№ 422.

ВѢСТНИКЪ

ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ѳ. Кагана.

XXXVI-го Семестра № 2-й.

ОДЕССА.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.
1906.

MATHESIS

Издательство научныхъ и популярно-научныхъ сочиненій изъ области физико-математическихъ наукъ.

1. Г. АБРАГАМЪ, проф. **СБОРНИКЪ ЭЛЕМЕНТАРНЫХЪ ОПЫТОВЪ ПО ФИЗИКѢ**, составленный при участіи многихъ профессоровъ и преподавателей физики. Переводъ съ французскаго подъ редакціей Приватъ-доцента *Б. П. Вейнберга*. Часть I: Работы въ мастерской. Различные рецепты—Геометрія. Механика—Гидростатика. Гидродинамика. Капиллярность. Теплота—Числовыя таблицы.
Ученымъ комитетомъ допущено въ ученическія библіотеки среднихъ учебныхъ заведеній, учительскихъ семинарій и городскихъ, по Положенію 31 мая 1872 г., училищъ, а равно и въ безплатныя народныя читальни и библіотеки.
XVI+272 стр. Со многими (свыше 300) рисунками. Цѣна 1 р. 50 к.

2. Г. АБРАГАМЪ, проф. **СБОРНИКЪ ЭЛЕМЕНТАРНЫХЪ ОПЫТОВЪ ПО ФИЗИКѢ.** Переводъ съ французскаго подъ редакціей Приватъ-доцента *Б. П. Вейнберга*. Часть II: Звукъ—Свѣтъ—Электричество—Магнитизмъ.
LXXV+434 стр. Со многими (свыше 400) рисунками. Цѣна 2 р. 75 к.

3. С. АРРЕНІУСЪ, проф. **ФИЗИКА НЕБА.** Разрѣшенный авторомъ и дополненный по его указаніямъ переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей Приватъ-доцента *А. Р. Орбинскаго*. Содержаніе: Неподвижныя звѣзды—Солнечная система—Солнце—Планеты, ихъ спутники и кометы—Космогонія.
VIII+250 стр. Съ 66 черными и 2 цвѣтными рисунками въ текстѣ и 1 черной и 1 цвѣтной отдѣльными таблицами. Цѣна 2 руб.
Ученымъ Комитетомъ М. Н. П. допущено въ ученическія, старшаго возраста, библіотеки среднихъ учебныхъ заведеній, а равно и въ безплатныя народныя библіотеки и читальни.

4. **УСПѢХИ ФИЗИКИ**, сборникъ статей о важнѣйшихъ открытіяхъ послѣднихъ лѣтъ въ общедоступномъ изложеніи. Подъ редакціей „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики". Содержаніе: *Винеръ*, Расширеніе нашихъ чувствъ—*Пильчиковъ*, Радій и его лучи—*Дебіернъ*, Радій и радіоактивность—*Рихарцъ*, Электрическія волны—*Слаби*, Телеграфированіе безъ проводовъ—*Шмидтъ*, Задача объ элементарномъ веществѣ (основанія теоріи электроновъ).
IV+157 стр. Съ 41 рисункомъ и 2 таблицами. Цѣна 75 коп.

5. АУЭРБАХЪ, проф. **ЦАРИЦА МІРА И ЕЯ ТѢНЬ.** Общедоступное изложеніе основаній ученія объ *энергіи и энтропіи*. Пер. съ нѣмецкаго. Съ предисловіемъ *Ш. Э. Гильома*, Вице-Директора Международнаго Бюро Мѣръ и Вѣсовъ.
VIII+56 стр. Цѣна 50 к.

6. С. НЬЮКОМЪ, проф. **АСТРОНОМІЯ ДЛЯ ВСѢХЪ.** Переводъ съ англійскаго. Съ предисловіемъ Приватъ-доцента *А. Р. Орбинскаго*
XXIV+285 стр. Съ портретомъ Автора, 64 рисунками въ текстѣ и 1 таблицей. Цѣна 1 р. 50 к.

