№№ 440—441.

ВѢСТНИКЪ

ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ф. Кагана.

XXXVII-го Семестра №№ 8—9-й.

ОДЕССА.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.
1907.

ВЫШЛИ ВЪ СВѢТЪ СЛѢДУЮЩІЯ ИЗДАНІЯ:

1 и 2. Г. АБРАГАМЪ, проф. **СБОРНИКЪ ЭЛЕМЕНТАРНЫХЪ ОПЫТОВЪ ПО ФИЗИКѢ**, составленный при участіи многихъ профессоровъ и преподавателей физики. Переводъ съ французскаго подъ редакціей Привать-доцента *Б. П. Вейнберга.*

Часть I: Работы въ мастерской. Различные рецепты—Геометрія. Механика—Гидростатика. Гидродинамика. Капиллярность. Теплота—Числовыя таблицы.

Учен. Ком. М. Н. Пр. допущено въ учен. библ. средн. учебн. заведеній, учит. семинарій и гор. по Положенію 31 мая 1872 г., училищъ, а равно и въ безп. нар. читальни и библіотеки.

XVI+272 стр. Со многими (свыше 300) рисунками. Цѣна 1 р. 50 к.

Часть II: Звукъ—Свѣтъ—Электричество—Магнитизмъ.

LXXV+434 стр. Со многими (свыше 400) рисунками. Цѣна 2 р. 75 к.

3. С. АРРЕНІУСЪ, проф. **ФИЗИКА НЕБА.** Разрѣшенный авторомъ и дополненный по его указаніямъ переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей Привать-доцента *А. Р. Орбинскаго.* Содержаніе: Неподвижныя звѣзды—Солнечная система—Солнце—Планеты, ихъ спутники и кометы—Космогонія.

VIII+250 стр. Съ 66 черными и 2 цвѣтными рисунками въ текстѣ и 1 черной и 1 цвѣтной отдѣльными таблицами. Цѣна 2 руб.

Учен. Ком. М. Н. П. допущено въ учен., старш. возр., библ. средн. учебн. заведеній, а равно и въ безпл. нар. библ. и читальни.

4. **УСПѢХИ ФИЗИКИ**, сборникъ статей о важнѣйшихъ открытіяхъ послѣднихъ лѣтъ въ общедоступномъ изложеніи. Подъ редакціей „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики". Содержаніе: *Винеръ,* Расширеніе нашихъ чувствъ—*Пильчиковъ.* Радій и его лучи—*Дебіернъ,* Радій и радіоактивность—*Рихарцъ,* Электрическія волны—*Слаби,* Телеграфированіе безъ проводовъ—*Шмидтъ,* Задача объ элементарномъ веществѣ (основанія теоріи электроновъ).

IV+144 стр. Съ 41 рисункомъ и 2 таблицами. Изд. 2-е. Цѣна 75 коп.

Учен. Ком. М. Н. П. первое изданіе допущено въ учен., старш. возр., библ. средн. учебн. заведеній, а равно и въ безпл. нар. библ. и читальни.

5. Ф. АУЭРБАХЪ, проф. **ЦАРИЦА МІРА И ЕЯ ТѢНЬ.** Общедоступное изложеніе основаній ученія объ *энергіи и энтропіи.* Переводъ съ нѣмецкаго. Съ предисловіемъ *Ш. Э. Гильома,* Вице-Директора Международнаго Бюро Мѣръ и Вѣсовъ.

VIII+56 стр. Изд. 2-е. Цѣна 40 к.

Учен. Ком. М. Н. П. первое изданіе допущено въ учен., старш. возр., библ. средн. учебн. заведеній, а равно и въ безпл. нар. библ. и читальни.

6. С. НЬЮКОМЪ, проф. **АСТРОНОМІЯ ДЛЯ ВСѢХЪ.** Переводъ съ англійскаго. Съ предисловіемъ Привать-доцента *А. Р. Орбинскаго.*

XXIV+285 стр. Съ портретомъ Автора, 64 рис. и 1 таблицей. Цѣна 1 р. 50 к.

Учен. Ком. М. Н. П. допущено въ учен., старш. возр., библ. средн. учебн. заведеній, а равно и въ безпл. нар. библ. и читальни.

7. Г. ВЕБЕРЪ и І. ВЕЛЬШТЕЙНЪ. **ЭНЦИКЛОПЕДІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ. Томъ I. Энциклопедія элементарной алгебры,** обраб. проф. *Веберомъ.* Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей Привать-доцента *В. Ф. Кагана.* Книга I, **Основанія ариѳметики,** гл. I—X. Книга II. **Алгебра,** гл. XI—XIX. Книга III. **Анализъ.** гл. XX—XXVIII 650 стр. **Цѣна 3 р. 50 к.**

Выпусками: вып. I, стр. 256, ц. 1 р. 50 к., вып. II окончаніе, ц. 2 р.

8. Дж. ПЕРРИ, проф. **ВРАЩАЮЩІЙСЯ ВОЛЧОКЪ.** Публичная лекція. Переводъ съ англійскаго. VII+96 стр. съ 63 рисунками. **Цѣна 60 к.**

Учен. Ком. М. Н. Пр. признана заслуживающей вниманія при пополненіи учен. библ. средн. учебн. заведеній.

9. Р. ДЕДЕКИНДЪ, проф. **НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ИРРАЦІОНАЛЬНЫЯ ЧИСЛА.** Переводъ Привать-доцента *С. Шатуновскаго* съ приложеніемъ его статьи **Доказательство существованія трансцендентныхъ чиселъ.** 40 стр. **Цѣна 40 к.**

Учен. Ком. М. Н. Пр. признана заслуживающей вниманія при пополненіи учен. библ. средн. учебн. заведеній.

10. К. ШЕЙДЪ, проф. **ПРОСТЫЕ ХИМИЧЕСКІЕ ОПЫТЫ для юношества.** Переводъ съ нѣмецкаго, подъ редакціей Лаборанта Новороссійскаго Университета *Е. С. Ельчанинова.* 192 стр. съ 79 рисунками. **Цѣна 1 р. 20 к.**

11. Э. ВИХЕРТЪ, проф. **ВВЕДЕНІЕ ВЪ ГЕОДЕЗІЮ.** Лекціи для преподавателей средн. учебн. заведеній. Переводъ съ нѣмецкаго.

80 стр. съ 41 рис. Цѣна 35 к.

СЪ ТРЕБОВАНІЯМИ ОБРАЩАТЬСЯ: КНИГОИЗДАТЕЛЬСТВО „МАТЕЗИСЪ"

XXXVII Сем. №№ 8—9.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№№ 440—441.

Задача объ измѣреніи. Принципъ Архимеда.

Прив.-доц. В. Кагана.

34 глава II тома сочиненія «Основанія геометріи».

(Окончаніе).

Вопросъ о трансфинитной ариѳметикѣ возникнетъ вновь въ теоріи численныхъ многообразій или комплексовъ (Mengenlehre), основаніе которой положилъ Г. Канторъ въ рядѣ замѣчательныхъ мемуаровъ «Общія основанія теоріи многообразій»[1]) и «Къ обоснованію теоріи трансфинитныхъ комплексовъ»[2]). Ученіе о комплексахъ получило широкое развитіе и примѣненіе въ различныхъ отдѣлахъ математики. Общій очеркъ современнаго состоянія этого вопроса данъ Шёнфлисомъ [3]), а приложенія теоріи

[1]) *G. Cantor.* «Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre». Mathem. Annalen. Bd. XXI. 1883.

[2]) *G. Cantor.* «Beiträge zur Begründung der transfinit n Mengenlehre». Mathem. Annalen. Bd. XLVI и XLIX 1897.

[3]) *A. Schönflies.* «Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten». Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bd. VIII. 1900.

къ ариѳметикѣ выяснены Дедекиндомъ[1]) въ брошюрѣ «Что такое числа и каково ихъ назначенiе», получившей широкую извѣстность.

Понятiя о многообразiи и о комплексѣ достаточно выяснены какъ въ первой части сочиненiя, такъ и въ настоящемъ очеркѣ. Съ каждымъ комплексомъ Канторъ связываетъ новое понятiе, которое онъ называетъ *мощностью* комплекса. Именно, если между элементами двухъ комплексовъ можетъ быть установлено одно-однозначное или совершенное сопряженiе, то эти комплексы, по Кантору, имѣютъ одинаковую мощность. Если-же комплексъ A можетъ быть приведенъ въ такое сопряженiе съ частью комплекса B, но не можетъ быть приведенъ въ такое-же сопряженiе со всѣмъ комплексомъ B, то комплексъ A имѣетъ меньшую мощность, нежели комплексъ B. Комплексъ называется *конечнымъ*, если каждая его часть имѣетъ меньшую мощность, нежели весь комплексъ. Если-же изъ комплекса можно выдѣлить часть такой-же мощности, какъ и весь комплексъ, то онъ называется *безконечнымъ*. Всѣ возможные комплексы можно представить себѣ распредѣленными въ категорiи такимъ образомъ, чтобы комплексы одной и той-же категорiи имѣли одинаковую мощность. Для обозначенiя мощности комплексовъ каждой категорiи устанавливается особый символъ, который называется *кардинальнымъ или количественнымъ числомъ* этой категорiи. Строго говоря, термины: число, выражающее мощность комплекса, и просто мощность комплекса должны быть признаны эквивалентными. Числа, соотвѣтствующiя всѣмъ конечнымъ комплексамъ, располагаются по величинѣ въ рядъ, извѣстный подъ названiемъ «натуральнаго ряда чиселъ». Числа этого ряда суть тѣ самыя цѣлыя числа, съ которыхъ начинаетъ ариѳметика. Но и безконечнымъ комплексамъ, согласно установленной точкѣ зрѣнiя, могутъ быть отнесены числа. Эти числа Канторъ называетъ *трансфинитными* числами. Простѣйшее изъ нихъ, выражающее мощность натуральнаго ряда, Канторъ обозначаетъ символомъ $\aleph_0$. Комплексы, имѣющiе мощность $\aleph_0$, Канторъ называетъ *исчислимыми*; сюда, какъ оказывается, относятся комплексы: всѣхъ рацiональныхъ чиселъ, всѣхъ алгебраическихъ чиселъ и т. д. Но комплексъ всѣхъ вещественныхъ чиселъ имѣетъ бо́льшую мощность. Канторъ построилъ замѣчательную теорiю, дающую возможность построить и классифицировать комплексы болѣе высокихъ мощностей. Точкой

---

[1]) *R. Dedekind*. «Was sind und was sollen die Zahlen». Braunschweig. 1888.

отправленія служатъ для него при этомъ *типы расположенія комплекса*. Комплексъ называется *расположеннымъ*, если относительно каждыхъ двухъ его элементовъ установлено, который изъ нихъ признается предыдущимъ, а который послѣдующимъ. Подобно тому, какъ каждому комплексу присваивается опредѣленная мощность, каждому расположенію комплекса присваивается опредѣленный *типъ расположенія*. Если два расположенныхъ ряда одинаковой мощности могутъ быть приведены въ совершенное сопряженіе такимъ образомъ, чтобы элементъ a одного ряда предшествовалъ элементу b всякій разъ, какъ соотвѣтствующій элементъ a' другого ряда предшествуетъ элементу b', соотвѣтствующему элементу b, то говорятъ, что оба расположенія принадлежатъ къ одному и тому же типу. Всевозможныя расположенія (перестановки) элементовъ одного и того же конечнаго комплекса всегда принадлежатъ одному и тому же типу. Дѣйствительно, достаточно каждому элементу въ одномъ расположеніи отнести элементъ, занимающій то же по порядку мѣсто въ другомъ расположеніи, чтобы осуществить требуемое сопряженіе. Иначе обстоитъ дѣло съ безконечными комплексами. Такъ, напримѣръ, расположенія:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 \ldots\ldots$$

$$1, 3, 2, 5, 7, 4, 9, 11, 6, 13, 15, 8 \ldots\ldots \qquad (1)$$

$$2, 1, 4, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 8, 13, 15, 17, 19, 10 \ldots\ldots$$

(за каждымъ четнымъ числомъ слѣдуетъ нечетныхъ чиселъ на одно больше, чѣмъ за предыдущимъ)

принадлежатъ къ одному и тому же типу. Но расположенія

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \ldots\ldots\ldots\ldots 1 \qquad (2)$$

$$3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1, 2 \qquad (3)$$

$$1, 3, 5, 7 \ldots\ldots 2, 4, 6, 8, 10 \ldots\ldots \qquad (4)$$

$$1, 4, 7, 10, 13 \ldots\ldots 2, 5, 8, 11 \ldots\ldots 3, 6, 9, 12 \ldots\ldots \qquad (5)$$

$$1, 2, 3, 4 \ldots \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \ldots \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \ldots \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n} \ldots \qquad (6)$$

принадлежатъ къ различнымъ типамъ расположенія комплекса натуральныхъ чиселъ. (Рядъ (6) также имѣетъ мощность натуральнаго ряда).

Изъ расположенныхъ комплексовъ наиболѣе важную роль играютъ такъ называемые *строго расположенные* комплексы (Wohlgeordnete Menge). Строго расположеннымъ рядомъ называется такой рядъ, въ которомъ имѣется низшій по порядку (первый) элементъ, а также каждая часть котораго тоже имѣетъ низшій по порядку элементъ. Всѣ приведенные выше расположенные комплексы принадлежатъ къ числу строго расположенныхъ; но натуральный рядъ, написанный въ обратной послѣдовательности:

$$\ldots(n+1),\ n\ldots\ldots 10,\ 9,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1$$

представляетъ собой примѣръ не строго расположеннаго ряда; точно такъ же совокупность ирраціональныхъ чиселъ въ ихъ естественной послѣдовательности представляетъ собой не строго расположенный рядъ; точно такъ же и рядъ:

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\ldots\ldots\ldots 10,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2;$$

въ послѣднемъ совокупность четныхъ чиселъ представляетъ собой часть всего ряда, не имѣющую низшаго (перваго) по порядку элемента.

Каждый типъ строго расположеннаго ряда Канторъ обозначаетъ *порядковымъ числомъ* (Ordnungszahl), подобно тому, какъ мощности комплексовъ обозначаются количественными числами. Канторъ показываетъ, что эти порядковыя числа могутъ быть, при надлежащемъ соглашеніи, расположены въ возрастающій рядъ и надъ ними могутъ быть производимы дѣйствія сложеніе, вычитаніе и умноженіе, какъ надъ цѣлыми количественными числами. Типъ расположенія каждаго конечнаго комплекса при этомъ помѣчается тѣмъ же числомъ, что и его количество. Типамъ же расположенія безконечныхъ комплексовъ отвѣчаютъ новыя числа, такъ наз. *трансфинитныя числа Кантора*. Первое изъ нихъ есть порядковое число ω, выражающее типъ обычнаго расположенія натуральнаго ряда. Типъ расположенія (2) обозначается символомъ $\omega+1$; типъ расположенія (3) обозначается символомъ $\omega+2$; типъ расположенія (4) обозначается символомъ $\omega.2$; типъ расположенія (5) обозначается символомъ $\omega.3\ldots.$; типъ расположенія (6) обозначается символомъ $\omega.\omega$

или ω^2. Теорія расположенныхъ комплексовъ служитъ основаніемъ для установленія операцій надъ этими трансфинитными числами, образующихъ трансфинитную ариѳметику Кантора. Но, съ одной стороны, трансфинитная ариѳметика Кантора можетъ быть разсматриваема лишь какъ обобщеніе ариѳметики цѣлыхъ чиселъ, а съ другой стороны, свойства операцій въ этой ариѳметикѣ кореннымъ образомъ отличаются отъ свойствъ соотвѣтствующихъ дѣйствій надъ обыкновенными числами. Такъ, напримѣръ, ни сложеніе, ни умноженіе не обладаютъ здѣсь свойствомъ перемѣстительности.

Положимъ, что намъ данъ комплексъ мощности $\aleph_0$. Представимъ себѣ всевозможные типы строго расположенныхъ рядовъ этой мощности. Можно показать, что комплексъ, составленный изъ всѣхъ этихъ типовъ, имѣетъ мощность болѣе высокую, нежели $\aleph_0$. Эту мощность Канторъ обозначаетъ черезъ $\aleph_1$. Изъ комплекса мощности $\aleph_1$ образуется новый комплексъ совершенно тѣмъ же способомъ, какимъ онъ былъ полученъ изъ комплекса мощности $\aleph_0$; это значитъ: берутся всевозможные типы строго расположенныхъ комплексовъ мощности $\aleph_1$ и изъ нихъ составляется новый комплексъ. Онъ имѣетъ болѣе высокую мощность $\aleph_2$. Такимъ образомъ образуется рядъ трансфинитныхъ *количественныхъ* чиселъ

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \aleph_4 \cdots\cdots,$$

который, въ свою очередь, продолжается за безконечность.

Канторъ утверждаетъ, что этимъ рядомъ мощностей исчерпываются мощности безконечныхъ комплексовъ, т. е. что мощность каждаго безконечнаго комплекса выражается однимъ изъ его количественныхъ трансфинитныхъ чиселъ. Однако, это утвержденіе покоится на допущеніи, законность котораго составляетъ еще предметъ спора и изслѣдованія.

Съ точки зрѣнія Кантора, принципъ Архимеда заключается въ томъ, что прямая, если разсматривать ее, какъ комплексъ равныхъ отрѣзковъ, имѣетъ мощность $\aleph_0$. Задача о трансфинитной геометріи заключается въ томъ, чтобы построить геометрію, въ которой прямая, какъ комплексъ равныхъ отрѣзковъ, имѣетъ болѣе высокую мощность.

