№ 433.

ВѢСТНИКЪ

ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ѳ. Кагана.

XXXVII-го Семестра № 1-й.

ОДЕССА
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.
1907.

MATHESIS

Издательство научныхъ и популярно-научныхъ сочиненій изъ области физико-математическихъ наукъ.

1. Г. АБРАГАМЪ, проф. **СБОРНИКЪ ЭЛЕМЕНТАРНЫХЪ ОПЫТОВЪ ПО ФИЗИКѢ**, составленный при участіи многихъ профессоровъ и преподавателей физики. Переводъ съ французскаго подъ редакціей Приватъ-доцента *Б. П. Вейнберга*. Часть I: Работы въ мастерской. Различные рецепты—Геометрія. Механика—Гидростатика. Гидродинамика. Капиллярность—Теплота—Числовыя таблицы.
Ученымъ комитетомъ допущено въ ученическія библіотеки среднихъ учебныхъ заведеній, учительскихъ семинарій и городскихъ, по Положенію 31 мая 1872 г., училищъ, а равно и въ безплатныя народныя читальни и библіотеки.
XVI+272 стр. Со многими (свыше 300) рисунками. Цѣна 1 р. 50 к.

2. Г. АБРАГАМЪ, проф. **СБОРНИКЪ ЭЛЕМЕНТАРНЫХЪ ОПЫТОВЪ ПО ФИЗИКѢ.** Переводъ съ французскаго подъ редакціей Приватъ-доцента *Б. П. Вейнберга*. Часть II: Звукъ—Свѣтъ—Электричество—Магнитизмъ.
LXXV+434 стр. Со многими (свыше 400) рисунками. Цѣна 2 р. 75 к.

3. С. АРРЕНІУСЪ, проф. **ФИЗИКА НЕБА.** Разрѣшенный авторомъ и дополненный по его указаніямъ переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей Приватъ-доцента *А. Р. Орбинскаго*. Содержаніе: Неподвижныя звѣзды—Солнечная система—Солнце—Планеты, ихъ спутники и кометы—Космогонія.
VIII+250 стр. Съ 66 черными и 2 цвѣтными рисунками въ текстѣ и 1 черной и 1 цвѣтной отдѣльными таблицами. Цѣна 2 руб.
Ученымъ Комитетомъ М. Н. П. допущено въ ученическія, старшаго возраста, библіотеки среднихъ учебныхъ заведеній, а равно и въ безплатныя народныя библіотеки и читальни.

4. **УСПѢХИ ФИЗИКИ**, сборникъ статей о важнѣйшихъ открытіяхъ послѣднихъ лѣтъ въ общедоступномъ изложеніи. Подъ редакціей „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики". Содержаніе: *Винеръ*, Расширеніе нашихъ чувствъ—*Пильчиковъ*, Радій и его лучи—*Дебіернъ*, Радій и радіоактивность—*Рихарцъ*, Электрическія волны—*Слаби*, Телеграфированіе безъ проводовъ—*Шмидтъ*, Задача объ элементарномъ веществѣ (основанія теоріи электроновъ).
IV+157 стр. Съ 41 рисункомъ и 2 таблицами. Цѣна 75 коп.

5. АУЭРБАХЪ, проф. **ЦАРИЦА МІРА И ЕЯ ТѢНЬ.** Общедоступное изложеніе основаній ученія объ *энергіи и энтропіи*. Пер. съ нѣмецкаго. Съ предисловіемъ *Ш. Э. Гильома*, Вице-Директора Международнаго Бюро Мѣръ и Вѣсовъ.
VIII+56 стр. Цѣна 50 к.

6. С. НЬЮКОМЪ, проф. **АСТРОНОМІЯ ДЛЯ ВСѢХЪ.** Переводъ съ англійскаго. Съ предисловіемъ Приватъ-доцента *А. Р. Орбинскаго*
XXIV+285 стр. Съ портретомъ Автора, 64 рисунками въ текстѣ и 1 таблицей. Цѣна 1 р. 50 к.

7. Г. ВЕБЕРЪ и І. ВЕЛЬШТЕЙНЪ. **ЭНЦИКЛОПЕДІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ. Томъ I. Энциклопедія элементарной алгебры,** обраб. проф. *Веберомъ*. Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей Приватъ-доцента *В. Ф. Кагана*. Книга I. Основанія ариѳметики, гл. I—X. Книга II. Алгебра, гл. XI—XIX. Книга III. Анализъ. гл. XX—XXVI. **Выпускъ I.** Стр. 1—256. Главы I—XII. **Цѣна 1 р. 50 к.**
Выпускъ II печатается.

8. Дж. ПЕРРИ, проф. **ВРАЩАЮЩІЙСЯ ВОЛЧОКЪ.** Публичная лекція съ 63 рисунками. Переводъ съ англійскаго. VII+96 стр. **Цѣна 60 к.**

9. Р. ДЕДЕКИНДЪ, проф. **НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ИРРАЦІОНАЛЬНЫЯ ЧИСЛА.** переводъ Приватъ-доцента *С. Шатуновскаго* съ приложеніемъ его статьи: **Доказательство существованія трансцендентныхъ чиселъ.** 40 стр. Цѣна 40 к.

10. К. ШЕЙДЪ, проф. **ПРОСТЫЕ ХИМИЧЕСКІЕ ОПЫТЫ для юношества** Переводъ съ нѣмецкаго, подъ редакціей Лаборанта Новороссійскаго Университета *Е. С. Ельчанинова*. Цѣна 1 р. 20 к.

СЪ ТРЕБОВАНІЯМИ ОБРАЩАТЬСЯ:

Одесса, Типографія М. Шпенцера, ул. Новосельскаго 66.

XXXVII Сем. № 1.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

№ 433.

Эволюція солнечной системы.

Ф. Р. Мультона.

Эволюція.—Этимъ именемъ обозначаютъ обыкновенно чрезвычайно медленное измѣненіе, особенно, если это измѣненіе происходитъ въ направленіи отъ простого и неорганизованнаго къ сложному и организованному. Удивительно, что идея эволюціи казалась инымъ умамъ непріемлемой, хотя быстрыя и радикальныя измѣненія въ большинствѣ предметовъ извѣстны по опыту каждому. Причина этого, быть можетъ, заключается въ томъ, что эволюція въ цѣломъ есть движеніе въ одномъ направленіи, тогда какъ множество измѣненій, извѣстныхъ изъ опыта, періодичны, какъ напримѣръ, смѣна временъ года.

Съ расширеніемъ нашихъ знаній мы замѣчаемъ, что все находится въ состояніи измѣненія. Измѣняются индивидуумы, измѣняются учрежденія, измѣняются языки и даже „вѣчныя горы" смываются съ лица земли въ одно мгновеніе геологическаго времени. Мы разсмотримъ теперь рядъ измѣненій, въ которомъ современныя условія и соотношенія солнца и планетъ представляютъ только одинъ этапъ великой эволюціи.

Данныя задачи.—Очевидно само собою, что знаніе современныхъ условій нашей системы необходимо для построенія ея эволюціи. Конечно, намъ извѣстно не все, что можетъ касаться этого вопроса, и это „все" даже никогда и не будетъ извѣстно; но это не помѣшаетъ намъ набросать по крайней мѣрѣ общій очеркъ развитія солнечной системы. Можно найти много примѣровъ того, что общія черты ряда измѣненій можно предсказать и безъ знанія всѣхъ мелкихъ факторовъ, входящихъ въ задачу. Напримѣръ, температура какого-нибудь мѣста зависитъ не только отъ широты этого мѣста и отъ времени года, но также и отъ массы болѣе мелкихъ причинъ. И предсказать въ точности температуру этого мѣста для заданнаго момента невозможно. Но въ зависимости отъ времени года и отъ разности между продолжительностью ночи и дня, можно указать общій ходъ измѣненій температуры. Подобнымъ же образомъ нельзя думать, что въ нашихъ силахъ дать всѣ детали эволюціи солнечной системы; однакожъ, дать общій очеркъ'дея это задача, отнюдь не безнадежная, — вопросъ, который вовсе не олженъ остаться навсегда за предѣлами нашего познанія.

Источникомъ величайшей опасности для теоріи, которая должна охватить неизмѣримое время, является возможность существованія такихъ вліяній, которыя остаются незамѣтными за періоды времени, доступные нашему опыту, но дѣйствуютъ постоянно въ одну сторону. Такъ, возвращаясь снова къ нашему примѣру относительно погоды, еслибы на самомъ дѣлѣ излученіе солнцемъ тепла все уменьшалось, а намъ этотъ фактъ оставался неизвѣстнымъ, наши предсказанія температуры для отдаленнаго будущаго не могли бы быть вѣрными. Отсюда слѣдуетъ, что заключенія, особенно относительно деталей, которыя можно извлечь изъ какой-нибудь теоріи эволюціи, будутъ тѣмъ менѣе достовѣрны, чѣмъ больше они будутъ удалены отъ настоящаго времени.