7. Г. ВЕБЕРЪ и І. ВЕЛЬШТЕЙНЪ. **ЭНЦИКЛОПЕДІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ. Томъ I. Энциклопедія элементарной алгебры,** обраб. проф. *Веберомъ*. Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей Приватъ-доцента *В. Ф. Кагана*. Книга I. **Основанія ариѳметики**, гл. I—X. Книга II. **Алгебра**, гл. XI—XIX. Книга III. **Анализъ**, гл. XX—XXVI. **Выпускъ I.** Стр. 1—256. Главы I—XII. **Цѣна 1 р. 50 к.**
Выпускъ II печатается.

8. Дж. ПЕРРИ, проф. **ВРАЩАЮЩІЙСЯ ВОЛЧОКЪ.** Публичная лекція съ 63 рисунками. Переводъ съ англійскаго. VII+96 стр. **Цѣна 60 к.**

9. К. ШЕЙДЪ, проф. **ПРОСТЫЕ ХИМИЧЕСКІЕ ОПЫТЫ для юношества** Переводъ съ нѣмецкаго, подъ редакціей Лаборанта Новороссійскаго Университета *Е. С. Ельчанинова*.

10. А. РИГИ, проф. **СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРІЯ ФИЗИЧЕСКИХЪ ЯВЛЕНІЙ.** (Радіоактивность, іоны, электроны). Переводъ съ итальянскаго.

СЪ ТРЕБОВАНІЯМИ ОБРАЩАТЬСЯ:

Одесса, Типографія М. Шпенцера, ул. Новосельскаго 66.

XXXVI Сем. № 2.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

№ 422.

Содержаніе: Введеніе въ геодезію. *Проф. Вихерта.* — О чевіанахъ, пересѣкающихся въ одной точкѣ треугольника. (Продолженіе) *Дм. Ефремова.* — Солнечный двуугольникъ. *Н. Адамовича.* — Задачи для учащихся, №№ 783—788 (4 сер.). — Рѣшенія задачъ, №№ 661, 674. — Объявленія.

Введеніе въ геодезію.

Профессора Э. Вихерта.

Лекціи для преподавателей среднихъ учебныхъ заведеній.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Милостивые Государи!

Слово „геодезія“ означаетъ измѣреніе земли; такимъ образомъ, моя задача заключается въ томъ, чтобы разсказать объ измѣреніяхъ, относящихся къ нашей землѣ. Намъ придется встрѣтиться при этомъ съ различными вопросами какъ научнаго, такъ и практическаго характера.

Прежде всего наука ставитъ вопросъ о *формѣ* и *размѣрахъ* земли; отвѣчая на него, нужно принять во вниманіе совокупность силъ природы, подъ дѣйствіемъ которыхъ образовалась наша земля, и съ другой стороны тѣ силы, которыя, въ свою очередь, обусловливаются *формой земли.* Поэтому необходимо, а какъ оказывается это и возможно, охватить обширную область астрономическихъ и земныхъ явленій и установить весьма важныя заключенія относительно *состава земли.* Далѣе, геодезія должна дать свѣдѣнія, лежащія въ *основаніи каждой географической работы,* относительно распредѣленія суши и морей, ихъ поверхностей, ихъ высотъ и глубинъ.

Важность практическихъ примѣненій геодезіи къ нашей жизни, которая вся протекаетъ на поверхности земли, настолько очевидна, что на этомъ вопросѣ не нужно останавливаться. Она играетъ важную роль для всѣхъ путей сообщеній, предназначенныхъ какъ для пѣшехода или велосипедиста, такъ и для морскихъ или военныхъ передвиженій; во всѣхъ этихъ случаяхъ геодезія даетъ карты и инструменты для оріентировки. Примѣненія геодезіи играютъ значительную роль въ дѣлѣ землевладѣнія какъ для отдѣльныхъ личностей, такъ и для государства.

Въ послѣднюю очередь, хотя это дѣло далеко не послѣдней важности, я упомяну еще о томъ, что сельское и лѣсное хозяйства, стремящіяся въ своемъ развитіи приспособить земную почву для нуждъ человѣка, ожидаютъ отъ геодезіи серьезныхъ услугъ.