Первый опытъ рѣшенія этой задачи принадлежитъ Веронезе. Въ 1891 г. онъ опубликовалъ обширное сочиненіе «Основанія геометріи многихъ измѣреній и со многими видами прямолинейныхъ единицъ въ элементарномъ изложенiи»[1]). Въ этомъ обширномъ сочиненiи, содержащемъ до 700 стр. большого формата, авторъ старается разрѣшить такой широкiй рядъ вопросовъ, который охватываетъ всѣ стороны ученiя объ основанiяхъ математики Въ своемъ предисловiи авторъ говоритъ, что онъ, строго говоря, не предполагаетъ въ читателѣ математическихъ знанiй, что ему нуженъ только читатель, умѣющiй математически мыслить. Такого читателя, свободнаго отъ всякихъ предразсудковъ, Веронезе желаетъ ввести въ глубоко отвлеченную область формальной геометрiи, имѣющую своимъ объектомъ пространство, комплексъ точекъ, мощность котораго несравненно выше мощности нашего пространства. Чтобы остаться вѣрнымъ этой задачѣ, чтобы тутъ же дать читателю весь тотъ матерiалъ, который ему нуженъ изъ ариѳметики и даже изъ логики, Веронезе начинаетъ издалека. Онъ начинаетъ съ основныхъ вопросовъ логики: объ опредѣленiи терминовъ, объ ассоцiацiи, о доказательствѣ. Онъ развиваетъ далѣе ариѳметику, какъ обыкновенную, такъ и трансфинитную, и на этой базѣ строитъ свою геометрiю. Легко понять, что справиться съ такой широкой задачей очень трудно. Не смотря на то, что авторъ имѣетъ цѣлью по возможности выяснить эти трудные вопросы, онъ часто ведетъ разсужденiя въ такой мѣрѣ неясно, что въ нихъ, какъ мы увидимъ, теряются люди, умѣющiе справляться съ глубоко отвлеченными вопросами. Къ тому же обширная и своеобразная терминологiя чрезвычайно затрудняетъ чтенiе этого сочиненiя. При всемъ томъ въ разработкѣ отдѣльныхъ вопросовъ ясно виденъ тонкiй умъ, полная освѣдомленность въ современной литературѣ вопроса и огромный трудъ, затраченный на построенiе этой системы. Число лицъ, уяснившихъ себѣ вполнѣ систему Веронезе, повидимому, чрезвычайно ограничено; намъ это также не удалось, не смотря на то, что мы не разъ возвращались къ этому сочиненiю и затратили на него немало времени. Мы изложимъ здѣсь сущность этой системы, насколько она намъ доступна.

---

[1]) *G. Veronese.* «Fondamenti di geometria a più dimensioni ed a più specie di unità rettilince esposti in forma elementare». Padova. 1891. Имѣется нѣмецкiй переводъ: *G. Veronese.* «Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten geradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt». Übersetzt von A. Schepp. Leipzig. 1894.

Обширное введеніе представляетъ собой почти третью часть всего сочиненія. Оно имѣетъ цѣлью обоснованіе ариѳметики обыкновенной и, главнымъ образомъ, трансцендентной, которая автору необходима для построенія собственно геометріи. Вѣрнѣе, это даже не ариѳметика, это теорія особаго рода расположенныхъ комплексовъ. Но въ то время какъ Канторъ оперируетъ исключительно со строго расположенными комплексами, Веронезе имѣетъ дѣло съ комплексами гораздо болѣе сложнаго расположенія.

Предметы — объекты нашего мышленія, которые въ изслѣдованіи опредѣляются извѣстными признаками. Если для двухъ различныхъ объектовъ нѣкоторые опредѣляющіе ихъ признаки совпадаютъ, то мы говоримъ, что эти объекты *по отношенію къ этому ряду признаковъ равны.* Если объекты равны по отношенію ко всей совокупности признаковъ, которые мы, въ предѣлахъ извѣстнаго разсужденія, принимаемъ во вниманіе, то они называются *тождественными.*

Это опредѣленіе понятія о тождествѣ, играющемъ у Веронезе основную роль, отличается крайней неясностью. Какимъ образомъ могутъ два *различныхъ* объекта быть равны по отношенію ко *всѣмъ* признакамъ, которые мы принимаемъ во вниманіе, совершенно непонятно. Непонятны для насъ и тѣ поясненія, которыя Веронезе по этому предмету даетъ. Чтобы имѣть возможность, однако, прослѣдить за ходомъ идей, мы допустимъ, что тождество опредѣляется такъ или иначе въ каждомъ частномъ случаѣ, т. е. въ примѣненіи къ каждой группѣ объектовъ, которой намъ приходится заниматься.

Веронезе принимаетъ понятія о комплексѣ, о части комплекса, объ ассоціаціи (сопряженіи), о послѣдовательности за основныя понятія. Эти понятія даютъ ему возможность построить понятіе о расположенномъ комплексѣ въ томъ же смыслѣ, какъ это понимаетъ Канторъ. Такой расположенный комплексъ Веронезе называетъ комплексомъ одного *измѣренія.*

Суживая далѣе объектъ изслѣдованія, Веронезе принимаетъ, что существуетъ безчисленное множество нѣкоторыхъ тождественныхъ между собой *основныхъ элементовъ,* изъ которыхъ построены комплексы, подлежащіе изученію; эти комплексы онъ называетъ *формами.*

Далѣе Веронезе вводитъ гипотезу I.

Существуетъ форма, которая служитъ для опредѣленія всѣхъ остальныхъ формъ. Эта форма называется *основной формой. Всѣ основныя формы тождественны между собой.*

Въ расположенномъ комплексѣ Веронезе называетъ *отрѣзкомъ* совокупность элементовъ, содержащихся между двумя его элементами. Комплексъ называется *тождественнымъ въ расположеніи своихъ частей*, если каждому отрѣзку AB и каждому элементу C отвѣчаютъ два тождественныхъ съ AB отрѣзка CD и CD', выходящіе въ противоположныхъ направленіяхъ изъ элемента C.

Гипотеза II. *Основная форма представляетъ собой комплексъ одного измѣренія, тождественный въ расположеніи своихъ частей.*

Пусть AA_1 будетъ нѣкоторый отрѣзокъ на основной формѣ. Согласно предыдущей гипотезѣ, въ направленіи AA_1 существуетъ такой элементъ A_2, что отрѣзокъ AA_1 тождественъ отрѣзку A_1A_2 ($AA_1 = A_1A_2$). Далѣе въ томъ же направленіи существуетъ отрѣзокъ A_2A_3, тождественный отрѣзку A_1A_2 и т. д. Мы получаемъ такимъ образомъ комплексъ отрѣзковъ мощности $\aleph_0$

$$AA_1,\ A_1A_2,\ A_2A_3,\ A_3A_4 \ldots\ A_{n-1}A_n \ldots\ldots$$

Совокупность элементовъ, принадлежащихъ всѣмъ этимъ отрѣзкамъ, Веронезе называетъ *областью скалы*, отрѣзокъ AA_1 называетъ *единицей* этой скалы A — *ея началомъ.*

Скалу, выходящую изъ точки A и имѣющую *единицей* отрѣзокъ AA_1, будемъ обозначать символомъ $[AA_1]$. Если два отрѣзка AA_1 и AB_1, имѣющіе общее начало, расположены такимъ образомъ, что отрѣзокъ AA_1 принадлежитъ скалѣ $[AB_1]$, а отрѣзокъ AB_1 принадлежитъ скалѣ $[AA_1]$, то Веронезе называетъ ихъ отрѣзками *одного и того-же порядка* или *конечными другъ относительно друга.* Точно такъ же отрѣзками одного порядка называются два отрѣзка CD и C_1D_1, выходящіе изъ различныхъ точекъ, если они тождественны двумъ отрѣзкамъ AA_1 и AB_1, выходящимъ изъ общей точки A и удовлетворяющимъ поставленнымъ выше требованіямъ. Веронезе показываетъ, что области скалъ, выходящихъ изъ одной и той-же точки и построенныхъ единицами одного порядка, совпадаютъ. Вопросъ о томъ, принадлежатъ ли всѣ отрѣзки основной формы одному и тому же порядку или нѣтъ, очевидно совпадаетъ съ принципомъ Архимеда. Отвѣтомъ на этотъ вопросъ служитъ третья гипотеза Веронезе.

На основной формѣ въ любомъ направленіи за предѣлами любой скалы имѣется по крайней мѣрѣ одна точка. Такая точка называется *трансфинитной* по отношенію къ скалѣ или по отношенію къ ея единицѣ. Такъ какъ основная форма тождественна въ расположеніи своихъ частей, то такихъ точекъ имѣется, конечно, не одна, а безконечное множество; имѣются скалы, построенныя отъ этой трансфинитной точки въ томъ же направленіи различными единицами, имѣются точки, расположенныя за предѣлами этихъ трансфинитныхъ скалъ Необходимо ближе оріентироваться въ строеніи основной формы, обусловливаемомъ сдѣланнымъ допущеніемъ.

Если точка B_∞ лежитъ за предѣлами скалы $[AA_1]$, то отрѣзокъ AB_∞ называется *безконечнымъ* по отношенію къ отрѣзку AA_1. Напротивъ, отрѣзокъ AA' того же порядка, что и AA_1, называется *конечнымъ* относительно отрѣзка AA_1. Если мы теперь отъ точки B_∞ будемъ строить скалу $[B_\infty B_1]$ той же единицы AA_1 въ направленіи къ точкѣ A, то мы никогда не достигнемъ области $[AA_1]$, такъ какъ иначе и точка B_∞ принадлежала бы этой области. Изъ этого вытекаетъ, что на отрѣзкѣ AB_∞ существуютъ такія точки A', что AA' есть конечный относительно AA_1 отрѣзокъ, а $A'B_\infty$ есть безконечно большой отрѣзокъ относительно AA_1; существуютъ такія точки B', что отрѣзокъ AB' безконечно великъ относительно AA_1, а $B'B_\infty$ есть отрѣзокъ конечный относительно AA_1.

Веронезе допускаетъ, однако, что въ этихъ условіяхъ существуютъ такія точки C, что отрѣзки AC и CB_∞ безконечны относительно AA_1. Иначе говоря, если мы отрѣзкомъ AA_1 построимъ скалу отъ точки A въ направленіи къ точкѣ B_∞ и отъ точки B_∞ въ направленіи къ точкѣ A, то на основной формѣ будутъ точки C, расположенныя между обѣими скалами.

Но если C есть такая точка, то будетъ ли отрѣзокъ AB_∞ относительно AC конечнымъ или безконечно большимъ? Что онъ можетъ быть безконечно большимъ, вытекаетъ изъ того, что мы можемъ построить скалу $[AC]$ и взять точку B_∞ за предѣлами этой скалы. Можетъ ли онъ быть конечнымъ? Веронезе допускаетъ, что за предѣлами скалы $[AA_1]$ всегда существуетъ такая точка A_∞, что всякій разъ какъ точка C (согласно предыдущему допущенію) относительно отрѣзка AA_1 безконечно удалена какъ отъ точки A, такъ и отъ точки A_∞, то AA_∞ есть отрѣзокъ конечный относительно AC. Эти два допущенія и составляютъ четвертую гипотезу, которая формулируется слѣдующимъ образомъ.

Если точка B_∞ *лежитъ за предѣлами скалы* $[AA_1]$, *то 1) существуетъ такая точка* C *на отрѣзкѣ* AB_∞, *которая относительно отрѣзка* AA_1 *безконечно удалена отъ* A *и отъ* B_∞; 2) *существуетъ такая точка* A_∞, *что* AA_∞ *есть отрѣзокъ, конечный относительно любого отрѣзка* AC, *крайняя точка котораго* C *удовлетворяетъ первому условію по отношенію къ точкамъ* A *и* A_∞.

Если точка A_∞ удовлетворяетъ этому требованію, то отрѣзокъ AA_∞ называется *безконечно большимъ перваго порядка* относительно единицы AA_1. Если теперь построимъ скалу, принимая отрѣзокъ AA_∞ за единицу, и A'_∞ есть произвольная точка въ области этой скалы, но трансфинитная относительно отрѣзка AA_1, то AA'_∞, какъ это не трудно показать, также представляетъ собой безконечно большой отрѣзокъ перваго порядка относительно AA_1.

Но гипотезы III и IV принимаютъ также существованіе отрѣзковъ $AA_{2\infty}$ — безконечно большихъ перваго порядка относительно отрѣзка AA_∞; такіе отрѣзки называются *безконечно большими второго порядка относительно единицы* AA_1. Далѣе отрѣзки $AA_{3\infty}$, безконечно большіе перваго порядка относительно $AA_{2\infty}$ называются безконечно большими третьяго порядка относительно основной единицы и т. д.

Если до сихъ поръ изложенная схема представляется болѣе или менѣе ясной, то пятая гипотеза Веронезе остается для насъ, по существу, непонятной. Вотъ какъ она формулирована.

Каждый безконечно большой отрѣзокъ, порядокъ котораго не выражается конечнымъ числомъ m, *можетъ быть полученъ такимъ образомъ, что принципъ гипотезы IV примѣняется безконечное число разъ, каковое число либо напередъ задано, либо опредѣляется новымъ отрѣзкомъ.*

Веронезе этимъ, очевидно, хочетъ сказать, что если мы построимъ скалы

$$[AA_\infty],\ [AA_{2\infty}],\ [AA_{3\infty}]\dots\ [AA_{n\infty}]\dots,$$

то за предѣлами всѣхъ этихъ скалъ будутъ еще существовать элементы основной формы. Но что означаетъ, что отрѣзки могутъ быть получены путемъ примѣненія принципа гипотезы IV безконечное число разъ, это для насъ остается непонятнымъ, а Веронезе этого не выясняетъ.

Основная форма Веронезе, обладающая трансфинитными элементами, не можетъ быть непрерывной въ смыслѣ принципа Дедекинда. Но Веронезе одаряетъ ее непрерывностью въ иномъ смыслѣ слова. Исходя отъ единицы AA_1, мы построили основную форму, такъ сказать, вверхъ; но мы еще не говорили о томъ, какое строеніе имѣетъ самый отрѣзокъ AA_1, какъ расположены элементы внутри его. А такъ какъ отрѣзокъ AA_1 выбранъ произвольно, то вопросъ идетъ такимъ образомъ о внутреннемъ строеніи каждаго отрѣзка, какъ бы малъ онъ ни былъ. Этому и посвящены послѣднія три гипотезы Веронезе.

Гипотеза шестая принимаетъ, что *перемѣнный отрѣзокъ XX' внутри AA_1, который, оставаясь конечнымъ относительно AA_1, путемъ сближенія концовъ безгранично относительно AA_1 убываетъ, т. е. становится меньше любой n—ой части отрѣзка AA_1*, все же имѣетъ элементы, внутри его лежащіе. Это значитъ, пока XX' остается отрѣзкомъ того же порядка, что и AA_1, внутри его (т. е. помимо его концовъ) имѣются еще элементы основной формы. Систему, удовлетворяющую этому требованію, Веронезе называетъ *непрерывной* относительно единицы AA_1. Этотъ принципъ непрерывности усиливается потомъ гипотезой VIII.

Итакъ, внутри отрѣзка AA_1, равно какъ и внутри любой его части лежатъ элементы основной формы. Но если мы возьмемъ внутреннюю точку a отрѣзка AA_1, то отрѣзокъ AA_1 относительно отрѣзка Aa представляетъ собой либо величину конечную, либо безконечно большую. Веронезе допускаетъ, что *внутри отрѣзка AA_1 имѣются такія точки a_1, что AA_1 есть отрѣзокъ безконечно большой перваго порядка относительно Aa_1.*

Такой отрѣзокъ Aa_1 относительно AA_1 называется *безконечно малымъ перваго порядка.* Ясно, какимъ образомъ получаются безконечно малые отрѣзки болѣе высокихъ порядковъ; но подобно тому, какъ въ гипотезѣ V принято, что существуютъ безконечно большіе отрѣзки, которымъ не отвѣчаетъ порядокъ, выражающійся конечнымъ числомъ, существуютъ отрѣзки безконечно малые, порядокъ которыхъ конечнымъ числомъ не выражается. Эти допущенія и составляютъ седьмую гипотезу. Наконецъ восьмая гипотеза усиливаетъ шестую слѣдующимъ образомъ.

Если перемѣнный отрѣзокъ, вслѣдствіе сближенія концовъ, безконечно убываетъ абсолютно, т. е. становится меньше любого безконечно малаго отрѣзка, то внутри его все же содержатся точки, принадлежащія основной формѣ.

Такова схема, по которой Веронезе строитъ свою основную форму. Онъ развиваетъ также ариѳметическую систему, символизирующую это строеніе основной формы. Однако уяснить себѣ эту систему намъ не удалось.

Вся изложенная теорія представляетъ собою только предметъ обширнаго введенія — базу, на которой авторъ строитъ собственно геометрію. Основной элементъ здѣсь специфицируется подъ особымъ названіемъ *точка*. Изъ точекъ составляется основная форма—*прямая*, которая опредѣляется нѣкоторой парой своихъ точекъ. Существованіе точекъ и прямыхъ постулируется двумя аксіомами. Далѣе принимается, что внѣ всякой прямой имѣется точка, которая вмѣстѣ со всякой точкой прямой опредѣляетъ новую прямую. Такимъ образомъ строится пространство сначала двухъ, а затѣмъ и болѣе высокаго числа измѣреній. Въ этомъ пространствѣ развивается геометрія подобно тому, какъ это дѣлается въ обычномъ пространствѣ. Прослѣдить за этой системой чрезвычайно трудно, такъ какъ вопросы обыкновенной геометріи переплетаются здѣсь со множествомъ своеобразныхъ вопросовъ, возникающихъ на почвѣ трансфинитнаго строенія пространства.

Мы лишены такимъ образомъ возможности высказать опредѣленное сужденіе о томъ, можно ли признать правильной трансфинитную геометрическую систему Веронезе.

