Обложка
ищется

Обложка
пщется

Вѣстникъ Опытной Физики
и
элементарной математики.

№ 434.

Эволюція солнечной системы.

Ф. Р. Мультона.

*(Продолженіе *).*

Значеніе контракціонной теоріи солнечной теплоты.—Лапласъ предполагалъ, что первичная солнечная туманность имѣла громадные размѣры и огромную температуру и что вслѣдствіе потери тепла, она сжималась. Послѣ того какъ былъ обоснованъ законъ сохраненія энергіи, и послѣ труда Гельмгольца о контракціонной теоріи солнечной теплоты это допущеніе первоначальной высокой температуры стало излишнимъ. Эта теорія поддержанія энергіи, изливаемой солнечнымъ излученіемъ, принимаетъ, что солнце постоянно сжимается. Слѣдовательно, она очень хорошо согласуется съ гипотезой Лапласа, хотя, очевидно, нѣтъ никакой необходимости предполагать, что солнце въ началѣ своего сокращенія имѣло ту именно форму, которую предполагалъ Лапласъ.

Метеорная гипотеза.—Локіеръ предложилъ гипотезу, что все вещество нашей системы первоначально было не въ состояніи газовъ, а въ состояніи метеоровъ. По его предположенію туманности представляютъ не что иное, какъ огромные рои метеоровъ, которые становятся видимыми вслѣдствіе того, что частицы всей ихъ массы накаляются отъ постоянныхъ столкновеній.

---

*) См. № 433 „Вѣстника“

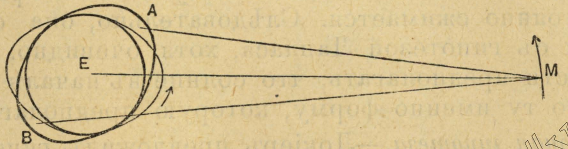
Г. Дарвинъ изслѣдовалъ механическія условія, въ которыхъ находится большой рой метеоровъ. Онъ нашелъ, что при размѣрахъ и массѣ, подобныхъ размѣрамъ и массѣ солнечной системы, условія эти мало отличаются отъ тѣхъ, какія имѣли бы мѣсто, еслибы это были газы. Дѣло сводится къ тому, что гипотеза увеличиваетъ только размѣръ молекулъ; по существу же она не отличается отъ гипотезы Лапласа. Дарвинъ нашелъ, что, еслибы масса значительно расширилась, то она вращалась бы, какъ твердое тѣло.

Приливная теорія. Прежде чѣмъ разсматривать возраженія противъ гипотезы Лапласа, необходимо вкратцѣ обозрѣть вліянія, которыя могутъ оказать на развитіе системы приливы и отливы. Вопросъ этотъ изслѣдованъ Дарвиномъ въ рядѣ замѣчательныхъ мемуаровъ, опубликованныхъ имъ между 1878—1882 г.г. Значительная часть работы носитъ общій характеръ, но детально разработанные численные примѣры относятся къ землѣ и лунѣ.

Дарвинъ предполагаетъ, что земля представляетъ собой вязкую массу, подверженную приливамъ и отливамъ подъ вліяніемъ солнца и луны. Степень вязкости была принята такой, что при небольшой массѣ, какая можетъ подлежать лабораторному изслѣдованію, мы имѣли бы почти совершенно твердое тѣло. Вслѣдствіе того, что это тѣло будетъ не вполнѣ твердымъ, оно будетъ подвержено приливамъ (океаническіе и атмосферные приливы здѣсь въ разсчетъ не принимаются); вслѣдствіе же того что это не совершенная жидкость приливы будутъ чрезвычайно слабы. Условія явленія изображены на рисункѣ, но для ясности приливы чрезвычайно увеличены по сравненію съ размѣрами чертежа.

Намъ нужно найти 1), какое дѣйствіе на вращеніе земли окажутъ вызываемые луною приливы A и B, и 2) какое дѣйствіе притяженія приливовъ A и B окажутъ на движеніе луны.

(1) Легко видѣть, что, если мѣсяцъ длиннѣе сутокъ (при томъ положеніи приливовъ которое указано на рисункѣ), то длина сутокъ должна возрастать. Сутки должны удлиняться еще болѣе,



если принять во вниманіе солнечные приливы. Дарвинъ показалъ, что измѣняться должны также какъ плоскость земного экватора, такъ и плоскость лунной орбиты, при чемъ характеръ этихъ измѣненій зависитъ отъ цѣлаго ряда факторовъ.

(2) Притяженіе луны приливомъ A можно разложить на двѣ слагающихъ, изъ которыхъ одна направлена къ E, а другая пер-

пендикулярна къ EM и направлена въ сторону движенія луны. Для прилива B слагающая, перпендикулярная къ EM, будетъ направлена на встрѣчу лунному движенію. Но притяженіе прилива A больше, чѣмъ прилива B, и уголъ AME немного больше угла BME. Поэтому въ окончательномъ результатѣ должно получиться нѣкоторое ускореніе луны. Вслѣдствіе этого ускоренія величина лунной орбиты должна стать больше, а мѣсяцъ долженъ удлиниться.

Очеркъ исторіи системы Земля-Луна по Дарвину.—Произведя вычисленія въ сторону прошлаго, Дарвинъ долженъ былъ остановиться на нѣкоторомъ наиболѣе вѣроятномъ начальномъ состояніи земли и луны, и затѣмъ очертилъ ихъ эволюцію до настоящаго времени. Этотъ очеркъ будетъ переданъ ради краткости такъ, какъ будто относительно него сомнѣній не существуетъ.

Не менѣе 54000000 лѣтъ тому назадъ земля и луна составляли одно тѣло съ діаметромъ немного больше 13000 километровъ. Эта масса вращалась вокругъ своей оси въ періодъ около 5 нашихъ нынѣшнихъ часовъ, а плоскость ея экватора была наклонена къ плоскости эклиптики на 11° или 12°. Масса эта вращалась такъ быстро, что равновѣсіе ея было неустойчивое, и подъ вліяніемъ солнечныхъ приливовъ луна оторвалась. Въ это время луна и земля обращались около общаго центра тяжести и около своихъ осей въ одно и то же время (около 5 часовъ). Обращаясь, земля стала вращаться быстрѣе, сутки стали короче мѣсяца и началась приливная эволюція. Приливы удлинили и сутки и мѣсяцъ, но *мѣсяцъ удлинялся быстрѣе, чѣмъ сутки.* Это возрастаніе періодовъ продолжалось, пока разсматриваемая система не достигла современныхъ условій.

Подобнымъ же образомъ земля производила приливы на лунѣ и увеличивала длину лунныхъ сутокъ, пока онѣ не сравнялись съ мѣсяцемъ. Эксцентриситетъ лунной орбиты одно время возрасталъ, а затѣмъ постоянно убывалъ. Наклонъ плоскости земного экватора къ эклиптикѣ возросъ отъ 11° или 12° до 23.5°, а плоскость лунной орбиты, раньше совпадавшая съ плоскостью земного экватора, мѣняла свое положеніе, пока не достигла нынѣшняго наклона къ плоскости эклиптики всего въ 5°9′.

Въ будущемъ сутки должны возрастать скорѣе, чѣмъ мѣсяцъ, пока сутки и мѣсяцъ не станутъ равными 50 или 60 нашимъ нынѣшнимъ суткамъ, а лунная орбита не станетъ круговой (если исключить возмущенія, производимыя притяженіемъ солнца). Еслибы не было другихъ тѣлъ, кромѣ земли и луны, то это состояніе продолжалось бы вѣчно. Но этому помѣшаютъ солнечные приливы; они снова приблизятъ луну къ землѣ, притомъ такъ, что сутки будутъ всегда немного длиннѣе мѣсяца, и эта эволюція можетъ, пожалуй, окончиться новымъ соединеніемъ земли и луны. Работа приливовъ порождаетъ теплоту, и по вычисленію Дарвина количество произведенной треніемъ приливовъ теплоты могло бы поднять температуру земли, будь оно приложено сразу, на 1700°С.