При всѣхъ геодезическихъ работахъ приходится встрѣчаться съ непосредственнымъ примѣненіемъ математики. И это не простая случайность, что отдѣлъ математики, съ которымъ намъ придется теперь особенно часто имѣть дѣло, носитъ названіе „геометріи", что также означаетъ измѣреніе земли. Все значеніе математическихъ абстракцій становится намъ здѣсь яснымъ какъ при рѣшеніи простѣйшихъ задачъ, такъ и при производствѣ сложныхъ вычисленій.

Бросивъ бѣглый взглядъ на эту науку, мы съ увѣренностью можемъ утверждать, что ознакомленіе въ школѣ съ геодезіей полезно не только потому, что оно обнаруживаетъ передъ молодежью одно изъ величественнѣйшихъ завоеваній цивилизаціи, но также и потому, что оно вообще наглядно выясняетъ значеніе научной работы. Ученикъ узнаетъ, что тысячи геодезистовъ постоянно примѣняютъ къ дѣйствительнымъ соотношеніямъ математическіе выводы, которые онъ привыкъ считать совершенно абстрактными; но знакомится онъ здѣсь съ ними въ формѣ сразу для него понятной, имѣя въ виду цѣль, важность которой для него вполнѣ очевидна. Каждый изъ такихъ геодезистовъ пользуется одновременно какъ теоріей, такъ и практикой.

Милостивые государи, отъ проф. Клейна вы слышали, что съ этой наукой тѣсно связано имя нашего великаго Геттингенскаго ученаго Гаусса, что геодезія также послужила обширнымъ полемъ для его дѣятельности. По удачному выраженію Г. Гаука на прошлогоднемъ собраніи нѣмецкихъ математиковъ, каждый современный геодезистъ помазанъ каплей Гауссова мѵра. Позаботимся же мы о томъ, чтобы это мѵропомазаніе коснулось и учениковъ, когда они пріобрѣтаютъ познанія по математикѣ. Тогда они не только пріобрѣтутъ бо̀льшую склонность къ обученію и извлекутъ изъ него большую пользу; они обрѣтутъ также путь къ изученію высшихъ отраслей чистой науки, которой человѣкъ отдается лишь благодаря своему идеальному стремленію къ знанію.

Нужно ли ввести въ программу средней школы еще дополнительныя занятія по геодезіи? Меньше всего расположенъ я сдѣлать подобное предложеніе! И безъ того число преподаваемыхъ предметовъ велико, и время, проводимое учащейся молодежью за партой, то именно время, когда она какъ разъ должна физически развиваться, скорѣе слишкомъ продолжительно. Нѣтъ, увеличеніе работы ни въ коемъ случаѣ не можетъ быть предложено. *Лишь тогда геодезія достигнетъ полностью своей цѣли, когда къ ней будутъ обращаться при преподаваніи математики, физики и географіи, а также при ученическихъ экскурсіяхъ, когда при всякомъ удобномъ случаѣ будутъ приводиться примѣры и задачи изъ геодезіи и, наконецъ, когда нѣсколько часовъ, посвященныхъ теоретическому преподаванію математики въ классѣ, будутъ замѣнены практическими занятіями подъ открытымъ небомъ.*

Этому послѣднему обстоятельству я придаю особенное значеніе. Однимъ изъ самыхъ опасныхъ результатовъ школьнаго преподаванія является то обстоятельство, что дѣйствительность не воспринимается непосредственно, а представленіе о ней тѣсно связывается съ книгой. Я всегда съ особенной радостью наблюдалъ, что именно въ послѣднее время съ этой опасностью ведется энергичная борьба, и крѣпнетъ стремленіе основывать преподаваніе на самодѣятельности учащихся. Но въ этомъ направленіи остается еще многое сдѣлать; это особенно ясно для университетскаго преподавателя, который имѣетъ случай наблюдать, какъ мало молодые студенты склонны къ самостоятельной работѣ собственнымъ умомъ и собственными руками, какъ мало они обыкновенно къ этому подготовлены. И вотъ, геодезія даетъ намъ въ руки отличное средство еще увеличить воспитательное значеніе математики путемъ небольшихъ практическихъ ея приложеній.

