходы остановились бы, день снова сталъ бы такимъ, какъ прежде. Конечно, вліяніе подобныхъ движеній совершенно ничтожно; но его можно было бы уловить точными астрономическими измѣреніями, если бы рѣчь шла о движеніи громадныхъ массъ, о морскихъ или воздушныхъ теченіяхъ, которыя стали бы обходить землю въ одномъ направленіи безъ компенсанціи со стороны соотвѣтствующихъ противоположныхъ теченій.

Мальчикъ, который хочетъ привести въ движеніе качели, не отталкиваясь о внѣшніе предметы, старается прежде всего придать своему тѣлу вращательное движеніе, схватившись руками за веревки, на которыхъ висятъ качели, вытянувши ноги горизонтально впередъ и откинувъ верхнюю часть тѣла назадъ. Отнесемъ моменты къ точкѣ привѣса веревокъ. Для этой точки моментъ количества движенія долженъ въ началѣ оставаться равнымъ нулю, такъ какъ сила натяженія нитей приложена къ этой точкѣ, а единственная другая внѣшняя сила, дѣйствующая на качели,—сила тяжести—первоначально тоже проходитъ черезъ нее же.

Поэтому нѣкоторое вращеніе должно сопровождаться соотвѣтствующимъ противоположнымъ, а это послѣднее состоитъ во вращеніи цѣлой системы вокругъ точки привѣса. Это даетъ уже начало колебательному движенію.—Я удовольствуюсь этими намеками, но все же рекомендовалъ бы точно продумать тѣ пріемы какими качели приводятся въ движеніе, такъ какъ примѣръ этотъ во многихъ отношеніяхъ весьма поучителенъ. Такъ, напримѣръ, полезно выяснить себѣ то обстоятельство, что качели вообще не могли бы придти безъ внѣшняго толчка въ правильное колебательное движеніе, если бы веревки, на которыхъ онѣ висятъ, были безконечной длины. Или иначе говоря — чтобы оставаться при условіяхъ практически осуществимыхъ — если бы веревки были весьма длинными, то тогда лишь съ большимъ трудомъ и лишь послѣ долгаго и многократнаго повторенія соотвѣтствующихъ пріемовъ мы могли бы произвести колебательное движеніе съ большой амплитудой.

Перевод. С. Р.

Задача изъ теоріи соединеній.

(Поставлена лордомъ Кельвиномъ.)

Профессора Дж. Пеши.

---

1. Задача, которую мы хотимъ разсмотрѣть, состоитъ въ слѣдующемъ:

„Сколько случаевъ можетъ представиться при численномъ рѣшеніи сферическихъ треугольниковъ, если заданы три стороны съ точностью до минуты“.

Эта задача разсмотрѣна лордомъ Кельвиномъ [1]), который по поводу рѣшенія параллактическаго треугольника (вершинами котораго служатъ зенитъ, наблюдаемое свѣтило и тотъ полюсъ, который находится по ту же сторону экватора, что и зенитъ), когда даны три стороны (а именно дополненія склоненія и высоты свѣтила и дополненіе абсолютной широты мѣста), дѣлаетъ слѣдующее замѣчаніе:

„Если подумать о тысячахъ треугольниковъ, рѣшаемыхъ ежедневно на всѣхъ судахъ, находящихся въ плаваніи, то можетъ съ перваго взгляда показаться, что каждый изъ нихъ уже рѣшенъ когда-нибудь и что каждое новое вычисленіе есть просто повтореніе вычисленія, уже сдѣланнаго когда-то. Но это было бы большой ошибкой, даже если считать, что для практическихъ цѣлей не приходится пользоваться приближеніями больше одной

---

[1]) Proceedings of the Royal Society (of London); vol. XIX, 1870—71, стр. 260. То же разсужденіе повторено въ другихъ словахъ въ предисловіи къ Tables for faciliting Sumner's method at sea. Лондонъ, Taylor. 1876.

минуты. Въ самомъ дѣлѣ, въ 90 градусахъ содержится 5400 минутъ, а потому подлежатъ рѣшенію

$$5400^3 = 157464000000$$

треугольниковъ; а это, считая даже по 1000 въ день, потребовало бы 40000 лѣтъ (4 тысячи вѣковъ!). Даже если пользоваться только такими треугольниками, стороны которыхъ равны цѣлому числу градусовъ, то пришлось бы рѣшить

$$90^3 = 729000$$

треугольниковъ; это число тоже слишкомъ велико, и помѣстить эти рѣшенія въ таблицу—дѣло слишкомъ сложное".