Для того, чтобы мы могли раскрыть законы эволюціи солнечной системы, кромѣ ея нынѣшнихъ условій, должны быть также извѣстны законы ихъ измѣненій. Это можно сравнить съ болѣе простой задачей предсказанія мѣста планетъ черезъ годъ. Для ея рѣшенія намъ необходимо знать какъ тѣ мѣста, въ которыхъ сейчасъ находятся планеты, такъ и законы ихъ движеній.

Значитъ, данными для эволюціи солнечной системы для насъ будутъ служить—какъ ея нынѣшнія условія, такъ и законы, по которымъ происходятъ совершающіяся въ ней явленія.

Значеніе теоріи эволюціи.—Важность каждаго факта находится въ прямой зависимости отъ числа извѣстныхъ его соотношеній съ другими фактами. Такъ какъ теорія эволюціи много занимается такими соотношеніями, то попытка построить такую теорію невольно обращаетъ ваше вниманіе на связь самихъ фактовъ. Эта связь критически изслѣдуется; поэтому попытка построенія теоріи эволюціи имѣетъ то значеніе, что ведетъ къ лучшему пониманію матеріала, на которомъ она основывается.

Всякая научная теорія неизмѣнно требуетъ присоединенія чего-либо новаго къ тѣмъ даннымъ, на которыхъ она основана. Такимъ образомъ она даетъ импульсъ къ изслѣдованію и направляетъ его. Не смотря на то, что намъ иногда приходится слышать, будто человѣкъ науки долженъ воздерживаться отъ предвзятыхъ идей, не подлежитъ сомнѣнію, что огромное большинство открытій было сдѣлано тѣми, которые искали именно того, что они нашли.

Въ большинствѣ другихъ случаевъ открытія были сдѣланы при попыткахъ найти прямо противоположное или, по крайней мѣрѣ, нѣчто отличное, но по существу того же типа, подъ вліяніемъ ложной или несовершенной теоріи. Такимъ образомъ, значеніе теоріи эволюціи, съ другой стороны, заключается въ томъ, что она ведетъ къ открытію новыхъ фактовъ.

Широкая научная теорія включаетъ въ себѣ много второстепенныхъ теорій, относящихся къ отдѣльнымъ группамъ явленій. Напр., въ солнечной системѣ мы имѣемъ теоріи движенія планетъ, захвата кометъ, Сатурновыхъ колецъ, зодіакальнаго свѣта, экваторіальнаго ускоренія солнца и пр. При построеніи общей теоріи эволюціи системы, эти второстепенныя теоріи должны быть связаны съ цѣлымъ и потому онѣ подвергаются тщательному изслѣдованію. Эта критика дополнительныхъ теорій, будетъ ли она созидательной или разрушительной, составляетъ еще одну важную сторону всякаго широкаго обобщенія.

Мы можемъ контролировать событія съ пользою для себя или можемъ приспособляться къ нимъ при помощи научныхъ теорій. Хотя астрономія внесла много непосредственно важныхъ для благосостоянія человѣка вкладовъ, однако она не такъ непосредственно утилитарна, какъ большинство другихъ наукъ. Но ни одна наука не превосходитъ астрономіи косвенными выгодами, которыя она даетъ и которыя состоятъ въ обогащеніи нашего индивидуальнаго опыта.

Вдумываясь, мы найдемъ, что очень многіе виды нашей дѣятельности направлены на удовлетвореніе нашихъ умственныхъ нуждъ. Такъ, мы путешествуемъ не для того, чтобы добыть себѣ больше пищи или одежды, но для того, чтобы пріобрѣсти болѣе широкій кругозоръ, знакомясь съ необычными предметами. Важною стороною путешествія является не посѣщеніе какого-нибудь опредѣленнаго мѣста, но пріобрѣтеніе интеллектуальнаго опыта. Астрономы не могутъ путешествовать по громаднымъ пространствамъ, которыя они изслѣдуютъ, но длинныя руки ихъ анализа схватываютъ и собираютъ факты, представляя ихъ сознанію съ такой живостью, какую едва ли превосходитъ какой бы то ни былъ опытъ. Такимъ образомъ, астрономія какъ бы распространяетъ нашъ опытъ на безконечно обширное поле. Но интереснѣе всего, вмѣстѣ съ этимъ, что развитіе удовлетворительной теоріи эволюціи расширяетъ намъ опытъ такимъ же образомъ и во времени.

Наконецъ теорія, сводящая воедино огромное разнообразіе наблюденныхъ фактовъ, имѣетъ рѣдкую эстетическую цѣнность. Она стоитъ въ такомъ же отношеніи къ перечню несовершенно связанныхъ другъ съ другомъ фактовъ, которые лежатъ въ ея основѣ, въ какомъ стоитъ законченный прекрасный домъ къ невзрачнымъ кучамъ камня, кирпича и дерева, изъ которыхъ онъ построенъ. Размышляя въ этомъ направленіи, въ концѣ своего труда по описательной астрономіи, Лапласъ говорилъ: „Въ своемъ великомъ цѣломъ астрономія является прекраснѣйшимъ памятникомъ человѣческой мысли, благороднѣйшимъ свидѣтельствомъ его разума".

Историческія свѣдѣнія.

Райтъ и Кантъ.—Первая теорія эволюціи солнечной системы и даже гораздо шире—эволюціи всей звѣздной вселенной—на сколько-нибудь научномъ основаніи была опубликована въ 1759 году Томасомъ Райтомъ (Wright) изъ Дергама (Англія). Онъ предполагалъ, что Млечный Путь состоитъ изъ громаднаго числа системъ вродѣ нашей собственной солнечной системы, расположенныхъ въ видѣ большого двойного кольца, которое вращается около перпендикулярной къ его плоскости оси. Солнечной системы онъ касался только мимоходомъ, какъ примѣра для нѣкоторыхъ изъ своихъ построеній относительно звѣздной вселенной.

Въ 1751 году сочиненіе Райта попало въ руки молодому философу Канту, сейчасъ же обратившему свой блестящій умъ на разборъ задачъ космогоніи. Въ 1755 году онъ напечаталъ книгу по этому вопросу, въ которой принималъ общую идею Райта, особенно относительно строенія Млечнаго пути. Его же собственный вкладъ состоялъ главнымъ образомъ въ развитіи теоріи эволюціи солнечной системы. Онъ прямо поставилъ вопросъ о ростѣ солнечной системы изъ болѣе простого состоянія и, для защиты отъ предразсудковъ своего времени, доказывалъ въ предисловіи, что вѣра въ такую эволюцію нисколько не должна колебать вѣры въ Высшее Существо.

Кантъ выставилъ предположеніе, что вначалѣ весь матеріалъ, который заключается теперь въ различныхъ членахъ нашей солнечной системы, находился въ состояніи разъединенныхъ элементовъ и былъ равномѣрно разсѣянъ по всему пространству, занятому этими тѣлами. Онъ считалъ это простѣйшей гипотезой, какая только возможна, для начальнаго состоянія системы. Нарушеніе однородности первичной массы онъ приписывалъ различію ея элементовъ и ихъ силы притяженія. Онъ предполагалъ, что болѣе тяжелыя молекулы должны были притягивать къ себѣ сосѣднія болѣе легкія и что эти небольшія скопленія должны были постепенно увеличиваться отъ прибавленія меньшихъ массъ. Въ массѣ должны были возникнуть движенія и, вслѣдствіе равномѣрности первоначальнаго распредѣленія вещества, результирующія притяженія должны были быть направлены къ центру всей системы. Онъ обратилъ вниманіе на тотъ фактъ, что стремленіе газовъ расширяться дѣйствовало противъ притяженія, и предполагалъ какимъ-то неяснымъ образомъ, что эти отталкивательныя силы должны были породить боковыя движенія упомянутыхъ небольшихъ скопленій. Сначала эти скопленія должны были двигаться во всевозможныхъ направленіяхъ, но затѣмъ, по его мнѣнію, послѣдовательныя столкновенія между ними должны были свести всѣ скопленія къ немногимъ массамъ, которыя двигались въ одномъ направленіи и по круговымъ почти орбитамъ.

Въ слѣдующихъ главахъ Кантъ разсматривалъ плотности и отношенія массъ планетъ, эксцентриситеты планетныхъ орбитъ, происхожденіе кометъ, происхожденіе спутниковъ и вращенія планетъ, происхожденіе колецъ Сатурна, зодіакальный свѣтъ и теорію строенія и физическихъ условій, имѣющихъ мѣсто на солнцѣ.

Красота и общность теоріи Канта увлекательны, но она представляетъ нѣсколько очевидныхъ трудностей. Во-первыхъ, отталкивательныя силы не были бы достаточны, чтобы произвести вращеніе всей системы, такъ какъ, пока она не подвержена внѣшнимъ вліяніямъ, общее количество вращенія въ ней остается постояннымъ. Кромѣ того, даже если и допустить вращеніе, то остается совершенно неяснымъ, почему должна быть одна господствующая центральная масса и почему всѣ движенія должны уничтожиться, кромѣ тѣхъ, которыя происходятъ почти въ одной плоскости въ одномъ и томъ же направленіи.