Геодезія раздѣляется на два отдѣла: низшую и высшую, въ зависимости отъ того, принимается ли земная поверхность плоской или выпуклой. Я начну съ изложенія низшей геодезіи и только въ заключеніе сдѣлаю нѣсколько замѣчаній относительно высшей. Фактически при вашей подготовкѣ было бы, можетъ быть, лучше, если бы я поступилъ наоборотъ; но тогда я долженъ былъ бы начать издалека, занявшись вопросами, которые я могу лишь слегка намѣтить; а въ данномъ случаѣ этого приходится опасаться. Итакъ, не боясь забѣгать впередъ и повторять самыя простыя вещи, приступимъ къ дѣлу, сообразуя между прочимъ наше изложеніе съ требованіями школы.

Такъ какъ въ нашемъ распоряженіи находится немного часовъ, то мнѣ придется ограничиться тѣмъ, чтобы дать лишь обзоръ итересующаго насъ предмета. Не станемъ останавливаться на томъ, что я считаю вамъ извѣстнымъ. Немногія частности, которыя я сообщу, должны лишь служить иллюстраціей къ тому, что вы можете ожидать отъ изученія самой геодезіи.

I. Низшая геодезія.

§ 1. *О точкахъ и прямыхъ линіяхъ.*

При измѣреніяхъ земной поверхности, вообще говоря, приходится имѣть дѣло съ пространственными образами или, другими словами, съ математикой пространства трехъ измѣреній. Эти измѣренія получаютъ, однако, сейчасъ же особенный характеръ благодаря тому, что по нашему представленію для каждаго даннаго мѣста существуетъ нѣкоторое основное направленіе, называемое вертикальнымъ. На ограниченномъ протяженіи, если довѣрять нашимъ непосредственнымъ впечатлѣніямъ, всѣ вертикальныя линіи кажутся намъ прямыми и параллельными, такъ что для всего этого пространства мы можемъ считать вертикальнымъ одно единственное направленіе. Такое допущеніе лежитъ въ основѣ элементарной геодезіи, которой мы прежде всего займемся. Направленіе, перпендикулярное вертикальному, называется горизонтальнымъ; съ точки зрѣнія низшей геодезіи, горизонтальныя направленія располагаются въ систему горизонтальныхъ плоскостей.

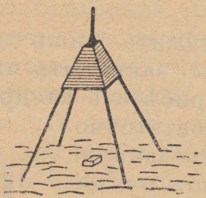
Специальный характеръ геодезіи непосредственно ведетъ къ тому, что она на всякомъ предметѣ прежде всего отличаетъ горизонтальное и вертикальное направленія, имѣющія въ вопросахъ геодезіи существенно различное значеніе. Поэтому мы пойдемъ совершенно естественнымъ путемъ, если вначалѣ ограничимся тѣми задачами, которыя имѣютъ въ виду только горизонтальное протяженіе. Этимъ мы ограничиваемъ свою задачу одними *очертаніями* земельныхъ участковъ, а примѣненіе математики—однимъ ея отдѣломъ—планиметріей, которая какъ разъ соотвѣтствуетъ нашей цѣли. Замѣтимъ также, что только контуры участковъ лежатъ въ основѣ всѣхъ земельныхъ отношеній, существующихъ въ государствѣ; поэтому, если мы будемъ имѣть въ виду именно эти отношенія, то наше краткое изложеніе низшей геодезіи окажется вполнѣ достаточнымъ.

Основными элементами математическихъ операцій служатъ точка и линія. Какъ теперь обозначить точку въ полѣ? Въ данномъ случаѣ, перемѣщеніе въ вертикальномъ направленіи не имѣетъ никакого значенія; поэтому для обозначенія точки могъ бы служить шестъ въ родѣ того, который изображенъ на фиг. 1, воткнутый вертикально въ землю. Тогда точка будетъ опредѣлена линіей, проходящей въ серединѣ нашего шеста. Такой шестъ, очень широко примѣняющійся при измѣреніяхъ участковъ земли, называется вѣхой, бакеномъ или рейкой. На рисункѣ онъ изображенъ въ своемъ обычномъ видѣ; это круглый стержень, имѣющій въ толщину три сантиметра, въ длину—нѣсколько больше двухъ метровъ; онъ раздѣленъ на части по 50 сантиметровъ каждая, выкрашенныя попеременно красной и бѣлой краской; на нижнемъ концѣ находится желѣзное остріе. Такая окраска шеста служитъ для того, чтобы облегчить разысканіе его съ большихъ разстояній. Иногда къ верхнему концу прикрѣпляется листъ бумаги или флажекъ, служащіе лишь для того, чтобы сдѣлать его болѣе замѣтнымъ. Въ нѣкоторыхъ особенныхъ случаяхъ употребляются шесты длиною въ три, четыре метра, или даже больше. Шесты эти должны тщательно устанавливаться въ вертикальномъ положеніи; здѣсь, впрочемъ, достаточно положиться на глазомѣръ, необходима только извѣстная внимательность.