Доказательства приливной эволюціи.—Трудъ Дарвина основанъ на предположеніяхъ (въ высшей степени достовѣрныхъ, повидимому), что земля не абсолютно тверда и что при измѣненіи ея формы получается внутреннее треніе. Но приливныя дѣйствія чрезвычайно слабы, они совершенно различны при различныхъ степеняхъ вязкости, скоростяхъ вращенія и обращенія, и иногда ничтожныя измѣненія этихъ данныхъ производятъ важныя измѣненія въ выводахъ. Вообще приливы долгаго періода производятъ дѣйствіе, обратное тому, которое производятъ приливы краткаго періода; вліяніе послѣднихъ въ общемъ больше. Трудности этой задачи и недостовѣрность ея данныхъ придаютъ особую важность провѣркѣ этой теоріи на дѣйствительныхъ явленіяхъ, если это возможно.

Наиболѣе поразительнымъ фактомъ, который, вѣроятно, и направилъ впервые изслѣдованіе на этотъ предметъ, является тотъ, что къ землѣ обращена всегда одна и та же сторона луны. Это въ совершенствѣ согласуется съ этой теоріей, которая и обнаруживаетъ, что при сдѣланныхъ предположеніяхъ такое условіе есть необходимый результатъ притягательнаго дѣйствія земли на тѣ приливы, которые она производила на лунѣ. Другими однородными фактами является то, что Япетъ такъ же постоянно обращенъ къ Сатурну одной и той же стороной, и то, что Меркурій и Венера также вѣроятно всегда обращены къ солнцу одной и той же стороной. Конечно, у насъ нѣтъ возможности узнать, какую скорость имѣло ихъ вращеніе въ началѣ и какую работу произвело въ этихъ случаяхъ приливное треніе.

Марсъ вращается медленнѣе, чѣмъ вращается его внутренній спутникъ, тогда какъ, еслибы онъ, какъ то предполагаетъ теорія Лапласа, сокращаясь, раньше имѣлъ размѣры орбиты спутника, то онъ долженъ былъ бы вращаться быстрѣе спутника. Этотъ фактъ невозможно объяснить непосредственно изъ гипотезы Лапласа, но Дарвинъ объясняетъ это явленіе тѣмъ, что солнечные приливы увеличили сутки этой планеты съ того времени, когда онѣ равнялись періоду обращенія спутника. Онъ считаетъ это доказательствомъ своей теоріи приливной эволюціи и думаетъ, что это освобождаетъ гипотезу Лапласа отъ очень вѣскаго возраженія. Однако, Ноланъ указалъ, что Фобосъ такъ близокъ къ Марсу, что, при всей незначительности его массы, его приливы сравнимы съ приливами солнца; а такъ какъ онъ обращается быстрѣе, чѣмъ вращается планета, то производимые приливы стремятся уменьшить его размѣры. По его вычисленію, спутникъ долженъ былъ бы упасть на планету подъ дѣйствіемъ своихъ собственныхъ приливовъ раньше, чѣмъ солнечные приливы удлинили бы сутки Марса на 1 минуту.

Время обращенія внутреннихъ частицъ системы сатурновыхъ колецъ значительно меньше времени вращенія планеты.

А такъ какъ эта планета въ шесть разъ дальше Марса отъ солнца, то вліяніе солнечныхъ приливовъ на ней должно быть гораздо слабѣе, ибо приливы измѣняются обратно пропорціонально шестой степени разстоянія. Плотность, размѣры и скорость вращенія вносятъ свои измѣненія въ этотъ процессъ. Но сдѣлавъ осторожно оцѣнку того, что не хорошо извѣстно, мы находимъ, что для объясненія этого затрудненія, какъ Дарвинъ сдѣлалъ это для Марса, потребовался бы промежутокъ времени въ 300 разъ слишкомъ бо́льшій, чѣмъ для Марса. Конечно, ни изъ гипотезы Лапласа, ни изъ современныхъ условій этихъ тѣлъ никто бы не вывелъ заключенія, что Сатурнъ въ 3000 разъ старѣе Марса.

Если земля нѣкогда дѣлала оборотъ около своей оси въ 5 или въ 6 часовъ, то она должна была имѣть большую выпуклость по экватору, какъ мы это видимъ у Юпитера. Замедленіе приливовъ было бы наибольшее въ экваторіальныхъ областяхъ, и можно было бы ожидать и теперь какихъ-нибудь указаній на то, что экваторіальная зона когда то отставала отъ высшихъ широтъ; но этого найдено не было. Кромѣ того, по мѣрѣ уменьшенія скорости вращенія, земля должна была бы становиться болѣе сферической. При измѣненіи ея формы, наиболѣе подвижныя части подчинялись бы этому вліянію прежде всего, раньше чѣмъ могло сильно деформироваться твердое ядро. Поэтому мы должны бы были ожидать, согласно этой теоріи, что оба полюса покрыты глубокимъ океаномъ, а вся экваторіальная зона представляетъ сушу. Нѣтъ, однако, никакихъ геологическихъ доказательствъ такого радикальнаго измѣненія формы земли за то время, которое геологи оцѣниваютъ въ 100 000 000 лѣтъ или даже больше.

Спутники Юпитера и Сатурна, безъ сомнѣнія, производятъ приливы на обѣихъ планетахъ совершенно такъ же, какъ дѣлаетъ это луна на землѣ. Такимъ же образомъ планеты производятъ приливы на солнцѣ. Далѣе, во всѣхъ этихъ случаяхъ тѣла, производящія приливы, обращаются приблизительно въ экваторіальныхъ плоскостяхъ тѣхъ тѣлъ, около которыхъ они движутся, и періоды вращенія и обращенія таковы, что приливы должны производить замедленіе экватора. Но несмотря на то, что эти силы дѣйствовали вѣроятно нѣсколько десятковъ милліоновъ лѣтъ, въ каждомъ изъ этихъ трехъ случаевъ мы находимъ, что тѣло, на которомъ происходятъ приливы, на своемъ экваторѣ движется скорѣе, а не медленнѣе, чѣмъ у полюсовъ. Эти факты имѣютъ большое значеніе, такъ какъ неизвѣстно ни одного примѣра, гдѣ бы имѣло мѣсто обратное.

Интересно, что ни одинъ изъ извѣстныхъ намъ фактовъ не говоритъ въ пользу приливной эволюціи больше, чѣмъ особенности вращенія луны, и ни одинъ фактъ не говоритъ противъ нея сильнѣе, чѣмъ отсутствіе указаній на какое-либо измѣненіе формы земли. Можетъ быть, объясненіе кажущагося противорѣчія лежитъ въ томъ, что характеръ и величина приливныхъ вліяній зависятъ отъ твердости подвергающагося пертурбаціи тѣла и отъ отношенія періода его вращенія къ періоду обращенія того тѣла, которое производитъ приливы. Вязкость луны и ея скорость вращенія, быть можетъ, всегда находились въ такомъ отношеніи къ продолжительности мѣсяца, что приливы постоянно стремились произвести то положеніе вещей, которое мы наблюдаемъ теперь; между тѣмъ, въ силу особыхъ соотношеній между твердостью земли и ея періодомъ вращенія, съ одной стороны, и періодомъ обращенія луны, съ другой стороны, вращеніе земли не измѣнилось замѣтно.

Мы можемъ вывести отсюда заключеніе, что теорія приливной эволюціи основана на здравыхъ началахъ, но что, вслѣдствіе неизвѣстности входящихъ въ нее факторовъ и вслѣдствіе противорѣчія въ тѣхъ указаніяхъ, которыя даютъ наблюденія, ея вліяніе на эволюцію системы въ настоящее время не можетъ быть оцѣнено правильно.

Факты, подтверждающіе гипотезу Лапласа.—Слѣдующія явленія согласуются съ теоріей Лапласа (и, можетъ быть, также и съ другими теоріями), и были причиной того, что ее приняли всѣ.