Кантово изложеніе многихъ отдѣльныхъ вопросовъ показываетъ поразительную остроту ума и способность обобщенія, но доказательства его нерѣдко ошибочны, такъ какъ его свѣдѣнія о физическихъ законахъ были очень неправильны. Съ исторической точки зрѣнія его трудъ объ эволюціи солнечной системы представляетъ величайшій интересъ; но такъ какъ его теорія совершенно неудовлетворительна въ нѣкоторыхъ основныхъ пунктахъ, то намъ не зачѣмъ останавливаться здѣсь на дальнѣйшихъ подробностяхъ.

Лапласова теорія колецъ.—Въ 1796 году появилось великолѣпное, превосходно написанное общедоступное изложеніе астрономіи Лапласа. Въ немъ онъ съ торжествомъ и гордостью объяснялъ, какъ астрономы побороли одну трудность за другой, пока практически не были рѣшены почти всѣ вопросы. Невѣроятно, чтобы астрономы когда-нибудь снова имѣли передъ собою такъ мало требующихъ разрѣшенія задачъ, какъ они имѣли въ то время. Въ послѣдней главѣ своего труда Лапласъ изложилъ свои мысли о развитіи солнечной системы, совершенно пренебрегши болѣе общимъ вопросомъ о развитіи всей звѣздной вселенной. Въ нѣсколькихъ изданіяхъ, появившихся до его смерти въ 1827 году, онъ сдѣлалъ много добавленій къ своимъ первоначальнымъ замѣчаніямъ, но въ нихъ нигдѣ нѣтъ указаній на то, что онъ когда-нибудь слышалъ о работѣ Канта.

Лапласъ обратилъ вниманіе на тотъ фактъ, что всѣ движенія въ солнечной системѣ,—и вращенія и обращенія,—извѣстныя въ то время, происходили почти въ одной и той же плоскости въ томъ же направленіи. По его вычисленію, вѣроятность того, что этотъ результатъ есть случайность, составляетъ не болѣе одного въ 500 милліонахъ; это показываетъ, что по всей вѣроятности этотъ фактъ обусловленъ тѣмъ начальнымъ состояніемъ, изъ котораго развилась наша система. Равнымъ образомъ онъ подчеркнулъ и тотъ замѣчательный фактъ, что орбиты планетъ представляютъ почти круги, тогда какъ орбиты кометъ параболичны.

Бюффонъ предложилъ теорію, что планеты состоятъ изъ вещества, которое было оторвано отъ солнца ударомъ нѣкогда упавшей на него кометы. Лапласъ говоритъ, что ему извѣстна только эта теорія происхожденія планетъ, и приводитъ роковое для нея возраженіе, что вещество, оторванное указаннымъ образомъ, должно было вернуться въ ту точку, изъ которой оно вышло, и соединиться съ первоначальной массой или же должно было удалиться отъ солнца въ безконечность.

Свою теорію Лапласъ предлагалъ „съ тѣмъ недовѣріемъ, которое должно внушать все, что не есть результатъ наблюденія или вычисленія“. Въ общихъ чертахъ его теорія состояла въ томъ, что первоначально солнечная атмосфера (въ позднѣйшихъ изданіяхъ туманная оболочка), находившаяся въ состояніи чрезвычайно высокой температуры, простиралась за орбиту самой далекой планеты; вся эта масса вращалась, какъ твердое тѣло, въ томъ направленіи, въ которомъ движутся теперь планеты. Размѣры солнечной атмосферы удерживались главнымъ образомъ въ силу расширенія чрезвычайно нагрѣтыхъ паровъ и отчасти въ силу центробѣжнаго ускоренія вслѣдствіе вращенія; по мѣрѣ потери тепла излученіемъ эта масса, подъ вліяніемъ взаимнаго тяготѣнія ея частей, сжималась; одновременно съ ея сжатіемъ возрастала необходимо и скорость ея вращенія, такъ какъ общее количество движенія должно оставаться постояннымъ; по истеченіи нѣкотораго времени, центробѣжное ускореніе на экваторѣ становилось равнымъ притяженію и отъ массы отрывалось кольцо, тогда какъ остальная часть продолжала сокращаться; такое кольцо отрывалось на разстояніи каждой планеты; это кольцо едвали могло быть совершенно однородно и, раздѣляясь въ одной точкѣ, оно, въ силу взаимныхъ притяженій своихъ частей, соединялось въ какой-нибудь другой точкѣ и образовывало планету; наконецъ, спутники образовывались изъ колецъ, которыя давало сжатіе планетъ, единственный примѣръ чего, существующій теперь, представляетъ кольцо Сатурна.

Теорія Лапласа была скромнѣе теоріи Канта въ томъ отношеніи, что она не стремилась объяснять всю вселенную, и, можетъ быть, по этой причинѣ ея основательность меньше могла подвергаться сомнѣнію. За нею стоялъ громадный престижъ имени Лапласа и потому она вскорѣ была принята всѣми. Она оказала не поддающееся учету вліяніе на науку и философію XIX столѣтія. Невозможно опредѣлить, въ какой мѣрѣ она вошла во все, начиная съ истолкованія астрономическихъ и геологическихъ явленій и кончая разборомъ и объясненіемъ богословскихъ системъ. Въ виду этого огромнаго вліянія мы остановимся подробнѣе на тѣхъ прибавленіяхъ, которыя были сдѣланы къ ней, и на тѣхъ возраженіяхъ, которыя она вызвала.

(Продолженіе слѣдуетъ).

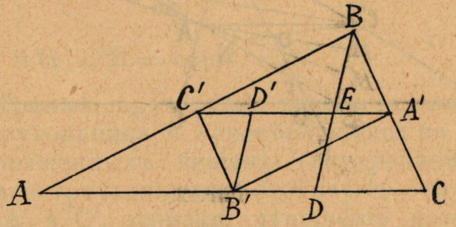
Къ теоріи прямыхъ Чевы въ треугольникѣ.

В. Шлыгина.

Треугольникъ A′B′C′, вершины котораго A′, B′, C′ суть соотвѣтственно средины сторонъ BC, AC и AB треугольника ABC, называется *дополнительнымъ* по отношенію къ треугольнику ABC. Очевидно, что одноименныя стороны треугольниковъ даннаго и дополнительнаго параллельны, вслѣдствіе чего эти треугольники подобны, и отношеніе ихъ сходственныхъ линейныхъ элементовъ равно 2 : 1. Данный треугольникъ по отношенію къ своему дополнительному треугольнику называется *антидополнительнымъ*.

1. *Теорема.* Соотвѣтственныя чевіаны *) треугольниковъ даннаго и дополнительнаго параллельны и пересѣкаютъ основаніе дополнительнаго треугольника въ точкахъ изотомическихъ относительно этого основанія,

Пусть данъ треугольникъ ABC (фиг. 1) со сторонами:



Фиг. 1.

$BC=2a$, $AC=2b$ и $AB=2c$ и дополнительный треугольникъ A′B′C′, въ которомъ $B'C'=a$, $A'C'=b$, $A'B'=c$. Проведемъ чевіаны BED и B′D′ такъ, чтобы имѣло мѣсто равенство:

$$\frac{AD}{CD}=\frac{A'D'}{C'D'}=\frac{m}{n},\text{ гдѣ }\frac{m}{n}\text{ данное отношеніе.}$$

Имѣемъ:
$$CD=\frac{2bn}{m+n}=2C'D'.$$

Такъ какъ
$$\frac{CD}{EA'}=\frac{BC}{BA'}=2,$$

то $C'D'=EA'$.

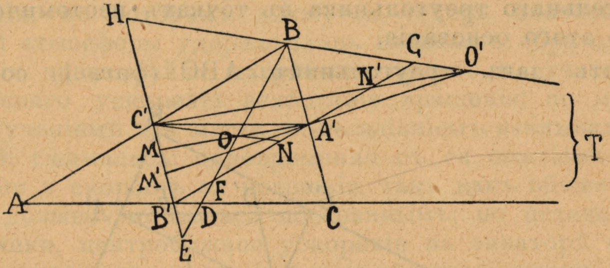
Такъ какъ треугольники BC′E и A′B′D′ равны, то $\angle BEC'=\angle B'D'A'$, а это служитъ признакомъ доказываемой параллельности.

*) *Чевіаною* или *прямой Чевы* называется всякая трансверсаль, проходящая черезъ вершину треугольника.

Примѣръ. Биссектриссы угловъ даннаго треугольника параллельны биссектриссамъ дополнительнаго треугольника и проходятъ черезъ основанія антибиссектриссъ послѣдняго; антибиссектриссы даннаго треугольникп параллельны антибиссектриссамъ дополнительнаго треугольника и проходятъ черезъ основанія его биссектриссъ. Медіаны треугольника совпадаютъ съ медіанами дополнительнаго треугольника, слѣдовательно эти треугольники имѣютъ общій центръ тяжести.