2. Намъ кажется, что противъ предыдущаго заключенія можно сдѣлать три возраженія:

Первое состоитъ въ томъ, что не достаточно считать всѣ три стороны меньшими четверти окружности, такъ какъ въ параллактическомъ треугольникѣ двѣ стороны (дополненіе высоты и дополненіе абсолютной широты), правда, всегда меньше четверти окружности, но третья (дополненіе склоненія) можетъ быть больше (когда истинная широта и склоненіе имѣютъ противоположные знаки). Для параллактическаго треугольника нужно поэтому предположить, что двѣ стороны измѣняются отъ 0° до 90°, а третья отъ 0° до 180°.

Замѣтимъ тутъ же, что это предположеніе можно сдѣлать всегда и при рѣшеніи любого сферическаго треугольника (если заданы три стороны), такъ какъ рѣшеніе треугольника, имѣющаго двѣ или три стороны, бо̀льшія 90°, непосредственно сводится къ рѣшенію треугольника съ одной только стороной, большей 90° [1]).

Второе возраженіе состоитъ въ томъ, что для рѣшенія всѣхъ возможныхъ треугольниковъ, надо разсматривать не *размѣщенія* съ повтореніями (какъ это, очевидно, дѣлалось при полученіи вышеуказаннаго результата), а *сочетанія* съ повтореніями, такъ какъ при измѣненіи порядка данныхъ не приходится дѣлать новаго вычисленія, а достаточно такъ же измѣнить порядокъ угловъ.

Третье возраженіе, наконецъ, слѣдующее: для того, чтобы не начинать много вычисленій напрасно, нужно предположить, что *a priori* провѣряется, удовлетворены ли необходимыя и достаточныя условія существованія треугольника. Замѣтимъ, впрочемъ, что перваго условія не нужно принимать во вниманіе, такъ какъ оно удовлетворено уже предположеніемъ, что только одна сторона можетъ быть больше 90°.

[1]) Два сферическихъ треугольника называются *колунарными,* если ихъ можно расположить такъ, чтобы они имѣли одну общую сторону, а двѣ другія стороны одного составляли продолженія другихъ сторонъ другого, если, значитъ, изъ нихъ можно сложить сферическій вырѣзокъ (V. Casey A. treatise on spherical Trigonometry. Дублинъ. Hodges. 1889).

Итакъ: нужно найти число, показывающее, сколько сочетаній съ повтореніями можно составить изъ трехъ цѣлыхъ чиселъ, изъ которыхъ два принимаютъ значенія отъ 1 до 5400, а третье отъ 1 до 108000, исключая всѣ такія сочетанія, въ которыхъ не каждое изъ входящихъ въ нихъ чиселъ меньше суммы двухъ остальныхъ.

Примѣчаніе. Если a, b, c суть стороны сферическаго треугольника, при чемъ двѣ или три изъ нихъ больше 90^0, и если a, b', c' суть стороны колунарнаго треугольника (имѣющаго съ даннымъ общую сторону a), то легко провѣрить, что *четыре* условія:

$$a+b+c<360^0,\quad a<b+c,\quad b<c+a,\quad c<a+b,$$

необходимыя и достаточныя для существованія перваго треугольника, эквивалентны *тремъ* условіямъ:

$$a<b'+c',\quad b'<c'+a,\quad c'<a+b',$$

необходимымъ и достаточнымъ для существованія вышеуказаннаго колунарнаго треугольника.

3. Вспомнимъ прежде всего, что, если даны n элементовъ, расположенныхъ въ нѣкоторомъ порядкѣ, то для того, чтобы образовать всѣ сочетанія по k съ повтореніями, достаточно приставлять къ каждому сочетанію по $k-1$ каждый изъ элементовъ, слѣдующихъ за послѣднимъ, и самъ послѣдній. Положимъ, что мы составили такимъ образомъ всѣ сочетанія по три съ повтореніями изъ первыхъ n чиселъ, расположенныхъ въ натуральномъ порядкѣ (n полагаемъ четнымъ).