Книга Веронезе была встрѣчена въ литературѣ крайне несочувственно. Канторъ, Киллингъ, Пеано, Стюди, Шенфлисъ[1]) помѣстили отзывы, абсолютно отвергающіе трансфинитную систему Веронезе. Такъ, Канторъ въ цитированномъ выше мемуарѣ, въ XLVI томѣ «Анналовъ», говоритъ: «Веронезе, такъ сказать, добровольно отказался отъ основного фундамента, на которомъ построено понятіе о равенствѣ; послѣ этого нечего удивляться той неправильности, съ которой онъ въ дальнѣйшемъ изложеніи оперируетъ надъ своими псевдо-трансфинитными

[1]) *W. Killing.* «Bemerkungen über Veronese's transfinite Zahlen». Index lectionum in Academia Monasteriensi. Münster. 1895. Сюда же относятся:

G. Peano. «Lettera aperta al Prof. G. Veronese». Rivista di matem. I. 1892.

A. Schönflies. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung. V, 1.

числами, приписывая имъ такія свойства, которыя въ построенной имъ формѣ уже потому не могутъ имѣть мѣста, что самая форма не имѣетъ никакого существованія даже на бумагѣ. Вмѣстѣ съ тѣмъ становится понятнымъ поразительное сходство чиселъ Веронезе съ въ высшей степени абсурдными безконечными числами Фонтенеля въ его «Геометріи безконечнаго». Нѣсколько менѣе рѣшительно высказывается Киллингъ, но онъ находитъ, что систематическія неясности въ книгѣ Веронезе «не даютъ возможности признать его систему правильной, а дѣлаютъ необходимымъ тщательный анализъ».

Въ отвѣтной статьѣ Веронезе [1]) заявляетъ однако, что онъ не только не можетъ согласиться со своими оппонентами, но что онъ не находитъ возможнымъ измѣнить что-либо въ своей работѣ. «Сами критики мои», говоритъ онъ, «не сходятся въ тѣхъ пунктахъ, которые они считаютъ неправильными въ моей работѣ. Киллингъ считаетъ пріемлемымъ то, чего не признаетъ Канторъ; Шенфлисъ критикуетъ замѣчанія Киллинга, но самъ впадаетъ въ ошибку».

Изъ всего этого ясно только одно: книга Веронезе написана такъ, что въ ней трудно разобраться. Чѣмъ своеобразнѣе вопросъ, тѣмъ яснѣе онъ долженъ быть изложенъ; книга же Веронезе написана столь неясно, насколько это только возможно.

Въ 1894 году ученикъ Веронезе Леви-Чивита [2]) опубликовалъ мемуаръ, въ которомъ даетъ систему трансфинитной ариѳметики, отличающуюся удивительной простотой. Эта система даетъ также полную возможность построить соотвѣтствующее ей аналитическое пространство; объ отношеніи этого пространства къ пространству Веронезе мы укажемъ ниже. Теперь же изложимъ сущность ариѳметики Леви-Чивита.

Леви-Чивита вводитъ въ разсмотрѣніе символы вида a_ν, гдѣ a и ν произвольныя вещественныя числа. Эти символы онъ разсматриваетъ, какъ числа особаго рода, которымъ онъ даетъ странное названіе «monosemio». Смыслъ этого термина выяснится ниже; мы будемъ называть его «однозначнымъ числомъ

---

[1]) *G. Veronese.* «Sul postulato della continuità». Atti della R. Accad. dei Lincei. Rendicanti. Serie 5. VI_2. 1897.

[2]) *T. Levi Civita.* «Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quoli elementi analitici». Atti del R. Sttiluto Veneto. Serie 7. V. I. 1894.

Леви-Чивита»; для краткости мы будемъ писать *число*, обозначая курсивомъ, что рѣчь идетъ о числѣ Леви-Чивита. Вещественное число a называется *характеристикой*, а ν *индексомъ числа* a_ν; если характеристика имѣетъ положительное значенiе, то *число* называется *положительнымъ*, а если характеристика имѣетъ отрицательное значенiе, то *число* называется *отрицательнымъ*. Подъ символомъ 0_ν, каковъ бы ни былъ индексъ ν, мы разумѣемъ *нуль*; подъ символомъ a_0 мы разумѣемъ число a; такимъ образомъ обыкновенныя числа входятъ въ составъ комплекса *чиселъ* Леви-Чевита.

Измѣнить знакъ при *числѣ* значитъ измѣнить знакъ при его характеристикѣ. Абсолютной величиной положительнаго *числа* называется самое *число*; абсолютной величиной отрицательнаго *числа* называется положительное *число*, которое мы получимъ, мѣняя знакъ.

Изъ двухъ положительныхъ *чиселъ* мы будемъ считать *большимъ* то, которое имѣетъ большiй индексъ, при одинаковыхъ же индексахъ *большимъ* считается то, которое имѣетъ большую характеристику. Всякое отрицательное *число меньше* положительнаго, изъ двухъ отрицательныхъ *чиселъ* считается *большимъ* то, которое имѣетъ меньшую абсолютную величину. Нуль считается *меньше* всякаго положительнаго *числа* и *больше* всякаго отрицательнаго числа. Не трудно видѣть, что при этихъ критерiяхъ сравненiя всѣ постулаты сравненiя удовлетворены, и комплексъ чиселъ Леви-Чивита претворенъ такимъ образомъ въ величину.

Подъ *суммой* нѣсколькихъ *чиселъ*, имѣющихъ одинъ и тотъ же индексъ, Леви-Чивита разумѣетъ число съ тѣмъ же индексомъ, характеристикой котораго служитъ сумма характеристикъ

$$a_\nu + b_\nu + c_\nu + \ldots + l_\nu = (a + b + c + \ldots + l)_\nu.$$

Ясно, что сумма *чиселъ* съ одинаковыми индексами слѣдуетъ формально законамъ обыкновенной суммы; ясно также, какъ опредѣляется разность двухъ *чиселъ* съ одинаковыми индексами.

Подъ *произведенiемъ* двухъ *чиселъ* a_μ на b_ν Леви-Чивита разумѣетъ *число* $(ab)_{\mu+\nu}$. Ясно, что произведенiе обладаетъ свойствомъ сочетательности и перемѣстительности, а по отношенiю къ суммѣ *чиселъ* съ одинаковыми индексами — и распредѣлительностью. Легко видѣть, что произведенiе двухъ *чиселъ* обращается въ нуль въ томъ и только въ томъ случаѣ, когда по крайней мѣрѣ одинъ изъ множителей равенъ нулю. Ясно также, что двумъ *числамъ* a_μ и b_ν, изъ которыхъ послѣднее не нуль, отвѣчаетъ одно и только одно *число* $\left(\frac{a}{b}\right)_{\mu-\nu}$, удовлетворяющее уравненію

$$x \cdot b_\nu = a_\mu,$$

т. е. частное отъ дѣленія *числа* a_μ на *число* b_ν.

Чтобы распространить также сложеніе и вычитаніе на всевозможныя *числа*, Леви-Чивита расширяетъ область *чиселъ*, надъ которыми онъ оперируетъ. Именно онъ разсматриваетъ *числовые комплексы* вида

$$a^{(1)}_{\nu_1} + a^{(2)}_{\nu_2} + a^{(3)}_{\nu_3} + a^{(4)}_{\nu_4} + \cdots\cdots + a^{(h)}_{\nu_h} + \cdots\cdots, \qquad (7)$$

состоящіе изъ конечнаго или безконечнаго числа членовъ, индексы которыхъ должны быть расположены либо въ возростающемъ, либо въ убывающемъ порядкѣ; если число членовъ безконечно велико, то индексы должны стремиться къ $+\infty$, когда они возростаютъ и къ $-\infty$, когда они убываютъ. Эта альтернатива— комплексы съ возростающими индексами и комплексы съ убывающими индексами — даетъ двѣ ариѳметическія системы, которыя Леви-Чевита называетъ *гиперболической* и *эллиптической*; въ гиперболической системѣ разсматриваются ряды вида (7) исключительно съ возростающими индексами, а въ эллиптической — съ убывающими индексами. Мы ограничимся эллиптической системой. Въ этой системѣ вводятся такимъ образомъ комплексы вида (7) съ убывающими индексами, которые стремятся къ $-\infty$, если число членовъ безконечно велико. Каждый такой комплексъ разсматривается, какъ новое *число*; *однозначныя числа* представляютъ такимъ образомъ простѣйшій частный случай числового матеріала Леви-Чевита. Въ комплексахъ вида (7) мы будемъ считать всѣ члены отличными отъ нуля (т. е. будемъ выбрасывать нулевыя слагаемыя) за исключеніемъ того случая, когда комплексъ сводится къ одному члену 0_ν, т. е. когда *число* сводится къ нулю. При такихъ условіяхъ мы будемъ говорить, что изъ двухъ чиселъ

$$a = a^{(1)}_{\nu_1} + a^{(2)}_{\nu_2} + a^{(3)}_{\nu_3} + \cdots\cdots a^{(h)}_{\nu_h} + \cdots\cdots$$

$$b = b^{(1)}_{\mu_1} + b^{(2)}_{\mu_2} + b^{(3)}_{\mu_3} + \cdots\cdots b^{(g)}_{\mu_g} + \cdots\cdots$$

$a > b$ или $a < b$, смотря по тому, будетъ ли $a_{\nu_1}^{(1)} > b_{\mu_1}^{(1)}$ или $a_{\nu_1}^{(1)} < b_{\mu_1}^{(1)}$; если же $a_{\nu_1}^{(1)} = b_{\mu_1}^{(1)}$, то мы обращаемся къ слѣдующей парѣ членовъ и т. д. Если всѣ члены *числа* a равны всѣмъ членамъ *числа* b, то самыя *числа* равны. Эти критеріи сравненія удовлетворяютъ постулатамъ сравненія. Согласно этому опредѣленію, число будетъ положительнымъ или отрицательнымъ, смотря по тому, будетъ ли старшій членъ положительнымъ или отрицательнымъ.

Число ν_1 называется *порядкомъ числа* a. *Число* называется безконечно большимъ по отношенію къ каждому *числу* низшаго порядка и безконечно малымъ по отношенію къ каждому *числу* высшаго порядка.

Подъ суммой $a+b$ разумѣется *число*, составленное изъ всѣхъ *членовъ* комплекса (*числа*) a и всѣхъ членовъ комплекса b; при этомъ члены, имѣющіе общій индексъ, соединяются въ одинъ путемъ сложенія характеристикъ, а затѣмъ располагаются въ порядкѣ убывающихъ индексовъ. При этихъ условіяхъ сумма обладаетъ свойствомъ сочетательности и перемѣстительности. Совершенно ясно, какъ получить разность двухъ *чиселъ*.

Подъ произведеніемъ ab будемъ разумѣть комплексъ, составленный изъ членовъ $(a^{(h)}b^{(g)})_{\nu_h+\mu_g}$; при этомъ члены съ одинаковымъ индексомъ соединяются въ одинъ, а затѣмъ располагаются по нисходящимъ индексамъ. Произведеніе, опредѣленное такимъ образомъ, обладаетъ свойствами перемѣстительности, сочетательности и распредѣлительности относительно суммы и разности. Произведеніе обращается въ нуль въ томъ и только въ томъ случаѣ, когда одинъ изъ сомножителей равенъ нулю. Далѣе любымъ двумъ *числамъ* a и b, изъ которыхъ второе отлично отъ нуля, отвѣчаетъ одно и только одно *число* c, для котораго $b \,.\, c = a$.

Все это доказывается довольно просто; можно также показать, что каждому положительному *числу* a отвѣчаетъ одно и только одно *число* c, удовлетворяющее соотношенію $c^2 = a$.

Такимъ образомъ мы получаемъ числовой матеріалъ, всѣ дѣйствія надъ которымъ слѣдуютъ формальнымъ законамъ обыкновенной ариѳметики; но если мы возьмемъ какое-либо положительное *число* a и станемъ его умножать на сколь угодно большое цѣлое число n (въ системѣ Леви-Чевита n_0) то мы превзойдемъ число b, большее a, только въ томъ случаѣ, если это есть число того же порядка. Это система трансфинитная.

Замѣчательно, что совокупность чиселъ Леви-Чевита обладаетъ непрерывностью въ Канторовомъ смыслѣ слова, но не удовлетворяетъ принципу Дедекинда. Если мы имѣемъ безконечный рядъ *чиселъ*

$$u_1, u_2, u_3 \ldots\ldots u_n \ldots\ldots$$

и разность между *числами* этого ряда и нѣкоторымъ *числомъ* u становится съ возростаніемъ n по абсолютной величинѣ меньше всякаго положительнаго *числа* ε, то Леви-Чевита называетъ *число* u предѣломъ ряда чиселъ (7). Нужно имѣть при этомъ въ виду, что за ε можетъ быть принято число сколь угодно низкаго порядка. Леви Чевито доказываетъ, что *числа* ряда (7), удовлетворяющаго признаку Коши, всегда имѣютъ предѣлъ; поэтому область этихъ чиселъ непрерывна въ томъ смыслѣ, какъ этотъ терминъ понимаетъ Канторъ. Но принципъ Дедекинда здѣсь мѣста не имѣетъ: въ самомъ дѣлѣ, если мы раздѣлимъ всѣ *числа* на двѣ категоріи, относя къ первой тѣ *числа*, которыхъ порядокъ не превышаетъ ν, а ко второй тѣ *числа*, которыхъ порядокъ выше ν, то мы получимъ сѣченіе, которое не производится ни однимъ *числомъ*.

Возможность такого различія двухъ признаковъ, совпадающихъ въ обыкновенной ариѳметикѣ, объясняется тѣмъ, что методъ Больцано, посредствомъ котораго мы оба критерія отождествляемъ, здѣсь непримѣнимъ: дѣля данный интервалъ на n частей, полученные интервалы вновь на n частей и т. д., мы не получимъ интервала низшаго порядка, мы не получимъ, слѣдовательно, интервала, сколь угодно малаго въ этой системѣ.

Такимъ образомъ Леви Чевита несомнѣнно построилъ полную трансфинитную ариѳметику; аналитическое же пространство, въ основу котораго можетъ быть положена эта ариѳметика, представляетъ собой трансфинитную геометрію.

Вопросъ о возможности трансфинитной геометріи такимъ образомъ рѣшенъ въ утвердительномъ смыслѣ. Совпадаетъ ли, однако, система Леви-Чевита съ системой Веронезе? Хотя Веронезе на этомъ настаиваетъ (см. статью, указанную на стр. 476), но Леви-Чевита самъ указываетъ на то, что здѣсь полнаго совпаденія нѣтъ; именно, гипотеза V (на неясность которой мы въ своемъ мѣстѣ указывали, стр. 473) здѣсь себѣ примѣненія не находитъ. Чтобы довести систему Леви Чевита до системы Веронезе, нужно было бы ввести *числа*, самый порядокъ которыхъ выражается трансфинитнымъ *числомъ*; можно ли это осуществить, какъ это утверждаетъ Веронезе, это остается для насъ совершенно неяснымъ.

Тяжеловѣсный матеріалъ, которымъ работаютъ Веронезе и Леви-Чевита, Гильберту удалось значительно упростить. Онъ вводитъ трансфинитныя числа иного рода, приближаясь скорѣе къ идеямъ Дюбуа-Реймонда и Штольца. Вмѣсто функцій, надъ которыми оперируютъ эти авторы, Гильбертъ [1]) вводитъ раціональныя алгебраическія функціи одного независимаго перемѣннаго и другія функціи, которыя могутъ быть при помощи ихъ получены путемъ производства раціональныхъ дѣйствій и извлеченія квадратнаго корня изъ суммы квадратовъ. Разсматривая эти функціи, какъ своего рода числа, онъ устанавливаетъ критеріи сравненія, а правила дѣйствій устанавливаются, можно сказать, сами собой. Въ I-й части настоящаго сочиненія на стр. 774—776 эти идеи были подробно выяснены, и мы не будемъ къ нимъ возвращаться. Система Гильберта отличается необычайной простотой и съ полной ясностью обнаруживаетъ, что въ системѣ, не удовлетворяющей постулату Дедекинда, принципъ Архимеда можетъ также не имѣть мѣста. Возможна такимъ образомъ неархимедова геометрія, въ которой ученіе объ измѣреніи не можетъ быть построено на тѣхъ основаніяхъ, на которыхъ оно покоится обычно въ нашей метрической геометріи. Къ этому вопросу мы еще возвратимся въ главѣ, посвященной Гильберту.

Къ современной энергетикѣ.

Профессора В. Оствальда.

*(Продолженіе *).*

Въ силу общаго свойства нашего мышленія, благодаря которому мы всегда воспринимаемъ новые факты, по возможности, уподобляя ихъ тому, что намъ уже извѣстно, было естественно принять это соотношеніе, крайне доступное и ясное по своей простотѣ, за норму, или за типъ для всѣхъ другихъ видовъ превращенія энергіи. Это могло быть осуществлено только при допущеніи, что другихъ видовъ энергіи во вселенной

*) См. № 438 „Вѣстника".

вовсе не существуетъ, т. е. что всѣ виды энергіи сводятся къ тѣмъ, которые проявляются въ описанныхъ выше астрономическихъ явленіяхъ. Конечно, были извѣстны уже многіе другіе виды энергіи (теплота, свѣтъ, электричество и т. д.), которые непосредственно не могутъ быть разсматриваемы, какъ энергіи движенія или положенія. Здѣсь оставалось только чисто гипотетически допустить, что и въ этихъ случаяхъ въ дѣйствительности также проявляются только названные два вида энергіи, но что соотвѣтствующія движенія и притяженія происходятъ между невидимыми неизмѣримо-малыми атомами.