Такой легко подвижной шестъ можетъ служить лишь для временнаго обозначенія точекъ; для того, чтобы закрѣпить ихъ на болѣе продолжительное время, приходится прибѣгать къ другимъ средствамъ. Часто для этого бываетъ достаточно вбить въ землю сантиметровъ на тридцать деревянную дощечку или колъ. Если при данномъ измѣреніи нужно пользоваться большимъ числомъ такихъ значковъ, то, чтобы не перепутать ихъ одинъ съ другимъ, на верхушкѣ каждаго изъ нихъ ставится число, или какой-нибудь другой отличительный знакъ. Еще болѣе постоянными мѣтками служатъ камни или колонны, въ родѣ извѣстныхъ вамъ верстовыхъ столбовъ на дорогахъ или межевыхъ камней на границахъ имѣній. Наконецъ, еще вѣрнѣе и точнѣе употреблять для этой цѣли трубы (или бутылки) изъ обожженной глины, закопанныя глубоко (30—50 сант.) въ землю въ вертикальномъ положеніи — пріемъ, часто употребляемый при съемкахъ, производимыхъ оцѣночнымъ вѣдомствомъ. Чтобы послѣ нѣкотораго времени опять разыскать ихъ, необходимо надъ ними помѣщать какой-нибудь видимый знакъ. Чтобы видѣть во время измѣреній отмѣченную такимъ образомъ точку издали, въ ней укрѣпляется шестъ, въ родѣ описаннаго выше, который называется тогда „сигналомъ“.


Фиг. 1.

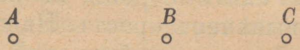
При съемкахъ, производимыхъ въ Пруссіи генеральнымъ штабомъ, для обозначенія точекъ употребляются квадратныя каменныя плиты, закопанныя въ землю на глубину отъ 60 до 90 сантиметровъ, на верхней сторонѣ которыхъ посрединѣ высѣченъ крестъ. Надъ такой плитой помѣщается другой камень кубической формы со сторонами въ 20 или 30 сантиметровъ, который нѣсколько выдается надъ поверхностью земли, и на верхней сторонѣ котораго высѣченъ также крестъ. На одной изъ его боковыхъ сторонъ написано Т. П., что значитъ „Тригонометрическій пунктъ“. Строго говоря, нужно пользоваться лишь нижнимъ крестомъ, но въ большинствѣ случаевъ оказывается достаточнымъ имѣть дѣло непосредственно съ верхнимъ, наружнымъ крестомъ. Сигналомъ служитъ деревянный штативъ, въ простѣйшемъ случаѣ такого вида, какъ изображенный на фиг. 2. Измѣрительный инструментъ направляется на вертикальный шестъ, установленный на верху такого сигнала; онъ дѣлается настолько высокимъ, чтобы подъ нимъ, надъ камнемъ, свободно могъ помѣщаться наблюдатель со своимъ инструментомъ; (иногда его вышина достигаетъ 30-ти и больше метровъ). Деревянная обшивка верхней части сигнала дѣлаетъ его болѣе замѣтнымъ. Подобные сигналы разбросаны въ большомъ количествѣ по всей Германіи. Вы навѣрное часто имѣли случай ихъ видѣть и вблизи мѣстъ, гдѣ вы живете, и во время путешествій по желѣзнымъ дорогамъ. Они обозначаютъ собою узловые пункты сѣти линій, которыми покрыта, какъ паутиной, вся страна для производства съемки. Кромѣ этихъ нарочно сдѣланныхъ сигналовъ, при съемкахъ пользуются также и естественными, въ особенности шпилями башенъ, фабричными трубами и т. п. На картахъ генеральнаго штаба тригонометрическіе пункты обозначены треугольниками.