Всѣ эти сочетанія могутъ быть раздѣлены на n группъ такъ, чтобы въ первой группѣ они начинались съ 1, во второй съ 2,..., въ p-ой съ p.

Каждая изъ этихъ группъ можетъ, въ свою очередь, быть раздѣлена на нѣкоторое число рядовъ такъ, чтобы сочетанія, принадлежащія къ одному и тому же ряду, имѣли одинаковый второй элементъ; такимъ образомъ первая группа будетъ раздѣлена на n рядовъ такихъ, что сочетанія перваго, второго ,..., q-го ряда будутъ начинаться соотвѣтственно

$$1,\,1;\quad 1,\,2;\;\ldots\quad 1,\,q;\;\ldots$$

вторая группа будетъ разбита на $n-1$ рядовъ такъ, что сочетанія, содержащіяся въ первомъ, второмъ,... q-омъ ряду, будутъ начинаться соотвѣтственно

$$2,\,2;\quad 2,\,3;\;\ldots\quad 2,(q+1);\;\ldots$$

p-ая группа будетъ раздѣлена на $n-(p-1)$ рядовъ такъ, что сочетанія, содержащіяся въ первомъ, второмъ, ... q-омъ ряду, будутъ начинаться соотвѣтственно

$$p,\,p;\quad p,(p+1);\quad p,(q+p-1);\;\ldots$$

Если это сдѣлано, то для рѣшенія нашей задачи достаточно искать число сочетаній въ каждой группѣ, которыя удовлетворяютъ слѣдующимъ двумъ условіямъ: во-первыхъ, чтобы каждый изъ двухъ первыхъ элементовъ былъ не больше $\frac{n}{2}$ (такъ какъ достаточно предположить, что только одна сторона можетъ быть больше четверти окружности); во вторыхъ, чтобы третій элементъ былъ меньше суммы двухъ другихъ (такъ какъ, по самому способу составленія сочетаній, какъ первый, такъ и второй элементъ навѣрное меньше суммы двухъ остальныхъ).

Начнемъ съ того, что исключимъ $\frac{n}{2}$ группъ, въ которыхъ первый элементъ болѣе $\frac{n}{2}$. Разсматривая затѣмъ второй элементъ, мы замѣтимъ, что изъ первой группы должны быть исключены всѣ ряды, въ которыхъ второй элементъ болѣе $\frac{n}{2}$; останутся, такимъ образомъ, только $\frac{n}{2}$ рядовъ; по той же причинѣ во второй группѣ останется лишь $\frac{n}{2}-1$ рядовъ, . . .; въ p-ой группѣ $\left(p \leqslant \frac{n}{2}\right)$ останется лишь $\frac{n}{2}-(p-1)$ рядовъ,...; въ $\left(\frac{n}{2}\right)$-ой группѣ останется всего одинъ рядъ.

Теперь изъ каждаго оставшагося ряда надо исключить тѣ сочетанія, въ которыхъ третій элементъ не меньше суммы двухъ другихъ. Въ первой группѣ останется по одному сочетанію на каждый рядъ; дѣйствительно, первое и второе сочетаніе q-го ряда будутъ

$$1,\ q,\ q \quad \text{и} \quad 1,\ q,\ (q+1);$$

значитъ, уже второе (и *a fortiori* каждое послѣдующее) сочетаніе должно быть исключено. Во второй группѣ останется по два сочетанія на каждый рядъ; дѣйствительно, первое, второе и третье сочетаніе q-го ряда будутъ

$$2,(q+1),(q+1); \quad 2(q+1),(q+2); \quad 2,(q+1)(q+3);$$

значитъ, третье (и *a fortiori* каждое послѣдующее) сочетаніе должно быть исключено. Въ p-ой останется на p сочетаній на каждый рядъ; дѣйствительно, первое, второе, ... r-ое сочетаніе q-го ряда будутъ

$$p,(q+p-1),(q+p-1); \quad p(q+p-1),(q+p);$$
$$\ldots\ p,(q+p-1),(q+p+r-2);$$

значитъ, послѣднее сочетаніе, которое остается, будетъ то, въ которомъ

$$q+p+r-2=p+(q+p-1)-1, \quad \text{т. е.} \quad r=p.$$

Итакъ, изъ первой, изъ второй ... изъ p-ой группы остаются соотвѣтственно

$$\frac{n}{2},\ 2\left(\frac{n}{2}-1\right),\ \ldots\quad p\left(\frac{n}{2}-[p-1]\right)$$

сочетаній.