1. Всѣ планеты обращаются приблизительно въ одной и той же плоскости и въ томъ же направленіи.

2. Всѣ ихъ орбиты очень близки къ кругамъ.

3. Солнце вращается въ томъ же направленіи, въ какомъ движутся планеты.

4. Плоскости экваторовъ планетъ и орбиты ихъ спутниковъ почти совпадаютъ съ плоскостями самихъ планетныхъ орбитъ (за исключеніемъ Урана и Нептуна).

5. Спутники обращаются въ томъ же направленіи, въ какомъ вращаются ихъ планеты (девятый спутникъ Сатурна и, вѣроятно, седьмой спутникъ Юпитера представляютъ исключенія; положенія же плоскоскостей экваторовъ Урана и Нептуна неизвѣстны).

6. Согласно контракціонной теоріи солнечной теплоты, это свѣтило нѣкогда было гораздо больше, чѣмъ теперь.

Согласіе этихъ фактовъ съ тѣмъ, къ чему должна была приводить теорія Лапласа, очевидно. Есть много другихъ фактовъ, которые повидимому согласуются съ этой теоріей, но которые не составляютъ ея необходимыхъ слѣдствій.

Факты, противорѣчащіе гипотезѣ Лапласа.—Уже много лѣтъ астрономы затрудняются согласовать гипотезу Лапласа со всѣми явленіями солнечной системы. Наиболѣе строгій разборъ самыхъ важныхъ фактовъ и принциповъ, когда-либо опубликованный, содержится въ работахъ Чэмберлена и автора настоящей книги, появившихся въ 1900 году *). Въ этомъ разборѣ была указана не-

*) *Chamberlin*, „An Attempt to test the Nebular Hypothesis by the Relations of Masses und Momenta“, *Journal of Geology*, февраль—мартъ 1900; Moulton, „An Attempt to test the Nebular Hypothesis by an Appeal to the Laws of Dynamics“, *Astrophysical Journal*, мартъ 1900.

обходимость отбросить теорію колецъ въ виду ея несогласія съ нѣкоторыми данными наблюденій и основами динамики. Нѣкоторыя изъ этихъ явленій, противорѣчащихъ теоріи, мы теперь перечислимъ и разберемъ вкратцѣ. Главными изъ нихъ являются:

1. Теорія колецъ не объясняетъ значительныхъ взаимныхъ наклоновъ плоскостей солнечныхъ орбитъ и наклонной плоскости солнечнаго экватора къ общей плоскости всей системы.

2. Теорія колецъ не даетъ объясненія эксцентриситетовъ планетныхъ орбитъ.

3. Орбиты астероидовъ противорѣчатъ теоріи колецъ.

4. Скорости обращенія Фобоса и внутреннихъ частицъ Сатурнова кольца не получаютъ удовлетворительнаго объясненія.

5. Остается безъ объясненія присутствіе легкихъ элементовъ на землѣ.

6. Рядъ колецъ не могъ оторваться.

7. Кольцо не могло уплотниться въ планету.

8. Количество движенія нынѣшней системы менѣе 1/200 количества движенія предполагаемой первичной туманности.

9. Обратныя движенія девятаго спутника Сатурна и (вѣроятно) седьмого спутника Юпитера прямо противорѣчатъ этой теоріи.

Эти положенія требуютъ нѣкоторыхъ поясненій:

Наклоны плотностей планетныхъ орбитъ.—Гипотеза Лапласа предполагала, что первичная солнечная туманность удерживала свои размѣры почти исключительно вслѣдствіе стремленія газовъ къ расширенію. Во введеніи къ своимъ изслѣдованіямъ о механическихъ условіяхъ метеорнаго роя Дарвинъ говорилъ: „Но самую основу небулярной (Лапласовой) гипотезы составляетъ представленіе о давленіи жидкостей, такъ какъ безъ нея идея равновѣсія фигуры становится неприложимой“. Въ этомъ мемуарѣ онъ показалъ, что метеорный рой (частный случай котораго представляетъ туманность), каковы бы ни были первональныя неправильности, вскорѣ долженъ вращаться, какъ твердое тѣло. Изъ этого слѣдуетъ, что планетныя орбиты должны всѣ лежать въ одной плоскости или, по крайней мѣрѣ, орбиты внутреннихъ планетъ и плоскость солнечнаго экватора могутъ отличаться другъ отъ друга только очень немного или даже вовсе не должны отличаться. На самомъ дѣлѣ различія въ плоскостяхъ планетныхъ орбитъ вблизи солнца не только значительны, но даже гораздо больше взаимныхъ наклоновъ плоскостей орбитъ большихъ планетъ, а плоскость солнечнаго экватора наклонена къ общей плоскости всей системы на нѣсколько градусовъ.

Эксцентриситеты планетныхъ орбитъ.—Въ виду тѣхъ условій, которыя ставитъ теорія Лапласа, орбиты планетъ должны быть очень близки къ кругамъ и тѣмъ ближе къ нимъ, чѣмъ ближе онѣ къ солнцу. Но на дѣлѣ, тогда какъ орбита Нептуна очень близка къ кругу, орбита Меркурія эксцентричнѣе, чѣмъ у какой бы то ни было другой планеты, слишкомъ вдвое. Общія условія характеризуются тѣмъ фактомъ, что орбиты планетъ типа земли въ среднемъ вдвое слишкомъ эксцентричнѣе орбитъ большихъ планетъ.

Орбиты планетоидовъ.—Изъ кольцевой теоріи слѣдуетъ, что орбиты всѣхъ членовъ системы должны замѣтно отдѣляться другъ отъ друга. Наблюденіе показываетъ, что орбиты, по меньшей мѣрѣ, 530 астероидовъ перепутываются другъ съ другомъ самымъ сложнымъ образомъ; однѣ изъ нихъ лежатъ почти въ плоскости эклиптики, тогда какъ другія сильно наклонены къ ней; и между тѣмъ какъ однѣ представляютъ почти совершенные круги, другія чрезвычайно удлинены. Несомнѣнно, что возмущенія, производимыя Юпитеромъ, могли нарушить первоначальное расположеніе; но едва ли возможно, чтобы нынѣшнія условія могли развиться, если орбиты первоначально были концентрическими кругами, а вещество нѣкогда обращалось около солнца въ формѣ круглаго кольца.

Кромѣ того, орбита планетоида Эроса подходитъ къ земной орбитѣ и заходитъ за орбиту Марса. Не менѣе замѣчателенъ, съ точки зрѣнія гипотезы Лапласа и ея значительный наклонъ (10°) къ орбитамъ земли и Марса,

Скорость обращенія Фобоса и внутренняго кольца Сатурна.—Согласно теоріи колецъ періоды вращенія планетъ должны быть короче періодовъ обращенія всѣхъ ихъ спутниковъ, такъ какъ планета, продолжая сокращаться послѣ отдѣленія послѣдняго кольца, должна была постоянно ускорять свое вращеніе. Но Фобосъ обращается въ болѣе короткое время, чѣмъ то, котораго требуетъ вращеніе Марса, и аналогично частицы, составляющія внутреннюю часть Сатурнова кольца, совершаютъ свое обращеніе быстрѣе, чѣмъ вращается планета. Если первое объясняется приливной эволюціей, то приливное дѣйствіе Фобоса вводитъ еще большую трудность, и для объясненія второго факта подобнымъ же образомъ нужна допустить, что Сатурнъ въ 3000 скорѣе Марса.

Удаленіе легкихъ газовъ съ колецъ.—Послѣ своего отдѣленія каждое кольцо должно было занимать такое большое пространство, что взаимныя притяженія его частицъ могли быть только чрезвычайно ничтожными; а потому, согласно кинетической теоріи газовъ, всѣ болѣе легкіе элементы должны были уйти съ него. Но самый легкій изъ извѣстныхъ элементовъ, водородъ, находится на землѣ въ изобиліи, хотя въ настоящее время только въ химическихъ соединеніяхъ съ другими элементами.

