№ 424.

ВѢСТНИКЪ

ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Привать-Доцента В. Ѳ. Кагана.

XXXVI-го Семестра № 4-й.

ОДЕССА.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.

1906.

MATHESIS

Издательство научныхъ и популярно-научныхъ сочиненій изъ области физико-математическихъ наукъ.

1. Г. АБРАГАМЪ, проф. **СБОРНИКЪ ЭЛЕМЕНТАРНЫХЪ ОПЫТОВЪ ПО ФИЗИКѢ**, составленный при участіи многихъ профессоровъ и преподавателей физики. Переводъ съ французскаго подъ редакціей Привать-доцента *Б. П. Вейнберга.* Часть I: Работы въ мастерской. Различные рецепты—Геометрія. Механика—Гидростатика. Гидродинамика. Капиллярность - Теплота -- Числовыя таблицы.
Ученымъ комитетомъ допущено въ ученическія библіотеки среднихъ учебныхъ заведеній, учительскихъ семинарій и городскихъ, по Положенію 31 мая 1872 г., училищъ, а равно и въ безплатныя народныя читальни и библіотеки.
XVI+272 стр. Со многими (свыше 300) рисунками. Цѣна 1 р. 50 к.

2. Г. АБРАГАМЪ, проф. **СБОРНИКЪ ЭЛЕМЕНТАРНЫХЪ ОПЫТОВЪ ПО ФИЗИКѢ.** Переводъ съ французскаго подъ редакціей Приватъ-доцента *Б. П. Вейнберга.* Часть II: Звукъ—Свѣтъ—Электричество—Магнитизмъ.
LXXV+434 стр. Со многими (свыше 400) рисунками. Цѣна 2 р. 75 к.

3. С. АРРЕНІУСЪ, проф. **ФИЗИКА НЕБА.** Разрѣшенный авторомъ и дополненный по его указаніямъ переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей Приватъ-доцента *А. Р. Орбинскаго.* Содержаніе: Неподвижныя звѣзды—Солнечная система—Солнце—Планеты, ихъ спутники и кометы—Космогонія.
VIII+250 стр. Съ 66 черными и 2 цвѣтными рисунками въ текстѣ и 1 черной и 1 цвѣтной отдѣльными таблицами. Цѣна 2 руб.
Ученымъ Комитетомъ М. Н. П. допущено въ ученическія, старшаго возраста, библіотеки среднихъ учебныхъ заведеній, а равно и въ безплатныя народныя библіотеки и читальни.

4. **УСПѢХИ ФИЗИКИ**, сборникъ статей о важнѣйшихъ открытіяхъ послѣднихъ лѣтъ въ общедоступномъ изложеніи. Подъ редакціей „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики". Содержаніе: *Винеръ*, Расширеніе нашихъ чувствъ—*Пильчиковъ*, Радій и его лучи—*Дебіернъ*, Радій и радіоактивность—*Рихарцъ*, Электрическія волны—*Слаби*, Телеграфированіе безъ проводовъ—*Шмидтъ*, Задача объ элементарномъ веществѣ (основанія теоріи электроновъ).
IV+157 стр. Съ 41 рисункомъ и 2 таблицами. Цѣна 75 коп.

5. АУЭРБАХЪ, проф. **ЦАРИЦА МІРА И ЕЯ ТѢНЬ.** Общедоступное изложеніе основаній ученія объ *энергіи и энтропіи.* Пер. съ нѣмецкаго. Съ предисловіемъ *Ш. Э. Гильома*, Вице-Директора Международнаго Бюро Мѣръ и Вѣсовъ.
VIII+56 стр. Цѣна 50 к.

6. С. НЬЮКОМЪ, проф. **АСТРОНОМІЯ ДЛЯ ВСѢХЪ.** Переводъ съ англійскаго. Съ предисловіемъ Приватъ-доцента *А. Р. Орбинскаго*
XXIV+285 стр. Съ портретомъ Автора, 64 рисунками въ текстѣ и 1 таблицей. Цѣна 1 р. 50 к.

7. Г. ВЕБЕРЪ и І. ВЕЛЬШТЕЙНЪ. **ЭНЦИКЛОПЕДІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ. Томъ I. Энциклопедія элементарной алгебры,** обраб. проф. *Веберомъ*. Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей Приватъ-доцента *В. Ф. Кагана.* Книга I. Основанія ариѳметики, гл. I—X. Книга II. Алгебра, гл. XI—XIX. Книга III. Анализъ, гл. XX—XXVI. **Выпускъ I.** Стр. 1—256. Главы I—XII. **Цѣна 1 р. 50 к.**
Выпускъ II печатается.

8. Дж. ПЕРРИ, проф. **ВРАЩАЮЩІЙСЯ ВОЛЧОКЪ.** Публичная лекція съ 63 рисунками. Переводъ съ англійскаго. VII+96 стр. **Цѣна 60 к.**

9. К. ШЕЙДЪ, проф. **ПРОСТЫЕ ХИМИЧЕСКІЕ ОПЫТЫ для юношества** Переводъ съ нѣмецкаго, подъ редакціей Лаборанта Новороссійскаго Университета *Е. С. Ельчанинова.*

10. А. РИГИ, проф. **СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРІЯ ФИЗИЧЕСКИХЪ ЯВЛЕНІЙ.** (Радіоактивность, іоны, электроны). Переводъ съ итальянскаго.

СЪ ТРЕБОВАНІЯМИ ОБРАЩАТЬСЯ:

Одесса, Типографія М. Шпенцера, ул. Новосельскаго 66.

XXXVI Сем. № 4.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

Элементарной Математики.

№ 424.

Форма и спектръ атомовъ.

Проф. Ф. Линдемана въ Мюнхенѣ.

*(Окончаніе *).*

Существенно иную группировку линій даетъ такъ называемый сжатый эллипсоидъ или сфероидъ. Здѣсь также выступаетъ много группъ, серій и подгруппъ, но указанный выше законъ постоянныхъ разностей не имѣетъ такого общаго примѣненія. Нѣкоторые корни соотвѣтствующихъ трансцендентныхъ уравненій оказываются мнимыми; вслѣдствіе этого отдѣльныя группы состоятъ изъ одной только интенсивной линіи, иногда изъ ограниченнаго числа ихъ. Чѣмъ больше сжатіе, тѣмъ чище выступаетъ этотъ типъ. Въ дѣйствительности этотъ типъ находитъ осуществленіе въ спектрахъ металловъ: золото, серебро, мѣдь. И водородъ, обнаруживавшій въ своихъ свойствахъ такъ много аналогій съ металлами, принадлежитъ сюда же; по крайней мѣрѣ, тонкая круглая пластинка—а ее можно считать чрезвычайно сильно сжатымъ эллипсоидомъ—даетъ спектръ одного типа съ водородомъ.

---

*) См. № 423 „Вѣстника“.

Въ третьихъ, мы разсмотримъ обыкновенный трехосный эллипсоидъ, т. е. будемъ искать длины волнъ свѣта, излучаемаго такимъ эллипсоидомъ въ раскаленномъ состоянiи. Соотвѣтственныя линiи спектра здѣсь также опредѣляются тремя числами, которыя даются трансцендентными уравненiями и каждое изъ которыхъ можетъ пройти черезъ извѣстный рядъ отдѣльныхъ значенiй. Эти линiи, однако, нельзя, въ противность двумъ первымъ случаямъ, расположить въ серiи и группы, такъ какъ онѣ распредѣляются по всему спектру; только если форма эллипсоида очень близко подойдетъ къ формѣ эллипсоида вращенiя, можно будетъ выдѣлить нѣкоторыя серiи. Это и происходитъ на самомъ дѣлѣ въ спектрѣ щелочныхъ земель (барiй, стронцiй, кальцiй и магнiй), слѣдовательно у тѣхъ элементовъ, которые и по своимъ химическимъ свойствамъ стоятъ между щелочами и собственно металлами. Это справедливо также для цинка, кадмiя и ртути. Послѣднiе ближе къ сжатому эллипсоиду, первые къ вытянутому.

Если мы представимъ себѣ, что взятый нами эллипсоидъ вращенiя постепенно деформируется и превращается въ обыкновенный эллипсоидъ, то вмѣстѣ съ формой атомовъ будутъ непрерывно измѣняться и линiи его спектра. Математическое изслѣдованiе указываетъ, именно, что при этомъ изъ каждой отдѣльной линiи получается восемь новыхъ. Съ другой стороны, такое расщепленiе линiй можно вызвать на опытѣ, помѣстивъ свѣтящiеся атомы соотвѣтственнаго элемента между полюсами сильнаго магнита; это—извѣстное явленiе Зеемана (Zeemann). Свѣтовой эѳиръ между полюсами магнита находится въ состоянiи поляризацiи, т. е. въ состоянiи односторонняго напряженiя; а математическое изслѣдованiе свѣтовыхъ колебанiй въ поляризованномъ такимъ образомъ эѳирѣ для эллипсоида вращенiя даетъ въ точности то, что получается для колебанiй обыкновеннаго эллипсоида въ неполяризованномъ эѳирѣ. Мы можемъ, слѣдовательно, сказать и наоборотъ: такъ называемое явленiе Зеемана, т. е. расщепленiе спектральныхъ линiй при помощи магнита, есть слѣдствiе поляризацiи эѳира и происходитъ такъ, какъ будто бы атомъ былъ надлежащимъ образомъ измѣненъ посредствомъ давленiя.

Наконецъ, въ основу нашего математическаго изслѣдованiя, какъ возможную форму атома, мы возьмемъ кольцо, т. е. то тѣло, которое получается при вращенiи круга около оси, не проходящей черезъ его центръ. Мы должны различать здѣсь два случая:

1) Ось не пересѣкаетъ вращающагося круга; получаемое кольцо посрединѣ открыто и имѣетъ форму круглой изогнутой проволоки или палочки, короче, форму перстня.

2) Ось пересѣкаетъ вращающійся кругъ; получающееся кольцо въ серединѣ закрыто. Мы называемъ эту форму тѣла „лепешкой"; правильнѣе эта форма нѣсколько напоминаетъ апельсинъ или яблоко. [1])

И въ случаѣ кольца вопросъ о колебаніяхъ еще поддается изслѣдованію, хотя трудности значительно возрастаютъ. Этимъ и ограничивается число тѣлъ, которыя можно было до сихъ поръ изучить математически.