Обозначая искомое число черезъ N, мы, слѣдовательно, будемъ имѣть:

$$N=\sum_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} p\left[\frac{n}{2}-(p-1)\right]=\frac{n+2}{1}\sum_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} p-\sum_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} p^2,$$

откуда послѣ легкихъ передѣлокъ получаемъ:

$$N=\frac{n(n+2)(n+4)}{48}.$$

Таково, значитъ, число сочетаній съ повтореніями, которыя можно составить изъ *трехъ* изъ первыхъ n чиселъ (полагая n четнымъ), при томъ условіи, чтобы два изъ нихъ могли принимать значенія только отъ 1 до $\frac{n}{2}$ и чтобы каждое изъ трехъ чиселъ, составляющихъ одно сочетаніе, было меньше суммы двухъ другихъ.

Примѣчаніе. Обратимъ вниманіе на то, что вышеприведенное число оказывается какъ разъ равнымъ числу сочетаній по 3 съ повтореніями, которыя можно составить изъ $\frac{n}{2}$ разныхъ элементовъ, не подчиняя ихъ ни одному изъ указанныхъ условій.

4. Примѣняя предыдущую формулу къ случаю, разсмотрѣнному лордомъ Кельвиномъ, имѣемъ:

$$N=26\,258\,581\,800,$$

т. е. немного больше одной шестой числа, указаннаго самимъ Томсономъ. Затѣмъ, въ томъ случаѣ, когда предполагается, что стороны выражаются въ цѣлыхъ градусахъ имѣемъ:

$$N=125\,580.$$

Очевидно, первый изъ этихъ результатовъ не имѣетъ никакого практическаго значенія и только удовлетворяетъ научному любопытству, но того же нельзя сказать о второмъ. Въ самомъ дѣлѣ, изъ него вытекаетъ, что очень хорошо можно было бы вычислить и помѣстить въ одномъ томѣ (въ противоположность тому заключенію, которое приведено въ началѣ) таблицу, дающую 3 угла (съ точностью, напримѣръ, до 1′) для сторонъ, выражающихся въ цѣлыхъ градусахъ, такая *общая* таблица сдѣлала бы ненужными многія *спеціальныя* таблицы, употребляемыя въ морскихъ вычисленіяхъ.

Примѣчаніе переводчика.

Эта задача рѣшается проще слѣдующимъ образомъ.

Искомое число N есть число системъ значеній, которыя могутъ принять три числа a, b, c, подчиненныя условіямъ:

$$1 \leqslant a \leqslant m \ (1), \quad 1 \leqslant b \leqslant m \ (2), \quad 1 \leqslant c \leqslant 2m \ (3),$$

$$c < a + b \ (4), \quad a < b + c \ (5), \quad b < a + c \quad (6).$$

Чтобы не считать дважды двѣ системы, которыя отличаются только порядкомъ чиселъ, достаточно прибавить условіе:

$$a \leqslant b \leqslant c \quad (7).$$

Условія (5) и (6) слѣдуютъ изъ (7), а (3) изъ (4), (1) и (2).

Остается условіе:

$$1 \leqslant a \leqslant b, \quad 1 \leqslant b \leqslant m \quad \text{и} \quad b \leqslant c < a + b.$$

Будемъ исходить изъ нѣкоторой опредѣленной системы a, b, с. Если мы станемъ мѣнять c, то увидимъ, что c можетъ получить a значеній и, слѣдовательно, мы получимъ a системъ. Если мы станемъ мѣнять еще a, то получимъ

$$\sum_{a=1}^{a=b} a = \frac{b(b+1)}{2} \text{ системъ.}$$

Наконецъ, давая b значенія отъ 1 до m, найдемъ, что

$$N = \sum_{b=1}^{b=m} \frac{b(b+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{b=1}^{b=m} b^2 + \frac{1}{2}\sum_{b=1}^{b=m} b,$$

откуда послѣ легкихъ передѣлокъ получаемъ:

$$N = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}, \text{ а полагая } m = \frac{n}{2},$$

$$N = \frac{n(n+2)(n+4)}{48}.$$

Ю. Рабиновичъ.