Отдѣленіе колецъ.—Легко пропустить безъ вниманія тотъ фактъ, что предполагаемая туманность должна была быть чрезвычайно разрѣженной. По сдѣланнымъ предположеніямъ она должна была въ центрѣ имѣть большую плотность, чѣмъ у внѣшнихъ краевъ. Но если мы предположимъ, что она была однородна и достигала орбиты Нептуна, то мы найдемъ, что ея плотность составляла только одну 250 000 000-ую долю плотности воздуха на уровнѣ моря. Кольцо Нептуна не могло имѣть даже и этой плотности, которая сама уже въ нѣсколько разъ меньше наилучшей пустоты, какую мы можемъ получить въ нашихъ лабораторіяхъ. Но столь разрѣженное кольцо не имѣло бы сцѣпленія и могло бы раздѣлиться только понемногу, отдѣльными частицами. Разъ начавшись, этотъ процессъ долженъ былъ бы, повидимому, быть безостановочнымъ, а не прерывнымъ, какъ предполагаетъ теорія. Теорія говоритъ, что послѣ отдѣленія кольца туманность дѣлалась устойчивой на долгій періодъ сокращенія. Рошъ (Roche) пытался показать, что съ извѣстными промежутками могли отдѣляться кольца значительныхъ размѣровъ, но его трудъ по этому вопросу далеко не убѣдителенъ. Всѣ изслѣдователи этого вопроса сильно чувствовали эту трудность. Такимъ образомъ, напримѣръ, Фэ (Faye) въ своей модификаціи теоріи Лапласа предполагалъ, что вся туманность разбилась на кольца сразу.

Уплотненіе кольца въ планету.—Допустимъ на минуту, что кольца отдѣлились, и посмотримъ, соединятся ли онѣ въ планеты или нѣтъ. Вещество такого кольца было бы широко разсѣяно и взаимная связь его частей была бы очень слаба. Соотвѣтствующее изслѣдованіе показываетъ, что приливныя силы, вызываемыя внутренней массой туманности, дѣйствовали бы гораздо сильнѣе въ смыслѣ разсѣянія вещества, чѣмъ могло бы дѣйствовать его тяготѣніе въ смыслѣ собиранія матеріала въ планету. Слѣдовательно, кольцо даже не могло бы начать уплотняться въ планету. Здѣсь была бы нѣкоторая аналогія съ кометой, которая подъ дѣйствіемъ приливныхъ силъ разсѣевается совершенно.

Чтобы сдѣлать всѣ возможныя уступки теоріи колецъ, мы допустимъ, что все вещество кольца собралось уже въ планету за исключеніемъ кольца изъ чрезвычайно небольшихъ частичекъ и затѣмъ поставимъ вопросъ, попадутъ ли эти незначительные остатки на планету. Изслѣдованіе указываетъ съ большой вѣроятностью на то, что только часть кольца, лежащая ближе 30^{0} отъ планеты, можетъ попасть на нее, какой бы длинный періодъ времени ни взять. Иными словами, если мы допустимъ, что процессъ образованія планеты изъ кольца уже почти закончился, мы найдемъ, что онъ все же не можетъ завершиться. А это указываетъ на большую невѣроятность того, чтобы самое состояніе, допущенное нами, могло быть достигнуто уплотненіемъ изъ болѣе однороднаго кольца.

(Продолженіе слѣдуетъ).

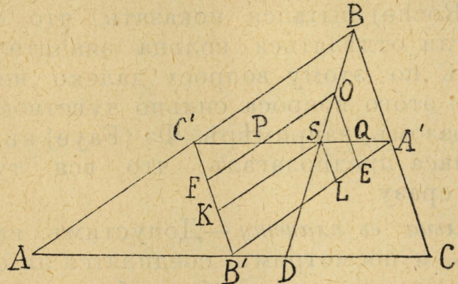
Къ теоріи прямыхъ Чевы въ треугольникѣ.

В. Шмыгина.

*(Окончаніе *).*

7. *Теорема.* Если прямыя, параллельныя сторонамъ AB и BC, пересѣкаются на какой либо изъ гармоническихъ чевіанъ (внутренней или внѣшней) вершины B, то отношеніе отрѣзковъ ихъ, заключенныхъ между сторонами дополнительнаго треугольника, для данной пары чевіанъ постоянно и равно $cm:an$.

Пусть имѣемъ чевіану BD, (фиг. 3) на которой взята произ-



Фиг. 3.

вольная точка O и проведено $OPF \parallel A'B'$ и $OQE \parallel B'C'$.

Докажемъ, что

$$\frac{PF}{QE} = \frac{cm}{an}.$$

Черезъ точку S пересѣченія чевіаны BD со стороною $A'C'$ проводимъ $SK \parallel A'B'$ и $SL \parallel B'C'$. Такъ какъ

$$\frac{C'S}{A'S} = \frac{m}{n},$$

то

$$\frac{SK}{SL} = \frac{cm}{an}.$$

Изъ подобія треугольниковъ $C'PF$ и $C'SK$, $A'QE$ и $A'SL$ имѣемъ:

$$\frac{PF}{SK} = \frac{C'P}{C'S} \text{ и } \frac{QE}{SL} = \frac{A'Q}{A'S}.$$

Изъ подобія же треугольниковъ $SC'B$ и SPO, $SA'B$ и SQO имѣемъ:

$$\frac{C'P}{C'S} = \frac{BO}{BS} = \frac{A'Q}{A'S}.$$

*) См. № 433 „Вѣстника“.

Такимъ образомъ:

$$\frac{PF}{SK} = \frac{QE}{SL},$$

откуда окончательно

$$\frac{PF}{QE} = \frac{cm}{an}.$$

Подобнымъ же образомъ можно доказать изложенную теорему и для случая внѣшней гармонической чевіаны.

8. *Обратная теорема*. Если отрѣзки прямыхъ, параллельныхъ сторонамъ AB и BC треугольника ABC, ограниченные сторонами дополнительнаго треугольника, относятся между собою какъ $cm:an$, то они пересѣкаются на чевіанѣ вершины B, дѣлящей сторону AC въ отношеніи $\frac{m}{n}$.

Это предложеніе легко доказывается способомъ отъ противнаго.

9. *Частные случаи*. 1) $\frac{m}{n} = \frac{c}{a}$. Тогда $\frac{PF}{QE} = \frac{c^2}{a^2} = \frac{(2c)^2}{(2a)^2}$.

Такимъ образомъ, если параллели двухъ сторонъ треугольника пересѣкаются на одной изъ биссектриссъ (внутренней или внѣшней) угла, образуемаго этими сторонами, то отрѣзки ихъ между сторонами дополнительнаго треугольника пропорціональны квадратамъ взятыхъ сторонъ даннаго треугольника. Мы уже сказали, что центръ биссектриссъ треугольника есть точка Нагеля дополнительнаго треугольника. Поэтому параллели сторонъ треугольника, проходящія черезъ его точку Нагеля, относятся между собою, какъ квадраты соотвѣтственныхъ сторонъ треугольника.

2) $\frac{m}{n} = \frac{a}{c}$. Тогда $PF = QE$. Слѣдовательно, если параллели двухъ сторонъ треугольника пересѣкаются на одной изъ антибиссектриссъ угла, образуемаго этими сторонами, то отрѣзки ихъ, заключенные между сторонами дополнительнаго треугольника, равны *). Отсюда слѣдуетъ, что если три прямыя, параллельныя сторонамъ треугольника (или что то же—дополнительнаго треугольника) пересѣкаются въ центрѣ антибиссектриссъ его, то отрѣзки ихъ, ограниченные сторонами дополнительнаго треугольника, равны.

3) $\frac{m}{n} = 1$. Имѣемъ: $\frac{PF}{QE} = \frac{c}{a}$; такимъ образомъ, если параллели двухъ сторонъ треугольника пересѣкаются на медіанѣ третьей стороны, то отрѣзки ихъ, заключенные между сторонами дополнительнаго треугольника, относятся между собою,

*) См. Д. Д. Ефремовъ. „Новая геометрія треугольника". Гл. V, 54.