2. *Теорема.* Каждая изъ сопряженно гармоническихъ чевіанъ вершины B треугольника ABC отсѣкаетъ отъ сторонъ A′B′ и C′B′ дополнительнаго треугольника, считая отъ A′ и C′, отрѣзки, произведеніе которыхъ есть величина постоянная, равная произведенію сторонъ A′B′ и C′B′.

Черезъ вершину B (фиг. 2) проведемъ произвольную пару



Фиг. 2.

гармонически сопряженныхъ чевіанъ BD и BT, дѣлящихъ сторону AC въ нѣкоторомъ отношеніи $\frac{m}{n}$ и пересѣкающихъ стороны A′B′ и B′C′ дополнительнаго треугольника (или ихъ продолженія) въ точкахъ F и E, G и H. Докажемъ, что

$$A'F \,.\, C'E = ac$$

и

$$A'G \,.\, C'H = ac.$$

Изъ треугольниковъ A′B′C и AC′B′, пересѣченныхъ трансверсалью BE, по теоремѣ Менелая имѣемъ:

$$A'F \,.\, B'D \,.\, BC = B'F \,.\, DC \,.\, A'B$$

и

$$C'E \,.\, B'D \,.\, AB = B'E \,.\, AD \,.\, C'B.$$

Замѣчая, что $BC = 2a$, $AB = 2c$, $AD = \frac{2bm}{m+n}$, $DC = \frac{2bn}{m+n}$,

$$B'D = AD - b = \frac{b(m-n)}{m+n},\quad B'F = c - A'F,\quad B'E = C'E - a,$$

будемъ имѣть:

$$A'F = \frac{cn}{m} \text{ и } C'E = \frac{am}{n},$$

откуда

$$A'F \,.\, C'E = \text{const.} = ac.$$

Изъ треугольниковъ $A'B'C$ и $AC'B'$, пересѣченныхъ трансверсалью HT, по теоремѣ Менелая получится:

$$B'G \,.\, A'B \,.\, CT = A'G \,.\, BC \,.\, B'T$$

и

$$AB \,.\, C'H \,.\, B'T = C'B \,.\, B'H \,.\, AT.$$

Такъ какъ $CT = \frac{2bn}{m-n}$, $AT = \frac{2bm}{m-n}$, $B'G = A'G + c$,

$B'H = a + C'H$, $B'T = CT + b = \frac{b(m+n)}{m-n}$, то

$$A'G = \frac{cn}{m} \text{ и } C'H = \frac{am}{n},$$

и слѣдовательно, $A'G \,.\, C'H = \text{const.} = ac.$

3. *Теорема.* Прямыя, проходящія черезъ вершины A' и C' дополнительнаго треугольника и пересѣкающіяся на какой либо изъ гармонически сопряженныхъ чевіанъ (внутренной или внѣшней) вершины B даннаго треугольника, отсѣкаютъ отъ сторонъ $A'B'$ и $C'B'$, считая отъ A' и C', отрѣзки, отношеніе которыхъ для данной пары гармоническихъ чевіанъ постоянно и равно отношенію величинъ cn и am.

Возьмемъ произвольную точку O на внутренней чевіанѣ BE, дѣлящей основаніе AC въ отношеніи $m:n$ (фиг. 2), соединимъ ее съ вершинами A' и C' и продолжимъ прямыя $A'O$ и $C'O$ до пересѣченія съ $B'C'$ и $A'B'$ соотвѣтственно въ точкахъ M и N. На внѣшней чевіанѣ HG возьмемъ произвольную точку O'; соединивъ ее съ вершинами A' и C', продолжимъ $A'O'$ и $C'O'$ до пересѣченія со сторонами $B'C'$ и $A'B'$ соотвѣтственно въ точкахъ M' и N'. Докажемъ, что

$$\frac{A'N}{C'M} = \frac{cn}{am}$$

и

$$\frac{A'N'}{C'M'} = \frac{cn}{am}.$$

Примѣняя теорему Менелая къ треугольнику $B'FE$, пересѣченному $C'N$ и $A'M$, будемъ имѣть:

$$B'N \,.\, FO \,.\, EC' = FN \,.\, EO \,.\, B'C',$$

$$B'M \,.\, EO \,.\, FA' = EM \,.\, FO \,.\, B'A'.$$

Перемноживъ эти равенства и замѣтивъ, что

$$A'F=\frac{cn}{m},\quad C'E=\frac{am}{n},\quad B'N=c-A'N,\quad B'M=a-C'M,$$

$FN=A'F-A'N$, $EM=C'E-C'M$, получимъ послѣ преобразованій:

$$\frac{A'N}{C'M}=\frac{cn}{am}.$$

Изъ треугольника $B'HG$, пересѣченнаго трансверсалями $O'C'$ и $O'M'$, получимъ:

$$C'H\,.\,B'N'\,.\,GO'=B'C'\,.\,N'G\,.\,HO'$$

$$A'G\,.\,B'M'\,.\,HO'=B'A'\,.\,M'H\,.\,GO'.$$

Перемножимъ эти равенства. Такъ какъ

$$C'H=\frac{am}{n},\quad A'G=\frac{cn}{m},\quad B'N'=c+A'N',\quad B'M'=a-C'M',$$

$$N'G=A'G-A'N',\quad M'H=HC'+C'M',$$

то послѣ упрощеній найдемъ:

$$\frac{A'N'}{C'M'}=\frac{cn}{am}.$$

4. *Обратная теорема.* Если чевіаны вершинъ A' и C' даннаго тр-ка $A'B'C'$ отсѣкаютъ отъ противоположныхъ сторонъ треугольника отрѣзки $A'N$ и $C'M$, находящіеся между собою въ отношеніи $\frac{p}{q}$, то точка O ихъ пересѣченія лежитъ на чевіанѣ вершины B антидополнительнаго треугольника ABC, дѣлящей сторону AC въ отношеніи $\frac{m}{n}=\frac{cq}{ap}$.

Эта теорема легко доказывается отъ противнаго. Дѣйствительно, проведя чевіану BOD и предположивъ:

$$\frac{AD}{DC}=\frac{cq}{ap}+\alpha,$$

гдѣ α больше или меньше нуля, на основаніи прямой теоремы будемъ имѣть:

$$\frac{A'N}{C'M}=\frac{c}{a\left(\frac{cq}{ap}+\alpha\right)}=\frac{p}{q},$$

откуда $\alpha=0$, что противно допущенію: $\alpha\lessgtr 0$.

5. *Слѣдствіе.* Зная отношенія, въ которыхъ дѣлятся стороны даннаго треугольника тремя чевіанами его, проходящими черезъ данную точку, можно вычислить отношенія, въ которыхъ раздѣлятся стороны дополнительнаго тр-ка тремя чевіанами его, проходящими черезъ ту же точку; и обратно.

6. Разсмотримъ нѣкоторые частные случаи.

1) $\frac{m}{n}=\frac{c}{a}\cdot$ Тогда $A'N=C'M$ и $A'N'=C'M'$. Такимъ образомъ, прямыя, проходящія черезъ вершины A' и C' дополнительнаго треугольника и пересѣкающіяся на какой либо биссектриссѣ угла B даннаго треугольника, отсѣкаютъ отъ сторонъ дополнительнаго треугольника равные отрѣзки. Отсюда легко заключить, что центръ круга, вписаннаго въ треугольникъ, есть точка Нагеля дополнительнаго треугольника, а центры круговъ внѣвписанныхъ, суть добавочныя точки Нагеля дополнительнаго тре угольника.

2) $\frac{m}{n}=\frac{a}{c}\cdot$ Имѣемъ: $\frac{A'N}{C'M}=\frac{A'N'}{C'M'}=\frac{c^2}{a^2}$, слѣдовательно чевіаны вершинъ A' и C', пересѣкающіяся на антибиссектриссѣ (внутренней или внѣшней) угла B даннаго треугольника, отсѣкаютъ отъ сторонъ дополнительнаго треугольника отрѣзки, прямо пропорціональные квадратамъ этихъ сторонъ.

3) $\frac{m}{n}=1$. Имѣемъ: $\frac{A'N}{C'M}=\frac{A'N'}{C'M'}=\frac{c}{a}$; слѣдовательно, чевіаны двухъ вершинъ треугольника, пересѣкающіяся на медіанѣ стороны, опредѣляемой этими вершинами, отсѣкаютъ отъ другихъ сторонъ отрѣзки прямо, пропорціональные этимъ послѣднимъ.

4) $\frac{m}{n}=\frac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{a^2(b^2+c^2-a^2)}$, т. е. разсматриваемая чевіана проходитъ черезъ центръ круга, описаннаго около треугольника ABC. Тогда

$$\frac{A'N}{C'M}=\frac{a.(b^2+c^2-a^2)}{c.(a^2+b^2-c^2)}.$$

Такъ какъ это отношеніе равно отношенію отрѣзковъ сторонъ дополнительнаго треугольника, считая отъ вершинъ A' и C' до основаній высотъ этого треугольника, опущенныхъ изъ вершинъ C' и A' на стороны $A'B'$ и $C'B'$, то заключаемъ, что центръ круга, описаннаго около даннаго треугольника есть ортоцентръ дополнительнаго треугольника.