Этимъ допущеніемъ упомянутая выше психологическая потребность была широко удовлетворена: понятіе энергіи этимъ путемъ просто претворялось въ составную часть весьма распространеннаго въ то время механическаго міровоззрѣнія, согласно которому все происходящее въ послѣдней инстанціи должно сводиться къ механическимъ процессамъ, имѣющимъ мѣсто между атомами. Правда, уже Лейбницъ выдвинулъ противъ этого существенное возраженіе, что психическіе процессы этимъ путемъ объясненія не получаютъ. Въ самомъ дѣлѣ, если бы даже какимъ либо образомъ намъ удалось наглядно показать всю совокупность движеній предполагаемыхъ атомовъ мозга, которыми сопровождается тотъ или иной процессъ мышленія, то мы все-таки видѣли бы только *движущіяся тѣльца,* а не соотвѣтствующія *мысли,* и осуществленіе послѣднихъ оставалось бы столь же неяснымъ, какъ и прежде. Однако, значеніе этого возраженія не было достаточно оцѣнено, пока Дю-Буа-Реймонъ, отъ котораго насъ отдѣляетъ только одно поколѣніе, вновь не выдвинулъ его и не показалъ, что оно представляетъ собой непреодолимое препятствіе для механическаго міровоззрѣнія. Впрочемъ, Дю-Буа-Реймонъ былъ въ такой мѣрѣ убѣжденъ въ правильности механическаго міровоззрѣнія, что это обстоятельство не могло привести его къ выводу, неблагопріятному для этого ученія; напротивъ, это привело его только къ необходимости констатировать абсолютный предѣлъ человѣческой способности къ познанію. Такое положеніе дѣлъ знаменуетъ господство механическаго міровоззрѣнія, которое въ эпоху открытія закона сохраненія энергіи, по крайней мѣрѣ, среди естествоиспытателей почти не оспаривалось; это даетъ также психологическое объясненіе того совершенно произвольнаго суженія закона сохраненія энергіи, о которомъ только-что шла рѣчь.

Мы должны здѣсь также указать на другой выводъ изъ тѣхъ же воззрѣній, именно на подраздѣленіе всѣхъ видовъ энергіи на кинетическіе и потенціальные. Такое подраздѣленіе, очевидно, представляетъ только иное выраженіе той же гипотезы, что упомянутыя астрономическія явленія служатъ типомъ для всей совокупности явленій природы. Въ какой мѣрѣ это подраздѣленіе носитъ глубоко гипотетическій характеръ, наиболѣе наглядно сказывается въ томъ, что по отношенію къ электрическому току, напримѣръ, мнѣнія совершенно раздѣлились, слѣдуетъ ли отнести его къ кинетическому или потенціальному виду энергіи. Что касается теплоты, то ее почти единогласно считаютъ кинетической энергіей въ виду господствующей кинетической гипотезы о сущности тепла; но если мы спросимъ, каковы же объективные признаки, по которымъ мы могли бы въ этихъ случаяхъ отличать кинетическую энергію отъ потенціальной, то отвѣта на этотъ вопросъ мы не получимъ. Дѣйствительно, мнѣ не извѣстно ни одно мѣсто въ литературѣ, гдѣ этотъ вопросъ вообще былъ бы поставленъ, не говорю уже—разрѣшенъ. Своеобразная номенклатура, ведущая свое начало отъ Ранкина, приводитъ даже къ соображеніямъ такого рода, что только кинетическая энергія можетъ претендовать на дѣйствительное объективное существованіе, между тѣмъ какъ энергія положенія, строго говоря, не есть энергія: это есть лишь нѣчто такое, что при благопріятныхъ условіяхъ можетъ только сдѣлаться энергіей. Здѣсь еще методически сказывается послѣдѣйствіе противорѣчиваго понятія „о скрытой теплотѣ“. Если мы примемъ во вниманіе, что къ концу XVIII столѣтія, когда Блекъ (Black) ввелъ это понятіе, законъ сохраненія энергіи былъ еще совершенно неизвѣстенъ, что это именно и сдѣлало необходимымъ введеніе понятія о скрытой теплотѣ, что самый терминъ „скрытая теплота“ для того только и былъ отчеканенъ, чтобы по крайней мѣрѣ формально можно было спасти воззрѣніе, что тепло все же не можетъ совершенно исчезать, какъ это видимо происходитъ при плавленіи и испареніи,—то мы окажемся лицомъ къ лицу съ чрезвычайно страннымъ положеніемъ дѣлъ. Обходные пути, по которымъ этотъ старый мыслитель долженъ былъ пойти именно потому, что законъ сохраненія энергіи въ то время былъ неизвѣстенъ безсознательно сохраняются теперь, когда законъ этотъ уже открытъ и когда ихъ необходимость, такимъ образомъ, перестала существовать: въ самомъ дѣлѣ, теперь не представляетъ никакого затрудненія уяснить себѣ, что тепло должно исчезать, когда соотвѣтствующее количество энергіи затрачивается на измѣненіе состоянія тѣла (плавленіе и испареніе).

Логическая ошибка, которая находитъ себѣ выраженіе въ терминѣ „потенціальная энергія“, отнюдь не безвредна; она мѣшаетъ намъ считать другіе виды энергіи столь же дѣйствительными, какъ и энергію движенія. Это имѣетъ своимъ источникомъ, очевидно, то обстоятельство, что движеніе тѣла, одареннаго кинетической энергіей, мы можемъ *видѣть*; наличность этого вида энергіи не нуждается, такимъ образомъ, ни въ какихъ другихъ доказательствахъ. Но наличность тепловой энергіи мы можемъ *ощущать*, свѣтовую энергію мы можемъ *видѣть;* мы можемъ, такимъ образомъ, всѣ виды энергіи посредственно или непосредственно заставить дѣйствовать на аппаратъ нашихъ чувствъ и такимъ образомъ обнаружить ихъ существованіе. Въ самомъ дѣлѣ, энергія, которая никакимъ путемъ не могла быть приведена къ какому бы то ни было воздѣйствію на наши чувства, постоянно оставалась бы намъ неизвѣстной и, такимъ образомъ, вобще не могла бы стать составной частью нашего міровоззрѣнія. Кинетическая энергія, такимъ образомъ, ни въ какой мѣрѣ не можетъ быть признана болѣе дѣйствительной, или активной, чѣмъ любой другой видъ энергіи, и всякая энергія, которая превращается въ другую, *является потенціальной по отношенію къ послѣдней, которая въ свою очередь становится активной (дѣйствующей).* Это есть единственная связующая мысль, которая вложена въ эти выраженія; однако, наука еще не привела къ потребности обозначить эти соотношенія понятій однимъ короткимъ названіемъ, и потому теперь предпочитаютъ вовсе отказаться отъ этихъ сбивчивыхъ терминовъ.

Всѣ эти соображенія непосредственно приводятъ насъ къ общему вопросу о „дѣйствительномъ“. Если мы сдѣлаемъ попытку со всей научной осторожностью, избѣгая всѣ скрытыя допущенія, охарактеризовать наше отношеніе къ мірозданію, то мы можемъ сказать слѣдующее: съ перваго момента нашей сознательной жизни мы стоимъ лицомъ къ лицу съ переживаніями, между которыми мы можемъ усмотрѣть лишь слабую связь. Наиболѣе отчетливо это сказывается въ томъ фактѣ, что мы такъ мало можемъ *предсказать* будущее, предстоящее. Ибо предвидѣніе собственно и представляетъ содержаніе нашего разума; размѣръ предвидѣнія въ протяженіи пространства и въ многообразіи явленій является непосредственнымъ мѣриломъ силы нашего умственнаго развитія. Новорожденное дитя не въ состоянiи предусмотрѣть ничего, кромѣ развѣ того, что, реагируя на извѣстное раздраженiе обонянiя и осязанiя, оно найдетъ пищу (оставляемъ при этомъ въ сторонѣ вопросъ о томъ, проявляется ли здѣсь уже сознанiе или нѣтъ); оно стоитъ, такимъ образомъ, на очень низкой ступени умственнаго развитiя. Но и высшая ступень этой способности, скажемъ, у талантливаго изслѣдователя, политика или техника, въ томъ именно и сказывается, что такого рода человѣкъ можетъ предусмотрѣть больше и глубже, нежели его противникъ или конкуррентъ.

Вещи, которыя мы можемъ предвидѣть, мы называемъ *извѣстными*; по отношенiю къ нимъ мы чувствуемъ себя у себя дома, и предусматриваемыя нами соотношенiя ихъ въ пространствѣ и во времени представляются намъ *понятными*. Этимъ объектамъ, поскольку рѣчь идетъ о впечатлѣнiяхъ нашихъ чувствъ, мы даемъ названiе *дѣйствительныхъ* вещей.

Однако, это выраженiе находитъ себѣ примѣненiе только по отношенiю къ объектамъ, такъ называемаго, внѣшняго мiра; „дѣйствительность" же нашихъ мыслей представляется настолько ясной, что объ этомъ мы вовсе не размышляемъ; какъ извѣстно, онѣ составляютъ первичную составную часть всѣхъ нашихъ переживанiй. Сны, галлюцинацiи и т. п. явленiя, какъ внѣшнiе объекты, мы называемъ *недѣйствительными*, потому что они слѣдуютъ не тѣмъ правиламъ, которыя мы, согласно опыту, установили для „дѣйствительныхъ" внѣшнихъ объектовъ, т. е. потому, что предсказанiя, которыя мы въ силу нашего опыта о внѣшнихъ объектахъ къ нимъ примѣняемъ, обыкновенно не оправдываются. Но какъ только относительно такого рода объектовъ обнаруживается закономѣрность или возможность предсказанiя, то они непосредственно переносятся въ область дѣйствительнаго. Это хорошо выясняется примѣромъ *гипнотическихъ явленiй*, которыя прежде всегда признавались фантазiей и отвергались, какъ недѣйствительныя явленiя; между тѣмъ, когда были выяснены условiя, при которыхъ они наступаютъ, и своеобразныя особенности, которыя съ ними правильно связаны, имъ въ настоящее время приписывается характеръ дѣйствительности. Къ этому остается только прибавить, что выраженiе „предсказать" нужно относить не только къ частямъ цѣлаго явленiя, послѣдовательно наступающимъ *во времени*, но и къ частямъ, опредѣленнымъ образомъ располагающимся другъ относительно друга *въ пространствѣ*. Такъ какъ, съ другой стороны, всѣхъ этихъ частей мы не можемъ воспринимать одновременно, и они лишь послѣдовательно охватываются нашимъ сознанiемъ, то каждое *расположенiе въ пространствѣ* становится также послѣдовательностью во времени. Только пространство обладаетъ здѣсь тою особенностью, что здѣсь послѣдовательность можетъ охватываться нашимъ сознанiемъ въ разнообразномъ, хотя и не вполнѣ произвольномъ порядкѣ.

Въ свѣтѣ этихъ соображенiй не можетъ быть, очевидно, никакой рѣчи о недѣйствительности энергiи положенiя или разстоянiя. Если мы знаемъ, что всякое тѣло, которое находится надъ поверхностью земли, всегда можетъ произвести опредѣленное количество работы, когда оно приближается къ этой поверхности, то видъ поднятаго тѣла вызываетъ въ насъ непосредственное сознанiе наличной энергiи съ такой же увѣренностью, какъ и видъ движущагося тѣла. Такимъ образомъ, съ точки зрѣнiя этого болѣе глубокаго и болѣе общаго пониманiя дѣйствительности различiе между активной и потенцiальной энергiей не выдерживаетъ критики и представляется небезвредной ошибкой.

Но какъ стоитъ вопросъ о реальности самой энергiи? Какъ мы упоминали выше, Майеръ твердо настаивалъ на реальности энергiи; однако, это воззрѣнiе не встрѣтило большого сочувствiя. Насколько охотно спустя нѣкоторое время естествоиспытатели были склонны признать правильность и важность закона сохраненiя энергiи, настолько же мало считались съ тѣми общими точками зрѣнiя, которыя привели Майера къ его великому обобщенiю. Мы видѣли выше, что именно потребность выдѣлить то, что „въ силахъ“ есть дѣйствительнаго, субстанцiональнаго, и привела его къ плодотворному ряду идей. Въ противоположность этому мы встрѣчаемъ даже въ наше время у авторовъ, признающихъ центральное значенiе понятiя объ энергiи, извѣстный страхъ предъ тѣмъ, чтобы признать энергiю прямо безъ обиняковъ субстанцiей, чтобы признать за ней, по крайней мѣрѣ, такую же степень дѣйствительности, какъ и за матерiей. Мы встрѣчаемъ здѣсь постоянно тѣ же возраженiя, что энергiя все-таки представляетъ собой абстракцiю, математическую функцiю, которая обладаетъ только той особенностью, что она при всѣхъ обстоятельствахъ сохраняетъ постоянное значенiе. Здѣсь происходитъ смѣшенiе понятiй, которое вызывается своеобразной особенностью всѣхъ европейскихъ языковъ, и котораго нужно тѣмъ болѣе остерегаться, что постоянное повторенiе этой ошибки обнаруживаетъ, какъ легко мы въ нее впадаемъ. Это есть привычка, усвоенная языкомъ, называть общее понятiе и конкретный объектъ, соотвѣтствующій этому понятію, тѣмъ же словомъ.

Подъ „музыкой“, напримѣръ, мы разумѣемъ какъ общее искусство соединять тоны такимъ образомъ, чтобы они вызывали въ насъ эстетическое наслажденіе, такъ и каждый частный случай, въ которомъ этотъ актъ практически осуществляется. Такимъ же образомъ подъ *энергіей* вообще разумѣютъ, какъ общую функцію измѣримыхъ величинъ, сохраняющую постоянное значеніе при всѣхъ обстоятельствахъ, такъ и каждое частное значеніе этой функціи. Тѣ, которые отрицаютъ реальность энергіи, очевидно, всегда имѣютъ въ виду это общее понятіе, которое именно въ интересахъ общности оставляетъ въ сторонѣ всѣ частные способы его опредѣленія. Они опускаютъ, однако, при этомъ изъ виду, что слово „энергія“ одновременно обозначаетъ также каждое реальное осуществленіе общей функціи. Если существуетъ объектъ, который имѣетъ опредѣленное, численное значеніе въ установленной системѣ измѣренія, если это значеніе ни при какомъ процессѣ не можетъ мѣняться, то онъ въ высшей мѣрѣ удовлетворяетъ тѣмъ требованіямъ, которыя можно поставить относительно его реальности. Въ частности, возможность предсказанія здѣсь осуществляется тѣмъ, что это значеніе до и послѣ каждаго процессаостается равнымъ самому себѣ. На томъ, какое научное техническое значеніе имѣетъ эта возможность предсказанія, не приходится останавливаться, такъ какъ на этомъ именно покоится огромный прогрессъ, вызванный закономъ сохраненія энергіи.

Наконецъ реальность энергіи наиболѣе ярко сказывается въ томъ обстоятельствѣ, что она имѣетъ рыночную, торговую цѣнность. Наиболѣе отчетливо это обнаруживается на энергіи *электрической*; здѣсь потребители получаютъ и оплачиваютъ энергію въ чистомъ видѣ, между тѣмъ какъ всѣ „матеріальныя“ части электрическихъ установокъ отъ потребленія не умаляются и не измѣняются.

Нѣкотораго рода оправданіе указаннаго выше смѣшенія понятій мы находимъ въ томъ обстоятельствѣ, что общее понятіе энергіи дѣйствительно чрезвычайно широко и въ отношеніи частныхъ своихъ признаковъ допускаетъ почти неограниченное многообразіе. Дѣйствительно, кромѣ того обстоятельства, что энергія представляетъ собой существенно положительную величину, каковая обладаетъ характеромъ величины въ болѣе тѣсномъ смыслѣ этого слова, т. е. можетъ неограниченно наращаться, и кромѣ свойства количественнаго постоянства при всѣхъ превращеніяхъ, я не былъ въ состояніи указать ни одного признака, который въ равной мѣрѣ примѣнялся бы ко всѣмъ различнымъ видамъ энергіи. Это обстоятельство также постоянно приводится, какъ возраженіе противъ энергетики, точно эта общность представляетъ собой слабое мѣсто или позорное пятно понятія объ энергіи. Между тѣмъ достаточно лишь одно мгновеніе поразмыслить надъ задачей, подлежащей разрѣшенію, чтобы убѣдиться, что именно это свойство, подвергающееся такой хулѣ, необходимо для нашихъ цѣлей. О чемъ собственно идетъ рѣчь? Рѣчь идетъ о задачѣ, заключающейся въ томъ, чтобы подыскать понятіе, которое находитъ примѣненіе къ возможно большому кругу явленій и въ тоже время выражаетъ возможно больше опредѣленнаго относительно каждаго отдѣльнаго явленія. Механическая теорія старалась найти это понятіе *въ движеніи*, но вынуждена была ввести еще понятіе о массѣ и силѣ, чтобы сдѣлалось возможнымъ дѣйствительно изображать фактическія явленія. И между тѣмъ результатъ для механическихъ (или, съ точки зрѣнія этой гипотезы крипто-механическихъ) явленій въ смыслѣ возможныхъ предсказаній оказался равнымъ нулю. Напримѣръ, какіе выводы механическая гипотеза дѣлаетъ изъ того допущенія, что теплота представляетъ собой движеніе атомовъ? Фактически ни одного опредѣленнаго вывода. Въ самомъ дѣлѣ, развитая Бернулли кинетическая теорія газовъ покоится на цѣломъ рядѣ дальнѣйшихъ допущеній; это непосредственно ясно уже изъ того, что она не находитъ себѣ примѣненія къ твердымъ и жидкимъ тѣламъ. Между тѣмъ механическое міровоззрѣніе непосредственно не дало никакихъ указаній относительно особеннаго характера тѣхъ движеній, которыя предполагаетъ кинетическая теорія газовъ. Такъ какъ, съ другой стороны, эти движенія все же должны были имѣть опредѣленную величину и опредѣленное направленіе, то эта гипотеза привела къ цѣлому ряду вопросовъ, которые экспериментально не имѣли никакого значенія. Возникли, по удачному выраженію Маха, *кажущіяся проблемы*, т. е. проблемы, обладающія той странной особенностью, что въ томъ даже случаѣ, если бы какія либо сверхъестественныя силы дали бы намъ ихъ рѣшеніе, то мы все же не могли бы съ этимъ рѣшеніемъ ничего сдѣлать, такъ какъ оно не относилось бы къ величинамъ, доступнымъ нашему наблюденію.