Фиг. 2.

Прямая линія опредѣляется двумя точками; такимъ образомъ, мы можемъ обозначить ее двумя шестами (см. фиг. 1)—пріемъ, часто употребляемый при измѣреніяхъ полей. На улицахъ города иногда оказывается возможнымъ провести линію на самомъ дѣлѣ; для этого между двумя точками туго натягивается натертый мѣломъ шнуръ; этотъ способъ имѣетъ то преимущество, что всѣ точки такой линіи видны непосредственно.

Однако, обстоятельства складываются такъ удобно только въ исключительныхъ случаяхъ; обыкновенно точки, которыя оказываются нужными впослѣдствіи, отмѣчаются просто колышками.

Разсмотримъ болѣе подробно обыкновенный способъ откладыванія линій при помощи шестовъ. Вотъ шестъ *A* и вотъ шестъ *B*, расположенные, какъ это показано на фиг. 3; моя задача заключается въ томъ, чтобы помѣстить находящійся у меня въ рукахъ третій шестъ—*C* на продолженіи данной прямой *AB*, или другими словами въ томъ, чтобы продолжить эту прямую. Я беру этотъ шестъ по возможности выше и держу его свободно въ рукахъ такъ, чтобы онъ самъ, въ силу своей тяжести, принялъ вертикальное положеніе. Сначала я помѣщу глазъ, которымъ дѣлаю



Фиг. 3.

наведеніе, нѣсколько внѣ нашей линіи *AB*, такъ чтобы позади ближайшаго шеста *B* можно было свободно различить и шестъ *A*; затѣмъ буду постепенно приближать глазъ къ нашей линіи до того момента, когда задній шестъ *A* исчезнетъ позади передняго; это значитъ тогда, что глазъ находится въ плоскости, касающейся съ одной и той же стороны шестовъ *A* и *B*. Теперь остается помѣстить третій шестъ такъ, чтобы онъ тоже касался этой плоскости соотвѣтственной стороной, и въ этомъ положеніи вбить его въ землю. Не смотря на всю тщательность, съ которой произведены всѣ эти манипуляціи, установка можетъ оказаться несовсѣмъ точной. Для контроля я повторю все вышеизложенное наново, дѣлая наведеніе то на одну, то на другую сторону нашихъ шестовъ; это позволитъ установить третій шестъ съ бо̀льшей точностью. Такую операцію называютъ *провѣшиваніемъ* линіи. Если новую точку C (фиг. 4) надо помѣстить между двумя другими, уже установленными — A и B, то для этого я по-

Фиг. 4.

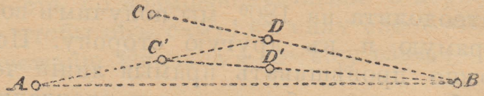
ступаю слѣдующимъ образомъ: помѣстившись позади одной изъ конечныхъ точекъ, напримѣръ позади точки B, я посылаю своего помощника съ новымъ шестомъ C къ тому мѣсту, гдѣ послѣдній долженъ быть установленъ, и затѣмъ дѣлаю наведеніе глазомъ, по способу, изложенному выше, на одну и ту же сторону неподвижныхъ шестовъ (A и B), причемъ помощникъ, передвигая шестъ C то вправо, то влѣво согласно моимъ указаніямъ, помѣщаетъ его въ надлежащее мѣсто. При большихъ разстояніяхъ между точками, голосъ оказывается слишкомъ слабымъ для указаній помощнику; тогда приходится пользоваться условными знаками, напримѣръ флажкомъ; полезно придумать также какой-нибудь знакъ, подаваемый при окончаніи установки и замѣняющій собой слово „готово“.

При постройкахъ желѣзныхъ дорогъ бываетъ иногда необходимо провѣшивать весьма длинныя прямыя линіи. Тогда пользуются сильной подзорной трубой, которую можно вращать около горизонтальной оси. Какъ вамъ извѣстно, такими трубами снабжены теодолиты, и поэтому этими инструментами обыкновенно пользуются при такой задачѣ. Если установить теодолитъ надъ пунктомъ начальной станціи и направить перекрестныя нити трубы на сигналъ конечной станціи, то труба, при вращеніи около горизонтальной оси, будетъ описывать ту именно вертикальную плоскость, въ которой заключается наша прямая. Переложивъ трубу теодолита на 180^0, мы получимъ возможность продолжить эту прямую и въ другую сторону. Пользуясь этимъ способомъ, можно провѣшивать прямыя линіи черезъ вершины горъ, какъ это бываетъ необходимо при прокладкѣ туннелей.