5) $\frac{m}{n}=\frac{c^2}{a^2}$, т. е. разсматриваемая чевіана есть симедіана основанія AC. Имѣемъ $\frac{A'N}{C'M}=\frac{A'N'}{C'M}=\frac{a}{c}\cdot$ Поэтому, чевіаны вершинъ A' и C', пересѣкающіяся на симедіанѣ основанія AC даннаго треугольника, отсѣкаютъ отъ сторонъ дополнительнаго

треугольника отрѣзки, обратно пропорціональные этимъ послѣднимъ. Отсюда легко получить, что точка Лемуана даннаго треугольника (точка пересѣченія внутреннихъ симедіанъ) есть точка дополнительнаго треугольника, изотомически сопряженная съ ортоцентромъ послѣдняго, т. е. съ центромъ круга, описаннаго около даннаго треугольника.

(Продолженіе слѣдуетъ).

ОТЧЕТЪ

о работахъ на тему для учащихся подъ названіемъ „Зависимость между периметрами правильныхъ многоугольниковъ и вычисленіе π“.

Тема для учащихся была предложена директоромъ Усть-Медвѣдицкаго реальнаго училища П. С. Флоровымъ 12-го марта 1903 года. Редакція „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной математики“ назначила для исполненія работъ на эту тему шестимѣсячный срокъ, обязавъ желающихъ напечатать свои работы доставить ихъ не позже 1-го ноября 1903 года. До истеченія назначеннаго срока отвѣты на тему были представлены въ редакцію тремя лицами: Я. Дубновымъ, І. Осипянцемъ и Г. Оганянцемъ и своевременно препровождены редакторомъ „Вѣстника“ на заключеніе автора темы. Кромѣ того, ученикъ Усть-Медвѣдицкаго реальнаго училища Н. Куницынъ до истеченія срока и ученики Урюпинскаго реальнаго училища П. Толковановъ, М. Орловъ, В. Родіоновъ и П. Кобызевъ послѣ истеченія срока, назначеннаго редакціей, доставили свои работы непосредственно автору.

Разсмотрѣвъ въ настоящее время всѣ полученныя работы, авторъ темы нашелъ, что поименованными выше лицами исполнена удовлетворительно только одна часть темы, именно: „Зависимость между периметрами правильныхъ многоугольниковъ“. Что касается работъ по „вычисленію π“, то оказалось, что онѣ оставляютъ желать многаго и напечатаны быть не могутъ.

Въ виду того, что большинство доказательствъ формулъ, предложенныхъ въ темѣ, основано на геометрическихъ соображеніяхъ, которымъ обѣщано дать предпочтеніе, авторъ темы въ настоящемъ отчетѣ совершенно игнорируетъ алгебраическій выводъ формулъ и, давая ниже перечень лицъ, представившихъ отвѣты на тему, называетъ только тѣхъ, которыми предложены геометрическія доказательства.

Приводимая таблица показываетъ, кѣмъ и какъ даны отвѣты на вопросы, помѣщенные въ темѣ.

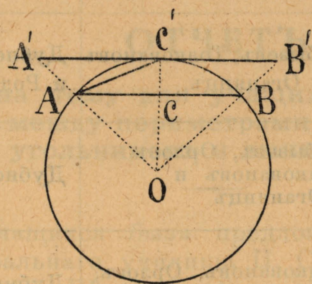
Тема.	Авторы лучшихъ рѣшеній.	Авторы прочихъ рѣшеній.
$P_n^2 - p_n^2 = \frac{p_n^2 P_n^2}{4n^2r^2}$	Всѣ работы равноцѣнны.	Дубновъ, Кобызевъ, Оганянцъ, Орловъ, Осипянцъ, Родіоновъ, Толковановъ и Куницынъ.
$p_{2n}^2 - p_n^2 = \frac{p_n^2 P_{2n}^2}{16n^2r^2}$	Толковановъ и Дубновъ.	Оганянцъ, Орловъ, Осипянцъ и Куницынъ.
$P_n - p_n = \frac{P_n p_{2n}^2}{8n^2r^2}$	Кобызевъ, Толковановъ и Оганянцъ.	Дубновъ, Орловъ, Осипянцъ и Родіоновъ,
$p_{2n} - p_n = \frac{p_{2n} p_{4n}^2}{32n^2r^2}$	Кобызевъ, Орловъ, Толковановъ и Оганянцъ	Дубновъ и Осипянцъ.
$P_{2n} - p_n = \frac{p_n P_{2n}^2}{16n^2r^2}$	Толковановъ, Орловъ, Осипянцъ и Оганянцъ.	Дубновъ и Кобызевъ.
$P_n - P_{2n} = \frac{P_n P_{2n}^2}{16n^2r^2}$	Оганянцъ.	Дубновъ, Кобызевъ, Орловъ, Осипянцъ и Толковановъ.
$p_{2n}^2 = p_n P_{2n}$	Родіоновъ, Оганянцъ, Осипянцъ и Куницынъ.	Дубновъ, Толковановъ, Орловъ и Кобызевъ.
$2p_{2n}^3 = (p_n + p_{2n})p_{4n}^2$	Толковановъ.	Кобызевъ, Орловъ, Оганянцъ и Родіоновъ.
$2p_nP_n = (p_n + P_n)P_{2n}$	Осипянцъ.	Толковановъ, Оганянцъ, Орловъ и Кобызевъ.
$2p_nP_{2n} = (p_n + p_{2n})P_{4n}$	Осипянцъ и Кобызевъ.	Родіоновъ и Толковановъ.

Редакція излагаемыхъ ниже рѣшеній задачъ принадлежитъ одному изъ исполнителей темы, именно Петру Толкованову, старавшемуся сохранить въ неприкосновенности оригинальный текстъ лучшихъ рѣшеній.

Условимся заранѣе обозначать периметры правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ буквами p и P со значкомъ внизу, показывающимъ число сторонъ многоугольника, и радіусъ круга, около котораго описаны эти многоугольники, черезъ r.

Задача № 1-й.

Доказать, что $\mathrm{P}_n^2 - p_n^2 = \dfrac{p_n^2 \mathrm{P}_n^2}{4n^2r^2}$.



Пусть AB будетъ сторона правильнаго n-угольника, вписаннаго въ кругъ радіуса r, а $\mathrm{A'B'}$—сторона правильнаго одноименнаго многоугольника, описаннаго около того же круга, тогда

$$\frac{\mathrm{P}_n}{p_n} = \frac{r}{\mathrm{OC}} \text{ или } \frac{\mathrm{P}_n^2}{p_n^2} = \frac{r^2}{\mathrm{OC}^2}.$$

Составивъ производную пропорцію изъ этого равенства, получимъ:

$$\frac{\mathrm{P}_n^2 - p_n^2}{\mathrm{P}_n^2} = \frac{r^2 - \mathrm{OC}^2}{r^2},$$

откуда

$$\mathrm{P}_n^2 - p_n^2 = \frac{(r^2 - \mathrm{OC}^2)\,\mathrm{P}_n^2}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Но изъ прямоугольнаго $\triangle$-ка AOC имѣемъ:

$$\mathrm{AO}^2 - \mathrm{OC}^2 = \mathrm{AC}^2$$

или

$$r^2 - \mathrm{OC}^2 = \left(\frac{\mathrm{AB}}{2}\right)^2,$$

что по замѣнѣ AB черезъ периметръ, дѣленный на число сторонъ, дастъ:

$$r^2 - \mathrm{OC}^2 = \frac{p_n^2}{4n^2}.$$

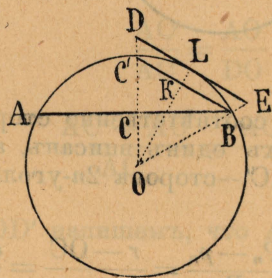
Подставивъ теперь найденное значенiе въ равенство (1), найдемъ:

$$P_n^2 - p_n^2 = \frac{p_n^2 P_n^2}{4n^2r^2}.$$

Задача № 2.

Доказать, что $\underset{2}{p_{2n}} - p_n^2 = \dfrac{p_n^2 P_{2n}^2}{16n^2r^2}$.

Пусть AB сторона правильнаго n-угольника, вписаннаго въ кругъ радiуса r, тогда C′B и DE—соотвѣтственно стороны правильныхъ вписаннаго и описаннаго $2n$-угольниковъ.