Спектральныя линіи свѣтящагося кольца опредѣляются четырьмя числами, изъ которыхъ каждое должно проходить черезъ рядъ значеній. Проще всего можно представить себѣ этотъ типъ спектра, повторивъ спектръ удлиненнаго эллипсоида вращенія нѣсколько разъ одинъ возлѣ другого, причемъ, конечно, каждый разъ нѣсколько измѣняя взаимное положеніе линій въ вспомогательномъ спектрѣ.

Если представить себѣ повтореннымъ подобнымъ же образомъ спектръ сжатаго эллипсоида вращенія, то получится такая система спектральныхъ линій, которая соотвѣтствуетъ свѣтящемуся тѣлу вращенія второго рода. [2])

Именно такимъ образомъ и описываютъ Пашенъ и Рунге (Paschen und Runge) группировку спектральныхъ линій въ спектрѣ кислорода и гелія, съ одной стороны, сѣры и селена, съ другой. Согласно ихъ описанію, спектръ кислорода получается, если спектръ щелочного металла нѣсколько разъ помѣстить одинъ возлѣ другого, а спектръ сѣры—если въ спектрѣ кислорода извѣстныя группы линій замѣнить отдѣльными яркими линіями.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ заключенію, что атомъ кислорода имѣетъ, вѣроятно, форму кольца, а атомъ сѣры — форму лепешки (закрытаго тора).

Очень интересно прослѣдить нѣкоторыя слѣдствія, которыя можно связать съ этими представленіями и результатами. Прежде

---

[1]) Тѣло, получающееся отъ вращенія круга вокругъ прямой, называютъ *торомъ;* двѣ формы, указанныя авторомъ, соотвѣтствуютъ „открытому" и „закрытому тору". *Ред.*

[2]) Закрытому тору. *Ред.*

всего, отъ формы атомовъ, зависитъ, повидимому, и химическое сродство элементовъ. На ряду съ притягательными и отталкивательными силами, геометрическая форма атомовъ также должна имѣть значенiе для возможности и устойчивости какого-нибудь соединенiя. Такъ, напримѣръ, окиси металловъ должны получаться такъ, что эллипсоидальные атомы металловъ ложатся въ отверстiя колецъ кислорода и закрываютъ ихъ.

Молекула воды состоитъ изъ одного атома кислорода и двухъ атомовъ водорода; послѣднiе, какъ мы уже знаемъ, представляютъ тонкiе круглые листочки. Въ отверстiе горизонтально лежащаго кольца налагается, слѣдовательно, сверху и снизу по одному такому тонкому листочку, что и даетъ молекулу воды. Аналогичное строенiе имѣетъ также молекула сѣрнистаго водорода, такъ какъ лепешка атома сѣры сверху и снизу имѣетъ углубленiе, въ которое можетъ помѣститься атомъ водорода.

Здѣсь атомъ водорода всюду можетъ быть замѣненъ эллипсоидальнымъ атомомъ металла или щелочи, что даетъ водныя окиси и окислы и, соотвѣтственно, сѣрнистые металлы. При извѣстныхъ обстоятельствахъ образуются высшiя степени окисленiя, причемъ на оба атома металла снова налагаются атомы кислорода, дающiе, съ своей стороны, новыя углубленiя для дальнѣйшихъ атомовъ металла.

При такомъ представленiи такъ называемая валентность атомовъ зависитъ отъ ихъ формы; нужно отличать валентность относительно водорода (болѣе обще—относительно эллипсоидовъ) и валентность относительно кислорода (болѣе обще—относительно колецъ). Первая равна числу углубленiй въ атомѣ, на которыя можетъ накладываться эллипсоидальный атомъ, а послѣдняя равна числу выступовъ или округлостей, на которые можетъ накладываться кольцо.

Было бы особенно интересно изучить химiю углеродистыхъ соединенiй съ этой точки зрѣнiя. Прежде всего въ такомъ случаѣ возникаетъ вопросъ о формѣ атома углерода; спектръ послѣдняго равномѣрно перерѣзанъ спектральными линiями почти по всей его длинѣ; въ силу этого утрачивается возможность установить эмпирически какую-нибуль закономѣрность въ распредѣленiи линiй; значитъ, и математическая разработка здѣсь не можетъ оказать помощи. Вопросъ нужно перевернуть, нужно попытаться, на основанiи химической природы соединенiй углерода съ другими элементами, сдѣлать заключенiе о формѣ атома углерода. Именно по этому пути, слѣдуя въ отношенiи самого углерода методу Лебеля, и пошли Вантъ-Гоффъ и Вернеръ, хотя относительно другихъ элементовъ (за исключенiемъ азота) вопросъ о формѣ атомовъ до настоящаго времени оставлялся въ сторонѣ; это позволило органической химiи существенно улучшить порядокъ и облегчить обзоръ безконечнаго разнообразiя углеродистыхъ соединенiй. Дѣлались различныя предложенiя опредѣлить форму атома углерода такимъ образомъ, чтобы изъ нея можно было получить объясненiе, прежде всего такъ называемыхъ изомерныхъ соединенiй. Будутъ ли совмѣстимы эти предложенiя съ изложенными здѣсь воззрѣнiями на валентность, не придется ли, пожалуй, ихъ измѣнить или дополнить,—отвѣчать на эти вопросы здѣсь не приходится. Эти вопросы затрудняются тѣмъ, что современная *стереохимiя,* ставящая себѣ задачей наглядное построенiе въ пространствѣ молекулы изъ ея атомовъ, удовлетворяется тѣмъ, что считаетъ цѣлыя группы связанныхъ между собою атомовъ за новыя единицы. Но если бы удалось въ самомъ дѣлѣ не только воспользоваться формой атома углерода, какъ символомъ для систематическаго расположенiя наблюденiй, но и въ дѣйствительности построить молекулы органической химiи въ ихъ пространственныхъ соотношенiяхъ изъ формы всѣхъ входящихъ атомовъ, то было бы необходимо всякую отдѣльную группу атомовъ, образующую въ молекулѣ нѣкоторое болѣе тѣсное соединенiе, разрѣшать вновь на ея атомы. Это чрезвычайно осложняетъ задачу, и мы должны удовлетвориться здѣсь лишь указанiемъ на нее.

При такомъ построенiи молекулы каждому атому въ молекулѣ принадлежитъ совершенно опредѣленное мѣсто; можетъ быть, у него остается еще настолько свободы, что онъ можетъ на этомъ мѣстѣ совершать колебанiя около извѣстнаго положенiя равновѣсiя. Но мы должны совершенно отказаться отъ широко распространеннаго представленiя, что отдѣльные атомы описываютъ въ молекулѣ сомкнутые пути около извѣстныхъ центровъ,—представленiя, согласно которому каждая молекула представляетъ миниатюрную планетную систему. Это представленiе возникло изъ желанiя дать себѣ отчетъ относительно несомнѣнно существующей „внутренней энергiи" молекулъ на основанiи механическихъ понятiй. Согласно излагаемымъ здѣсь идеямъ, эта внутренняя энергiя состоитъ во внутреннихъ колебанiяхъ атома, которыя обнаруживаются вовнѣ только отчасти въ видѣ свѣтовыхъ лучей, тогда какъ другая часть обнаруживается въ формѣ электрическихъ или магнитныхъ излученiй; при этомъ они дѣйствуютъ отталкивательно или притягательно и тѣмъ существенно вліяютъ на всѣ взаимодѣйствія атомовъ. Поскольку здѣсь дѣло идетъ о такъ называемыхъ характерныхъ колебаніяхъ, т. е. о такихъ, которыя безъ всякаго разрыва распространяются изнутри атома наружу въ свѣтовой эѳиръ, математическая обработка вопроса обнаруживаетъ, что они могутъ распространяться всегда только одновременно изнутри наружу и снаружи внутрь, что такимъ образомъ потерянная внутренняя энергія всегда возмѣщается извнѣ, такъ какъ свѣтовой эѳиръ самъ снова возвращаетъ эту энергію. Тогда какъ этотъ обмѣнъ колебаній при обыкновенныхъ обстоятельствахъ незамѣтенъ у большинства атомовъ и можетъ быть возбужденъ только теплотою или электрической энергіей, доставленной извнѣ, у другихъ элементовъ (какъ радій, торій и пр.) этотъ обмѣнъ, повидимому, происходитъ очень энергично уже при обыкновенныхъ условіяхъ.

Такъ называемая теорія электроновъ старается объяснить внутреннюю энергію молекулъ иnымъ путемъ. Она принимаетъ, что съ каждымъ вещественнымъ атомомъ связано большое число „электроновъ", движущихся вокругъ него; сами эти электроны не представляютъ собой ни вещества, ни свѣтового эѳира, а нѣчто третье: электричество. Это представленіе возникло въ связи съ законами движенія іоновъ при электролизѣ и особенно опирается на замѣчательныя явленія излученія внутри Гейслеровой трубки, а болѣе всего на наблюденія катодныхъ лучей. Эти электроны часто принимаются непосредственно за „пра-атомы", изъ которыхъ и состоитъ собственно вещество: электрическія силы дробятъ вещественные атомы на эти пра-атомы, путями которыхъ являются катодные лучи. Спектральныя линіи должны при этомъ производиться періодическими колебаніями пра-атомовъ около извѣстныхъ положеній равновѣсія, тогда какъ, по мнѣнію другихъ, каждый электронъ обладаетъ опредѣленнымъ собственнымъ движеніемъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и опредѣленной спектральной линіей; при этомъ число линій въ спектрѣ должно равняться числу электроновъ, связанныхъ съ вещественнымъ атомомъ. Однако, математическій выводъ установленныхъ экспериментально законовъ группировки спектральныхъ линій на основаніи такихъ гипотезъ до сихъ поръ не удался. Въ объясненіи *электрическихъ* явленій эта теорія достигаетъ своей цѣли во многихъ отношеніяхъ; что касается катодныхъ лучей, то она не противорѣчитъ высказаннымъ здѣсь воззрѣніямъ о постоянныхъ характерныхъ формахъ атомовъ, такъ какъ нѣтъ никакихъ основанiй, почему бы атомъ опредѣленной формы при соотвѣтственныхъ условiяхъ не могъ дробиться на еще меньшiя части. Удивительнымъ остается еще только то, что пра-атомы всегда снова соединяются такъ, что по прекращенiи электрическихъ возмущенiй вновь образуется первоначальный атомъ. Дальнѣйшее развитiе этихъ замѣчанiй завлекло бы насъ въ теорiю электричества дальше, чѣмъ это намъ сейчасъ необходимо. Здѣсь нужно только констатировать, что факты, говорящiе въ пользу теорiи электроновъ, совмѣстимы съ гипотезой атомовъ опредѣленной формы; въ самомъ дѣлѣ, если принять, что внутри атома имѣютъ мѣсто упругiя колебанiя, то это совмѣстимо съ тѣмъ представленiемъ, что атомы, въ свою очередь, составляются изъ меньшихъ частицъ, перiодически измѣняющихъ свое взаимное положенiе при указанныхъ колебанiяхъ.