Замѣтка объ именованныхъ числахъ.

Въ большинствѣ учебниковъ ариѳметики при изложеніи теоріи именованныхъ чиселъ утверждается, что именнованное число можно умножить только на отвлеченное, что дѣлить именованное число можно только на именованное однородное съ нимъ, либо на отвлеченное.

Эти положенія укореняются столь твердо, что учащіеся, проходя курсъ геометріи и физики наталкиваются на значительныя затрудненія. Обосновываютъ теорію умноженія обыкновенно устанавливая опредѣленіе умноженія, теряющее смыслъ если множитель число именованное, и имѣющее смыслъ при отвлеченномъ или именованномъ множимомъ.

Однако не лучше ли было бы отбросить это опредѣленіе и отказаться отъ попытки дать общее опредѣленіе умноженія именованныхъ и отвлеченныхъ чиселъ? Не проще ли было бы указать, что умножая два числа a и b, соотвѣтственно природы α и β, мы придаемъ числу c каждый разъ особенный смыслъ и причисляемъ его къ природѣ γ. И если a' есть отвлеченное число, показывающее, сколько единицъ природы α содержитъ a', b' — есть отвлеченное число, показывающее сколько единицъ природы β содержитъ b, то c содержитъ $a'b'$ единицъ природы γ, что изображается равенствомъ

$$c = a \times b.$$

Для каждаго отдѣльнаго случая физика и геометрія устанавливаютъ природу произведенія, и система $C. G. S.$ выражаетъ природу каждаго именованнаго числа въ зависимости отъ природъ: *массы, времени и протяженія*.

Учитель задаетъ ученикамъ задачу: „Длина доски 7 вершковъ, ширина 8 вершковъ, какова поверхность"? — Нужно умножить длину на ширину отвѣчаетъ ученикъ и здравый смыслъ подсказываетъ ему формулу, которую онъ пишетъ на доскѣ:

$$7 \text{ вер.} \times 8 \text{ вер.} = 56 \square \text{ вер.}$$

Однако учитель, твердо знающій правила учебника, ставитъ ученику единицу и говоритъ такъ:

Невѣрно. Нужно сказать такъ: поверхность доски содержитъ столько квадратныхъ вершковъ, сколько единицъ въ произведенiи чиселъ, показывающихъ, сколько линейныхъ вершковъ содержатъ длина и ширина.

При этомъ учитель пишетъ:

$$7 \times 8 = 56$$

Отвѣтъ: 56 □ вер.

Однако ученикъ впослѣдствiи встрѣтитъ свою формулу въ учебникахъ геометрiи и физики.

Точно также не допуститъ учитель, придерживающiйся правилъ, такихъ формулъ:

18 куб. верш. : 3 кв. верш. = 6 верш.

18 куб. верш. : 3 верш. = 6 кв. верш. и т. д.

и вмѣсто того чтобы заставить учениковъ выучить простыя правила умноженiя мѣръ линейныхъ на линейныя, квадратныхъ на линейныя будетъ настаивать на пространныхъ объясненiяхъ самыхъ простыхъ задачъ.

А. Филипповъ.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакцiя проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшенiй задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ" и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенiя. Въ противномъ случаѣ редакцiя не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенiю нуждъ корреспондентовъ.

Редакцiя проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенiя въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшенiями, либо снабжать задачи указанiемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшенiе.

Рѣшенiя всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 931 (4 сер.). Даны три точки A, B, C, лежащiя на одной прямой. Опредѣлить геометрическое мѣсто точекъ M подъ условiемъ, чтобы сумма

$$ctg\,AMB + ctg\,BMC$$

оставалась постоянной.

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 932 (4 сер.). Даны два равныхъ угла A и B. Изъ даннаго центра O описать окружность, опредѣляющую въ этихъ углахъ равные отрѣзки xy и zu.

И. Александровъ (Москва, реальное училище Бажанова).

№ 933 (4 сер.). Построить треугольникъ ABC, зная положеніе вершины A и центровъ O описанной и J вписанной окружностей.