Напротивъ, необычайная общность понятія объ энергіи приводитъ къ тому, что такого рода кажущіяся проблемы никогда не возникаютъ. Если въ какомъ-либо тѣлѣ имѣется нѣкоторое количество тепла, то на основаніи принципа энергіи мы, конечно, не въ состояніи высказать ничего относительно „внутренней природы“ этого явленія; но мы можемъ съ увѣренностью предсказать, что всякое измѣненіе теплового состоянія нашего тѣла будетъ сопровождаться измѣненіями другихъ смежныхъ видовъ энергіи, размѣръ которыхъ мы можемъ предвычислить, зная количественно протекающій тепловой процессъ. Далѣе, изъ того особеннаго свойства тепловой энергіи, которое называютъ *температурой,* мы можемъ сдѣлать еще спеціальное предсказаніе; но при этомъ рѣчь всегда идетъ о вещахъ, доступныхъ измѣренію и никогда не о внутренней природѣ вещей.

Противники энергетики склонны все это признать; они утверждаютъ только, что въ этомъ именно и заключается слабая сторона энергетики, между тѣмъ какъ механическое воззрѣніе даетъ намъ возможность, хотя бы гипотетически проникнуть въ эти тайники природы. Это логика такого же сорта, какъ если бы, напримѣръ, купецъ вздумалъ относиться легко къ трезвому разсчету своего дебета и кредита и вмѣсто этого сталъ бы дѣлать гипотетическіе разсчеты о томъ, каково было бы его состояніе, если бы обстоятельства сложились такъ или иначе. Если бы даже онъ имѣлъ основаніе считать свои допущенія вѣроятными, то никто не призналъ бы такого рода разсчета солиднымъ, никто не назвалъ бы его купеческимъ. Онъ можетъ, конечно, размышлять о возможностяхъ и вѣроятностяхъ, чтобы составить себѣ представленіе о шансахъ возникающаго невѣрнаго предпріятія, подобно тому, какъ изслѣдователь, приступая къ изслѣдованіямъ въ совершенно неизвѣстной ему области будетъ руководствоваться спекулятивными, вѣроятными соображеніями, чтобы найти для себя точку отправленія, чтобы уяснить себѣ, въ какомъ направленіи экспериментировать. Но солидный купецъ будетъ строить такого рода предположенія о возможныхъ соотношеніяхъ только на такихъ обстоятельствахъ, которыя онъ позже сможетъ провѣрить, которыя онъ имѣетъ въ виду такой провѣркѣ подвергнуть; эти соображенія должны, такимъ образомъ, имѣть своимъ предметомъ такіе объекты, которые поддаются измѣренію и контролю. Но какъ только онъ вводитъ въ свои вычисленія факторы совершенно ему недоступные, солидная работа немедленно прекращается.

Нужно поэтому тщательно отличать предположенія о неизвѣстныхъ соотношеніяхъ между доступными величинами отъ допущенiй, которыя мы дѣлаемъ о величинахъ измышленныхъ и совершенно намъ недоступныхъ. Только допущенiя послѣдняго рода необходимо отбросить, между тѣмъ какъ первыя составляютъ необходимую составную часть изслѣдованiя. Языкъ современной науки называетъ эти два глубоко различные вида допущенiй однимъ и тѣмъ именемъ—*гипотезами*. Я предлагаю сохранить названiе гипотезы только за тѣми допущенiями, которыя не поддаются контролю, такъ какъ къ этой именно категорiи относится большая часть гипотезъ современной науки. Другiя же допущенiя, которыя, подобно лѣсамъ, только и строятся въ цѣляхъ производимаго изслѣдованiя и по ходу работъ, смотря по надобности, замѣняются новыми, болѣе подходящими допущенiями, иногда даже нѣсколько разъ, пока мы фактически не найдемъ искомыя зависимости,—эти допущенiя, имѣющiя цѣлью положительную работу, я называю прототезами (Protothesen). Прототеза устанавливается, такимъ образомъ, въ началѣ изслѣдованiя и исчезаетъ въ концѣ его, если работа была плодотворна; между тѣмъ гипотеза строится тогда, *когда мы не знаемъ, какъ намъ вести дальше свою работу*. Этимъ обусловливается и то обстоятельство, что въ изложенiи научныхъ работъ различныя прототезы, которыми пользовался изслѣдователь, большею частью вовсе не упоминаются: дѣло въ томъ, что вошло въ обычай сообщать только тѣ допущенiя, которыя въ результатѣ оказались вѣрными или, по крайней мѣрѣ, подходящими. Неудачныя прототезы замалчиваются подобно тому, какъ снимаются лѣса, когда оканчивается постройка. Только очень рѣдко, какъ, напримѣръ, въ сообщенiяхъ Кеплера о его астрономическихъ изысканiяхъ, мы узнаемъ кое-что о неудавшихся прототезахъ. Напротивъ, гипотезы въ болѣе узкомъ смыслѣ этого слова занимаютъ въ литературѣ очень много мѣста. Такъ какъ они относятся къ объектамъ науки, собственно недоступнымъ, и не могутъ быть ни доказаны, ни опровергнуты, то на нихъ наматываютъ безчисленныя разсужденiя pro и contra; такъ какъ далѣе проблемы, къ которымъ они приводятся, всегда представляютъ собою кажущiяся проблемы, т. е. относятся къ вещамъ, передъ которыми наука безсильна, то проблемы эти неразрѣшимы, и наука тащитъ ихъ за собой, какъ безотвѣтные вопросы, раздѣлаться съ которыми она не въ состоянiи; это удается тогда, когда намъ становится ясно, что мы имѣемъ дѣло съ кажущейся задачей.

(Продолженiе слѣдуетъ).

Леонардъ Эйлеръ.

Къ 200-лѣтію со дня его рожденія.

(Біографическій очеркъ, составленный по первоисточникамъ и фамильнымъ бумагамъ Шульцъ-Эйлеромъ.)

Леонардъ Эйлеръ, великій математикъ, одинъ изъ знаменитѣйшихъ сыновъ города Базеля, профессоръ математики, членъ Императорской Академіи Наукъ въ Петербургѣ, директоръ Берлинской Королевской Академіи Наукъ, членъ Парижскаго, Лондонскаго и множества другихъ ученыхъ обществъ, родился въ апрѣлѣ 1707 г.; день рожденія его точно не установленъ: по однимъ источникамъ—онъ родился 4-го числа, по другимъ—17-го. Согласно датѣ въ краткомъ жизнеописаніи, начертанномъ на обратной сторонѣ портрета, который одинъ изъ сыновей великаго ученаго подарилъ моему прадѣду, въ нашей семьѣ днемъ рожденія „дяди" издавна считалось 4-ое апрѣля.

Изъ предковъ Леонарда Эйлера старѣйшимъ, о которомъ дошли до насъ свѣдѣнія, является Гансъ Эйлеръ, по прозвищу Хельпинъ; въ 1540 г. онъ состоялъ членомъ городского совѣта въ Шехенгофѣ близъ Линдау и числился въ классѣ такъ называемыхъ имперскихъ гражданъ *).

О второмъ поколѣніи мы знаемъ, что члены его въ 1594 г. состояли въ купеческомъ сословіи въ Базелѣ.

Третье поколѣніе представлено базельскимъ негоціантомъ Павломъ Эйлеромъ, дѣдомъ Леонарда, родившимся въ Базелѣ 2-го октября 1600 г. Его единственный сынъ Павелъ былъ священникомъ въ Ригенѣ, городкѣ, находящемся на разстояніи получаса отъ Базеля. Жена его Маргарита происходила изъ Базельскаго рода Брукеровъ, среди которыхъ насчитывается нѣсколько ученыхъ.

Отъ этихъ двухъ одаренныхъ людей родился Леонардъ Эйлеръ. Родился онъ въ Базелѣ; дѣтство его протекло въ Ригенѣ; учителемъ его былъ отецъ, человѣкъ весьма образованный, ученикъ знаменитаго базельскаго математика Якова Бернулли и самъ страстный любитель математики (8 октября 1688 г. онъ даже сдѣлалъ въ засѣданіи подъ предсѣдательствомъ Бернулли докладъ „De rationibus et proportionibus"); онъ обучалъ своего сына съ ранняго дѣтства математикѣ, хотя и прочилъ его въ теологи. На занятія математикой онъ смотрѣлъ лишь, какъ на развлеченіе для своего необыкновенно способнаго сына; но благодаря этимъ занятіямъ въ мальчикѣ развилась страсть къ математикѣ и обнаружились его рѣдкое дарованіе и выдающаяся память. Уроки отца въ достаточной степени подготовили Леонарда къ слуша-

*) Т. е. подсудныхъ лишь имперскимъ властямъ.

нію академическихъ лекцій въ Базелѣ. Въ аудиторіи онъ обратилъ на себя вниманіе величайшаго изъ жившихъ тогда математиковъ Ивана Бернулли; по предложенію Бернулли Эйлеръ являлся къ нему каждую субботу побесѣдовать о тѣхъ мѣстахъ изъ прочитываемыхъ сочиненій, которыя вызывали въ немъ сомнѣнія и вопросы. Въ 1725 г. Леонардъ получилъ степень магистра, причемъ онъ произнесъ рѣчь на латинскомъ языкѣ; эта рѣчь заключаетъ сравненіе философской системы Ньютона съ системой Декарта.

Получивъ академическую степень, Леонардъ изъ любви къ своему отцу приступилъ къ изученію теологіи и восточныхъ языковъ; занятія его шли весьма успѣшно: для него положительно не существовало ничего труднаго.

Но отъ проницательнаго отца не ускользнуло, конечно, въ чемъ состояло истинное призваніе его сына. Отказавшись отъ

Леонардъ Эйлеръ.

своего личнаго желанія, онъ позволилъ своему сыну всецѣло предаться изученію математики. Съ пламеннымъ усердіемъ принялся Эйлеръ за работу подъ руководствомъ Бернулли; при этомъ онъ пріобрѣлъ друзей въ лицѣ его сыновей Николая и Даніила; оба они были крупные математики; одинъ былъ старше Эйлера, на 12 лѣтъ, другой на 7.

Около этого времени русская императрица Екатерина I осуществила задуманную Петромъ Великимъ мысль объ учрежденіи въ Петербургѣ Академіи Наукъ. Оба сына Бернулли получили въ 1725 г. приглашеніе въ Академію. Они обѣщали Эйлеру имѣть его въ виду; уже черезъ годъ они написали ему, чтобы онъ занялся физіологіей и записался на медицинскій факультетъ. Эйлеръ послѣдовалъ этому совѣту и ревностно взялся за изученіе новой научной отрасли, сулившей ему блестящую карьеру. Не довольствуясь этимъ, онъ попутно пишетъ работу на премію, предложенную Парижской академіей наукъ „О снабженіи кораблей мачтами"; въ 1727 г. его работа была удостоена почетнаго отзыва.

Когда въ 1726 г. Николай Бернулли умеръ вслѣдствіе непривычнаго климата, Эйлеръ получилъ приглашеніе въ Петербургъ въ качествѣ адъюнкта по математическому отдѣленію Академіи.

Въ то время математику трудно было расчитывать на блестящую карьеру: еще слишкомъ свѣжо было воспоминаніе о выдающихся математикахъ конца XVII и начала XVIII столѣтія. Вслѣдъ за великими творцами новой математики, Лейбницемъ и Ньютономъ выступили съ важными отрытіями Гюйгенсъ, Бернулли, Тайлоръ и др. Чѣмъ могъ выдвинуться молодой Эйлеръ въ эпоху столь знаменитыхъ математиковъ?

Эйлеръ направилъ свое вниманіе на всѣ вопросы, которые казались ему недостаточно разработанными. Такъ, артиллерійская наука и навигація въ то время представляли собою не научную систему, а лишь массу нагроможденныхъ фактовъ. Неправильности въ движеніи небесныхъ тѣлъ и въ особенности запутанная система силъ, вліяющихъ на движеніе луны, давно уже было предметомъ безплодныхъ трудовъ величайшихъ математиковъ, безплодныхъ, быть можетъ, вслѣдствіе того, что не было надежныхъ правилъ для изготовленія зрительныхъ трубъ. Всѣмъ этимъ занялся Эйлеръ. Онъ чувствовалъ въ себѣ неисчерпаемый запасъ энергіи, и никакія трудности работы не могли поколебать его увѣренность въ свои силы. Онъ улучшилъ зрительныя трубы для астрономическихъ наблюденій. За свои работы о природѣ и свойствахъ огня и за важныя изслѣдованія о приливѣ и отливѣ онъ получилъ премію Королевской Академіи Наукъ въ Парижѣ. Онъ расширилъ предѣлы столь несовершеннаго еще въ то время интегральнаго счисленія, изобрѣлъ счисленіе помощью круговыхъ или угловыхъ величинъ*), упростилъ множество аналитическихъ операцій и пролилъ новый свѣтъ на всѣ области математики.

Въ Россію Эйлеръ прибылъ 7-го мая 1727 г., въ день смерти императрицы Екатерины I. Царствованіе Петра II не благопріятствовало развитію научнаго изслѣдованія, и Эйлеру пришлось поступить на русскую морскую службу лейтенантомъ. Къ счастью, скоро наступили лучшія времена. Когда въ 1730 г. на престолъ

*) Эйлера собственно можно назвать только отцомъ современной *сферической* тригонометріи.

вступила императрица Анна, Академія Наукъ, за самое существованіе которой уже серьезно опасались, стала на болѣе прочную почву. Эйлеръ получилъ освободившуюся должность профессора физики и въ 1733 г. послѣ возвращенія Николая Бернулли въ Швейцарію сдѣлался членомъ Академіи. Теперь лишь Эйлеръ проявилъ свои дарованія во всей ихъ мощи; о его продуктивности свидѣтельствуетъ необыкновенное множество научныхъ работъ, которыя онъ представилъ за этотъ періодъ Академіи.

Въ 1735 г. онъ далъ примѣръ той поразительной легкости, съ которой онъ разрѣшалъ самые запутанные вопросы. За три дня и три ночи онъ произвелъ вычисленіе, для котораго различные академики испросили себѣ двухмѣсячный срокъ. Но это необычайное напряженіе обошлось ему очень дорого: онъ заболѣлъ горячкой, которая чуть не свела его въ могилу; но здоровый организмъ одержалъ верхъ, и онъ поплатился лишь потерей праваго глаза, пострадавшаго вслѣдствіе абсцесса.

Спустя годъ послѣ этого несчастья онъ выпустилъ въ свѣтъ свое первое изъ обширныхъ его сочиненій „Механику" въ двухъ томахъ in quarto. Учебникъ этотъ былъ напечатанъ и одобренъ Академіей въ 1736 г.; онъ доставилъ автору почетное мѣсто среди величайшихъ геометровъ того времени.

Труды, которые онъ до того времени обнародовалъ по самымъ труднымъ вопросамъ науки, столь многочисленны, что трудно понять, какъ могъ одинъ человѣкъ столь много сдѣлать.

Въ 1733 г. Эйлеръ женился на Екатеринѣ Гзелль, дочери художника изъ С.-Галлена. Императоръ Петръ I познакомился съ Гзеллемъ въ Голландіи, пригласилъ его къ себѣ на службу и взялъ его съ собою въ Петербургъ. Это былъ очень счастливый бракъ. Отъ своей жены Эйлеръ имѣлъ 13 дѣтей; однако, изъ нихъ восьмеро умерли въ дѣтскомъ возрастѣ. Что касается остальныхъ дѣтей, то старшій сынъ Іоганнъ Альбертъ, родившійся 16 ноября 1734 г., рано пошелъ по стопамъ своего великаго отца; онъ получилъ извѣстность благодаря своимъ собственнымъ работамъ и многочисленнымъ наградамъ, которыми удостоили его Академіи въ Петербургѣ, Парижѣ, Мюнхенѣ и Геттингенѣ, а также благодаря дѣятельному участію, которое онъ принималъ въ послѣднихъ работахъ своего отца. Въ 1763 г. онъ сдѣлался членомъ Петербургской Академіи; умеръ онъ 66 лѣтъ отъ роду. Второй сынъ Іоганнъ Карлъ, родился 15-го іюля 1740 г, ум. въ 1790 г.; онъ состоялъ придворнымъ врачемъ и былъ удостоенъ высокихъ почестей.

Третій сынъ Христофъ (род. 1 мая 1745 г. въ Берлинѣ) былъ артиллерійскимъ подполковникомъ и главнымъ смотрителемъ Систербекскаго оружейнаго завода. Ученому міру онъ извѣстенъ своими астрономическими наблюденіями: въ 1769 г. онъ былъ командированъ въ Орскъ для наблюденія прохожденія Венеры по диску солнца. Онъ умеръ въ 1812 г.

Старшая дочь вышла замужъ за майора фонъ-Белля, младшая—за барона фонъ-Деленъ. По смерти жены Эйлеръ вслѣдствіе семейныхъ обстоятельствъ долженъ былъ вторично вступить въ бракъ; его второй женой была двоюродная сестра его покойной жены, Саломея Авигайль Гзелль, внучка знаменитой Сивиллы Меріанъ.