Наши разсужденiя привели насъ къ тому, что въ извѣстномъ рядѣ случаевъ вопросъ о качественномъ различiи химическихъ веществъ сводится къ математической задачѣ формы и числа. Отдѣльный элементъ характеризуется, повидимому, длинами трехъ осей представляющаго атомъ эллипсоида или тѣми числами, которыя опредѣляютъ величину и форму кольца или лепешки. Остается невыясненнымъ при этомъ дальнѣйшiй вопросъ, почему можно разсматривать только извѣстныя, совершенно опредѣленныя числовыя группы, только такое число группъ, которое отвѣчаетъ различнымъ элементамъ съ эллипсоидальными или кольцеобразными атомами? Почему нельзя выбрать эти длины осей и другiя опредѣляющiя числа совершенно произвольно, указывая всегда соотвѣтствующiй имъ элементъ? Короче сказать, почему есть только конечное число элементовъ? Почему нѣтъ промежуточныхъ членовъ? Въ природѣ должны существовать силы, которыя намъ еще неизвѣстны и которыя имѣли рѣшающее значенiе при образованiи атомовъ; можетъ быть онѣ продолжаютъ дѣйствовать еще и понынѣ, удерживая атомы въ ихъ неизмѣнныхъ формахъ или уничтожая немедленно возникающiя гдѣ-либо отступленiя и видоизмѣненiя. Этотъ вопросъ совершенно аналогиченъ другому вопросу: почему существуетъ или способно существовать только конечное опредѣленное число живыхъ организмовъ? Мы знаемъ, что здѣсь на образованiе и сохраненiе организмовъ оказывали выдающееся влiянiе борьба за существованiе и выживанiе наиболѣе приспособленнаго; должны ли господствовать и въ неорганической природѣ аналогичныя соотношенiя? не должны ли существующiе элементы отличаться отъ другихъ, которые были бы, пожалуй, возможны, тѣмъ, что они лучше всего приспособлены къ существующимъ внѣшнимъ условіямъ? Эти вопросы въ настоящее время мы едва ли можемъ облечь въ математическую одежду, еще гораздо меньше мы можемъ отвѣтить на нихъ: до нихъ намъ удалось отодвинуть границу нашего знанія, сведя качественныя особенности вещества на количественныя различія. Будемъ надѣяться, что будущее разрѣшитъ и освѣтитъ дальнѣйшія наши сомнѣнія.

Изъ исторіи алгебры.

Проф. Г. Вебера.

Изъ сочиненія „Энциклопедія Элементарной Алгебры“.

Основные моменты въ исторіи ученія объ алгебраическомъ рѣшеніи уравненій.

1. Въ древности было извѣстно много знаменитыхъ задачъ, приводившихъ, по современному выраженію, къ уравненіямъ высшихъ степеней, которыя не удавалось разрѣшить при помощи циркуля и прямой линейки. Укажемъ здѣсь задачу объ удвоеніи куба, о трисекціи угла, задачу Архимеда о раздѣленіи шара плоскостью на двѣ части, объемы которыхъ находились бы между собою въ данномъ отношеніи. Всѣ эти задачи могутъ быть разрѣшены при помощи коническихъ сѣченій; онѣ послужили поводомъ къ изученію еще другихъ кривыхъ: циссоида Діоклеса (ок. 180 г. до Р. Х.), конхоида Никомеда (ок. 180 г. до Р. Х.) и др. также примѣнялись для рѣшенія этихъ задачъ. Однако, самыя замѣчательныя работы въ этомъ направленіи касаются коническихъ сѣченій и принадлежатъ Аполлонію [1]). Въ нихъ мы въ первый разъ встрѣчаемся съ задачами, приводящими, выражаясь въ нашей терминологіи, къ уравненію четвертой степени. Ему уже извѣстно, что два коническихъ сѣченія могутъ пересѣкаться не болѣе, какъ въ четырехъ точкахъ, что коническія сѣченія, касающіяся другъ друга въ одной точкѣ, могутъ пересѣкаться не больше, чѣмъ въ двухъ точкахъ, что точекъ соприкосновенія двухъ коническихъ сѣченій не можетъ быть больше двухъ, — а также и другія подобныя свойства этихъ кривыхъ. Это, въ сущности, не что иное, какъ теоремы относительно корней уравненія четвертой степени и совпаденія двухъ такихъ корней. Особенный интересъ представляетъ собою пятая книга Аполлонія, дошедшая до насъ не на греческомъ языкѣ, а въ переводѣ, сдѣланномъ Борелли (Borelli) съ арабскаго (Флорентійское изданіе этой книги на латинскомъ языкѣ появилось въ 1661 году).

[1]) Аполлоній изъ города Перги въ Памфиліи жилъ и работалъ въ Александріи. Главныя его работы относятся къ эпохѣ царствованія Птоломея Филопатора, умершаго въ 205-мъ году до Р. Х.

Въ этой книгѣ Аполлоній разсматриваетъ задачу о наибольшихъ и наименьшихъ разстояніяхъ данной точки отъ периферіи коническаго сѣченія, или другими словами, задачу о проведеніи нормалей къ коническому сѣченію; задача эта имѣетъ, такимъ образомъ, интересъ прежде всего для ученія о наибольшихъ и наименьшихъ величинахъ.

Алгебраически эта задача приводитъ къ уравненію четвертой степени; у Аполлонія это выражается въ томъ, что основанія нормалей опредѣляются имъ, какъ точки пересѣченія даннаго коническаго сѣченія съ равнобочной гиперболой. Однако, Аполлоній знаетъ и примѣняетъ въ этихъ изслѣдованіяхъ также и дискриминантъ биквадратнаго уравненія, т. е. ему извѣстно геометрическое мѣсто точекъ, для которыхъ двѣ нормали совпадаютъ въ одну. Совершенно въ смыслѣ современной аналитической геометріи онъ даетъ для каждой абсциссы нѣкоторую ординату, до которой можетъ доходить точка, если изъ нея еще можно провести четыре нормали къ коническому сѣченію; если его построеніе перевести на нашъ языкъ, то получится просто уравненіе развертки коническаго сѣченія. Это построеніе зависитъ отъ кубическаго корня, который, какъ въ задачѣ Гиппократа [1]) объ удвоеніи куба, опредѣляется двумя средними пропорціональными. Въ дошедшемъ до насъ текстѣ нѣтъ никакихъ указаній на то, чтобы Аполлоній считалъ совокупность этихъ точекъ кривой линіей. Но, можетъ быть, въ нашемъ распоряженіи находится не все, что оставилъ послѣ себя Аполлоній; такое предположеніе подтверждается тѣмъ обстоятельствомъ, что въ концѣ пятой книги минимальныя линіи разсматриваются очень подробно, тогда какъ максимальнымъ линіямъ, получающимся тѣмъ же самымъ построеніемъ, удѣлено очень мало мѣста. Это вообще не отвѣчаетъ обыкновенію грековъ, которые при изслѣдованіи задачи всегда разсматриваютъ всѣ возможные случаи съ одинаковой тщательностью.

2. Мы обходимъ постепенное развитіе понятія объ алгебраическомъ уравненіи и лишь попутно упомянемъ объ открытіи рѣшенія уравненія 3-ей и 4-ой степени въ XVI столѣтіи [2]). Нужно, однако, назвать Віета, предшественника современной алгебры, который первый высказалъ

[1]) Гиппократъ родился на о-вѣ Хіосѣ; жилъ въ Аѳинахъ во второй половинѣ V-го столѣтія до Р. Х.

[2]) Первымъ открылъ рѣшеніе уравненій 3-ей и 4-ой степени С. Ферро (Scipione del Ferro), бывшій профессоромъ въ Болоньѣ отъ 1496 до 1526 г. Однако, на этой почвѣ разгорѣлся рѣзкій и некрасивый споръ о пріоритетѣ между Іеронимомъ Кардано (Hieronymus Cardanus, 1501—1576, Павія, Римъ) и Николаемъ Тарталья (1500—1557, Брешія, Венеція). Кардано въ своемъ сочиненіи „Ars magna" (Nürnberg, 1545) опубликовалъ рѣшеніе уравненія третьей степени; отсюда сохранившееся еще по настоящее время выраженіе „формула Кардана". Ученикъ Кардана, Луиджи Феррари (1522—1565, Болонья, Миланъ) открылъ рѣшеніе уравненія четвертой степени.

предположеніе, что каждая задача, приводящая къ уравненію третьей степени, либо рѣшается при помощи двухъ средне-пропорціональныхъ, либо сводится къ трисекціи угла. Къ первому классу относятся уравненія третьей степени, которыя имѣютъ одинъ вещественный корень и могутъ быть рѣшены при помощи кубическаго корня изъ вещественнаго числа. (Уже древніе привели Делійскую задачу къ нахожденію двухъ среднихъ пропорціональныхъ: $a : x = x : y = y : b$, откуда $x^3 = a^2 b$). Ко второму классу относятся уравненія съ тремя вещественными корнями (casus irreducibilis), которыя не могутъ быть рѣшены при помощи вещественныхъ радикаловъ, но приводятся, какъ показалъ Віета, къ трисекціи угла. Такъ какъ, съ другой стороны, уже тогда было извѣстно, что уравненіе четвертой степени приводится къ квадратнымъ и кубическимъ уравненіямъ, то тотъ же выводъ былъ распространенъ и на уравненіе четвертой степени. Этимъ былъ выясненъ трудный вопросъ о томъ, какимъ образомъ можно отъ кубичныхъ корней изъ мнимыхъ чиселъ прійти къ вещественнымъ числамъ. Всѣ эти предложенія позже были значительно обобщены Абелемъ (Abel) и распространены на большую категорію уравненій болѣе высокихъ степеней, которыя въ настоящее время извѣстны подъ названіемъ „Абелевыхъ уравненій“.