какъ взятыя стороны даннаго треугольника. Поэтому, если параллели сторонъ треугольника пересѣкаются въ его центрѣ тяжести, то отрѣзки ихъ, ограниченные сторонами дополнительнаго треугольника, пропорціональны сторонамъ его.

4) $\frac{m}{n}=\frac{c^2}{a^2}\cdot$ Имѣемъ: $\frac{PF}{QE}=\frac{c^3}{a^3}$, слѣдовательно, параллели двухъ сторонъ треугольника, пересѣкающіяся на одной изъ симедіанъ третьей стороны, образуютъ между сторонами дополнительнаго треугольника отрѣзки, пропорціональные кубамъ взятыхъ сторонъ даннаго треугольника. Параллели сторонъ треугольника, проходящія черезъ его точку Лемуана, называются *параллелями Лемуана*. Поэтому, отрѣзки параллелей Лемуана, даннаго треугольника, ограниченные сторонами дополнительнаго треугольника, пропорціональны кубамъ сторонъ треугольника.

5) $\frac{m}{n}=\frac{c^2}{a^2}\cdot$ Имѣемъ: $\frac{PF}{QE}=\frac{a}{c}$, слѣдовательно, параллели двухъ сторонъ треугольника, пересѣкающіяся на одной изъ прямыхъ, изотомическихъ относительно симедіанъ третьей стороны, образуютъ между сторонами дополнительнаго треугольника отрѣзки, обратно пропорціональные взятымъ сторонамъ даннаго треугольника. Отсюда легко заключить, что, если три параллели сторонъ треугольника пересѣкаются въ точкѣ изотомически сопряженной съ точкою Лемуана, то произведенія отрѣзковъ ихъ, ограниченныхъ сторонами дополнительнаго треугольника, на соотвѣтственныя стороны послѣдняго равны между собою.

10. Треугольникъ A′B′C′, вершины котораго A′, B′, C′ суть основанія высотъ даннаго треугольника ABC, называется *ортоцентрическимъ треугольникомъ* даннаго треугольника ABC. Въ дальнѣйшемъ изложеніи мы подъ даннымъ треугольникомъ ABC будемъ разумѣть остроугольный треугольникъ. Стороны ортоцентрическаго треугольника въ этомъ случаѣ антипараллельны сторонамъ даннаго треугольника, а углы ортоцентрическаго треугольника соотвѣтственно равны:

$$\angle A'=180^0-2\angle A,\quad \angle B'=180^0-2\angle B,\quad \angle C'=180^0-2\angle C.$$

11. Пусть имѣемъ треугольникъ ABC (фиг. 4) со сторонами AB=c, AC=b, BC=a и ортоцентрическій треугольникъ A′B′C′. Черезъ точку B проведемъ двѣ гармонически сопряженныя чевіаны BD и BD′, пересѣкающія сторону A′C′ ортоцентрическаго треугольника въ точкахъ E и E′. Докажемъ, что, если

$$\frac{AD}{CD}=\frac{AD'}{CD'}=\frac{m}{n},$$

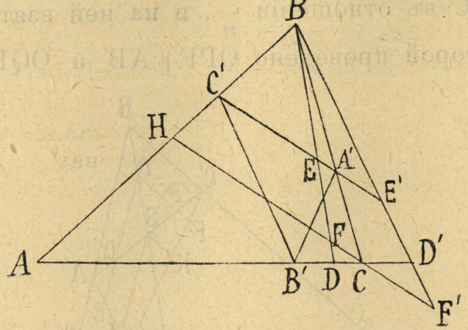
то

$$\frac{A'E}{C'E}=\frac{A'E'}{C'E'}=\frac{nc^2}{ma^2}.$$

Черезъ точку C проведемъ прямую HF′ ∥ A′C′, пересѣкающую чевіаны BD и BD′ въ точкахъ F и F′. Имѣемъ:

$$\frac{A'E}{C'E}=\frac{A'E'}{C'E'}=\frac{CF}{HF}=\frac{CF'}{HF'}. \qquad (1)$$

Примѣняя теорему Менелая къ треугольнику HAC, пере-



Фиг. 4.

сѣченному трансверсалями BFD и BD′F′, имѣемъ:

$$AD.CF.BH = DC.FH.AB$$

и
$$AD'.CF'.BH = D'C.F'H.AB.$$

Такъ какъ $\frac{AD}{CD}=\frac{AD'}{CD'}=\frac{m}{n}$, то

$$\frac{CF}{HF}=\frac{CF'}{HF'}=\frac{n.c}{m.BH}.$$

Изъ подобія $\triangle\triangle$ ABC и HBC имѣемъ:

$$\frac{BH}{BC}=\frac{BC}{AB},$$

откуда
$$BH=\frac{a^2}{c}.$$

Подставляя въ предыдущую формулу вмѣсто BH его значеніе и принимая во вниманіе равенство (1), получимъ

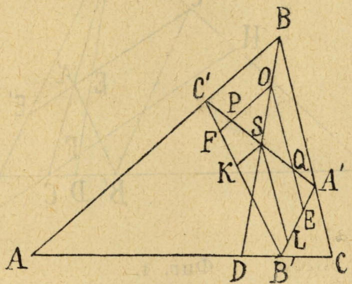
$$\frac{A'E}{C'E}=\frac{A'E'}{C'E'}=\frac{nc^2}{ma^2},$$

что и требовалось доказать.

12. *Теорема.* Если параллели сторонъ AB и BC треугольника ABC пересѣкаются на одной изъ гармоническихъ

чевіанъ (внутренней или внѣшней) вершины B, дѣлящихъ основаніе AC въ отношеніи $\frac{m}{n}$, то отрѣзки ихъ, заключенные между сторонами A′C′, C′B′ и A′C′, A′B′ ортоцентрическаго треугольника, относятся между собою какъ $ma^2\cos C : nc^2\cos A$.

Пусть въ треугольникѣ ABC проведена чевіана BD, дѣлящая основаніе AC въ отношеніи $\frac{m}{n}$, и на ней взята произвольная точка O, изъ которой проведено OPF || AB и OQE || BC (фиг. 5).



Фиг. 5.

Черезъ точку S пересѣченія BD со стороною A′C′ проведемъ SK || OF и SL || OE. Имѣемъ:

$$\frac{C'S}{A'S} = \frac{ma^2}{nc^2}.$$

Такъ какъ треугольники KSC′ и LSA′ равнобедренные, то $\angle C'SK = \angle C$ и $\angle LSA' = \angle A$.

Поэтому $\frac{SK}{SL} = \frac{ma^2\cos C}{nc^2\cos A}$.

Изъ подобія $\triangle\triangle$ KSC′ и FPC′, а также LSA′ и EQA′ имѣемъ:

$$\frac{SK}{PF} = \frac{C'S}{C'P} \text{ и } \frac{SL}{QE} = \frac{A'S}{A'Q}.$$

Изъ подобія $\triangle\triangle$ C′SB и PSO, A′SB и QSO имѣемъ:

$$\frac{C'S}{C'P} = \frac{A'S}{A'Q} = \frac{BS}{BO}.$$

Поэтому $$\frac{SK}{PF} = \frac{SL}{QE}.$$

Перемѣнивъ мѣста среднихъ членовъ, получимъ:

$$\frac{PF}{QE} = \frac{SK}{SL} = \frac{ma^2\cos C}{nc^2\cos A},$$

что и требовалось доказать.

Доказательство это не трудно примѣнить и для случая внѣшней гармонической чевіаны.

13. *Обратная теорема.* Если отрѣзки параллелей стороны AB и BC треугольника ABC, заключенные между сторонами ортоцентрическаго треугольника, относятся между собою какъ $\frac{p}{q}$, то точка ихъ пересѣченія находится на чевіанѣ вершины B, дѣлящей основаніе AC въ отношеніи

$$\frac{m}{n}=\frac{pc^2\cos A}{qa^2\cos C}.$$

Это предложеніе легко доказывается способомъ отъ противнаго.