Н. Агрономовъ (Петербургъ).

№ 934 (4 сер.). Доказать, что перпендикуляръ, опущенный изъ средины боковой стороны равнобокой ортодіагональной трапеціи на противоположную сторону, равенъ $\frac{m^2}{b}$, гдѣ b — боковая сторона, а m — средняя линія трапеціи.

Д. Ефремовъ (Ив. Вознесенскъ).

№ 935 (4 сер.). Даны равенства

$$ax + by + \alpha\xi + \beta\eta = 0 \quad (1), \qquad a_1x + b_1y + \alpha_1\xi + \beta_1\eta = 0 \quad (2),$$

$$az + bt + \alpha\zeta + \beta\tau = 0 \quad (3), \qquad a_1z + b_1t + \alpha_1\zeta + \beta_1\tau = 0 \quad (4),$$

$$ab_1 - ba_1 = \alpha\beta_1 - \beta\alpha_1 \quad (5),$$

при чемъ извѣстно, что рядъ коэффиціентовъ a, b, α, β не пропорціоналенъ соотвѣтственно ряду коэффиціентовъ a_1, b_1, α_1, β_1 и ни въ одномъ изъ этихъ рядовъ всѣ коэффиціенты не обращаются одновременно въ нуль. Доказать, что

$$xt - yz = \xi\tau - \eta\zeta.$$

Н. С. (Одесса).

№ 936 (4 сер.). Бочка имѣетъ форму тѣла вращенія, образующая котораго — дуга окружности. Опредѣлить вѣсъ воды, наполняющей эту бочку, если даны ея высота $h = 150$ сантиметровъ, поперечникъ $a = 75$ сантиметровъ каждаго изъ основаній и поперечникъ $b = 100$ сантиметровъ наибольшаго средняго кругового сѣченія.

Л. Ямпольскій (Одесса).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 819 (4 сер.). *Доказать, что число*

$$\left(\frac{n + k(k-1)}{d^2}\right)^{2n-1} - 1$$

дѣлится на $4n-1$, *если* $4n-1$ *есть простое число, которое не есть дѣлитель числа* $2k-1$, *и если* d^2 *есть дѣлитель числа* $n+k(k-1)$.

Представимъ выраженіе

$$(1) \qquad (4d^2)^{2n-1}\left[\left(\frac{n+k(k-1)}{d^2}\right)^{2n-1} - 1\right]$$

въ видѣ:

$$(4n-1+4k^2-4k+1)^{2n-1}-(2d)^{4n-2}=\left[4n-1+(2k-1)^2\right]^{2n-1}-\left[(2k-1)^2\right]^{2n-1}+$$
$$+\left[(2k-1)^{4n-2}-1\right]-\left[(2d)^{4n-2}-1\right].$$

Разность $\left[4n-1+(2k-1)^2\right]^{2n-1}-\left[(2k-1)^2\right]^{2n-1}$ кратна разности $4n-1+(2k-1)^2-(2k-1)^2=4n-1$.

Выраженіе $4.\dfrac{n+k(k-1)}{d^2}=\dfrac{4n-1+(2k-1)^2}{d^2}$ равно, по условію, цѣлому числу, а потому, если бы d дѣлилось на $4n-1$, то и число $4n-1+(2k-1)^2$ было бы кратно $4n-1$; слѣдовательно, и $(2k-1)^2$ и вмѣстѣ съ тѣмъ $2k-1$ было бы кратно простого числа $4n-1$, что противно условію. Итакъ d, а потому и $2d$ не кратно $4n-1$. Такъ какъ, по условію, $2k-1$ тоже не кратно $4n-1$ то, по теоремѣ *Fermat*'а, каждая изъ разностей $\left[(2k-1)^{4n-2}-1\right]$ и $\left[(2d)^{4n-2}-1\right]$ кратна $4n-1$. Поэтому число (1) кратно $4n-1$, откуда, замѣчая, что $4d^2$ не кратно простого числа $4n-1$, находимъ, что $\left(\dfrac{n+k(k-1)}{d^2}\right)^{2n-1}-1$ кратно $4n-1$.