3. Съ этого времени дальнѣйшее развитіе ученія объ алгебраическихъ уравненіяхъ расчленяется въ два различныхъ направленія. Первое направленіе имѣетъ своею цѣлью дать способы вычислить съ любымъ приближеніемъ численное значеніе корней уравненія, коэффиціенты котораго численно заданы; для практическаго примѣненія алгебры эта сторона дѣла имѣетъ наиболѣе важное значеніе. Уже давно было извѣстно, что функція $f(x)$, имѣющая при $x = a$ и $x = b$ значенія противоположныхъ знаковъ, обращается между a и b въ нуль, т. е. имѣетъ въ этомъ интервалѣ по крайней мѣрѣ одинъ, вообще же нечетное число корней; въ этомъ содержится уже принципъ, по которому путемъ послѣдовательнаго дѣленія интервала можно неопредѣленно приблизиться къ корнямъ. Однако, чтобы избѣжать лишнихъ вычисленій, было существенно важно отдѣлить корни, т. е. установить интервалы, въ каждомъ изъ которыхъ содержится только по одному корню, или по крайней мѣрѣ точно установить, сколько корней содержится въ данномъ интервалѣ. Это, однако, долго не удавалось.

Правда, можно было указать верхній и нижній предѣлъ положительныхъ корней; былъ также извѣстенъ рядъ теоремъ, опредѣлявшій число корней, содержащихся въ данномъ интервалѣ до нѣкотораго четнаго числа, которое лишь въ частныхъ случаяхъ обращается въ нуль. Сюда относится правило Декарта, которое мы изложили въ параграфѣ 91, далѣе болѣе сложная теорема Ньютона, теорема Бюдана и Фурье, теорема Ролля [1]).

Точный, хотя практически врядъ ли примѣнимый пріемъ рѣшенія этой задачи былъ указанъ Варингомъ [2]), а позднѣе былъ вновь открытъ Лагранжемъ [3]). Пріемъ этотъ основывается на томъ, что составляется уравненіе, корнями котораго служатъ разности корней даннаго уравненія, а затѣмъ разыскивается нижній предѣлъ положительныхъ корней этого уравненія. Если Δ есть этотъ нижній предѣлъ, то интервалъ размѣра Δ можетъ содержать не болѣе одного корня.

Вполнѣ удовлетворительное рѣшеніе задачи представляетъ собою теорема Штурма [4]), которую мы изложили въ параграфѣ 92-омъ. Работа Штурма написана по инициативѣ Фурье и стоитъ въ связи съ нѣкоторыми изслѣдованіями въ области математической физики, напримѣръ съ вопросомъ о томъ, сколько узловъ можетъ имѣть натянутая колеблющаяся струна; связь между этимъ вопросомъ и задачей объ опредѣленіи числа корней алгебраическаго уравненія совершенно очевидна.

Кронекеръ, который изъ принципіальныхъ соображеній вовсе не употребляетъ ирраціональныхъ чиселъ (см. приложеніе III), вынужденъ дать задачѣ другое выраженіе, такъ какъ онъ не только не можетъ пользоваться теоремой о существованіи корня, но и вообще не можетъ говорить о корнѣ уравненія. Онъ поэтому только обнаруживаетъ, что при помощи раціональнаго вычисленія можно найти такое цѣлое число s, что въ интервалѣ, имѣющемъ размѣръ $\frac{1}{s}$, функція $f(x)$ можетъ перемѣнить знакъ не болѣе одного раза. Этимъ достигнута та-же цѣль, что и методомъ Варинга-Лагранжа [5]).

4. Другая цѣль, которую алгебра себѣ ставитъ, имѣетъ болѣе теоретическое значеніе и относится къ алгебраическимъ законамъ, выражающимъ зависимость корней уравненія отъ коэффиціентовъ. Совер-

[1]) Ньютонъ „Arithmetica universalis"; теорема доказана Сильвестромъ (Sylvester), Transactions of the Irish Academy t. 24 (1871); Бюданъ (Budan), Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques (1803); Фурье (Fourier) Analyse des équations determinées (1831). Ролль (Rolle) 1652—1719, Traité d'Algèbre 1690.

[2]) Варингъ. (E. Waring) Medit. algebr. Cambridge. 1770.

[3]) Лагранжъ. (L. Lagrange). De la résolution des équations numériques de tous les degrès. Paris 1798 (ges. Werke Bd. III).

[4]) Штурмъ (Jacob Karl Franz Sturm) родился въ Женевѣ въ 1803 году; умеръ въ Парижѣ въ 1855 году. Работа Штурма появилась сначала въ журналѣ „Bulletin de Férussac" 1829, а затѣмъ въ „Отчетахъ Парижской Академіи" въ 1835 г. Нѣмецкій переводъ, принадлежащій Леви (Loewy), вошелъ въ составъ Оствальдовскаго изданія классиковъ (Ostwalds Klassiker № 143, 1904).

[5]) L. Kronecker „Ueber den Zahlbegriff". Crelles Journal Bd. 101, 1887.

шенно естественно, что успѣхъ, достигнутый при рѣшеніи уравненія третьей и четвертой степени, постоянно побуждалъ математиковъ искать разрѣшенія уравненій болѣе высокихъ степеней и, прежде всего, уравненій пятой степени; задача заключалась, конечно, въ томъ, чтобы привести рѣшеніе уравненія къ радикаламъ. Извѣстно, что этимъ вопросомъ занимался Лейбницъ; въ связи съ этимъ стоитъ, очевидно, попытка рѣшенія этой задачи, которую Чирнгаузъ опубликовалъ въ 1683 году [1]).

Онъ вводитъ въ уравненіе новое неизвѣстное; именно, если x есть корень уравненія $f(x)=0$, то онъ полагаетъ $y=\varphi(x)$, гдѣ $\varphi(x)$ есть функція $(n-1)$-ой степени. Въ такомъ случаѣ y, въ свою очередь, удовлетворяетъ нѣкоторому уравненію n-ой степени, коэффиціенты котораго зависятъ отъ n произвольныхъ коэффиціентовъ функціи φ. Затѣмъ онъ старается опредѣлить эти коэффиціенты такимъ образомъ, чтобы уравненіе для y приняло форму $y^n=a$. Этотъ пріемъ дѣйствительно ведетъ къ цѣли для уравненій 3-ей и 4-ой степени; но при уравненіяхъ болѣе высокихъ степеней онъ ничего не даетъ. Тѣмъ не менѣе пріемъ Чирнгауза сохранилъ значеніе для современной алгебры, такъ какъ онъ даетъ средства приводить уравненія болѣе высокихъ степеней къ нѣкоторымъ нормальнымъ формамъ. Такъ, напримѣръ, уравненія 5-ой степени приводятся къ такъ называемой Брингъ-Жерардовой формѣ $x^5+x+a=0$ (Ср. F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder, Leipzig, 1884).

5. Новый толчекъ къ изслѣдованію алгебраическихъ уравненій далъ обширный мемуаръ Лагранжа, помѣщенный въ трудахъ Берлинской Академіи за 1770—71 г., подъ заглавіемъ „Réflexions sur la résolution algébrique des équations“. Здѣсь прежде всего сопоставляются методы, которые служатъ для рѣшенія уравненія 3-ей и 4-ой степени и къ которымъ привели изслѣдованія Эйлера, Безу (1766) и Варинга (1736—1798); оцѣнивается внутреннее значеніе этихъ методовъ. Затѣмъ авторъ обобщаетъ эти методы и показываетъ, почему они непримѣнимы къ уравненіямъ болѣе высокихъ степеней. Лагранжъ приходитъ при этомъ къ понятію о резольвентахъ, которыя обыкновенно зависятъ, правда, отъ уравненій болѣе высокихъ степеней, нежели данныя, но въ извѣстномъ смыслѣ все таки даютъ упрощеніе задачи.

Функція корней уравненія, которая при перестановкахъ корней получаетъ опредѣленное число различныхъ значеній, удовлетворяетъ уравненію, степень котораго зависитъ отъ числа этихъ значеній. Такъ какъ число перестановокъ n элементовъ равно $n!$, то функція n корней уравненія n-ой степени имѣетъ не болѣе $n!$ значеній и удовлетворяетъ уравненію соотвѣтствующей степени. Но примѣненіе резольвентъ понижаетъ

[1]) Ehrenfried Walther von Tschirnhaus, 1651–1708, былъ въ дружескихъ отношеніяхъ съ Лейбницемъ.

степень этого уравненія до $(n-2)!$, т. е. для уравненія 5-ой степени до 6-ой степени. Эта работа дѣлаетъ Лагранжа предшественникомъ современной алгебры, которая покоится на теоріи группъ перестановокъ и симметрическихъ функцій.

6. Въ виду продолжительныхъ и многочисленныхъ безплодныхъ попытокъ найти рѣшеніе уравненія 5-ой степени, становилось все болѣе и болѣе сомнительнымъ, можетъ ли эта задача вообще быть разрѣшена, правильно ли поставленъ вопросъ. Уже Гауссъ въ своей докторской диссертаціи (1799, полное собран. соч. т. III, стр. 17), въ которой онъ въ первый разъ даетъ доказательство существованія корня алгебраическаго уравненія, высказывается по этому поводу очень опредѣленно. Онъ подчеркиваетъ, что рѣшеніе уравненій въ томъ видѣ, какъ его до сихъ поръ понимаютъ, представляетъ собой не что иное, какъ приведеніе уравненія къ ряду двучленныхъ уравненій и что двучленныя уравненія отличаются отъ остальныхъ только большею легкостью численнаго ихъ разрѣшенія. Гауссъ указываетъ вмѣстѣ съ тѣмъ, что нѣтъ никакихъ основаній допускать возможность такого пріема для уравненія любой степени. Онъ даже сообщаетъ здѣсь о дальнѣйшихъ своихъ изслѣдованіяхъ въ этомъ направленіи, которыхъ, однако, не оказалось ни въ опубликованныхъ имъ работахъ, ни въ бумагахъ, оставшихся послѣ его смерти. Но за то уже въ 1801-омъ году въ своихъ „Disquisitiones arithmeticae", въ главѣ о дѣленіи окружности на равныя части Гауссъ даетъ уже важный примѣръ глубокаго анализа алгебраическихъ уравненій. Но такъ какъ уравненія, съ которыми авторъ имѣетъ дѣло, разрѣшаются въ радикалахъ, то вопросъ, поставленный Гауссомъ, остается здѣсь на заднемъ планѣ, тогда какъ на первое мѣсто выступаетъ рядъ выводовъ, относящихся къ алгебрѣ и къ теоріи чиселъ; въ частности, въ первой очереди стоитъ вопросъ о послѣдовательномъ приведеніи даннаго уравненія къ ряду уравненій возможно низшей степени. Гауссова теорія дѣленія окружности на равныя части сдѣлалась образцомъ для всѣхъ общихъ алгебраическихъ изысканій. Изъ замѣтки, помѣщенной въ „Disquisitiones", видно, что Гауссъ получилъ тѣ-же результаты и въ другихъ отдѣлахъ, напримѣръ при дѣленіи эллиптическихъ функцій; замѣчаніе это было понято лишь спустя нѣсколько десятилѣтій, когда Абель и Якоби разработали теорію эллиптическихъ функцій.