Изъ подобiя прямоугольныхъ тр-ковъ BC′C и OEL имѣемъ:

$$\frac{CC'}{BC} = \frac{LE}{OL} \quad \text{или} \quad \frac{CC'^2}{BC^2} = \frac{LE^2}{OL^2},$$

откуда

$$CC'^2 = \frac{BC^2 . LE^2}{OL^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Но изъ прямоугольнаго $\triangle$-ка BC′C находимъ, что

$$CC'^2 = BC'^2 - BC^2.$$

Сравнивъ это равенство съ равенствомъ (1), получимъ:

$$BC'^2 - BC^2 = \frac{BC^2 . LE^2}{OL^2}$$

или

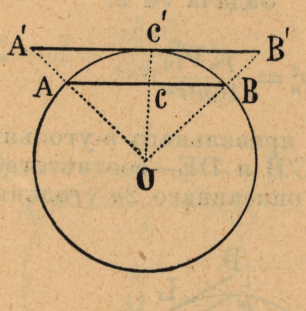
$$\left(\frac{p_{2n}}{2n}\right)^2 - \left(\frac{p_n}{2n}\right)^2 = \frac{\left(\dfrac{p_n}{2n}\right)^2 . \left(\dfrac{P_{2n}}{4n}\right)^2}{r^2}$$

и, наконецъ,

$$p_{2n}^2 - p_n^2 = \frac{p_n^2 P_{2n}^2}{16n^2r^2}.$$

Задача № 3.

Доказать, что $P_n - p_n = \dfrac{P_n p_{2n}^2}{8n^2 r^2}$.



Пусть AB и A′B′ суть соотвѣтственно стороны правильныхъ n-угольниковъ, изъ которыхъ одинъ вписанъ, а другой описанъ около круга радіуса r, и AC′—сторона $2n$-угольника, вписаннаго въ этотъ же кругъ; тогда

$$\frac{P_n}{p_n} = \frac{r}{OC} \quad \text{или} \quad \frac{P_n - p_n}{P_n} = \frac{r - OC}{r} = \frac{cc'}{n} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

На основаніи того, что хорда есть средняя пропорціональная между діаметромъ и своей проекціей на него, имѣемъ:

$$AC'^2 = 2r.CC', \text{ откуда } CC' = \frac{AC'^2}{2r}$$

или

$$CC' = \frac{p_{2n}^2}{8n^2 r}.$$

Подставивъ это значеніе CC′ въ равенство (1), найдемъ

$$\frac{P_n - p_n}{P_n} = \frac{p_{2n}^2}{8n^2 r^2}$$

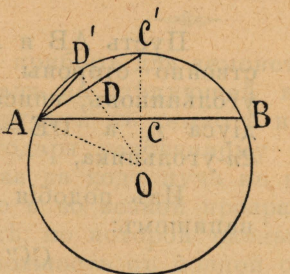
и, наконецъ,

$$P_n - p_n = \frac{p_{2n}^2 P_n}{8n^2 r^2}.$$

Задача № 4.

Доказать, что $p_{2n} - p_n = \dfrac{p_{2n}\, p_{4n}^2}{32n^2 r^2}$.

Пусть AB, AC′ и AD′ суть соотвѣтственно стороны правильныхъ n, $2n$ и $4n$-угольниковъ, вписанныхъ въ кругъ радіуса r, тогда изъ подобія прямоугольныхъ $\triangle$-ковъ $AC'C$ и AOD имѣемъ:



$$\frac{AC'}{AC}=\frac{AO}{DO}$$

или

$$\frac{AC'-AC}{AC'}=\frac{AO-DO}{AO} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Изъ $\triangle$-ка AOD' напишемъ, что $AD'^2=AO^2+OD'^2-2D'O.OD$

или

$$AD'^2=2D'O\,(OD'-OD),$$

откуда

$$OD'-OD=\frac{AD'^2}{2D'O}.$$

Подставивъ это значеніе въ равенство (1), получимъ:

$$\frac{AC'-AC}{AC'}=\frac{AD'^2}{2D'O.AO}$$

и слѣдовательно,

$$AC'-AC=\frac{AC'.AD'^2}{2D'O.AO},$$

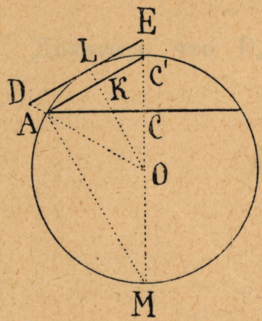
что послѣ замѣны сторонъ соотвѣтствующими значеніями, выраженными черезъ периметръ, дастъ

$$\frac{p_{2n}}{2n}-\frac{p_n}{2n}=\frac{\frac{p_{2n}}{2n}\cdot\left(\frac{p_{4n}}{4n}\right)^2}{2r^2}$$

и, наконецъ,

$$p_{2n}-p_n=\frac{p_{2n}\,p_{4n}^2}{32n^2r^2}.$$

Задача № 5



Доказать, что $P_{2n} - p_n = \dfrac{p_n P_{2n}^2}{16n^2r^2}$.

Пусть AB и AC′ будутъ соотвѣтственно стороны правильныхъ n и $2n$-угольниковъ, вписанныхъ въ кругъ радіуса r, а DE — сторона описаннаго $2n$-угольника,

Изъ подобія $\triangle$-ковъ AC′C и DOL напишемъ:

$$\frac{CC'}{AC} = \frac{DL}{OL},$$

откуда

$$CC' = \frac{AC \cdot DL}{OL}.$$

Затѣмъ изъ подобія $\triangle$-ковъ ACM и DOL имѣемъ

$$\frac{CM}{AC} = \frac{OL}{DL}$$

или

$$CM = \frac{OL \cdot AC}{DL} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Но $CM = 2r - CC'$, что по замѣнѣ CC′ найденнымъ значеніемъ дастъ:

$$CM = 2r - \frac{AC \cdot DL}{OL} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Сравнивъ равенства (1) и (2), найдемъ:

$$\frac{OL \cdot AC}{DL} = 2r - \frac{AC \cdot DL}{OL}$$

или

$$\frac{\left(r\,\dfrac{p_n}{2n}\right)4n}{P_{2n}} = 2r - \frac{\dfrac{p_n}{2n} \cdot \dfrac{P_{2n}}{4n}}{r}$$

и окончательно

$$P_{2n} - p_n = \frac{p_n P_{2n}^2}{10n^2r^2}.$$

(Продолженіе слѣдуетъ).

Приборъ М. Пономаренко для демонстраціи основныхъ явленій катоптрики и діоптрики (Москва).

Предлагаемый приборъ для демонстраціи явленій катоптрики и діоптрики основанъ на слѣдующей идеѣ: если посредствомъ щели изолировать лучъ и въ темнотѣ направить его вдоль стѣнки, то на ней, благодаря разсѣянному свѣту, появится свѣтлая полоса, указывающая на ходъ луча въ воздухѣ. Это явленіе будетъ также замѣтно и во всякой прозрачной средѣ, плотно прилегающей къ стѣнкѣ, по которой скользитъ лучъ. Такимъ образомъ является возможность съ полной очевидностью прослѣдить за направленіемъ луча при переходѣ его изъ одной прозрачной среды въ другую, напр. при переходѣ луча изъ воздуха въ воду, или какую нибудь другую прозрачную жидкость.