Родоначальникомъ фамиліи Меріанъ является Вальтеръ, который въ XVI вѣкѣ былъ ратманомъ въ Базелѣ. Въ 1659 г. онъ получилъ дворянское достоинство, а Майнцскій курфюрстъ возвелъ его въ тайные совѣтники. Въ 1716 г. онъ умеръ бездѣтнымъ; судя по описаніямъ послѣднихъ лѣтъ великаго ученаго, его второй бракъ также слѣдуетъ признать счастливымъ.

Въ жизни Эйлера тѣмъ временемъ наступила замѣчательная пора. Блестящій успѣхъ увѣнчалъ его многочисленные труды, и имя его прославилось по всей Европѣ; онъ сталъ получать много выгодныхъ предложеній, которыя онъ, однако, всѣ отклонялъ.

Но 28 октября 1740 г. умерла императрица Анна; рядъ дворцовыхъ революцій завершился 16 декабря 1741 г. восшествіемъ на престолъ императрицы Елизаветы Петровны. Въ то время Эйлеръ получилъ отъ прусскаго посланника графа фонъ-Мардефельдъ приглашеніе вступить на службу къ прусскому королю. Старое Королевское Общество, начало которому положилъ Лейбницъ, почерпнуло новыя силы во вниманіи, которымъ Фридрихъ II одарилъ его при своемъ вступленіи на престолъ. Предполагалось учредить новую Академію Наукъ и пригласить Эйлера въ качествѣ директора отдѣленія математическихъ наукъ. Эйлеръ принялъ это весьма почетное предложеніе; 17 іюня 1741 г. онъ покинулъ С.-Петербургъ. Онъ не засталъ короля въ Берлинѣ, такъ какъ въ то время Фридрихъ II вторгся въ Силезію, открывъ этимъ походомъ цѣлый рядъ войнъ. Изъ лагеря подъ Рейхенбахомъ монархъ, занятый войной, все же отправилъ Эйлеру письмо, которое тотъ получилъ въ день своего прибытія въ Берлинъ. Это лестное для Эйлера посланіе было слѣдующаго содержанія:

Monsieur Эйлеръ!

Мнѣ очень пріятно знать, что Вы довольны своей судьбой и своимъ настоящимъ положеніемъ. Я отдалъ необходимыя распоряженія Главному Управленію относительно 1600 экю пенсіи, которую я назначилъ Вамъ. Если вамъ еще что-нибудь понадобится, Вамъ остается лишь подождать моего возвращенія въ Берлинъ.

Остаюсь благосклонный къ Вамъ Король Фридрихъ.

Королева-мать, охотно бывавшая въ обществѣ ученыхъ, встрѣтила Эйлера весьма милостиво. Эйлеръ сдѣлался однимъ изъ самыхъ дѣятельныхъ членовъ только что возникшаго ученаго Общества, развитіе котораго весьма затруднялось войнами, столь неблагопріятными для наукъ. Эйлеръ помѣстилъ въ послѣдней части „Berlinische Miscellanea“ пять работъ, которыя считаются однѣми изъ лучшихъ въ этомъ сборникѣ. За этими статьями съ неимовѣрной быстротой послѣдовало очень много весьма важныхъ изслѣдованій; они разсѣяны въ мемуарахъ, которые Академія съ самаго своего основанія выпускала ежегодно.

Одновременно Эйлеръ систематически представлялъ работы и Петербургской Академіи, которая, начиная съ 1742 г., назначила ему ежегодную пенсію. Эти работы посвящены всѣмъ наиболѣе важнымъ, сложнымъ и труднымъ вопросамъ математическихъ наукъ. Здѣсь мы находимъ множество новыхъ идей, глубокихъ истинъ и важныхъ открытій.

Въ 1744 г. Эйлеръ помимо множества другихъ работъ издалъ также свой извѣстный переводъ „Артиллеріи" Робинса. Король запросилъ Эйлера, какое, по его мнѣнію, лучшее сочиненіе объ артиллерійскомъ дѣлѣ. Хотя за нѣсколько лѣтъ передъ тѣмъ англичанинъ Робинсъ въ грубой формѣ раскритиковалъ непонятую имъ „Механику" Эйлера, послѣдній не задумался рекомендовать королю книгу этого самаго Робинса, излагавшую новыя основанія артиллеріи, и, кромѣ того, самъ вызвался перевести книгу на нѣмецкій языкъ и снабдить ее дополнительными примѣчаніями. Послѣднія составили полную теорію движенія брошенныхъ тѣлъ (баллистики). Въ теченіе 38 послѣдующихъ лѣтъ въ этой трудной области механики не появилось ничего, что могло бы итти въ сравненіе съ работой Эйлера.Этотъ трудъ вездѣ былъ оцѣненъ по достоинству; французскій морской министръ Тюрго велѣлъ сдѣлать французскій переводъ книги и ввести его въ ариллерійскія училища. По этому поводу Эйлеръ получилъ отъ Тюрго письмо слѣдующаго содержанія:

Фонтенебло, 15 октября 1775 г.

„Съ того времени, какъ я сталъ завѣдывать морскимъ министерствомъ, у меня сложилось убѣжденіе, что я окажу наилучшую услугу дѣлу обученія молодыхъ людей, воспитывающихся въ артиллерійскихъ и морскихъ школахъ, давъ имъ возможность изучить Ваши труды въ названныхъ областяхъ математики. Поэтому я предложилъ моему Государю отдать распоряженіе о напечатаніи Вашего трактата о конструкціи и маневрахъ судовъ, а также о переводѣ на французскій языкъ Вашихъ примѣчаній къ Робинсовскимъ принципамъ артиллеріи.

Если бы я имѣлъ возможность, то я испросилъ бы Вашего согласія прежде, чѣмъ воспользоваться принадлежащими Вамъ трудами; но я надѣюсь, что Вы найдете полное удовлетвореніе въ доказательствѣ благосклонности къ Вамъ моего Государя: Его Величество уполномочилъ меня передать Вамъ тысячу рублей; Онъ просилъ Васъ принять эту сумму, какъ знакъ уваженія къ Вашимъ многочисленнымъ трудамъ и заслугамъ.

Я счастливъ выполнить это порученіе, и я искренно радъ случаю выразить Вамъ тѣ чувства, которыя я издавна питаю къ великому человѣку, украшающему человѣческій родъ и науку своимъ геніемъ и возвышеннымъ характеромъ."

Что Эйлеръ былъ также глубокимъ философомъ, явствуетъ изъ цѣлаго ряда блестящихъ статей, въ которыхъ онъ выступаетъ противъ Ньютоновой теоріи свѣта и противъ философской системы Вольфа, которая въ то время пользовалась въ Берлинѣ большимъ распространеніемъ.

Эйлеръ первый поднялъ картографію на высоту настоящей науки. Въ 1749 г. появился въ свѣтъ его знаменитый трудъ о навигаціи. Это сочиненіе, изданное С.-Петербургской Академіей Наукъ, состоитъ изъ трехъ частей и содержитъ систематическую обработку наиболѣе важныхъ и трудныхъ вопросовъ, относящихся къ теоріи движенія и равновѣсія плавающихъ тѣлъ и сопротивленія жидкостей; въ 1749 г. оно было удостоено преміи Парижской Академіи Наукъ.

Эта книга написана на латинскомъ языкѣ и вслѣдствіе этого была недоступна профессіональнымъ морякамъ; поэтому Эйлеръ послѣ многократныхъ совѣщаній съ русскимъ адмираломъ Кнотулесомъ задумалъ издать переводъ этой книги, выпустивъ изъ нея все то, что для моряка не представляетъ значенія или мало доступно ему.

Такова исторія появившагося въ 1773 г. подробнаго руководства для моряковъ: „Theorie des Baues und der Behandbung der Schiffe".

Никогда еще математическое сочиненіе не имѣло большаго успѣха. Тотчасъ же вышло новое изданіе въ Парижѣ, и оно было введено въ королевскія морскія училища.

Почти одновременно появились переводы на русскомъ, англійскомъ и итальянскомъ языкахъ. Отъ французскаго короля Эйлеръ получилъ почетный даръ въ 6000 ливровъ, отъ русской императрицы Анны 2000 рублей. Здѣсь же упомянемъ, что Эйлеръ былъ выбранъ иностраннымъ членомъ Королевской Академіи въ Парижѣ, хотя по уставу число иностранныхъ членовъ въ ней было ограничено восмью, и всѣ мѣста въ то время были заняты. Это избраніе считалось высшимъ отличіемъ, какого могъ удостоиться ученый; письмо, которое Эйлеръ получилъ по этому случаю отъ королевскаго статсъ-секретаря д'Аржансона, свидѣтельствуетъ, какое глубокое уваженіе питалъ къ нему король. Вообще въ огромной перепискѣ Эйлера мы находимъ многочисленныя доказательства заслуженнаго преклоненія, которымъ онъ пользовался со стороны наиболѣе замѣчательныхъ современниковъ. Старшій сынъ Эйлера по смерти своего отца былъ избранъ на его мѣсто въ качествѣ иностраннаго члена въ Парижеской Академіи какъ за свои личныя заслуги, такъ и изъ уваженія къ памяти его отца.

По многимъ важнымъ вопросамъ король прусскій обращался за совѣтомъ къ Эйлеру: напримѣръ, по дѣлу о нивеллировкахъ для Финовскаго канала между Гавелемъ и Одеромъ, далѣе, относительно Шёнебекскихъ соляныхъ копей и водопровода въ Санъ-Сусси, а также при разсмотрѣніи плана лоттереи, представленнаго нѣкимъ Calapighi. Такимъ образомъ, Эйлеръ непосредственно имѣлъ возможность примѣнить свой умъ и познанія на благо государству; король обращался къ Эйлеру нерѣдко и по дѣламъ Академіи и университета въ Галле; о томъ глубокомъ довѣріи, которое питалъ къ Эйлеру король, этотъ мудрецъ на тронѣ,—свидѣтельствуетъ коллекція изъ 54 писемъ, изъ которыхъ многія писаны собственноручно королемъ.

О заслугахъ Эйлера въ оптикѣ и астрономіи можно судить по его спору съ знаменитымъ англичаниномъ Доллономъ, придерживавшимся въ вопросѣ о телескопахъ взглядовъ Ньютона, съ которымъ Эйлеръ расходился. Ученый споръ окончился тѣмъ, что англичанинъ, основательно разсмотрѣвъ взгляды Эйлера, согласился съ нимъ; въ 1757 г. теорія Эйлера получила блестящее подтвержденіе благодаря открытію ахроматическихъ стеколъ, составившему эпоху въ астрономіи и діоптрикѣ.

За телескопы и микроскопы, изготовленные подъ непосредственнымъ руководствомъ Эйлера, онъ получилъ отъ короля благодарственное письмо, написанное въ самыхъ теплыхъ выраженіяхъ.

Такимъ образомъ, астрономія обязана спору съ Доллономъ однимъ изъ самыхъ важныхъ открытій XVIII столѣтія, оказавшимъ огромныя услуги астрономамъ-наблюдателямъ.

Не смотря на свое высокое положеніе въ Берлинѣ Эйлеръ все-же питалъ особенную любовь къ той странѣ, гдѣ онъ провелъ свои молодые годы, и къ тому учрежденію, которое было колыбелью его славы. Онъ все время пребыванія въ Берлинѣ поддерживалъ тѣсную связь съ Петербургской Академіей, и въ немъ жило желаніе вернуться туда обратно. Просвѣщенное покровительство императрицы Екатерины Великой придало Академіи новый блескъ. Это обстоятельство еще болѣе увеличило желаніе Эйлера поступить на русскую службу. Его желаніе исполнилось въ 1766 г. Князь Владиміръ Сергѣевичъ Долгорукій, русскій министръ въ Берлинѣ, согласился отъ имени императрицы на выставленныя Эйлеромъ условія, заключавшіяся въ жалованіи въ 3000 рублей, пенсіи въ 1000 рублей для его вдовы и предоставленіи должностей его тремъ сыновьямъ.

Лишь съ большимъ трудомъ получилъ Эйлеръ отъ короля Фридриха отставку для себя и двухъ старшихъ сыновей; младшій же, артиллерійскій лейтенантъ, долженъ былъ остаться на прусской службѣ. Въ іюнѣ 1766 г. Эйлеръ покинулъ Берлинъ, въ которомъ провелъ двадцать пять лѣтъ.

Когда Эйлеръ готовился къ отъѣзду изъ Берлина, онъ получилъ черезъ князя Адама Черторійскаго приглашеніе польскаго короля Станислава Августа направить свой путь черезъ Варшаву. Здѣсь ученый вмѣстѣ съ семьей провелъ десять дней, которые онъ считалъ одними изъ счастливѣйшихъ въ своей жизни; воспоминаніе о нихъ еще на склонѣ дней доставляло ему живѣйшую радость, и объ этихъ дняхъ онъ любилъ разсказывать своимъ дѣтямъ и внукамъ. Послѣ этого визита у Эйлера съ монархомъ завязалась переписка, доставившая Эйлеру множество радостныхъ часовъ. Благодаря покровительству короля поѣздка Эйлера съ семьей по Польшѣ обратилась въ сплошное празднество. Наконецъ, 17 іюля 1765 г., Эйлеръ прибылъ въ Петербургъ. Онъ тотчасъ былъ представленъ императрицѣ. Благодаря высокому ходатайству императрицы младшій сынъ Эйлера тоже получилъ разрѣшеніе послѣдовать за отцомъ и поступить на русскую службу. Не успѣлъ еще Эйлеръ устроиться въ своемъ домѣ, на покупку котораго онъ получилъ отъ императрицы 8000 рублей, какъ онъ серьезно заболѣлъ. Болѣзнь окончательно лишила его зрѣнія: на его лѣвомъ глазу, истощенномъ чрезмѣрной работой, образовался катарактъ.

Не столь сильный духомъ человѣкъ, очутившись въ такомъ положеніи, предался бы полному бездѣйствію. Несчастье, обрушившееся на Эйлера, грозило положить конецъ ученой дѣятельности великаго мужа; но вскорѣ феноменальная память и чрезвычайная сила воображенія, еще увеличившаяся благодаря отсутствію развлекающихъ впечатлѣній извнѣ, до нѣкоторый степени замѣнили ему потерянное зрѣніе.

Прежде всего онъ приступилъ къ составленію учебника алгебры. При этой работѣ онъ пользовался помощью одного молодого служителя, привезеннаго имъ изъ Берлина. Такъ было написано знаменитое „Введеніе въ Алгебру“. Русскій переводъ появился въ свѣтъ за два года до напечатанія нѣмецкаго оригинала. Вскорѣ вышелъ и французскій переводъ. Вслѣдъ за тѣмъ слѣпой ученый приступилъ къ осуществленію работы, давно имъ намѣченной; онъ взялся за дѣло съ неослабной энергіей, и въ теченіе двухъ лѣтъ (1769—1771) появились три тома in quarto его „Діоптрики“, заключавшіе результаты его тридцатилѣтней работы по теоріи и практикѣ оптическихъ приборовъ. Этимъ трудомъ онъ заслужилъ всемірную благодарность.

Въ замѣчательный въ исторіи астрономіи 1769 годъ правители важнѣйшихъ европѣйшихъ государствъ сообща поручили знаменитымъ астрономамъ произвести наблюденіе подъ прохожденіемъ Венеры по диску солнца. Множество астрономовъ было разослано по различнымъ частямъ свѣта: одна русская императрица снарядила десять ученыхъ по всѣмъ краямъ Русской Имперіи.

Тѣмъ временемъ слѣпой Эйлеръ, сидя у себя дома, изыскивалъ способы, чтобы облегчить наблюденія для опредѣленія солнечнаго параллакса. Онъ открылъ новый способъ вычисленія прохожденія планеты и предшествующаго ему солнечнаго затменія и упростилъ опредѣленіе географическаго положенія наблюдателя. Такимъ образомъ, астрономы обязаны Эйлеру существенными улучшеніями, полученными благодаря новому методу опредѣленія параллакса Одну изъ наиболѣе важныхъ работъ Эйлера представляетъ собою „Теорія луны“. Еще въ 1746 г. онъ издалъ таблицы движенія луны, и въ 1753 г. появилась его теорія движеній луны; по этому поводу онъ получилъ отъ британскаго парламента денежный подарокъ въ 300 фунтовъ стерлинговъ.

Парижская Академія, съ своей стороны, присудила ему награду за три работы о неравенствахъ въ движеніи небесныхъ свѣтилъ; предложенныя этой же Академіей работы на премію въ 1770 и 1771 г. Эйлеръ выполнилъ въ сотрудничествѣ со своимъ старшимъ сыномъ, и обѣ преміи достались сообща отцу и сыну.

Поразительно велико терпѣніе и душевное спокойствіе, которыя требовались для производства всѣхъ этихъ чрезычайно сложныхъ изслѣдованій и вычисленій: лишенному зрѣнію приходилось напрягать всю силу своей исключительной памяти и воображенія. Вскорѣ его постигло новое несчастье: въ его домѣ случился пожаръ, лишившій Эйлера и его семью значительной части имущества; ему пришлось разстаться съ домомъ, каждый уголокъ котораго былъ ему хорошо знакомъ, гдѣ издавна привычная обстановка помогала ему мириться со своей слѣпотой. Въ постигшемъ его несчастьи Эйлеръ отовсюду встрѣтилъ сочувствіе; императрица дала ему пособіе въ 6000 рублей. Въ это тяжелое время слѣпой мудрецъ сохранилъ полное спокойствіе духа, вызывавшее глубокое удивленіе у всѣхъ его друзей; онъ заканчивалъ трудъ, котораго одного было бы вполнѣ достаточно, чтобы обезсмертить его имя: въ то время онъ работалъ надъ своимъ классическимъ сочиненіемъ „Mondtheorien“.