7. Между тѣмъ въ Италіи была уже сдѣлана серьезная попытка доказать невозможность рѣшенія уравненій 5-ой степени. Попытка эта принадлежитъ Руффини и опубликована имъ въ 1799-омъ году въ учебникѣ „Teoria generale delle Equazioni, in cui si dimostra impossibile la resoluzione algebraica della equazioni generali di grado superiore al quarto" [1]);

---

[1]) Руффини (Paolo Ruffini, 1765—1822) былъ, собственно, по призванію врачемъ, но впослѣдствіи занималъ ученую должность по математикѣ при универси-

въ пяти дальнѣйшихъ сочиненіяхъ, послѣднее изъ которыхъ появилось въ 1813 г., онъ постоянно возвращается къ тому же вопросу.

Руффини въ общемъ находится на правильномъ пути, такъ какъ онъ исходитъ отъ изслѣдованія числа значеній, которыя можетъ принимать функція отъ корней уравненія при перестановкахъ этихъ корней; благодаря этому онъ является первымъ обоснователемъ теоріи группъ. Однако, его доказательства еще вызываютъ рядъ сомнѣній; Мальфатти вскорѣ послѣ появленія этихъ работъ высказалъ эти сомнѣнія и оспаривалъ полученные имъ результаты. Сверхъ того его изложеніе мало доступно, а за предѣлами Италіи его работы почти вовсе не были извѣстны.

Въ 1815 г. Коши опубликовалъ работу „Sur le nombre de valeurs qu'une fonction peut acquérir, lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités, qu'elle renferme", за которымъ позже (1844) послѣдовалъ болѣе обширный мемуаръ, посвященный тому же предмету. Здѣсь въ первый разъ установлено понятіе о составленіи перестановокъ и о группахъ; хотя понятія эти встрѣчаются уже у Руффини, о которомъ Коши попутно упоминаетъ, но только здѣсь они дѣйствительно положены въ основу цѣльной теоріи.

8. Значительный шагъ впередъ алгебра сдѣлала, благодаря трудамъ Абеля (Niels Henrik Abel).

Абель родился въ деревнѣ Финё (Finnö) въ Норвегіи 5-го Августа 1802 года и скончался 6-го Апрѣля 1829 года. По поводу столѣтняго юбилея со дня его рожденія его соотечественники Гольстъ, Штёрмеръ и Силовъ (Holst, Störmer, Sylow) опубликовали его письма, которыя воспроизводятъ чудный образъ этого юнаго ученаго. То была мягкая натура съ жизнерадостнымъ, общительнымъ характеромъ, загубленная заботами, нуждой и недугомъ. Безъ всякаго побужденія извнѣ, среди разнообразныхъ затрудненій изъ него развился математикъ, создавшій во время своего короткаго пребыванія въ Германіи и Франціи рядъ работъ, которыя уже на 27-омъ году его жизни обезсмертили его имя. Смерть похитила его въ тотъ моментъ, когда приглашеніе на Берлинскую каѳедру должно было освободить его отъ всякихъ заботъ о насущныхъ нуждахъ. Это приглашеніе было дѣломъ извѣстнаго Крелля (Crelle), основателя „Журнала чистой и

тетѣ въ Моденѣ. Ср. весьма достопримѣчательную статью Буркгардта „Начало теоріи группъ и Паоло Руффини", Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, Leipzig 1892.

[1]) Augustin Louis Cauchy родился въ Парижѣ въ 1789 г. Послѣ іюльской революціи онъ жилъ въ Прагѣ въ качествѣ воспитателя герцога Бордосскаго, позднѣе вновь работалъ въ Парижѣ и умеръ въ 1857 г. Это одинъ изъ наиболѣе разносторонних изслѣдователей и плодовитыхъ писателей во всѣхъ почти отрасляхъ математики и математической физики. Его произведенія издаются парижской академіей во многихъ томахъ.

прикладной математики“ (Journal für reine und angewandte Mathematik“). Крелль съ отеческой заботливостью отнесся къ молодому Абелю, пріѣхавшему въ Германію чужимъ и неизвѣстнымъ юношей, всячески поддерживалъ его и уже этимъ заслужилъ благодарность ученаго міра.

Абель началъ свои научныя изслѣдованія съ рѣшенія уравненія 5-ой степени, которое, какъ ему казалось, ему удалось найти. Это было заблужденіе, въ чемъ онъ самъ скоро убѣдился; но оно имѣло ту хорошую сторону, что обратило на него вниманіе норвежскихъ математиковъ, въ особенности Ганстена (Hansteen), и обезпечило ему ихъ поддержку, которой онъ пользовался всю жизнь. Руководящую роль по отношенію къ Абелю сыгралъ Дегенъ (Degen) въ Копенгагенѣ: Дегенъ, правда, не усмотрѣлъ ошибки въ рѣшеніи уравненія 5-ой степени, предложенномъ Абелемъ, но все же относился къ этому рѣшенію съ недовѣріемъ и указалъ Абелю область, въ которой послѣдній вскорѣ сдѣлалъ такія великія открытія, именно теорію эллиптическихъ функцій. Но и алгебры онъ не потерялъ изъ виду и именно въ связи съ теоріей эллиптическихъ функцій онъ сдѣлалъ въ ней наиболѣе замѣчательныя открытія.

Когда рѣшеніе уравненія 5-ой степени, какъ это и должно было быть, ему не удалось, онъ поставилъ себѣ цѣлью рѣшить, возможно ли вообще такое рѣшеніе. Не имѣя никакихъ свѣдѣній о работахъ Руффини, онъ далъ первое полное доказательство невозможности (1824—1826). Но будучи далекъ отъ мысли, что этимъ задача исчерпывается, онъ ставитъ вопросъ о характерѣ всѣхъ спеціальныхъ уравненій высшихъ степеней, допускающихъ алгебраическое рѣшеніе. Уже Гауссъ, какъ мы видѣли, указалъ классъ такого рода уравненій въ своей теоріи дѣленія окружности на равныя части. Упомянутое же выше таинственное замѣчаніе Гаусса, загадку котораго также раскрылъ Абель, указывало на дальнѣйшія области, въ которыхъ являются такого рода уравненія. Эти идеи привели къ дѣленію эллиптическихъ и гиперэллиптическихъ функцій, а также къ теоріи комплекснаго умноженія эллиптическихъ функцій. Такимъ образомъ Абель открылъ большой классъ алгебраическихъ уравненій, которыя разрѣшаются въ радикалахъ и, помимо того, обладаютъ рядомъ замѣчательныхъ свойствъ; эти уравненія сохранили названіе „Абелевыхъ уравненій“.

Абель поставилъ себѣ, однако, и болѣе общую задачу, именно слѣдующую: найти всѣ уравненія опредѣленной степени, которыя допускаютъ алгебраическое рѣшеніе, а также рѣшить, допускаетъ ли заданное уравненіе алгебраическое рѣшеніе или нѣтъ; ясно, что въ связи съ этимъ стоитъ вопросъ о наиболѣе общей формѣ алгебраическаго выраженія, которое удовлетворяетъ алгебраическому уравненію.

Въ незаконченной работѣ, опубликованной лишь много лѣтъ послѣ его смерти, сохранились важныя предложенія, которыя послужили для Кронекера точкой отправленія дальнѣйшихъ изслѣдованій въ этой области *).

9. Совершенно своеобразное явленіе въ исторіи алгебры представляетъ собой Эваристъ Галуа (Evariste Galois). Онъ родился въ 1811 году вблизи Парижа и погибъ на дуэли въ маѣ 1832 года, не достигши такимъ образомъ и 21 года. Въ возрастѣ около 16-ти лѣтъ, будучи еще ученикомъ коллегіи Людовика Великаго, Галуа сталъ заниматься болѣе глубокими вопросами алгебры и нѣкоторыя изъ своихъ работъ передалъ въ Парижскую Академію и опубликовалъ въ журналахъ „Annalen von Gergonne“ и „Bulletin des sciences mathématiques de Férussac“.

Важнѣйшіе результаты своихъ изслѣдованій онъ изложилъ въ письмѣ, которое онъ наканунѣ роковой дуэли, предчувствуя смерть, написалъ своему другу Августу Шевалье (Auguste Chevalier); это письмо было позднѣе опубликовано въ „Revue encyclopédique“ и потомъ еще разъ въ журналѣ Ліувиля. Галуа въ извѣстномъ смыслѣ закончилъ теорію группъ перестановокъ и ихъ приложеніе къ алгебрѣ; именно, онъ показалъ, что всѣ вопросы, которые могутъ быть поставлены относительно алгебраическихъ уравненій, необходимо приводятся къ этой теоріи. Установивши точно, что нужно разумѣть подъ областью раціональности, онъ показываетъ, что вся природа алгебраическаго уравненія зависитъ отъ особой группы перестановокъ, которая съ того времени сохранила названіе группы Галуа. Этимъ путемъ онъ находитъ простѣйшія условія, чтобы уравненіе простой степени разрѣшалось въ радикалахъ. Условіе это въ его формулировкѣ сводится къ тому, чтобы всѣ корни уравненія выражались раціонально черезъ два изъ нихъ. Но онъ разбираетъ и другіе вопросы, напримѣръ, вопросъ о томъ, при какихъ условіяхъ уравненіе можетъ быть приведено къ уравненію болѣе низкой степени, а также, какимъ образомъ можно достигнуть пониженія группы пріобщеніемъ ирраціональности; по всѣмъ этимъ вопросамъ онъ даетъ приложенія къ теоріи эллиптическихъ функцій, въ то время только что развернувшейся.