Н. Агрономовъ (Ревель); *Э. Лейнъкъ* (Рига)

№ 820 (4 сер.). ***Рѣшить уравненіе***

$$x^3-14x+\sqrt{48}=0.$$

Представивъ данное уравненіе въ видѣ $x^3-14x+4\sqrt{3}=0$, полагаемъ

$$x=y\sqrt{3}, \qquad (1)$$

откуда $3y^3\sqrt{3}-14y\sqrt{3}+4\sqrt{3}=0$, или $3y^3-14y+4=0$. Разлагая лѣвую часть на множителей, получимъ:

$$(y-2)(3y^2+6y-2)=0,$$

откуда $\qquad y_1=2,\ y_{2\cdot3}=\dfrac{-3\pm\sqrt{15}}{3}$, а потому [см. (1)]

$$x_1=2\sqrt{3},\quad x_{2,3}=\frac{(-3\pm\sqrt{15})\sqrt{3}}{3}=\frac{-3\sqrt{3}\pm3\sqrt{5}}{3}=-\sqrt{3}\pm\sqrt{5}.$$

Итакъ, искомые корни суть:

$$x_1=2\sqrt{3},\quad x_2=\sqrt{5}-\sqrt{3},\quad x_3=-(\sqrt{5}+\sqrt{3}).$$

Н. Агрономовъ (Ревель); *Я. Шатуновскій* (Berlin); *А. Сушкевичъ* (Berlin).

№ 824 (4 сер.). *Доказать, что разность*

$$N^{N.2^{2^n}-n}-1$$

дѣлится на $2^{2^n}.N+1$, если N — цѣлое и $2^{2^n}.N+1$ — простое число.

Представимъ выраженіе

$$\left(N^{N\cdot 2^{2^n}-n}-1\right)\cdot 2^{2^{2^n}N} \qquad (1)$$

въ видѣ:

$$\left(N^{N\cdot 2^{2^n}-n}-1\right)\cdot 2^{2^{2^n-n}\cdot 2^n N}=\left(N^{N\cdot 2^{2^n}-n}-1\right)\left(2^{2^n}\right)^{N\cdot 2^{2^n}-n}=$$

$$=\left[\left(2^{2^n}N\right)^{N\cdot 2^{2^n}-n}-1\right]-\left[2^{N\cdot 2^{2^n}}-1\right].$$

Подразумѣвая подъ n и N цѣлыя числа (что обычно въ задачахъ по теоріи чиселъ, если нѣтъ особаго указанія), мы видимъ, что n есть цѣлое не отрицательное число, такъ какъ иначе число $2^{2^n}N+1$ не могло бы быть цѣлымъ. Поэтому показатель $N.2^{2^n-n}$ есть число четное, а потому разность $\left[\left(2^{2^n}N\right)^{N\cdot 2^{2^n}-n}-1\right]$ кратна суммы $2^{2^n}.N+1$. Съ другой стороны, 2 не кратно простого числа $2^{2^n}.N+1$, а потому, по теоремѣ *Fermat*'а, разность $2^{N\cdot 2^{2^n}}-1$ также кратна числа $2^{2^n}.N+1$. Итакъ, число (1) кратно $2^{2^n}N+1$, а потому и разность $N^{N\cdot 2^{2^n}-n}-1$ кратна $2^{2^n}N+1$.

Э. Лейнъкъ (Рига); *Н. Агрономовъ* (Ревель).

№ 825 (4 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$x^3+2x-\sqrt{75}=0.$$

Написавъ уравненіе въ видѣ $x^3+2x-5\sqrt{3}=0$ и полагая

$$x=y\sqrt{3}, \qquad (1)$$

получимъ: $3y^3\sqrt{3}+2y\sqrt{3}-5\sqrt{3}=0$, или $3y^3+2y-5=0$. Разлагая лѣвую часть на множителей, имѣемъ: $(y-1)(3y^2+3y+5)=0$, откуда

$$y_1=1,\ y_{2,3}=\frac{-3\pm i\sqrt{51}}{6},\ \text{гдѣ } i=\sqrt{-1}.$$

Поэтому [см. (1)]

$$x_1=\sqrt{3},\ x_2=\frac{-\sqrt{3}+i\sqrt{17}}{2},\ x_3=\frac{-\sqrt{3}-i\sqrt{17}}{2}.$$

Н. Агрономовъ (Ревель); *Э. Лейнъкъ* (Рига).