14. *Частные случаи.* 1) $\frac{m}{n}=\frac{c^2\cos A}{a^2\cos C}$, т. е. разсматриваемая чевіана изогональна съ чевіаной, дѣлящей основаніе AC на части обратно пропорціональныя косинусамъ прилежащихъ угловъ A и C *). Такимъ образомъ, если параллели двухъ сторонъ треугольника пересѣкаются на чевіанѣ третьей стороны, изогональной съ чевіаной, дѣлящей эту сторону обратно пропорціонально косинусамъ прилегающихъ угловъ, то отрѣзки ихъ, заключенные между сторонами ортоцентрическаго треугольника, равны между собою; если параллели сторонъ треугольника проходятъ черезъ центръ этихъ чевіанъ, то отрѣзки ихъ, заключенные между сторонами ортоцентрическаго треугольника, равны между собою.

Обратно: если двѣ прямыя, проведенныя изъ нѣкоторой точки O отсѣкаютъ отъ сторонъ угловъ C' и A' даннаго треугольника $A'B'C'$ равнобедренные треугольники съ равными основаніями, то геометрическое мѣсто точекъ O есть чевіана (внутренняя или внѣшняя) такого треугольника ABC, по отношенію къ которому данный треугольникъ $A'B'C'$ служитъ ортоцентрическимъ.

Примѣчаніе. Такъ какъ одинъ и тотъ же треугольникъ $A'B'C'$ есть общій ортоцентрическій треугольникъ нѣсколькихъ треугольниковъ, то въ нашемъ случаѣ за треугольникъ ABC необходимо принять тотъ изъ нихъ, углы котораго острые.

Отношеніе $\frac{m}{n}$ можно представить въ видѣ:

$$\frac{m}{n}=\left(\frac{c}{a}\right)\cdot\left(\frac{c\cos A}{a\cos C}\right),$$

---

*) См. теорему Штейнера: „если изогонали треугольника ABC, проведенныя черезъ вершину его B, пересѣкаютъ сторону AC въ M и N, то

$$\frac{AM \cdot AN}{CM \cdot CN}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2}.$$

(Д. Д. Ефремовъ. „Новая геометрія треугольника“, V, 15).

гдѣ $\frac{c}{a}$ есть отношеніе, въ которомъ основаніе AC дѣлится соотвѣтствующей биссектриссой, а $\frac{c\cos A}{a\cos C}$ — высотой.

2) $\frac{m}{n}=\frac{c^2}{a^2}$, т. е. разсматриваемая чевіана есть симедіана стороны AC. Въ этомъ случаѣ $\frac{PF}{QE}=\frac{\cos C}{\cos A}\cdot$ Отсюда вытекаетъ, что отрѣзки параллелей Лемуана даннаго треугольника, заключенные между стононами ортоцентрическаго треугольника относятся между собою, какъ косинусы угловъ треугольника.

3) $\frac{m}{n}=\frac{c\cos A}{a\cos C}\cdot$ Тогда $\frac{PF}{QE}=\frac{a}{c}\cdot$ Такъ какъ разсматриваемая чевіана есть высота треугольника ABC, то заключаемъ, что если параллели сторонъ треугольника проходятъ черезъ его ортоцентръ, то произведенія отрѣзковъ ихъ, заключенныхъ между сторонами ортоцентрическаго треугольника, на соотвѣтственныя стороны даннаго треугольника, равны между собою.

4) $\frac{m}{n}=\frac{c^3\cos A}{a^3\cos C}=\frac{c^2(c\cos A)}{a^2(a\cos C)}$, т. е. данная чевіана есть изогональная по отношенію къ чевіанѣ, изотомической высотѣ треугольника. Имѣемъ: $\frac{PF}{QE}=\frac{c}{a}\cdot$ Поэтому, если параллели треугольника проходятъ черезъ точку, изогонально сопряженную съ точкой изотомически сопряженной съ ортоцентромъ, то отрѣзки ихъ, заключенные между сторонами ортоцентрическаго треугольника, пропорціональны соотвѣтственнымъ сторонамъ даннаго треугольника.

ОТЧЕТЪ

о работахъ на тему для учащихся подъ названіемъ „Зависимость между периметрами правильныхъ многоугольниковъ и вычисленіе π“.

*(Окончаніе *).*

Задача № 6.

Доказать, что $P_n - P_{2n}=\frac{P_nP_{2n}^2}{16n^2r^2}$.

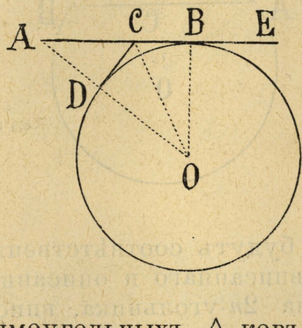
*) См. № 433 „Вѣстника“.

Из самом дел,

Пусть AB и CB будутъ половины сторонъ правильныхъ n и $2n$-угольниковъ, описанныхъ около круга радіуса r; тогда

$$AB - CE = AC - CB, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

гдѣ CE есть сторона правильнаго $2n$-угольника.



6845 №5

Изъ подобія прямоугольныхъ $\triangle$-ковъ ACD и AOB имѣемъ

$$\frac{AC}{CD} = \frac{AO}{OB}$$

или

$$\frac{AC - CD}{CD} = \frac{AO - OB}{OB} = \frac{AD}{OB},$$

откуда

$$AC - CD = \frac{AD \cdot CD}{OB} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Изъ подобія тѣхъ же $\triangle$-ковъ можно еще написать:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{OB}{DC},$$

а отсюда

$$AD = \frac{AB \cdot DC}{OB} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Теперь, поставивъ въ соотношеніе (1) значеніе $AC - CB = AC - CD$ изъ равенства (2), а значеніе AD изъ (3), получимъ

$$AB - CE = \frac{AB \cdot CD^2}{OB^2},$$

или

$$\frac{P_n}{2n} - \frac{P_{2n}}{2n} = \frac{P_n P_{2n}^2}{2n \cdot 16 n^2 r^2},$$

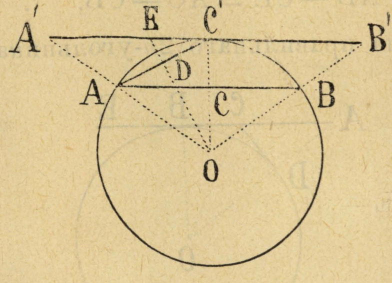
и наконецъ,

$$P_n - P_{2n} = \frac{P_n P_{2n}^2}{16 n^2 r^2}.$$

При $r=1$ эти формулы принимают вид (1)

Задача № 7.

Доказать, что $p_{2n}^2 = p_n \mathrm{P}_{2n}$.



Пусть AB и A′B′ будутъ соотвѣтственно стороны правильныхъ n-угольниковъ, вписаннаго и описаннаго около круга радіуса r, и AC′ — сторона $2n$-угольника, вписаннаго въ тотъ же кругъ.

Изъ подобія прямоугольныхъ $\triangle$-ковъ ACC′ и EDC′ имѣемъ

$$\frac{AC'}{AC} = \frac{EC'}{DC'}$$

или

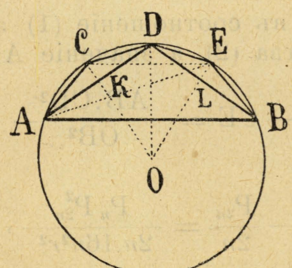
$$\frac{\left(\frac{p_{2n}}{2n}\right)}{\left(\frac{p_n}{2n}\right)} = \frac{\left(\frac{\mathrm{P}_{2n}}{4n}\right)}{\left(\frac{p_{2n}}{4n}\right)},$$

откуда

$$p_{2n}^2 = p_n \mathrm{P}_{2n}.$$

Задача № 8.

Доказать, что $2p_{2n}^3 = (p_n + p_{2n})p_{4n}^2$.