10. Во всѣхъ этихъ изслѣдованіяхъ не содержится какихъ либо общихъ предположеній объ области раціональности. Она можетъ состоять изъ раціональныхъ и ирраціональныхъ чиселъ, она можетъ содержать также перемѣнныя величины. Такимъ образомъ, всѣ эти предложенія относятся какъ къ числамъ, такъ и къ алгебраическимъ функціямъ, теорія которыхъ, въ связи съ проистекающими изъ нихъ путемъ интегрированія трансцендентными функціями, въ рукахъ Абеля, Римана и Вейерштрасса достигла высокой степени совершенства.

---

*) Сочиненія Абеля, включая и посмертныя работы, вышли въ двухъ изданіяхъ; первое изданіе выпустилъ Гольмбоэ (Holmböe), учитель и другъ Абеля, въ 1831 году; второе изданіе выпущено въ 1901 году издательствомъ Тейбнера подъ руководствомъ Силова и Ли.

11. Въ теоріи алгебраическихъ чиселъ задачи, относящіяся къ этимъ общимъ теоріямъ, въ сущности, только поставлены и ждутъ еще своего рѣшенія. Ближайшая цѣль заключается въ томъ, чтобъ изучить свойства спеціальныхъ категорій алгебраическихъ чиселъ; изслѣдователю открывается здѣсь неизмѣримое поле для дальнѣйшихъ изысканій. Въ настоящее время мы имѣемъ болѣе или менѣе точныя свѣдѣнія только о тѣхъ алгебраическихъ числахъ, къ которымъ приводитъ дѣленіе окружности на равныя части и комплексное умноженіе эллиптическихъ функцій.

Замѣтка о неопредѣленныхъ уравненіяхъ.

Е. Григорьева въ Казани.

Изъ нѣсколькихъ способовъ, существующихъ для рѣшенія неопредѣленныхъ уравненій, чаще другихъ находятъ примѣненіе два: способъ послѣдовательнаго дѣленія и способъ непрерывныхъ дробей. Оба они въ основѣ своей имѣютъ извѣстный алгориѳмъ Евклида,—тотъ самый алгориѳмъ, которымъ въ ариѳметикѣ пользуются для нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя. Но, кромѣ алгориѳма Евклида, десятичная ариѳметика знаетъ еще одинъ—алгориѳмъ обращенія обыкновенной дроби въ десятичную періодическую. Этотъ алгориѳмъ въ общей ариѳметикѣ распространяется и примѣняется къ системамъ счисленія, основанія которыхъ отличны отъ 10. Въ такомъ видѣ алгориѳмъ можетъ быть также примѣненъ и къ рѣшенію неопредѣленныхъ уравненій.

Достаточно, конечно, ограничиться наиболѣе простымъ случаемъ неопредѣленнаго уравненія съ двумя перемѣнными. Извѣстно, что для составленія общихъ рѣшеній въ цѣлыхъ числахъ слѣдуетъ найти пару цѣлыхъ значеній x и y, удовлетворяющихъ уравненію

$$ax + by = c, \tag{1}$$

въ которомъ числа a, b, c можно считать цѣлыми и положительными; кромѣ того a и b должны быть взаимно простыми.

Если c дѣлится на b, то система рѣшеній

$$x = 0, \quad y = \frac{c}{b}$$

очевидна. Поэтому будемъ предполагать, что c при дѣленіи на b даетъ остатокъ r_1, отличный отъ нуля. Умноживъ этотъ остатокъ на a, раздѣлимъ произведеніе ar_1 на b; такъ какъ $r_1 < b$ и a взаимно простое съ b, то при этомъ дѣленіи мы получимъ остатокъ r_2, тоже отличный отъ нуля. Раздѣливъ произведеніе ar_2 на b, мы получимъ новый остатокъ r_3. Продолжая ту же операцію дальше, мы приходимъ къ слѣдующимъ равенствамъ:

$$\begin{aligned} c &= bq_1 + r_1 \\ ar_1 &= bq_2 + r_2 \\ ar_2 &= bq_3 + r_3. \\ &\dots\dots\dots \\ ar_{n-1} &= bq_n + r_n \\ &\dots\dots\dots\dots, \end{aligned} \tag{2}$$

гдѣ q_1, q_2, q_3, ... послѣдовательныя частныя.

Рядъ этихъ равенствъ, а слѣдовательно и рядъ остатковъ

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots\ r_n\ \ldots \tag{3}$$

можетъ быть неопредѣленно продолженъ, однако число *различныхъ* остатковъ въ рядѣ (3) ограничено и никогда не можетъ превышать $b-1$, такъ какъ остатки эти представляютъ собой цѣлыя числа, большія нуля, но меньшія дѣлителя. Отсюда необходимо слѣдуетъ, что остатки въ рядѣ (3) повторяются.

Пусть какой-нибудь изъ остатковъ $r_m = r_n$. Вычитая равенства, соотвѣтствующія этимъ остаткамъ

$$ar_{m-1} = bq_{m-1} + r_m,$$

$$ar_{n-1} = bq_{n-1} + r_n,$$

имѣемъ:

$$a(r_{m-1} - r_{n-1}) = b(q_{m-1} - q_{n-1}),$$

новое равенство, показывающее, что произведеніе $a(r_{m-1} - r_{n-1})$ дѣлится на b; но одинъ изъ множителей этого произведенія a—число взаимно простое съ b, слѣдовательно на b долженъ дѣлиться другой множитель $r_{m-1} - r_{n-1}$; этотъ множитель, представляя собой разность двухъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, изъ которыхъ каждое меньше b, можетъ раздѣлиться на b только тогда, когда

$$r_{m-1} - r_{n-1} = 0, \text{ т. е. } r_{m-1} = r_{n-1}.$$

Исходя изъ этого, найдемъ точно также, что

$$r_{m-2} = r_{n-2},\quad r_{m-3} = r_{n-3} \text{ и т. д. до } r_{m-n+1} = r_1;$$

иначе говоря, остатки ряда (3) слѣдуютъ другъ за другомъ въ строго опредѣленномъ порядкѣ, повторяясь періодически, и періодъ этотъ начинается остаткомъ r_1; въ простѣйшемъ случаѣ періодъ состоитъ изъ одного только члена r_1.

Пусть въ алгориѳмѣ (2) имѣется k различныхъ остатковъ, тогда $r_{k+1} = r_1$, и равенство, соотвѣтствующее этому остатку, будетъ:

$$ar_k = bq_{k+1} + r_1.$$

Подставляя отсюда r_1 въ первое равенство того же алгориѳма, получаемъ:

$$c = ar_k + b(q_1 - q_{k+1});$$

сравнивая, наконецъ, это равенство съ уравненіемъ (1), имѣемъ частное рѣшеніе послѣдняго:

$$x = r_k, \quad y = q_1 - q_{k+1}.$$

Интересно отмѣтить, что найденное такимъ путемъ значеніе $x = r_k$ представляетъ собой наименьшее цѣлое положительное число, удовлетворяющее уравненію (1). Это заключеніе непосредственно слѣдуетъ изъ того обстоятельства, что безконечный рядъ значеній перемѣннаго x, удовлетвояющихъ (1), образуетъ ариѳметическую прогрессію съ разностью b, а r_k — цѣлое положительное число, меньшее b.

Приложимъ эту теорію къ примѣру. Найдемъ пару цѣлыхъ рѣшеній уравненія:

$$25x + 14y = 348. \tag{4}$$

Обращаемъ дробь $\frac{348}{14}$ въ періодическую въ системѣ счисленія съ основаніемъ 25, иными словами, составляемъ алгориѳмъ (2), продолжая его до тѣхъ поръ, пока не встрѣтимъ снова перваго остатка:

$$\begin{aligned} 348 &= 14.24 + 12 \\ 25.12 = 300 &= 14.21 + 6 \\ 25.6 = 150 &= 14.10 + 10 \\ 25.10 = 250 &= 14.17 + 12. \end{aligned} \tag{5}$$

Отсюда пара рѣшеній:

$x = 10$ (предпослѣдній остатокъ),

$y = 7$ (разность перваго и послѣдняго частныхъ).

Часто нѣтъ никакой необходимости составлять длинный рядъ равенствъ: среди остатковъ раньше, чѣмъ мы воспроизведемъ полный ихъ періодъ, можетъ встрѣтиться остатокъ 1 или другой такой, который дѣлитъ собою первый остатокъ періода. Этого будетъ вполнѣ достаточно. Такъ, въ предыдущемъ примѣрѣ возможно ограничиться только первыми двумя равенствами. Умножая второе изъ равенствъ алгориѳма (5) на 2 и вычитая изъ перваго, находимъ:

$$348 = 14(-18) + 25.24,$$

откуда пара частныхъ рѣшеній: $x = 24$, $y = -18$.

Итакъ, изложенный методъ сводится, главнымъ образомъ, къ разысканію періода остатковъ: $r_1, r_2, r_3, \ldots$ Поэтому для нахожденія послѣдующаго остатка нѣтъ нужды умножать предыдущій на коэффиціентъ a, достаточно — и это будетъ проще — умножить его только на остатокъ отъ дѣленія a на b. Если этотъ остатокъ обозначить черезъ E, то въ такомъ случаѣ мы, въ сущности говоря, будемъ искать пару рѣшеній уравненія:

$$Ex + by = c. \tag{6}$$

Но, замѣчая, что это уравненіе отличается отъ уравненія (1) только значеніями y'а, а цѣлыя значенія x'а у того и другого уравненія одни и тѣ же, мы непосредственной подстановкой въ уравненіе (1) найденнаго значенія x'а можемъ опредѣлить y, что кстати послужитъ намъ повѣркой.

Слѣдуетъ еще прибавить, что вычисленіе необходимаго для насъ періода остатковъ, который, какъ уже показано, не всегда бываетъ нуженъ въ полномъ составѣ, значительно упрощается и ускоряется, если употреблять наряду съ положительными остатками остатки отрицательные и пользоваться хотя бы самыми простыми свойствами сравненій.