При провѣшиваніи длинныхъ линій встрѣчаются очень часто затрудненія, благодаря разнымъ особенностямъ мѣстности; тогда „нужно придумать, какъ помочь дѣлу“. Бауернфейндъ сообщаетъ въ своихъ „Началахъ геодезіи“ (§ 246 второй части), какъ при постройкѣ Рейнской желѣзной дороги ему удалось провести прямую линію длиною въ $2^1/_2$ нѣмецкія мили между двумя точками [Königsdorfer Tunnel и Merzennische Haide]. Большой дубовый лѣсъ мѣшалъ видѣть одну станцію съ другой, а чтобы не производить большихъ затратъ, нужно было избѣгать напрасной вырубки лѣса. Руководившій работами инженеръ

(Андриссенъ) установилъ на болѣе благопріятно расположенной станціи теодолитъ; направить его непосредственно на вторую станцію нельзя было, но зато при помощи его трубки можно было осматривать значительную часть свободнаго поля, лежащаго между станціями. Ночью, въ заранѣе назначенное время, на второй станціи была зажжена смоляная бочка. Съ первой станціи вслѣдствіе этого можно было замѣтить на горизонтѣ огненное зарево, довольно хорошо очерченное, на середину котораго тщательно была направлена труба инструмента. Въ условленное время на полянѣ между двумя станціями помощникъ высоко установилъ большой фонарь. Убѣдившись, какъ этого и слѣдовало ожидать, что фонарь стоялъ не на мѣстѣ, наблюдатель подалъ сигналъ о томъ, что нужна поправка. Чтобы, несмотря на большое разстояніе, его сигналъ былъ хорошо замѣтенъ, онъ воспользовался ракетой, пущенной въ ту сторону, куда нужно было передвинуть фонарь. Такіе сигналы о поправкахъ продолжались до тѣхъ поръ, пока фонарь не былъ установленъ правильно; тогда вертикально пущенный огненный шаръ послужилъ заключительнымъ сигналомъ. Затѣмъ, черезъ нѣсколько времени, тоже въ заранѣе установленный часъ, была установлена такимъ же способомъ еще вторая точка. Эти двѣ точки позволили установить днемъ еще рядъ другихъ, сдѣлать просѣку въ лѣсу и такимъ образомъ свободно проложить и отмѣтить всю прямую линію.

Также и землемѣръ, работающій на небольшихъ участкахъ, при провѣшиваніи прямыхъ линій часто бываетъ вынужденъ прибѣгать къ разнымъ искусственнымъ изобрѣтеніямъ. Часто случается, что съ одного пункта нельзя видѣть другого, изъ за возвышенностей почвы, находящихся между ними. Въ такомъ случаѣ обыкновенно поступаютъ слѣдующимъ образомъ. Прежде всего на бугрѣ, между конечными точками A и B (фиг. 5) уста-



Фиг. 5.

навливаютъ шестъ C, сначала произвольно, но по возможности правильно; затѣмъ между C и B ставятъ еще одинъ шестъ D, такъ чтобы отъ него можно было еще видѣть A. Если случайно точка C установлена сразу правильно, то линія DCA должна быть прямой; если же она оказывается ломанной, то между D и A устанавливается еще точка C'; затѣмъ между C' и B—еще точка D' и т. д. до тѣхъ поръ, пока обѣ вспомогательныя точки не будутъ лежать на одной прямой съ точкой A, а слѣдовательно и съ точкой B. Путемъ простыхъ размышленій и вычисленій, учитель легко сократитъ это приближенное изслѣдованіе и сдѣлаетъ его еще болѣе интереснымъ для учениковъ.

(Продолженіе слѣдуетъ).

О ЧЕВІАНАХЪ,

пересѣкающихся въ одной точкѣ треугольника.