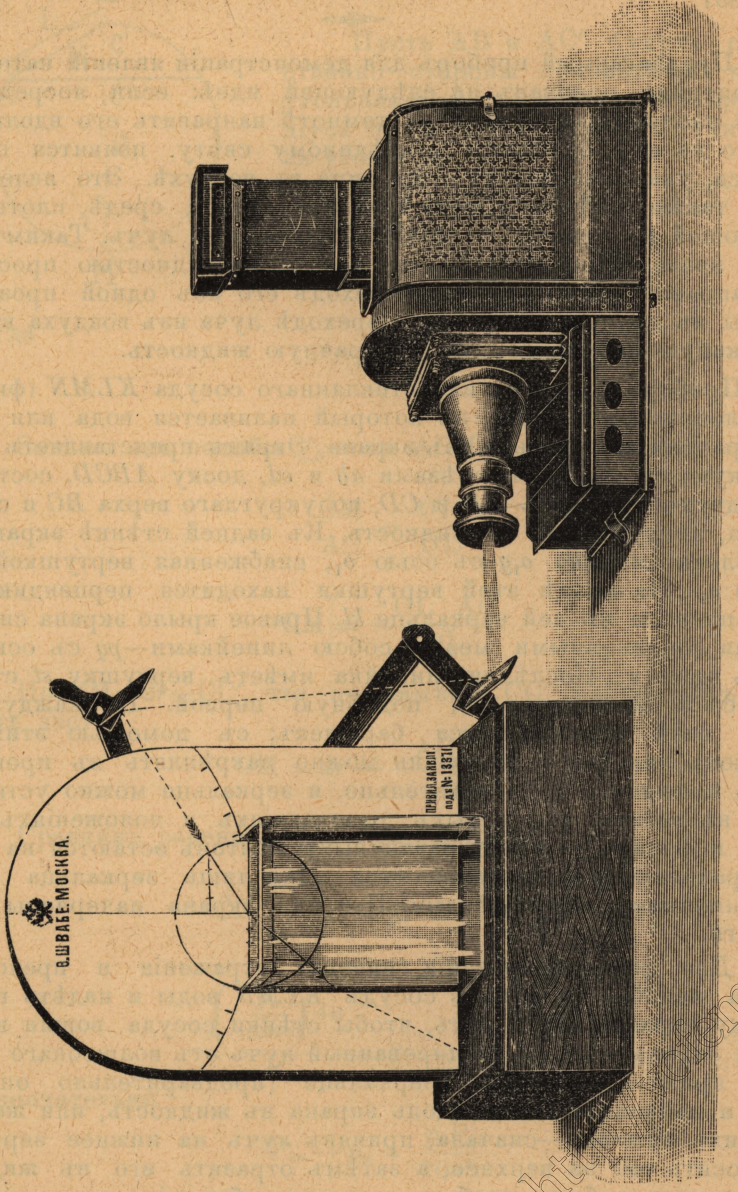
Приборъ состоитъ изъ стекляннаго сосуда $KLMN$ (фиг. 1) *) съ плоскими стѣнками, въ который наливается вода или другая прозрачная жидкость, и изъ экрана. Экранъ представляетъ бѣлую гладкую, съ двумя прорѣзами ab и cd, доску $ABCD$, состоящую изъ двухъ крыльевъ AB и CD, полукруглаго верха BC и средней части, погружаемой въ жидкость. Къ задней стѣнкѣ экрана прикрѣплена линейка o_1g съ осью o_1, снабженная вертушкой gh съ осью o_2. На концѣ этой вертушки находится перпендикулярно укрѣпленное къ ней зеркальце kl. Правое крыло экрана снабжено двумя сочлененными между собою линейками—pq съ осью o_3 и rs съ осью o_4. Послѣдняя линейка имѣетъ вертушку st съ осью o и съ зеркальцемъ mn, подобную первой. На каждую изъ пяти осей навинчивается барашекъ; съ помощью этихъ барашковъ линейки и вертушки можно закрѣплять въ произвольномъ положеніи, а слѣдовательно, и зеркальце можно устанавливать въ весьма различныхъ разстояніяхъ и положеніяхъ. Приборъ и фонарь во время различныхъ опытовъ остаются на мѣстѣ, поворачиваются и перемѣщаются одни лишь зеркальца вмѣстѣ съ линейками и вертушками. Посреди экрана начерчены кругъ и дуга.

Для демонстрированія явленій отраженія и преломленія свѣта надобно налить въ сосудъ $KLMN$ воды и надѣть на него сверху экранъ $ABCD$ такъ, чтобы стѣнки сосуда вошли въ прорѣзы экрана; затѣмъ изолированный лучъ отъ волшебнаго фонаря надо принять на нижнее зеркальце (предварительно опустивъ его) и направить свѣтъ вдоль экрана въ жидкость, или же — для другихъ опытовъ—сначала, принявъ лучъ на нижнее зеркальце, отбросить его на верхнее, а затѣмъ отразить его въ жидкости. Здѣсь могутъ быть, вообще, разныя комбинаціи.

---

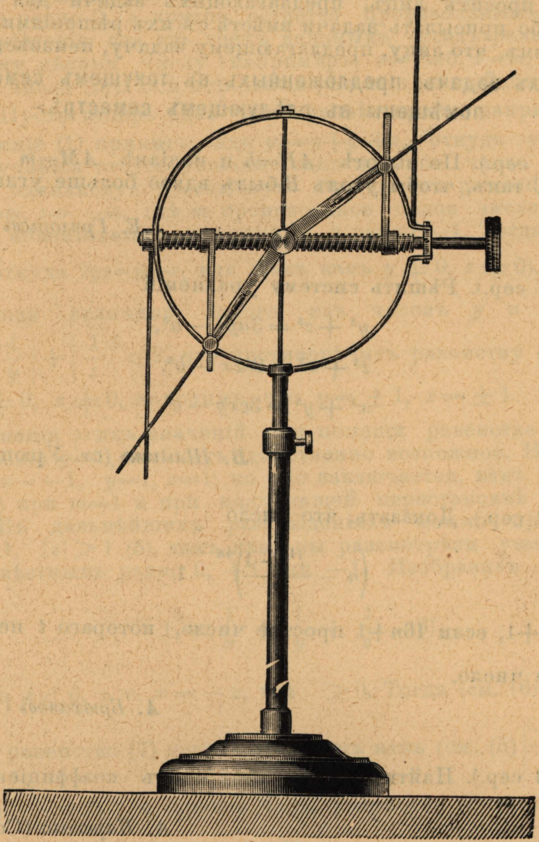
*) На прилагаемыхъ авторомъ клише буквы не проставлены. Однако, приборъ такъ простъ, что врядъ ли это можетъ кого либо затруднить.

Къ описанному прибору присоединено также приспособленіе, которое даетъ возможность доказать, что средній показатель преломленія воды относительно воздуха $= {}^4/_3$. Черезъ металличе-



Фиг. 1.

скій обручъ *ABCD* (фиг. 2) пропущенъ безконечный винтъ *KL*, расположенный по діаметру. Нарѣзка на этомъ винтѣ, начиная отъ центра *O* обруча, сдѣлана въ разныя стороны и съ такимъ разсчетомъ, чтобы ширина витковъ (шаговъ) въ различно наклоненныхъ частяхъ относилась одна къ другой, какъ 4:3. На винтѣ *KOL* насажены двѣ гайки g_1 и g_2, къ которымъ прикрѣплены стержни *mn* и *pq*, проходящіе въ прорѣзы обруча. Если гайки установить посрединѣ кольца и поворачивать винтъ безъ поступательнаго движенія, то гайки будутъ разбѣгаться въ разныя стороны, причемъ пройденныя ими пространства будутъ въ отношеніи 4:3. Въ это время стрѣлки *OJ* и *OR*, снабженныя штифтами z_1 и z_2 будутъ описывать дуги, синусы которыхъ будутъ



Фиг. 2.

относиться, какъ 4:3. Получивъ преломленіе луча въ водѣ, какъ это было указано раньше, прикладываютъ изображенное на фиг. 2 приспособленіе къ свѣтовому экрану, на половину опустивъ его въ воду; затѣмъ вращаютъ стрѣлки до тѣхъ поръ, пока верхняя стрѣлка не совпадаетъ съ падающимъ лучемъ; если при этомъ нижняя стрѣлка совпадетъ съ преломленнымъ лучемъ, значитъ отношеніе между синусами угловъ паденія и преломленія $= {}^4/_3$.

И. Александровъ (Москва).

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“ и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 835 (4 сер.). По высотѣ $AH=h$ и медіанѣ $AM=m$ построить треугольникъ ABC такъ, чтобы уголъ B былъ вдвое больше угла C.

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 836 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$y^3+z^3=3ayz-a^3,$$
$$z^3+x^3=3bzx-b^3,$$
$$x^3+y^3=3cxy-c^3.$$

В. Шлыгинъ (ст. Урюпинская).

№ 837 (4 сер.). Доказать, что число

$$\left(n-\frac{t^4-1}{16}\right)^{4n}-1$$

дѣлится на $16n+1$, если $16n+1$ простое число, котораго t не кратно, и если $\frac{t^4-1}{16}$ — цѣлое число.

А. Брюхановъ (Иркутскъ).

№ 838 (4 сер.). Найти сумму квадратовъ коэффиціентовъ бинома $(1+x)^m$.

А. Паренаго (Сосновицы).

№ 839 (4 сер.). Доказать, что прямыя, соединяющія средины высотъ треугольника съ точками касанія соотвѣтственныхъ сторонъ и вневписанныхъ круговъ, пересѣкаются въ центрѣ вписаннаго круга.

(Заимств.).

№ 840 (4 сер.). Со дна шахты равномѣрнымъ ходомъ подымается наверхъ подъемная корзина. Черезъ 27,5 секунды послѣ начала поднятія изъ корзины выпускаютъ камень, не сообщая ему начальнаго толчка, черезъ 4,5 секундъ звукъ удара камня о дно доносится до корзины, а еще черезъ 112 секундъ послѣ этого корзина достигаетъ отверстія шахты. Опредѣлить глубину послѣдней.