Кромѣ этихъ упрощеній, которыя, такъ сказать, касаются вычисленія самыхъ остатковъ, выгодно подвергать преобразованію и самое уравненіе, прежде чѣмъ примѣнять какой бы то ни было методъ. Преобразованіе это должно быть направлено къ уменьшенію коэффиціентовъ лѣвой части уравненія. Объяснимъ это на слѣдующемъ примѣрѣ:

$$45x - 29y = 113.$$

Замѣчая, что

$$2.29 - 45 = 13, \tag{7}$$

возьмемъ болѣе простое уравненіе

$$29\xi + 13\eta = 113.$$

Такъ какъ 113 и 29 при дѣленіи на 13 даютъ остатки, соотвѣтственно равные 9 и 3, то легко составить „въ умѣ“ такой рядъ послѣдовательныхъ остатковъ:

$$9,\ \ 1,\ \ 3,\ \ 9.$$

Послѣдній членъ періода даетъ намъ $\xi = 3$, подстановкой опредѣляемъ $\eta = 2$ и, слѣдовательно, имѣемъ тожество:

$$29.3 + 13.2 = 113.$$

Замѣняя здѣсь коэффиціентъ 13 по тожеству (7), находимъ:

$$29.3 + (2.29 - 45)\,2 = 113,$$

или

$$45(-2) - 29(-7) = 113,$$

откуда

$$x = -2, \quad y = -7.$$

Въ этомъ примѣрѣ можно было бы ограничиться уже остаткомъ 1, тогда пришлось бы предыдущій остатокъ умножить на частное отъ дѣленія перваго остатка на 1, т. е. на 9, и мы имѣли бы болѣе сложное рѣшеніе $\xi=81$, вмѣсто котораго, впрочемъ, можно взять его остатокъ отъ дѣленія на 13, т. е. то же 3.

Та идея, на которой основывается изложенный въ настоящей замѣткѣ способъ рѣшенія неопредѣленныхъ рѣшеній, не представляетъ, конечно, ничего новаго и всецѣло относится къ теоріи степенныхъ вычетовъ, играющей громадную роль во многихъ вопросахъ „Теоріи чиселъ".

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ" и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 793 (4 сер.). На дугѣ BC окружности, описанной около треугольника ABC, взята точка M; прямая MA пересѣкаетъ сторону BC треугольника въ точкѣ A'. Доказать, что

$$a.AM.AA'=b^2.BA'+c^2.CA',$$

гдѣ a, b, c—стороны BC, CA, AB треугольника.

Д. Ефремовъ (Иваново-Вознесенскъ).

№ 794 (4 сер.). Внутри даннаго угла BAC построить точку M на данномъ разстояніи $AM=l$ отъ его вершины такъ, чтобы прямая, проходящая черезъ M и отсѣкающая отъ даннаго угла треугольникъ наименьшаго периметра, образовала съ AB данный уголъ α.

В. Шлыгинъ (ст. Урюпинская).

№ 795 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$x-y=2,\quad xz-y-t=7,\quad xz^2-y-2t=22,\quad xz^3-y-3t=57.$$

А. Саркисянъ (Тифлисъ).

№ 796 (4 сер.) Опредѣлить сумму n первыхъ членовъ каждаго изъ рядовъ

$$1,\ 2.3,\ 2.4.5,\ 2.4.6.7,\ \ldots\ldots,\ 2.4.6\ \ldots\ 2(k-1)\,2k.(2k+1),\ \ldots$$

$$1.2,\ 1.3.4,\ 1.3.5.6,\ 1.3.5.7.8,\ \ldots,\ 1.3.5\ \ldots\ldots\ (2k-1).2k\ \ldots$$

А. Брюхановъ (Иркутскъ).

№ 797 (4 сер.). Доказать, что число

$$3\left(5^{2n+1}+3^{4n-5}\right)+2^{3n}\left(2-2^{3n-6}\right)$$

при всякомъ цѣломъ положительномъ значеніи n кратно 17.

И. Коровинъ (Екатеринбургъ).

№ 798 (4 сер.). Два одинаковыхъ блока расположены такъ, что ихъ окружности лежатъ въ одной вертикальной плоскости, а прямая, соединяющая ихъ центры горизонтальна. Черезъ блоки перекинута натянутая нить, къ обѣимъ концамъ которой привѣшено по массѣ m, а къ срединѣ нити на равномъ разстояніи отъ обоихъ блоковъ подвѣшена масса M. Черезъ нѣкоторое время приборъ, предоставленный самому себѣ пришелъ въ состояніе равновѣсія. Пренебрегая вѣсомъ нити, размѣрами блоковъ и треніемъ, опредѣлить, насколько опустился при этомъ грузъ M, зная, что разстояніе между центрами блоковъ равно $2l$. Изслѣдовать задачу.

Л. Ямпольскій (Braunschweig).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 667 (4 сер.) *Рѣшить систему уравненій*

$$xy+\frac{c}{d}x+\frac{a}{b}y=\frac{m}{bd},$$

$$yz+\frac{e}{f}y+\frac{c}{d}z=\frac{n}{df};$$

$$zx+\frac{a}{b}z+\frac{e}{f}x=\frac{p}{fb}.$$

Послѣ освобожденія отъ знаменателей, данная система приметъ видъ:

$$bdxy+bcx+ady=m \ (1), \quad dfyz+dey+cfz=n \ (2), \quad fbzx+faz+ebx=p \ (3).$$

Прибавивъ къ обѣимъ частямъ уравненій (1), (2), (3) соотвѣтственно по ac, ce, ea, получимъ, послѣ разложенія лѣвыхъ частей на множителей,

$$(a+bx)(c+dy)=m+ac \ (4), \quad (c+dy)(e+fz)=n+ce \ (5), \quad (e+fz)(a+bx)=p+ea \ (6).$$

Перемноживъ равенства (4), (5), (6), находимъ

$$(a+bx)^2(c+dy)^2(e+fz)^2=(m+ac)(n+ce)(p+ea), \text{ откуда}$$

$$(a+bx)(c+dy)(e+fz)=\pm\sqrt{(m+ac)(n+ce)(p+ea)} \quad (7).$$

Дѣля равенство (7) соотвѣтственно на равенства (5), (6), (4), получимъ

$$a+bx=\pm\frac{\sqrt{(m+ac)(n+ce)(p+ea)}}{n+ce}, \quad c+dy=\pm\frac{\sqrt{(m+ac)(n+ce)(p+ea)}}{p+ea},$$

$$e+fz=\pm\frac{\sqrt{(m+ac)(n+ce)(p+ea)}}{m+ac},$$

откуда

$$x=\frac{1}{b}\left(-a\pm\frac{\sqrt{(m+ac)(n+ce)(p+ea)}}{n+ce}\right), \quad y=\frac{1}{d}\left(-c\pm\frac{\sqrt{(m+ac)(n+ce)(p+ea)}}{p+ea}\right),$$

$$z=\frac{1}{f}\left(-e\pm\frac{\sqrt{(m+ac)(n+ce)(p+ea)}}{m+ac}\right). \quad (8).$$

Въ этихъ формулахъ надо вездѣ одновременно взять либо верхніе либо нижніе знаки. Формулы (8) выведены въ предположеніи, что $n+ce\neq 0$, $p+ea\neq 0$, $m+ac\neq 0$. Только одно изъ количествъ $n+ce$, $p+ea$, $m+ac$ не можетъ равняться нулю: напримѣръ, если $m+ac=0$, то (см. (4)) $a+bx=0$ или $c+dy=0$, а потому $p+ea=0$ или $n+ce=0$. Если $m+ac=0$, $n+ce=0$, но $p+ea\neq 0$, то (см. (6)) $e+fz\neq 0$, $a+bx\neq 0$, и (см. (4), (5)) $c+dy=0$. Поэтому $y=-\frac{c}{d}$, а x и z связаны уравненіемъ (6), такъ что одно изъ этихъ двухъ неизвѣстныхъ произвольно, а другое опредѣляется въ зависимости отъ него изъ равенства (6). Наконецъ, если $m+ac=p+ea=n+ce=0$, то (см. (3), (5), (6)) два изъ трехъ выраженій $a+bx$, $c+dy$, $e+fz$ должны равняться нулю, откуда опредѣляются два изъ неизвѣстныхъ, а третье остается произвольнымъ (напр., $a+bx=0$, $c+dy=0$, откуда $x=-\frac{a}{b}$, $y=-\frac{c}{d}$, а значеніе z произвольно).

Н. Плахово (Знаменка); *Г. Лебедевъ* (Харьковъ); *Э. Лейнъкъ* (Рига);

№ 668 (4 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$m^2x^2(a^2-mx)=a^3(a+1).$$

Представивъ данное уравненіе послѣдовательно въ видѣ:

$$m^2x^2a^2-a^4-m^3x^3-a^3=a^2(m^2x^2-a^2)-(m^3x^3+a^3)=$$

$$=a^2(mx+a)(mx-a)-(mx+a)(m^2x^2-amx+a^2)=$$

$$=(mx+a)(a^2mx-a^3-m^2x^2+amx-a^2)=0,$$

мы видимъ, что оно распадается на два: $mx+a=0$ и

$$a^2mx-a^3-m^2x^2+amx-a^2=0,\text{ или } m^2x^2-am(a+1)x+a^2(a+1)=0,$$

откуда

$$x_1=-\frac{a}{m},\quad x_{2,3}=\frac{am(a+1)\pm\sqrt{a^2m^2(a+1)^2-4a^2m^2(a+1)}}{2m^2}=$$

$$=\frac{am(a+1)\pm am\sqrt{(a+1)(a-3)}}{2m^2}=\frac{a(a+1)\pm\sqrt{(a+1)(a-3)}}{2m}.$$

С. Конюховъ (Никитовка); *Э. Лейнъкъ* (Рига); *В. Нерехтскій* (Кіевъ); *Н. Плахово* (Знаменка); *Г. Лебедевъ* (Харьковъ); *А. Саркисянъ* (Тифлисъ); *Я. Виленкинъ* (Елатьма); *Н. Доброгаевъ* (Немировъ); *А. Турчаниновъ* (Одесса).