№ 831 (4 сер.). *Доказать, что разность*

$$N^{2N-1}-1$$

дѣлится на $4N-1$ *если* $4N-1$ *есть число простое.*

Представимъ выраженіе

$$4^{2N-1}\left(N^{2N-1}-1\right) \qquad (1)$$

въ видѣ:

$$(4N)^{2N-1}-(2^2)^{2N-1}=\left[(4N)^{2N-1}-1\right]-\left[2^{4N-2}-1\right].$$

Разность $(4N)^{2N-1}-1$ кратна разности $4N-1$; такъ какъ 2 не кратно простого числа $4N-1$, то и разность $2^{4N-2}-1$ тоже кратна, по теоремѣ *Fermat'*а, $4N-1$. Поэтому число (1) кратно $4N-1$, откуда слѣдуетъ, что разность $N^{2N-1}-1$ кратна $4N-1$.

Н. Агрономовъ (Ревель); *Э. Лейнѣкъ* (Рига); *Г. Оганянцъ* (Ялта); *А. Турчаниновъ* (Одесса).

Редакторъ приватъ-доцентъ В. Ф. Каганъ. Издатель В. А. Гернетъ.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера. ул. Новосельскаго, д. № 66.

XXI г. изд. # ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ XXI г. изд.

и ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

ыходитъ 24 раза въ годъ отдѣльными выпусками, не менѣе 24 стр. каждый, подъ редакціей приватъ-доцента В. Ф. Кагана.

редыдущіе семестры были **рекомендованы**: Учен. Ком. Мин. Нар. Пр. для гимн. муж. и жен., реальн. уч., прогимн., гоод. уч., учит. инст. и семинарій; Главнымъ Управл. Воен.-Учебн. Зав.—для воен.-уч. заведеній; №№ 1 — 48 **одобрены** Уч. Ком. при Св. Синодѣ для дух. семин. и училищъ.

РОГРАММА ЖУРНАЛА: Оригин. и переводн. статьи изъ области физики и элементарной математики. Статьи, посвященныя опросамъ преподаванія математики и физики. Научн. хроника. Разн. извѣстія. Задачи для рѣшенія. Рѣшенія задачъ ъ фамил. рѣшившихъ. Упражн. для учениковъ. Библіограф. отдѣлъ: обзоръ иностран. журналовъ; замѣтки и рецензіи о новыхъ книгахъ.

татьи составляются въ такой мѣрѣ популярно, въ какой это возможно безъ ущерба для научн. стороны дѣла. Статьи, освящ. педагог. вопросамъ, имѣютъ цѣлью обмѣнъ мнѣній преподавателей по различн. вопросамъ преподаванія элеменарной мат. и физики. Въ отдѣлѣ „Науч. хроника“ помѣщ. рефераты о важнѣйшихъ научн. работахъ, отчеты о съѣздахъ, онгрессахъ и т. п. Въ отдѣлѣ „Разныя извѣстія“ помѣщаются свѣдѣнія о текущихъ событіяхъ въ жизни различн. учен. учебн. заведеній. Задачи дѣлятся на двѣ категоріи: болѣе легкія, доступн. хорошему ученику, и болѣе трудныя, требующія бо́льшей подготовки. Отъ времени до времени предлагаются задачи и темы на премію.

УСЛОВІЯ ПОДПИСКИ:

одписная цѣна съ пересылкой за годъ **6 руб.**, за полгода **3 руб.** Учителя и учительницы низшихъ училищъ и всѣ учаціеся **при непосредственныхъ сношеніяхъ съ конторой редакціи** платятъ за годъ **4 руб.**, за полугодіе **2 руб.** Допускается разсрочка подписной платы по соглашенію съ конторой редакціи. Книгопродавцамъ 5% уступки.

Отдѣльные номера текущаго семестра по 30 коп., прошлыхъ семестровъ по 25 коп.

Журналъ за прошлые годы по 2 р. 50 к., а учащимся и книгопродавцамъ по 2 р. за семестръ. Семестры XVI и XXIII распроданы.

Пробный номеръ высылается безплатно по первому требованію.

дресъ для корреспонденціи: Одесса. Въ редакцію „Вѣстника Опытной Физики“. **Городской адресъ**: Елисаветинская, 4.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.