Пусть AB будетъ сторона правильнаго n-угольника, вписаннаго въ кругъ радіуса r, тогда $AD = CE = DB$ и $AC = CD =$

DE $=$ BE будутъ соотвѣтственно стороны $2n$ и $4n$-угольниковъ, вписанныхъ въ этотъ же кругъ.

Изъ четыреугольниковъ ACDE и ADEB по теоремѣ Птоломея имѣемъ

$$AD.CE = AC.DE + CD.AE \text{ и } AE.DB = AD.BE + DE.AB.$$

Опредѣливъ изъ этихъ равенствъ AE и сравнивъ между собою полученныя выраженія, найдемъ:

$$\frac{AD.CE - AC.DE}{CD} = \frac{AD.BE + DE.AB}{DB}$$

или

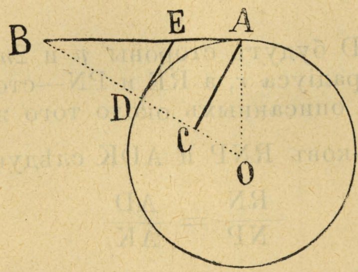
$$\frac{\frac{p_{2n}}{2n}\cdot\frac{p_{2n}}{2n} - \frac{p_{4n}}{4n}\cdot\frac{p_{4n}}{4n}}{\left(\frac{p_{4n}}{4n}\right)} = \frac{\frac{p_{2n}}{2n}\cdot\frac{p_{4n}}{4n} + \frac{p_{4n}}{4n}\cdot\frac{p_n}{n}}{\left(\frac{p_{2n}}{2n}\right)},$$

и наконецъ,

$$2p_{2n}^3 = (p_n + p_{2n})\,p_{4n}^2.$$

Задача № 9.

Доказать, что $2p_n P_n = (p_n + P_n) P_{2n}$.



Пусть AB и AC будутъ половины сторонъ n-угольниковъ, изъ которыхъ одинъ описанъ, а другой вписанъ въ кругъ радіуса r, и DE половина стороны правильнаго описаннаго $2n$-угольника.

Изъ подобія прямоугольныхъ $\triangle$-ковъ ABC и BDE имѣемъ:

$$\frac{AC}{ED} = \frac{AB}{BE},$$

а отсюда

$$\frac{AC+AB}{ED+BE} = \frac{AC}{ED} \text{ или } \frac{AC+AB}{ED+AB-AE} = \frac{AC}{ED};$$

но AE $=$ ED, поэтому $\dfrac{AC+AB}{AB} = \dfrac{AC}{ED}$, откуда

$$AC.AB = (AC + AB)\,ED,$$

что по замѣнѣ дастъ:

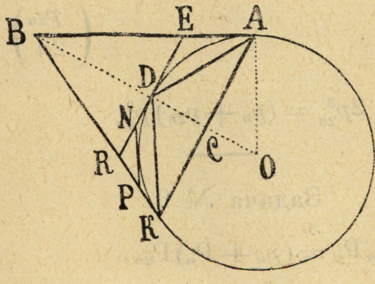
$$\frac{p_n}{2n}\cdot\frac{P_n}{2n} = \left(\frac{p_n}{2n} + \frac{P_n}{2n}\right)\frac{P_{2n}}{4n}$$

и окончательно

$$2p_nP_n = (p_n + P_n)P_{2n}.$$

Задача № 10.

Доказать, что $2p_nP_{2n} = (p_n + p_{2n})P_{4n}$.



Пусть AK и KD будутъ стороны n и $2n$-угольниковъ, вписаннныхъ въ кругъ радіуса r, а RE и PN—стороны правильныхъ $2n$ и $4n$-угольниковъ описанныхъ около того же круга.

Изъ подобія $\triangle$-ковъ RNP и ADK слѣдуетъ

$$\frac{RN}{NP} = \frac{AD}{AK}$$

или

$$\frac{RD - DN}{NP} = \frac{AD}{AK},$$

откуда по замѣнѣ получимъ:

$$\frac{\dfrac{P_{2n}}{4n} - \dfrac{P_{4n}}{8n}}{\left(\dfrac{P_{4n}}{4n}\right)} = \frac{\left(\dfrac{p_{2n}}{2n}\right)}{\left(\dfrac{p_n}{n}\right)}$$

и окончательно

$$2p_nP_{2n} = (p_n + p_{2n})\,P_{4n}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ" и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 841 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$y^n+z^n-x(y^{n-1}+z^{n-1})=a^{n-1},$$

$$z^n+x^n-y(z^{n-1}+x^{n-1})=\frac{a^n+b^n}{a+b},$$

$$x^n+y^n-z(x^{n-1}+y^{n-1})=b^{n-1}$$

въ каждомъ изъ трехъ слѣдующихъ случаевъ: $n=4$, $n=5$, $n=6$.

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 842 (4 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^3-(\sqrt{b}+b)x+b=0.$$

С. Адамовичъ (Двинскъ).

№ 843 (4 сер.). Доказать, что число

$$2^{121}-1$$

дѣлится на 727.

А. Брюхановъ (Иркутскъ).

№ 844 (4 сер.). Найти предѣлъ, къ которому стремится выраженіе

$$\frac{\operatorname{tang}(a+x)-\operatorname{tang}(a-x)}{\operatorname{arctg}(a+x)-\operatorname{arctg}(a-x)},$$

если x стремится къ предѣлу 0

Н. Орлицкій (Варшава).

№ 845 (4 сер.). Въ точкѣ P шаровой поверхности проведены діаметръ PA и касательная плоскость τ; черезъ центръ шара O проведенъ нѣкоторый радіусъ OM, а черезъ M—нѣкоторая прямая t, перпендикулярная къ OM и встрѣчающая плоскость τ въ точкѣ B. Пусть C—точка встрѣчи прямой AM съ τ. Доказать, что $MB=CB$

Н. С (Одесса).

№ 846 (4 сер.). Наблюдатель находится въ подъемной корзинѣ шахты, двигающейся внизъ со скоростью 3-хъ метровъ въ секунду; въ самомъ началѣ спуска онъ выпустилъ изъ рукъ камень (не сообщая ему намѣренно толчка), и черезъ 11 секундъ послѣ начала движенія до него достигъ звукъ удара камня о дно шахты. Опредѣлить глубину шахты.

Л. Ямпольскій (Одесса)

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 690 (4 сер.). *Вычислить углы треугольника* ABC *изъ уравненій*

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{60}=\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{35}=\frac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{48}.$$

Такъ какъ A, B, C углы треугольника, то $A+B+C=\pi$ (1). Поэтому (см. (1))

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C=2\sin(A+B)\cos(A-B)+$$
$$+2\sin[\pi-(A+B)]\cos[\pi-(A+B)]=2\sin(A+B)[\cos(A-B)-\cos(A+B)]=$$
$$=4\sin A\sin B\sin C \quad (2).$$

Перемножимъ выраженія $\sin A+\sin B+\sin C$ и $\cos A+\cos B+\cos C$; въ результатѣ получатся 9 членовъ, которые мы разобьемъ на слѣдующія четыре группы: $\sin A\cos A+\sin B\cos B+\sin C\cos C$, $\sin A\cos B+\sin B\cos A$, $\sin B\cos C+\sin C\cos B$, $\sin C\cos A+\sin A\cos C$. Три члена первой группы можно записать въ видѣ $\frac{1}{2}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$. Два члена второй группы даютъ (см. (1)) $\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$. Члены третьей и четвертой группы даютъ также соотвѣтственно $\sin A$ и $\sin B$. Значитъ

$$(\sin A+\sin B+\sin C)(\cos A+\cos B+\cos C)=\frac{1}{2}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)+$$
$$+(\sin A+\sin B+\sin C) \quad (3).$$