Л. Ямпольскій (Одесса).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 689 (4 сер.). *Найти три такихъ цѣлыхъ числа, чтобы ихъ произведеніе равнялось суммѣ ихъ произведеній по два.*

Называя искомыя числа черезъ x, y, z, имѣемъ $xyz=xy+yz+zx$ (1). Если одно изъ неизвѣстныхъ, напримѣръ x, равно 0, то (см. (1)) одно изъ чиселъ y или z равно 0, а другое остается произвольнымъ. Итакъ, получаемъ первое рѣшеніе: два изъ трехъ искомыхъ чиселъ равны нулю, третье —произвольному цѣлому числу (напримѣръ, $x=y=0$, $z=m$, гдѣ m—произвольное цѣлое число (2)). Всѣ остальныя рѣшенія мы найдемъ, полагая $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$. Пусть теперь одно изъ неизвѣстныхъ, напримѣръ x, равно 1; тогда уравненіе (1) приметъ видъ $yz=y+yz+z$, откуда $y=-z$. Такимъ образомъ получается второе рѣшеніе: одно искомое число равно 1, а два другія имѣютъ одинаковую абсолютную величину и разные знаки (напримѣръ, $x=1$, $y=m$, $z=-m$, гдѣ m произвольное цѣлое число (3)). Пусть теперь одно изъ неизвѣстныхъ, напримѣръ, x равно -1. Тогда (см. (1)) $-yz=$ $=-y+yz-z$, откуда $2yz=y+z$, или (такъ какъ $y\neq 0$, $z\neq 0$), $2=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ (4). Если абсолютная величина одного изъ чиселъ y и z болѣе 1, то $\left|\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right|\leqslant\left|\frac{1}{y}\right|+\left|\frac{1}{z}\right|<2$, что противорѣчитъ равенству (4); поэтому, замѣчая, что $y\neq 0$, $z\neq 0$, находимъ, что $y=\pm 1$, $z=\pm 1$. Испытывая различныя комбинаціи этихъ значеній при помощи равенства (4), получимъ, что предположеніе $y=1$, $z=1$ есть единственно возможное. Итакъ, нами найдено рѣшеніе $x=-1$, $y=1$, $z=1$; но оно заключается, какъ частный случай, въ рѣшеніи (3) при $m=1$ и при надлежащей перестановкѣ обозначеній неизвѣстныхъ. Въ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ можно предположить, что $|x|>1$, $|y|>1$, $|z|>1$ (5), такъ какъ мы разсмотрѣли уже случаи, когда одно изъ неизвѣстныхъ равно 0, $+1$ или -1. Изобразивъ равенство (1) въ видѣ

$$1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\quad(6),$$

допустимъ, что $x<0$, т. е. $x=-k$, гдѣ >0. Тогда (см. (6)) $1+\frac{1}{k}=\frac{1}{y}+$ $+\frac{1}{z}$ (7). Но равенство (7) невозможно, такъ какъ (см. (5) $\left|\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right|\leqslant\left|\frac{1}{y}\right|+$ $+\left|\frac{1}{z}\right|\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, т. е. правая часть равенства (7) не болѣе 1, а лѣвая больше 1. Итакъ, изъ предположенія (5) вытекаетъ, что x, y, z суть положительныя числа. Отсюда вытекаетъ, что значеніе одного изъ неизвѣстныхъ не превышаетъ 3; дѣйствительно, изъ $x>3$, $y>3$, $z>3$ слѣдовало бы, что $\frac{1}{x}<\frac{1}{3}$, $\frac{1}{y}<\frac{1}{3}$, $\frac{1}{z}<\frac{1}{3}$, откуда $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<1$, что (см. (6)) невозможно. Итакъ, если есть рѣшенія, удовлетворяющія условію (5), то въ этихъ рѣшеніяхъ одно изъ неизвѣстныхъ должно быть не болѣе 3, но болѣе 1, т. е. одно изъ неизвѣстныхъ, напримѣръ x, равно 2 или 3. Пусть $x=3$. Тогда (см. (6)) $1=\frac{1}{3}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$, откуда $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}$ (8). Нельзя допустить одновременно неравенствъ $y>3$, $z>3$, такъ какъ въ этомъ случаѣ $\frac{1}{y}<\frac{1}{3}$, $\frac{1}{z}<\frac{1}{3}$, откуда $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{2}{3}$, что (см. (8)) невозможно.

Итакъ, при $x=3$ одно изъ неизвѣстныхъ y или z, напримѣръ y, равно 3 или 2, откуда $\frac{1}{z}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$, $z=3$, или $\frac{1}{z}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$, $z=6$. Итакъ, полагая $x=3$, приходимъ къ двумъ рѣшеніямъ

$x, y, z=3, 3, 3$ или $3, 2, 6$ (въ любомъ соотвѣтствіи) (9).

Пусть теперь $x=2$. Тогда (см. (6)) $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$, откуда $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$ (10). Изъ этого равенства видно, что нельзя одновременно допустить неравенствъ $y>4$, $z>4$, такъ какъ тогда $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$, что противорѣчитъ равенству (10)). Поэтому одно изъ неизвѣстныхъ, напримѣръ y, не болѣе 4, т. е. (см. (5)) $y=4$, 3 или 2. Изъ равенства (10) находимъ, что при $y=4$, $z=4$, при $y=3$, $z=6$, а при $y=2$ $\frac{1}{z}=0$, что невозможно, откуда приходимъ къ рѣшеніямъ $x=2$, $y=4$, $z=4$ (11) и $x=2$, $y=4$, $z=6$, второе изъ которыхъ (см. (9)) уже найдено. Вслѣдствіе симметричности уравненія (7) по отношенію къ неизвѣстнымъ, находимъ (см. (2), (3), (9), (11)), что искомыя цѣлыя значенія x, y, z могутъ равняться лишь слѣдующимъ числомъ: $0, 0, m$; $1, m, -m$; $2, 3, 6$; $3, 3, 3$; $2, 4, 4$, гдѣ m—произвольное цѣлое число.

Д. Колянковскій (Немировъ); *Э. Лейнъкъ* (Рига); *Г. Оганянъ* (Ялта); *Г. Лебедевъ* (Харьковъ).

№ 726 (4 сер.). *Построить треугольникъ* ABC *по радіусу* R *круга описаннаго, по медіанѣ* $AD=m_a$ *и по углу* α *между медіаной* AD *и стороной* BC.

Предположимъ, что задача рѣшена. Пусть O центръ круга описаннаго. Тогда $\angle ADC=\alpha$, $AD=m_a$, $AO=R$, $\angle ODC=\frac{\pi}{2}$. Изъ сказаннаго вытекаетъ построеніе: изъ нѣкоторой точки D произвольной прямой l возставляемъ перпендикуляръ Dx и проводимъ прямую Dy подъ угломъ α къ l; на прямой Dy откладываемъ отрѣзокъ $DA=m_a$, затѣмъ изъ A дѣлаемъ радіусомъ R засѣчки O и O' на прямой Dx; наконецъ изъ O (или O') дѣлаемъ радіусомъ R засѣчки B и C на l; треугольникъ ABC есть искомый. Называя черезъ AP перпендикуляръ изъ A на Dx, мы видимъ, что задача невозможна, если $R<AP$; если $R=AP$ и $OD<R$ или если $R>AP$ и $OD<R\leqslant O'D$ задача имѣетъ одно рѣшеніе; наконецъ, при $R\geqq AP$, но $R\leqslant OD\leqslant O'D$, задача также невозможна.

Э. Лейнъкъ (Рига); *А. Паренаго* (Сосновицы); *А. Турчаниновъ* (Одесса); *Г. Лебедевъ* (Обоянь); *Навакатиняцъ* (Дербентъ); *Г. Оганянъ* (Ялта); *Я. Шатуновскій* (Тильфъ); *В. Булыгинъ*, *Н. Агрономовъ* (Ревель).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.

ПРОГРАММА

ЕЖЕМѢСЯЧНАГО ЖУРНАЛА

„ПРИРОДА ВЪ ШКОЛѢ",

посвященнаго вопросамъ преподаванія **физики, химіи** и **естествознанія** въ среднкей и начальной школѣ.

---

1. Руководящія статьи по выясненію общаго плана и частностей преподаванія физико-химическихъ и естественныхъ наукъ.
2. Статьи научнаго характера по отдѣльнымъ вопросамъ физики, химіи и естествознанія — главнымъ образомъ примѣнительно къ цѣлямъ преподаванія.
3. Статьи и замѣтки, касающіяся различныхъ учебно-вспомогательныхъ пособій, кабинетовъ, лабараторій и т. п.
4. Статьи и замѣтки, относящіеся къ практическимъ занятіямъ учениковъ.
5. Свѣдѣнія о постановкѣ преподаванія физики, химіи и естествознанія въ различныхъ учебныхъ заведеніяхъ Россіи и другихъ странъ.
6. Разборъ учебныхъ, популярно-научныхъ и научныхъ книгъ.
7. Обзоръ статей по преподаванію физики, химіи и естествознанія, помѣщенныхъ въ главнѣйшихъ русскихъ и иностранныхъ журналахъ.
8. Разныя извѣстія.
9. Письма въ редакцію.
10. Объявленіе.

Журналъ будетъ выходить въ 1907 году ежемѣсячно книжками въ 4 печатн. листа.

ЦѢНА съ ПЕРЕСЫЛКОЮ 3 РУБ. ВЪ ГОДЪ.

ПОДПИСКА ПРИНИМАЕТСЯ: МОСКВА, Петровка, д. Матвѣева, Товарищество И. Д. Сытина, а также въ главныхъ книжныхъ магазинахъ.

ДОПУСКАЕТСЯ РАЗСРОЧКА:

1 р. при подпискѣ, **1** р. — не позже 1 апрѣля и **1** р. — не позже 1 іюля.