№ 669 (4 сер.). *Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе*

$$x^y-y^2=1.$$

При цѣлыхъ значеніяхъ x и y нельзя предположить, что y отрицательно. Дѣйствительно, полагая $y=-z$, гдѣ $z>0$, находимъ $x^{-z}-z^2=1$, откуда $x^{-z}=\frac{1}{x^z}=1+z^2$ (1). Но равенство (1) при цѣлыхъ значеніяхъ x и z и при $z>0$ невозможно, такъ какъ при $x=0$ лѣвая его часть теряетъ всякій смыслъ, а при $x\neq 0$ абсолютная величина лѣвой части не болѣе 1 (именно равна 1 при $|x|=1$), а абсолютная величина правой части больше 1. Полагая $y=0$, находимъ, что уравненіе удовлетворяется при произвольномъ цѣломъ значеніи x (но не равномъ 0, такъ какъ 0^0 есть выраженіе неопредѣленное) и при $y=0$. Пусть теперь $y>0$. Въ этомъ случаѣ $x\neq 0$, такъ какъ лѣвая часть равенства $x^y-y^2=1$ при $x=0$ отрицательна, а правая положительна. Предположимъ, что y четно, т. е. $y=2k$, гдѣ k—цѣлое положительное число. Называя абсолютную величину числа x^k черезъ u, имѣемъ $x^y-y^2=x^{2k}-y^2=(x^k)^2-y^2=u^2-y^2=(u+y)(u-y)=1$ (2). Такъ какъ $x\neq 0$, то и u

есть цѣлое число, не равное нулю, а потому равенство (2) невозможно; дѣйствительно, при $u=y$ (см. (2)) $(u+y)(u-y)=0 \neq 1$, а при $u \neq y$ имѣемъ: $|(u+y)(u-y)| \geqslant 2$, такъ какъ u и y цѣлыя положительныя числа, а потому опять $(u+y)(u-y) \neq 1$. Слѣдовательно y не можетъ быть четно, такъ что $y=2k+1$, гдѣ $k \geqslant 0$ (такъ какъ $y>0$). Поэтому

$$x^y-y^2=x^{2k+1}-(2k+1)^2=1, \text{ откуда } x^{2k+1}=4k^2+4k+2, \text{ или}$$

$$x^{2k+1}=2[2(k^2+k)+1] \quad (3).$$

Правая часть равенства (3) четна, а потому и x четно, т. е. $x=2l$, гдѣ l — цѣлое число. Поэтому (см. (3))

$$2^{2k+1}\, l^{2k+1}=2[2(k^2+k)+1] \quad (4).$$

Если $k>0$, то лѣвая часть равенства (4) кратна 8, такъ какъ, при $k>0$, $2k+1 \geqslant 3$; между тѣмъ правая часть равенства (4) дѣлится на 2, но не дѣлится ни на какую высшую степень 2, такъ какъ число $2(k^2+k)+1$ нечетно. Итакъ нельзя допустить, что $k>0$, а потому $k=0$. Поэтому (см. (3)) $x=2$, $y=2k+1=1$. Изъ всего сказаннаго видно, что возможны лишь два рѣшенія въ цѣлыхъ числахъ: $y=0$, а x произвольное цѣлое число, или $x=2$, $y=1$.

Н. Доброгаевъ (Немировъ); *Г. Лебедевъ* (Харьковъ); *Э. Лейнъкъ* (Рига).

№ 670 (4 сер.). *Въ сосудъ, совершенно наполненный водой, вводятъ нерастворимое твердое тѣло и удаляютъ перелившуюся черезъ верхъ жидкость; тогда вѣсъ сосуда увеличивается на* 20,75 *граммовъ. Если бы сосудъ былъ наполненъ масломъ, плотность котораго равна* 0,9, *то увеличеніе вѣса равнялось бы* 21,58 *грамма. Опредѣлить вѣсъ, объемъ и удѣльный вѣсъ тѣла.*

Заимств. изъ *L'Éducation Mathématique.*

Обозначимъ вѣсъ, объемъ и удѣльный вѣсъ твердаго тѣла соотвѣтственно черезъ p, v и d. Перелившаяся вода, объемъ которой равенъ объему тѣла, т. е. v кубическимъ сантиметрамъ, вѣситъ v граммовъ; такимъ образомъ вѣсъ сосуда съ водой при введеніи въ него твердаго тѣла увеличивается на $p-v$ граммовъ. При введеніи того же твердаго тѣла въ сосудъ съ масломъ вѣсъ перелившагося масла равенъ $0,9v$ граммовъ, а потому вѣсъ сосуда увеличивается на $p-0,9v$ граммовъ. Согласно съ условіемъ задачи

$$p-v=20,75 \quad (1), \qquad p-0,9v=21,58 \quad (2).$$

Кромѣ того, $p=vd$ (3). Вычитая изъ равенства (2) равенство (1), находимъ $0,1v=0,83$, откуда $v=8,3$ куб. сантиметровъ. Подставляя значеніе v въ равенство (1), получимъ $p=8,3+20,75=29,05$ граммовъ. Слѣдовательно

$$d=\frac{p}{v}=\frac{29,05}{8,3}=3,5.$$

А. Варенцовъ (Ростовъ н/Д); *Н. Доброгаевъ* (Немировъ); *Л. Барановскій*; *Э. Лейнъкъ* (Рига); *А. Турчаниновъ* (Одесса).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.

ОТКРЫТА ПОДПИСКА НА **1906** ГОДЪ НА

РЕМЕСЛЕННУЮ ГАЗЕТУ.

21-й годъ издания.

ЕЖЕНЕДѢЛЬНОЕ ОБЩЕПОЛЕЗНОЕ изданіе съ **рисунками** и чертежами въ текстѣ образцовъ новыхъ издѣлій, инструментовъ, станковъ, приспособленій и пр. предметовъ по **различнымъ ремесламъ,** а также **кустарнымъ и мелкимъ фабрично-заводскимъ** производствамъ, съ подробными описаніями и наставленіями, къ нимъ относящимися. При этомъ въ **общепонятномъ** изложеніи даются надлежащія **описанія, указанія и рецепты** практическаго свойства.

„РЕМЕСЛЕННАЯ ГАЗЕТА" необходима спеціальнымъ школамъ, технику, ремесленнику, кустарю, торговцу, сельскому хозяину, любителю ремеслъ и потребителямъ ремесленныхъ издѣлій, т. е. во всякомъ семействѣ.

Кромѣ множества разнообразнѣйшихъ чертежей и рисунковъ, въ „Ремесл. Газетѣ" будетъ помѣщенъ рядъ **описаній: различныхъ ремесленныхъ производствъ**, новѣйшихъ **изобрѣтеній, усовершенствованій, выставокъ,** музеевъ, **образцовыхъ** ремесленныхъ и техническихъ **школъ,** частныхъ промышленныхъ **мастерскихъ** и пр.

Кромѣ ЕЖЕНЕДѢЛЬНЫХЪ сообщеній о различныхъ **заграничныхъ новостяхъ,** редакція будетъ давать БЕЗПЛАТНО отвѣты и совѣты на запросы гг. подписчиковъ, относящіеся до ихъ спеціальности.

Получая всѣ извѣстнѣйшія иностранныя изданія по различнымъ ремесламъ, **Редакція** располагаетъ лучшими изъ помѣщенныхъ въ нихъ статей и рисунковъ и даетъ возможность своимъ подписчикамъ пользоваться массою полезнаго, необходимаго и дорогого (многимъ недоступнаго) матеріала **за крайне дешевую цѣну**.

Каждый подписчикъ получитъ въ теченіе года:

а) **50 №№** „Рем. Газ.", содержащихъ до 1000 статей со множествомъ рисунковъ въ текстѣ и приложеніяхъ,

б) иллюстрированный настѣнный календарь и

в) **Двѣнадцать** слѣдующихъ премій-сборниковъ, составленныхъ изъ новѣйшихъ лучшихъ образцовъ, представляющихъ собою точные снимки съ натуры, сдѣланные въ Россіи и за границей, и т. п. изданій—Сборники рисунковъ мебели, столярныхъ и пр. издѣлій, Сборникъ рисунковъ мягкой мебели, Сборникъ рисунковъ драпировокъ для оконъ, дверей и пр., Сборники рисунковъ желѣзныхъ воротъ, оградъ и пр., Сборникъ плотничныхъ и т. п. работъ—дверей, воротъ, оградъ и пр.

Примѣч. I. Эти новые сборники вмѣстѣ съ изданными въ предшествующіе годы могутъ составить рѣдкія и богатыя собранія рисунковъ и чертежей образцовыхъ издѣлій по разнымъ ремесламъ.

Примѣчаніе. II. Эти сборники въ отдѣльной продажѣ будутъ стоить каждый по **1 руб.** и болѣе (съ пересылкой).

Примѣчаніе. III. Къ сборникамъ будутъ приложены соотвѣтствующія описанія входящихъ въ составъ ихъ рисунковъ и чертежей.

Каждый подписчикъ всегда можетъ сборникъ, не соотвѣтствующій его нуждамъ, продать лично, или при посредствѣ мѣстнаго книжнаго магазина спеціалисту по соотвѣтствующему ремеслу.

Кромѣ того, будутъ помѣщаемы къ „Рем. Газ." образцы новѣйшихъ мужскихъ модъ всѣхъ сезоновъ, а также образцы модной обуви мужской и женской.

Подписавшимся среди года высылаются всѣ вышедшие №№ съ преміями.

Подписная цѣна: 6 руб. въ годъ съ пересылкой и доставкой, за полгода **4** рубля.

Полные экземпляры „Ремесленной Газеты" со всѣми приложеніями за 1886 г. по 10 р., а за 1887, 1889, 1890, 1891, 1892 (безъ книгъ), 1893, 1894, 1895, 1896, 1897, 1898, 1899, 1900, 1901, 1902 1903, 1904 и 1905 г.г. съ преміями-сборниками рисунковъ по разнымъ ремесламъ—по 12 руб.

Экземпляры за 1885 и 1888 г.г. всѣ разошлись.

„Ремесленная газета" РЕКОМЕНДОВАНА Г. Министромъ Народ. Просвѣщенія: 1) для техническихъ и ремесленныхъ училищъ—мужскихъ и женскихъ; 2) для городскихъ и сельскихъ училищъ; 3) для учительскихъ институтовъ и семинарій, а также 4) для библіотекъ реальныхъ училищъ.

АДРЕСЪ РЕДАКЦІИ: Москва, Долгоруковская улица, домъ № 71.

Редакторъ-Издатель Ученый Инженеръ-Механикъ *К. А. КАЗНАЧЕЕВЪ.*