Немного мѣсяцевъ спустя знаменитой хирургъ баронъ фонъ-Венцель сдѣлалъ Эйлеру глазную операцію. Операція удалась, и Эйлеръ прозрѣлъ. Радость и ликованія друзей и родныхъ не поддаются описанію. Увы, радость была непродолжительна. Неизвѣстно, по недосмотру ли со стороны ухаживающихъ за нимъ, или по собственному его недостаточно бережному отношенію къ вновь обрѣтенному глазу, но онъ вторично лишился зрѣнія и при томъ въ ужасныхъ страданіяхъ. Опять старецъ долженъ былъ въ своей работѣ пользоваться посторонней помощью. Ему помогали поочередно оба сына, академикъ и подполковникъ, и г.г. Крафтъ, Лехелль и Головинъ. Съ 1773 г. онъ пользовался исключительно услугами Николая Фусса.

Изъ семейныхъ преданій мы знаемъ о его манерѣ работать. Въ рабочей комнатѣ его находился большой столъ, покрытый грифельной доской; ежедневно онъ прогуливался кругомъ него, набрасывая въ общихъ чертахъ свои мысли; послѣднія онъ разъяснялъ своимъ ученикамъ, тѣ развивали ихъ и прочитывали ему вслухъ. То, что получало его одобреніе, немедленно же поступало въ типографію Академіи. Сила и творческая энергія Эйлера не изсякали; онъ неизмѣнно искалъ новыхъ путей, и старался улучшать добытое раньше.

Не разъ предлагалъ онъ графу Владиміру Георгіевичу Орлову представить Академіи столько работъ, чтобы ихъ хватило на 20 лѣтъ послѣ его смерти,—такъ онъ и сдѣлалъ. За семь лѣтъ онъ продиктовалъ Головину семьдесятъ статей, а его ученикъ и преемникъ Николай Фуссъ представилъ въ академію 250 докладовъ.

Список҄ его сочиненій содержитъ 32 отдѣльно изданныхъ сочиненія на латинскомъ, нѣмецкомъ и французскомъ языкахъ,

331 статью въ изданіяхъ С.-Петербургской Академіи, всѣ на латинскомъ языкѣ,

14 работъ, представленныхъ Королевской Академіи въ Парижѣ, и 128 работъ—Берлинской Академіи, всѣ на французскомъ языкѣ, и, наконецъ,

196 работъ различнаго содержанія на латинскомъ языкѣ.

Среди такого множества работъ не найдется ни одной, которая бы не содержала либо новаго открытія, либо остроумной мысли, способной навести другихъ на какое-либо открытіе. Самые отвлеченные и трудные вопросы ученія о движеніи небесныхъ тѣлъ, ихъ взаимномъ возмущеніи и неправильностяхъ, разработаны имъ до такой степени совершенства, какая доступна лишь величайшему геометру, создавшему новые методы вычисленія. Наряду съ Галилеемъ, Декартомъ, Лейбницемъ и Ньютономъ, имя Эйлера умретъ лишь вмѣстѣ съ самой наукой.

Немного есть ученыхъ, насчитывающихъ такое количество работъ; ни одинъ геометръ не былъ столь разностороннимъ ученымъ, ни одинъ не сдѣлалъ такъ много для совокупной области всѣхъ математическихъ наукъ.

Въ началѣ сентября 1783 г. Эйлеръ началъ жаловаться на головокруженіе, что не помѣшало ему однако вычислить движеніе воздушныхъ шаровъ, которые въ то время привлекли къ себѣ всеобщее вниманіе; онъ успѣшно вычислилъ одинъ трудный интегралъ, къ которому приводило изслѣдованіе. Однако же эти головокруженія были предвѣстниками смерти, которая послѣдовала 7-го сентября 1783 г.

За обѣдомъ онъ съ свойственнымъ ему живымъ остроуміемъ разговаривалъ съ Фуссомъ и Лекселлемъ о новооткрытой планетѣ, затѣмъ онъ предался послѣобѣденному отдыху. За чаемъ онъ шутилъ съ однимъ изъ своихъ внуковъ, которыхъ онъ училъ математикѣ, какъ вдругъ съ нимъ приключился ударъ. Съ непокидавшимъ его яснымъ сознаніемъ и спокойствіемъ онъ сказалъ: „я умираю!“ Это были его послѣднія слова, онъ потерялъ сознаніе и уснулъ вѣчнымъ сномъ. Онъ прожилъ 76 лѣтъ, 5 мѣсяцевъ и 3 дня. Пятьдесятъ шесть лѣтъ Эйлеръ составлялъ гордость и украшеніе Петербургской Академіи, при немъ она возникла, на его глазахъ и его трудами она росла и развивалась. На запискахъ Академіи явственно отразился его уходъ въ Берлинъ и возвращеніе; въ Петербургѣ его вліяніе на дѣятельность Академіи было столь велико что присутствіе его казалось необходимымъ для жизни и процвѣтанія всего учрежденія.

Эйлеръ обладалъ прекраснымъ здоровьемъ и рѣдкой выносливостью. На его долю выпало рѣдкое счастье, доставляемое сознаніемъ исполненнаго долга, которому онъ остался вѣренъ до послѣдняго часа. Онъ былъ превосходный семьянинъ, и родные обожали его. Чистая атмосфера науки дѣлала его личность обаятельной; помимо своей спеціальности онъ былъ широко образованъ; онъ прочиталъ всѣхъ классическихъ авторовъ древняго Рима и еще на старости лѣтъ онъ зналъ наизусть всю Энеиду; онъ изучилъ всю старую математическую литературу и прекрасно зналъ исторію всѣхъ временъ и всѣхъ народовъ. Привлекаемые его громкой славой и любезностью, его часто навѣщали путешественники. Домъ его былъ средоточіемъ обширнаго избраннаго общества. Всѣ значительные люди стремились быть принятыми въ его общество, и доступъ къ нему считался лучшей рекомендаціей. Добрый и благожелательный ко всѣмъ людямъ, онъ цѣнилъ по достоинству заслуги другихъ, и новыя открытія доставляли ему живѣйшую радость. Настроеніе его всегда было ровное; внѣ своего кабинета онъ былъ веселый, остроумный человѣкъ, и бесѣдовать съ нимъ было большимъ наслажденіемъ. Онъ сохранилъ до конца своей жизни базельскій діалектъ и въ своей рѣчи любилъ пользоваться нѣкоторыми особенными оборотами и выраженіями. Характеръ его отличался чрезвычайной живостью и увлекательной пылкостью, заразительно дѣйствовавшей на окружающихъ. Искренность и неподкупность выдавали въ немъ истаго сына Швейцаріи. Вѣсть о его смерти горестно поразила весь міръ. Короли прусскій, шведскій и польскій, прусскій кронпринцъ, маркграфъ бранденбургскій выразили въ своихъ письмахъ къ его старшему сыну свое глубокое уваженіе къ усопшему. Академики на свой счетъ изготовили бюстъ Эйлера изъ бѣлаго каррарскаго мрамора, а директоръ Академіи, княгиня Дашкова, связанная съ Эйлеромъ глубокимъ взаимнымъ уваженіемъ и дружбой, установила его бюстъ на колоннѣ изъ итальянскаго мрамора въ залѣ засѣданій С.-Петербургской Академіи.

Задача Мальфатти.

Н. Агрономова.

*(Продолженіе *).*

6. Рѣшимъ эту систему сперва алгебраически, а потомъ тригонометрически. Для этого положимъ $y=xu_1^2$ и $z=xu_2^2$ и эти значенія вставимъ вмѣсто y и z въ систему (7). Мы получимъ:

$$\begin{aligned} x[(p-a)+2ru_1+(p-b)u_1^2] &= rc,\\ x[(p-a)+2ru_2+(p-c)u_2^2] &= rb, \qquad (8)\\ x[(p-b)u_1^2+2ru_1u_2+(p-c)u_2^2] &= ra. \end{aligned}$$

*) См. № 437 „Вѣстника“.

Изъ послѣдняго уравненія этой системы опредѣлимъ значеніе x:

$$x=\frac{ra}{(p-b)u_1^2+2ru_1u_2+(p-c)u_2^2}.$$

Вставляемъ это значеніе x въ первыя уравненія системы (7):

$$\left.\begin{aligned} a[(p-a)+2ru_1+(p-b)u_1^2]&=c[(p-b)u_1^2+2ru_1u_2+(p-c)u_2^2],\\ a[(p-a)+2ru_2+(p-c)u_2^2]&=b[(p-b)u_1^2+2ru_1u_2+(p-c)u_2^2].\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Пользуясь равенствами § 4, мы можемъ равенства (9) переписать въ такой формѣ:

$$\left.\begin{aligned} \{d_1[ru_1+(p-c)u_2]\}^2&=\{d_3[ru_1+(p-a)]\}^2,\\ \{d_1[ru_2+(p-b)u_1]\}^2&=\{d_2[ru_2+(p-a)]\}^2.\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Разложимъ оба равенства на множителей:

$$\left.\begin{aligned} &\{d_1[ru_1+(p-c)u_2]+d_3[ru_1+(p-a)]\}.\{d_1[ru_1+(p-c)u_2]-d_3[ru_1+(p-a)]\}=0,\\ &\{d_1[ru_2+(p-b)u_1]+d_2[ru_2+(p-a)]\}.\{d_1[ru_2+(p-b)u_1]-d_2[ru_2+(p-a)]\}=0.\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

7. Итакъ, для опредѣленія u_1 и u_2, а, стало быть, и для опредѣленія x, y, z мы имѣемъ 4 системы уравненій. Такъ какъ наши круги касаются сторонъ тр-ка внутри его, то для опредѣленія x, y, z необходимо взять систему, составленную изъ вторыхъ множителей, т. е.

$$\left.\begin{aligned} d_1[ru_1+(p-c)u_2]&=d_3[ru_1+(p-a)],\\ d_1[ru_2+(p-b)u_1]&=d_2[ru_2+(p-a)].\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Рѣшить эту систему не представляется затрудненій. Опредѣливъ отсюда x, y, z, мы весьма легко найдемъ, что

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{r}{p-a}\cdot\frac{bc-(d_1-d_2)(d_1-d_3)}{b[c-(d_1-d_2)]^2+2d_1[c-(d_1-d_2)].[b-(d_1-d_3)]+c[b-(d_1-d_3)]^2},\\ y&=\frac{r}{p-b}\cdot\frac{ca-(d_2-d_3)(d_2-d_1)}{c[a-(d_2-d_3)]^2+2d_2[a-(d_2-d_3)].[c-(d_2-d_1)]+a[c-(d_2-d_1)]^2},\\ z&=\frac{r}{p-c}\cdot\frac{ab-(d_3-d_1)(d_3-d_2)}{a[b-(d_3-d_2)]^2+2d_3[b-(d_3-d_1)].[a-(d_3-d_2)]+b[a-(d_3-d_2)]^2}.\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Сравнивая эти значенія x, y, z со значеніями, полученными для x, y, z Мальфатти, мы замѣчаемъ въ нихъ большое различіе. Но это различіе въ значеніяхъ x, y, z легко устраняется довольно долгими, но простыми вычисленіями [1]).

---

[1]) Bullet. de l'Acad. royale de Belgique, t. 38.

Жергонъ, авторъ этого рѣшенія, между прочимъ, не могъ привести своихъ формулъ къ формуламъ Мальфатти. Это выполнилъ нѣкто Симонъ. Приводить здѣсь его вычисленія не имѣетъ смысла.

8. Система уравненій (7) весьма простыми соображеніями приводится къ слѣдующему виду:

$$\left.\begin{aligned} x\operatorname{tang}\alpha + 2\sqrt{xy} + y\operatorname{tang}\beta &= \operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta,\\ y\operatorname{tang}\beta + 2\sqrt{yz} + z\operatorname{tang}\gamma &= \operatorname{tang}\beta + \operatorname{tang}\gamma,\\ z\operatorname{tang}\gamma + 2\sqrt{zx} + x\operatorname{tang}\alpha &= \operatorname{tang}\gamma + \operatorname{tang}\alpha, \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

если мы введемъ слѣдующія обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} \angle\alpha &= \angle 90 - \frac{A}{2},\\ \angle\beta &= \angle 90 - \frac{B}{2},\\ \angle\gamma &= \angle 90 - \frac{C}{2}\\ \text{и } r &= 1. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Помня, что

$$\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta + \operatorname{tang}\gamma = \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta\operatorname{tang}\gamma,$$

перемножимъ на крестъ второе и третье уравненіе системы (14); получимъ:

$$(\operatorname{tang}\beta + \operatorname{tang}\gamma)(x\operatorname{tang}\alpha + 2\sqrt{xy}) - (\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\gamma)(y\operatorname{tang}\beta + 2\sqrt{yz}) =$$

$$= \operatorname{tang}\gamma(\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta)z,$$

или, послѣ ряда преобрѣзованій:

$$(1 + \operatorname{tang}^2\beta)(\sqrt{x}\operatorname{tang}\alpha + \sqrt{z})^2 = (1 + \operatorname{tang}^2\alpha)(\sqrt{y}\operatorname{tang}\beta + \sqrt{z})^2.$$

По извлеченіи корней мы отсюда получимъ, что

$$\frac{\sqrt{x}\operatorname{tang}\alpha + \sqrt{z}}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\alpha}} = \frac{\sqrt{y}\operatorname{tang}\beta + \sqrt{z}}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\beta}}$$

и, по аналогіи,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sqrt{y}\operatorname{tang}\beta + \sqrt{x}}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\beta}} &= \frac{\sqrt{z}\operatorname{tang}\gamma + \sqrt{x}}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\gamma}}\\ \frac{\sqrt{z}\operatorname{tang}\gamma + \sqrt{y}}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\gamma}} &= \frac{\sqrt{x}\operatorname{tang}\alpha + \sqrt{y}}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\alpha}}. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Сложимъ эти уравненія:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\beta}}-\frac{\operatorname{tang}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha}}-\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\gamma}}\right\}\cdot\sqrt{x}=$$

$$=\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha}}-\frac{\operatorname{tang}\beta}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\beta}}-\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\gamma}}\right\}\cdot\sqrt{y}. \quad (17)$$

Такъ какъ

$$\operatorname{tang}\gamma=-\frac{\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta-1},$$

то

$$\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\gamma}}=\frac{\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta-1}{\sqrt{(1+\operatorname{tang}^2\alpha)(1+\operatorname{tang}^2\beta)}}.$$

Подставляя значеніе $\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\gamma}}$ въ уравненіе (17), мы получимъ слѣдующій результатъ:

$$\{1-\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta+\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha}-\operatorname{tang}\alpha\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\beta}\}\sqrt{x}=$$

$$=\{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}-\operatorname{tang}\beta\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha}\}\sqrt{y},$$

каковое выраженіе рядомъ простыхъ преобразованій можетъ быть приведено къ слѣдующему виду:

$$[(1-\operatorname{tang}\alpha)+\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha}]\sqrt{x}=[(1-\operatorname{tang}\beta)+\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\beta}]\sqrt{y}. \quad (18а)$$

Круговая перестановка буквъ дастъ еще два выраженія:

$$[(1-\operatorname{tang}\beta)+\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\beta}]\sqrt{y}=[(1-\operatorname{tang}\gamma)+\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\gamma}]\sqrt{z}, \quad (18б)$$

$$[(1-\operatorname{tang}\gamma)+\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\gamma}]\sqrt{z}=[(1-\operatorname{tang}\alpha)+\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha}]\sqrt{x}. \quad (18в)$$

9. Положимъ здѣсь для сокращенія:

$$\left.\begin{aligned}1-\operatorname{tang}\alpha+\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha}&=\mathrm{A},\\ 1-\operatorname{tang}\beta+\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\beta}&=\mathrm{B},\\ 1-\operatorname{tang}\gamma+\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\gamma}&=\mathrm{C}.\end{aligned}\right\}\quad (19)$$

Тогда уравненія (18) можно будетъ переписать въ такой формѣ:

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{A}\sqrt{x}&=\mathrm{B}\sqrt{y},\\ \mathrm{B}\sqrt{y}&=\mathrm{C}\sqrt{z},\\ \mathrm{C}\sqrt{z}&=\mathrm{A}\sqrt{x}.\end{aligned}\right\}\quad (20)$$

Вычтемъ теперь изъ суммы двухъ послѣднихъ уравненій системы (14) первое изъ тѣхъ же уравненій. Результатъ этой операціи можетъ быть представленъ въ слѣдующей формѣ:

$$cz+\sqrt{xz}+\sqrt{yz}-\sqrt{zx}=C;$$

сюда подставимъ значенія $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$, опредѣленныя изъ двухъ послѣднихъ уравненій системы (20):

$$\left(c+\frac{C}{A}+\frac{C}{B}-\frac{C^2}{AB}\right)z=c,$$

или

$$[cAB+C(A+B-C)]z=cAB.$$

Подставимъ сюда смѣсто A, B, C ихъ значенія, опредѣляемыя равенствами (19). Такъ какъ

$$cAB+C(A+B-C)=2c(1-c+\sqrt{1+c^2})=2cC,$$

то

$$2Cz=AB.$$

Отсюда

$$z=\frac{AB}{2C}, \qquad (21a)$$

а по аналогіи

$$x=\frac{BC}{2A} \qquad (21б)$$

$$y=\frac{CA}{2B} \qquad (21в)$$

10. Итакъ, задача Мальфатти рѣшена 4 способами: способомъ Мальфатти (§ 2), способомъ Штейнера (§ 3), способомъ Жергона (§§ 5—7) и способомъ Лехмютца. Всѣ эти способы приведены мною, какъ примѣры. Теперь я дамъ небольшой очеркъ современнаго состоянія задачи Мальфатти.