Согласно съ условіемъ, $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=\frac{48}{60}(\sin A+\sin B+\sin C)=$ $=\frac{4}{5}(\sin A+\sin B+\sin C)$, а потому (см. (3)) $(\sin A+\sin B+\sin C)(\cos A+\cos B+$ $+\cos C)=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}+1\right)(\sin A+\sin B+\sin C)=\frac{7}{5}(\sin A+\sin B+\sin C)$; дѣля это равенство на $\sin A+\sin B+\sin C$, что можно сдѣлать, такъ какъ A, B, C суть углы треугольника и поэтому $\sin A+\sin B+\sin C>0$, находимъ

$$\cos A+\cos B+\cos C=\frac{7}{5} \quad (4).$$

Изъ данныхъ уравненій слѣдуетъ (см. (4), (2)) $\sin A+\sin B+\sin C=$ $=\frac{60}{35}(\cos A+\cos B+\cos C)=\frac{60.7}{35.5}=\frac{12}{5}$, $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=\frac{48}{35}(\cos A+$ $+\cos B+\cos C)=\frac{48}{35}\cdot\frac{7}{5}=\frac{48}{25}=4\sin A\sin B\sin C$, откуда

$$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{12}{5} \quad (5), \qquad \sin A\sin B\sin C=\frac{12}{25} \quad (6).$$

Такъ какъ (см. (1)) $\cos A=\cos(\pi-(B+C))=-\cos(B+C)=\sin B\sin C-$ $-\cos B\cos C$, и подобнымъ же образомъ $\cos B=\sin C\sin A-\cos C\cos A$, $\cos C=$ $=\sin A\sin B-\cos A\cos B$, то равенство (4) можно записать въ видѣ $\sin A\sin B+$ $+\sin B\sin C+\sin C\sin A-(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)=\frac{7}{5}$ (7).
Возвышая въ квадратъ равенства (4) и (5) и складывая результаты, находимъ

$$\sin^2 A+\cos^2 A+\sin^2 B+\cos^2 B+\sin^2 C+\cos^2 C+2(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)+$$
$$+2(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A)=\frac{49}{25}+\frac{144}{25}=\frac{193}{25}, \text{ или}$$

$$3+2(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)+2(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A)=$$

$$=\frac{193}{25}\text{, откуда}$$

$$2(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)+2(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A)=$$

$$=\frac{193}{25}-3=\frac{118}{25},\quad\text{или}$$

$$\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A+(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A)=\frac{59}{25}\quad(8).$$

Складывая равенства (7) и (8) и сокращая на 2, получимъ

$$\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A=\frac{47}{25}\quad(9).$$

Изъ равенствъ (5), (9), (6) вытекаетъ по извѣстной алгебраической теоремѣ, что $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ суть корни кубичнаго уравненія $x^3-\frac{12}{5}x^2+$ $+\frac{47}{25}x-\frac{12}{25}=0$, или

$$25x^3-60x^2+47x-12=0\quad(10).$$

Уравненіе (10) удовлетворяется при $x=1$, а потому лѣвая часть при помощи дѣленія на $x-1$ разлагается на множителей $x-1$ и $25x^2-35x+12$; т. е. $x-1=0$ или $25x^2-35x+12=0$, откуда $x=1$ или $x=\frac{35\pm\sqrt{35^2-1200}}{50}=$ $=\frac{35\pm5}{50}$. Итакъ, $x_1=1$, $x_2=\frac{4}{5}$, $x_3=\frac{3}{5}$, т. е. $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ равны (въ любомъ соотвѣтствіи) числамъ 1, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$, т. е. разсматриваемый треугольникъ прямоугольный, при чемъ, какъ это легко вычислить при помощи таблицъ, острые углы его равны $53^0 7'48''$ и $36^0 52'12''$.

Г. Оганянцъ (Ялта); *Г. Лебедевъ* (Харьковъ); *Н. Плахово* (Знаменка); *Э. Лейнѣкъ* (Рига); *Н. С.* (Одесса); *Д. Кухаревъ* (Кіевъ).

№ 710 (4 сер.). *Найти истинное значеніе выраженія*

$$\frac{1}{r}\left[\frac{(u_1+r)(u_2+r)\ldots(u_{n-1}+r)(u_n+r)}{u_1u_2\ldots u_{n-1}u_n}-1\right]$$

при $r=0$.

Полагая въ тожествѣ (см. зад. № 680 въ № 402 „Вѣстника“, рѣшенную въ № 430)

$$\frac{1}{r}\left(\frac{(u_1+r)(u_2+r)\ldots(u_{n-1}+r)(u_n+r)}{u_1u_2\ldots u_{n-1}u_n}-1\right)=\frac{1}{u_1}+\frac{u_1+r}{u_1u_2}+\frac{(u_1+r)(u_2+r)}{u_1u_2u_3}+$$

$$+\ldots+\frac{(u_1+r)(u_2+r)\ldots(u_{n-1}+r)}{u_1u_2\ldots u_{n-1}u_n}$$

$r=0$, находимъ, что искомое истинное значеніе равно

$$\frac{1}{u_1}+\frac{u_1}{u_1u_2}+\frac{u_1u_2}{u_1u_2u_3}+\ldots+\frac{u_1u_2\ldots u_{n-1}}{u_1u_2\ldots u_{n-1}u_n}$$

или же, по сокращеніи,

$$\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\ldots+\frac{1}{u_{n-1}}+\frac{1}{u_n}.$$

Г. Лебедевъ (Харьковъ); *Н. Доброгаевъ* (Немировъ); *Э. Лейнекъ* (Рига); *А. Турчаниновъ* (Одесса); *И. Коровинъ* (Екатеринбургъ); *Г. Оганянцъ* (Ялта); *В. Булыгинъ.*

№ 711 (4 сер.). *Освободить отъ ирраціональности выраженіе*

$$\frac{4(1+\sqrt{x})+x}{\sqrt[3]{2(3x+4)+(x+12)\sqrt{x}}}$$

Такъ какъ

$$4(1+\sqrt{x})+x=x+4\sqrt{x}+4=(\sqrt{x}+2)^2$$

и

$$\sqrt[3]{2(3x+4)+(x+12)\sqrt{x}}=\sqrt[3]{x\sqrt{x}+6x+12\sqrt{x}+8}=\sqrt[3]{(\sqrt{x}+2)^3}=$$
$$=\sqrt{x}+2$$

то

$$\frac{4(1+\sqrt{x})+x}{\sqrt[3]{2(3x+4)+(x+12)\sqrt{x}}}=\frac{(\sqrt{x}+2)^2}{\sqrt{x}+2}=\sqrt{x}+2.$$

Н. Доброгаевъ (Одесса); *В. Булыгинъ.*

№ 716 (4 сер.) *Доказать, что число*

$$[n-k(k-1)]^{2n}-1$$

дѣлится на $4n+1$, *если* $4n+1$ *простое число, на которое не дѣлится* $2k-1$.

Представимъ выраженіе

$$\{[n-k(k-1)]^{2n}-1\}.4^{2n}$$

въ видѣ

$$[4n-(4k^2-4k)]^{2n}-4^{2n}=[4n+1-(4k^2-4k+1)]^{2n}-(2^2)^{2n}=$$

$$=[4n+1-(2k-1)^2]^{2n}-[(2k-1)^2]^{2n}+[(2k-1)^{4n}-1]-(2^{4n}-1).$$

Разность четныхъ степеней $[4n+1-(2k-1)^2]^{2n}-[(2k-1)^2]^{2n}$ кратна суммы $4n+1-(2k-1)^2+(2k-1)^2=4n+1$, а разности $(2k-1)^{4n}-1$ и $2^{4n}-1$ согласно съ теоремой Фермата также кратны $4n+1$, такъ какъ числа $2k-1$ (по условію) и 2 не дѣлятся на $4n+1$. Слѣдовательно, число $\{[n-k(k-1)]^{2n}-1\}.4^{2n}$ кратно $4n+1$, а такъ какъ 4^{2n} есть число взаимно простое съ $4n+1$, то число $[n-k(k-1)]^{2n}-1$ дѣлится на $4n+1$.

В. Булыгинъ; *Н. С.* (Одесса).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.

Обложка
ищется

Обложка
ищется