(Продолженіе слѣдуетъ).

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“ и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ

„Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 877 (4 сер.). Доказать возможность рѣшенія съ помощью циркуля и линейки слѣдующей задачи: даны уголъ ABC и точка E на равнодѣлящей смежнаго угла ABD. Провести черезъ точку E сѣкущую EGL, опредѣляющую въ углѣ ABC отрѣзокъ GL данной длины.

И. Александровъ (Москва).

№ 878 (4 сер.). Найти три такихъ цѣлыхъ положительныхъ числа, чтобы сумма ихъ, сложенная съ суммой ихъ произведеній по два, дѣлилась на ихъ произведеніе.

В. Шлыгинъ (ст. Урюпинская).

№ 879 (4 сер.). Доказать, что число

$$\left(\frac{N}{d^k}\right)^{k^{k-1}N}-1$$

дѣлится на k^kN+1, если d^k есть дѣлитель N и если k^kN+1 простое число.

А. Брюхановъ (Иркутскъ).

№ 880 (4 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\sin(\alpha+x)+\sin\alpha\sin x\operatorname{tg}(\alpha+x)=m\cos\alpha\cos x.$$

И. Коровинъ (Петербургъ).

№ 881 (4 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^3+bx^2+cx+\frac{4bc-b^3}{8}=0$$

и показать, что одинъ изъ его корней равенъ суммѣ двухъ другихъ.

(Заимств.).

№ 882 (4 сер.). Для прохожденія наклонной плоскости нѣкоторой длины тѣло употребляетъ 3,1 секунды. Для прохожденія наклонной плоскости той же длины при прежнемъ углѣ наклоненія, но при производствѣ опыта въ водѣ то же тѣло употребляетъ 4,3 секунды. Пренебрегая треніемъ, вычислить плотность этого тѣла.

Л. Ямпольскій (Одесса).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 741 (4 сер.). *Доказать, что числа*

16, 1156, 111556, . . . ,

каждое изъ которыхъ получается изъ предыдущаго вписываніемъ въ средину его 15, *суть точные квадраты.*

(Заимств. изъ *Списание на Физикоматематическото дружество въ София*).

Разсматриваемое число

$$\overbrace{11\ldots1}^{n}\,\overbrace{55\ldots5}^{n-1}6=\overbrace{11\ldots1}^{n}\,\overbrace{55\ldots5}^{n}+1,$$

записываясь по десятичной системѣ n единицами, $n-1$ пятерками и на концѣ шестеркой, единицей болѣе числа, записаннаго n единицами и n пятерками Слѣдовательно, n-ое по порядку изъ разсматриваемыхъ чиселъ равно

$$(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+10+1)\,.\,10^n+5\,(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+10+1)+1=$$

$$=\frac{10^n-1}{10-1}\cdot10^n+\frac{5(10^n-1)}{10-1}+1=\frac{(10^n-1)\,.\,10^n+5(10^n-1)+9}{9}=\frac{10^{2n}+4\,.\,10^n+4}{9}=$$

$$=\left(\frac{10^n+2}{3}\right)^2,$$

откуда видно, что разсматриваемое число есть точный квадратъ раціональнаго, а потому и цѣлаго числа $\frac{10^n+2}{3}$ (въ томъ, что $\frac{10^n+2}{3}$ равно цѣлому числу, можно убѣдиться также непосредственно изъ равенства

$$\left.\frac{10^n+2}{3}=\frac{10^n-1}{3}+1\right).$$

Г. Оганянцъ (Ялта); *А. Турчаниновъ* (Одесса); *Я. Шатуновскій* (Тильфъ); *Г. Лебедевъ* (Обоянь); *В. Булыгинъ.*

№ 745 (4 сер). *Доказать, что число*

$$[n+k(k-1)]^{2n-1}-1$$

дѣлится на $4n-1$, *если* $4n-1$ *простое число, которое не есть дѣлитель* $2k-1$.

Преобразуемъ выраженіе $4^{2n-1}\{[n+k(k-1)]^{2n-1}-1\}$ слѣдующимъ образомъ:

$$4^{2n-1}\{[n+k(k-1)]^{2n-1}-1\}=[4n+4k(k-1)]^{2n-1}-4^{2n-1}=$$

$$=(4n-1+4k^2-4k+1)^{2n-1}-4^{2n-1}=[4n-1+(2k-1)^2]^{2n-1}-[(2k-1)^2]^{2n-1}+$$

$$+[(2k-1)^2]^{2n-1}-(2^2)^{2n-1}=[4n-1+(2k-1)^2]^{2n-1}-[(2k-1)]^{2n-1}+$$

$$+(2k-1)^{4n-2}-2^{4n-2}\quad(1).$$

Но разность $[4n-1+(2k-1)^2]^{2n-1}-[(2k-1)^2]^{2n-1}$ дѣлится на разность $4n-1+(2k-1)^2-(2k-1)^2=4n-1$; кромѣ того, такъ какъ $4n-1$ и $2k-1$ по условію числа взаимно простыя, $4n-1$ и 2 также числа взаимно простыя, то по теоремѣ Fermat'a разности $(2k-1)^{(4n-1)-1}-1$ и $2^{(4n-1)-1}-1$ кратны $4n-1$, а потому и разность

$$[(2k-1)^{(4n-1)-1}-1]-[2^{(4n-1)-1}-1]=(2k-1)^{4n-2}-2^{4n-2}$$

кратна $4n-1$. Слѣдовательно, число $4^{2n-1}\{[n+k(k-1)]^{2n-1}\}$ [см. (1)] также кратно $4n-1$, а такъ какъ 4^{2n-1} и $4n-1$ суть числа взаимно простыя, то и число $[n+k(k-1)]^{2n-1}-1$ кратно $4n-1$.

В. Булыгинъ; *Н. С.* (Одесса).

№ 747 (4 сер.). *Рѣшить систему уравненій*

$$x^2 + y^2 = x^3 + y^3 = x^5 + y^5.$$

(Заимств. изъ *Časopis*).

Представимъ данную систему въ видѣ $x^3 - x^2 = y^2 - y^3$, $x^5 - x^3 = y^3 - y^5$, или

$$x^2(x-1) = y^2(1-y) \quad (1), \qquad x^3(x^2-1) = y^3(1-y^2) \quad (2).$$

Если $x \neq 0$, $x \neq 1$ и $y \neq 0$, $y \neq 1$ (3), то, дѣля уравненіе (2) на уравненіе (1), находимъ:

$$x(x+1) = y(1+y), \text{ или } x^2 - y^2 + x - y = 0, \text{ или } (x-y)(x+y+1) = 0 \text{ (4), откуда}$$

$$x = y \quad (5) \quad \text{или} \quad y = -(x+1) \quad (6).$$

Подставляя въ первое уравненіе данной системы вмѣсто y изъ равенства (5) x и сокращая на 2, получимъ: $x^2 = x^3$, т. е. $x^3 - x^2 = x^2(x-1) = 0$, откуда $x=0$ или $x=1$, что противно предположенію (3). Подставляя значеніе y въ первое уравненіе данной системы изъ равенства (6), находимъ $x^2 + (x+1)^2 = x^3 - (x+1)^3$, откуда $5x^2 + 5x + 2 = 0$ (7). Рѣшая уравненіе (7) и подставляя найденныя значенія x въ равенство (6), получимъ:

$$x_1 = \frac{-5+\sqrt{-15}}{10}, \quad x_2 = \frac{-5-\sqrt{-15}}{10}; \quad y_1 = \frac{-5-\sqrt{-15}}{10}, \quad y_2 = \frac{-5+\sqrt{-15}}{10} \quad (8).$$

Если же $x=0$ или $x=1$, то данная система принимаетъ видъ $y^2 = y^3 = y^5$ или $y^2(y-1)=0$, $y^3(y^2-1)=0$, откуда $y=0$ или $y=1$. Точно также при $y=0$ или $y=1$ получимъ, что $x=0$ или $x=1$. Итакъ, кромѣ рѣшеній (8), данная система допускаетъ еще рѣшенія $x=0$, $y=1$; $x=1$, $y=0$; $x=y=0$; $x=y=1$.

Г. Оганянцъ (Ялта); *Г. Лебедевъ* (Обоянь).

№ 749 (4 сер.). *Рѣшить систему уравненій*

$$\frac{x^2(x^2+y^2)}{x^7-y^7} = a, \qquad \frac{y^2(y^2+x^2)}{x^7-y^7} = b.$$

Если $x=0$, то изъ перваго уравненія мы имѣемъ $a=0$, а изъ второго, $y = -\sqrt[3]{\frac{1}{b}}$ если только b отлично отъ нуля. Будемъ отыскивать другія рѣшенія системы при условіи $x \neq 0$. Умноживъ первое и второе уравненія соотвѣтственно на x^3 и y^3 и вычитая результаты, получимъ:

$$\frac{x^5(x^2+y^5) - y^5(y^2+x^5)}{x^7-y^7} = ax^3 - by^3$$

или, послѣ элементарныхъ упрощеній,

$$ax^3 - by^3 = 1 \qquad (1).$$

Подобнымъ же образомъ, помноживъ первое и второе уравненія системы на y^4 и x^4 и вычитая результаты, находимъ: $ay^4 - bx^4 = -x^2y^2$, или

$$ay^4 + x^2y^2 - bx^4 = 0 \qquad (2).$$

По предположенію $x \neq 0$, а потому равенство (2) можно написать въ видѣ $a\left(\frac{y}{x}\right)^4 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 - b = 0$, или, полагая $y = zx$ (3), въ видѣ $az^4 + z^2 - b = 0$, откуда

$$z = \pm \sqrt{\frac{-1 \pm \sqrt{1+4ab}}{2a}} \quad (4).$$

Равенство (4) даетъ вообще четыре значенія для z; называя одно изъ этимъ значеній черозъ k, получимъ [см. (3), (1)]: $y=kx$, $ax^3-bk^3x^3=1$, откуда

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{a-bk^3}} \quad (5),$$

а затѣмъ [см. (3), (5)] $y=k\sqrt[3]{\frac{1}{a-bk^3}}$ (6). Система имѣетъ вообще 12 рѣшеній, такъ какъ формулы (5) и (6) даютъ для каждаго изъ четырехъ значеній k по три значенія x и y.

Г. Оганянцъ (Ялта); *В. Булыгинъ*.

№ 750 (4 сер.). *На полуокружности даннаго діаметра* AB=2R *построить точку* C *такъ, чтобы для нея произведеніе хорды* AC *на длину перпендикуляра* CD, *опущеннаго изъ этой точки на діаметръ, достигало maximum'а.*

Называя уголъ CBA черезъ α, имѣемъ изъ прямоугольныхъ треугольниковъ ACB и ACD:

$$AC = AB\sin\alpha = 2R\sin\alpha \ (1), \quad CD = AC\cos\alpha = 2R\sin\alpha\cos\alpha,$$

откуда $AC.CD = 4R^2\sin^2\alpha\cos\alpha$. Называя выраженіе $\sin^2\alpha\cos\alpha$ черезъ z, мы видимъ, что произведеніе $AC.CD$ достигаетъ *maximum*'а вмѣстѣ съ z, а потому и вмѣстѣ съ z^2. Но

$$z^2 = \sin^4\alpha.\cos^2\alpha = (\sin^2\alpha)^2(1-\sin^2\alpha).$$

Такъ какъ сумма $\sin^2\alpha + (1-\sin^2\alpha) = 1$ есть величина постоянная, то z^2 достигаетъ *maximum*'а по извѣстной теоремѣ при условіи

$$\frac{\sin^2\alpha}{2} = \frac{1-\sin^2\alpha}{1},$$

откуда $\sin^2\alpha = \frac{2}{3}$ (2). Изъ равенства [см. (1), (2)] $AD = AC\sin\alpha = 2R\sin^2\alpha = \frac{4R}{3}$ находимъ, что для построенія искомой точки достаточно отложить на діаметрѣ отрѣзокъ $AD = \frac{4R}{3}$ и возставить изъ D перпендикуляръ до встрѣчи съ окружностью въ точкѣ C.

Г. Оганянцъ (Ялта); *М. Дореми*; *В. Булыгинъ*.

№ 752 (4 сер.). *Доказать, что число*

$$\left(n - \frac{t^2-1}{16}\right)^{8n} - 1$$

дѣлится на 16n+1, *если* 16n+1 — *простое число, которое не есть дѣлитель* t, *при чемъ* $\frac{t^2-1}{16}$ — *цѣлое число.*

Преобразуемъ выраженіе

$$16^{8n}\left[\left(n - \frac{t^2-1}{16}\right)^{8n} - 1\right]$$

слѣдующимъ образомъ

$$16^{8n}\cdot\left[\left(n-\frac{t^2-1}{16}\right)^{8n}-1\right]=16^{8n}\cdot\left(n-\frac{t^2-1}{16}\right)^{8n}-16^{8n}=(16n+1-t^2)^{8n}-16^{8n}=$$

$$=(16n+1-t^2)^{8n}-16^{8n}+(t^2)^{8n}-(t^2)^{8n}=$$

$$=(16n+1-t^2)^{8n}-(t^2)^{8n}+(t^2)^{8n}-(4^2)^{8n}=$$

$$=(16n+1-t^2)^{8n}-(t^2)^{8n}+t^{16n}-4^{16n}.$$

Такъ какъ показатель $8n$ четный, то разность $(16n+1-t^2)^{8n}-(t^2)^{8n}$ кратна суммы $16n+1-t^2+t^2=16n+1$; точно также, по теоремѣ Фермата, разности $t^{16n}-1$ и $4^{16n}-1$ кратны $16n+1$, такъ какъ t по условію число взаимно простое съ $16n+1$, и 4 также число взаимно простое съ $16n+1$. Слѣдовательно, число

$$16^{8n}\left[\left(n-\frac{t^2-1}{16}\right)^{8n}-1\right]$$

кратно $16n+1$, а такъ какъ 16^{8n} и $16n+1$ тоже числа взаимно простыя, то и число $\left(n-\frac{t^2-1}{16}\right)^{8n}-1$ кратно $16n+1$.

В. Булыгинъ; *Н. С.* (Одесса).

№ 758 (4 сер.). *Найти сумму* n *членовъ ряда*

$$\frac{3}{(1.2)^2}+\frac{5}{(2.3)^2}+\frac{7}{(3.4)^2}+\ldots+\frac{2k+1}{[k(k+1)]^2}+\ldots$$

и найти предѣлъ этой суммы при безконечномъ возрастаніи n.

Складывая равенства

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}=\frac{2^2-1}{(1.2)^2}=\frac{3}{(1.2)^2},$$

$$\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}=\frac{5}{(2.3)^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{2n+1}{[n(n+1)]^2},$$

получимъ:

$$\frac{3}{(1.2)^2}+\frac{5}{(2.3)^2}+\ldots+\frac{2n+1}{[n(n+1)]^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}\qquad(1).$$

При возрастаніи n до безконечности членъ $\frac{1}{(n+1)^2}$ стремится къ нулю, а потому искомый предѣлъ [см. (1)] равенъ 1.

Г. Оганянцъ (Ялта); *Г. Лебедевъ* (Обоянь); *В. Булыгинъ*; *Н. Агрономовъ* (Ревель); *А. Турчаниновъ* (Одесса).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.

ОТКРЫТА ПОДПИСКА НА $190^6|_7$ АКАД. ГОДЪ (III-й годъ изданія).

„ФИЗИКЪ-ЛЮБИТЕЛЬ“.

Журналъ по опытнымъ и прикладнымъ физическимъ наукамъ, выходящій 2 раза въ мѣсяцъ за исключеніемъ іюня и іюля) выпусками въ 32 страницы съ чертежами и рисунками.

Подписная плата:

за годъ съ августа по май (20 номеровъ) **3 руб.**, за ½ года (10 номеровъ) **1 руб. 50 коп.**

Адресъ редакціи и конторы журнала **г. Николаевъ** *(Херс. губ.)*.

Можно выписывать открытымъ письмомъ, наложеннымъ платежемъ на первую книжку журнала, въ размѣрѣ годовой или полугодовой платы съ прибавкою 20 коп.

Учебнымъ заведеніямъ высылается по первому требованію, независимо отъ времени уплаты подписныхъ денегъ.

Журналъ за 1905/6 годъ (II-й годъ изданія) высылается за 3 руб.

Редакторы-Издатели: Кандидатъ Моск. Универс. **К. А. Чернышевъ.**
Инженеръ-Технологъ **В. В. Рюминъ.**

ИЗДАНІЯ ЖУРНАЛА „ФИЗИКЪ-ЛЮБИТЕЛЬ“.

1) **Изъ жизни Павла Николаевича Яблочкова.** *К. А. Чернышева.* Съ 3 рис. и портретомъ. Цѣна . . . . **25 к.**
2) **Говорящая машина.** Исторія изобрѣтенія фонографа и граммофона. Составилъ *В. Р.* Съ 8 рис. Цѣна . . . . . . **25 к.**
3) **Любительское приготовленіе картинъ для волшебнаго фонаря.** *К. Чернышева.* . . . . **25 к.**
4) **Химія безъ лабораторіи.** Составилъ *В. Рюминъ.* . . . . **25 к.**
5) **Замѣтки фотографа-любителя.** *Гр. Ф.* . . . . **25 к.**
6) **Электричество въ домашнемъ быту.** *К. Ч.* . . . . **25 к.**
7) **Ѳ. А. Бредихинъ.** Очеркъ его жизни и дѣятельности. *С. Костинскаго*, старшаго астронома Пулковской Обсерваторіи. **15 к.**
10) **Тригонометрія для самообразованія.** *Д-ръ Эригъ* . . . . . **45 к.**

Выписывающіе изъ конторы журнала за пересылку не платятъ. Суммы менѣе рубля—марками.