Дм. Ефремова (Иван.-Возн.).

*(Продолженіе *).*

13. Если AA'—внутренняя, а BB'_1—внѣшняя биссектрисы треугольника, пересѣкающіяся въ центрѣ внѣвписаннаго круга I_1, то, имѣя въ виду замѣчаніе къ теоремѣ I, найдемъ, что

$$\frac{AI_1}{I_1I_1}=\frac{AC_1'}{BC_1'}+\frac{AB_1'}{CB_1'}=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{b+c}{a},$$

$$\frac{BI_1}{I_1B_1'}=\frac{BC_1'}{AC_1'}-\frac{BA'}{CA'}=\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b},$$

$$\frac{CI_1}{I_1C_1'}=\frac{CB_1'}{AB_1'}-\frac{CA'}{BA'}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c};$$

отсюда

$$\frac{AA'}{I_1A'}=\frac{AI_1}{I_1A'}-1=\frac{b+c}{a}-1=\frac{2(p-a)}{a},$$

$$\frac{BB_1'}{I_1B'}=1-\frac{BI_1}{I_1B_1'}=1-\frac{a-c}{b}=\frac{2(p-a)}{b},$$

$$\frac{CC_1'}{I_1C_1'}=1-\frac{CI_1}{I_1C_1'}=1-\frac{a-b}{c}=\frac{2(p-a)}{c}.$$

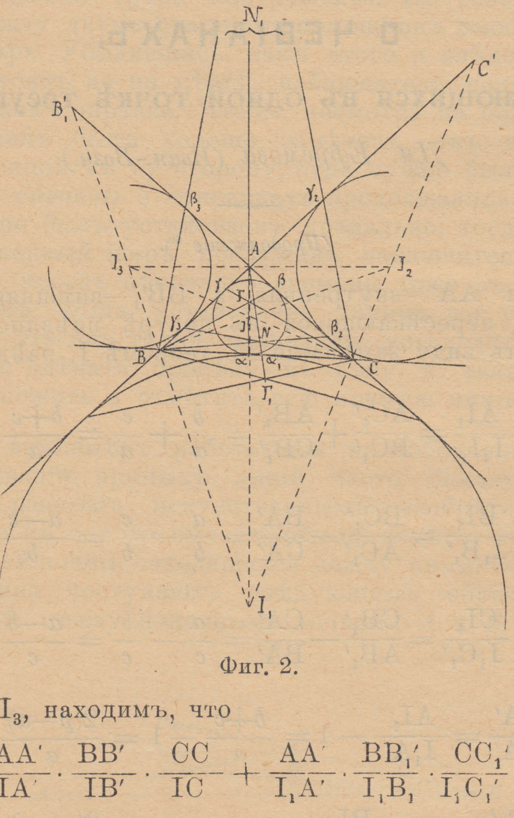
*) См. № 421 „Вѣстника“.

Изъ этихъ формулъ слѣдуетъ, что

$$\frac{AA}{I_1A'}\cdot\frac{BB_1'}{I_1B_1'}\cdot\frac{CC_1'}{I_1C_1'}=\frac{8(p-a)^3}{abc}=\frac{2(p-a)^2}{Rr_1},$$

гдѣ r_1—радіусъ внѣвписаннаго круга I_1.

Составивъ аналогичныя формулы, соотвѣтственныя центрамъ



Фиг. 2.

круговъ I_2 и I_3, находимъ, что

$$\frac{AA'}{IA'}\cdot\frac{BB'}{IB'}\cdot\frac{CC}{IC}+\frac{AA'}{I_1A'}\cdot\frac{BB_1'}{I_1B_1}\cdot\frac{CC_1'}{I_1C_1'}+$$

$$+\frac{AA_1'}{I_2A_1'}\cdot\frac{BB'}{I_2B'}\cdot\frac{CC_1'}{I_2C_1'}+\frac{AA_1'}{I_3A_1'}\cdot\frac{BB_1'}{I_3B_1'}\cdot\frac{CC'}{I_3C'}=$$

$$=\frac{2}{R}\left[\frac{p^2}{r}+\frac{(p-a)^2}{r_1}+\frac{(p-b)^2}{r_2}+\frac{(p-c)^2}{r_3}\right]=$$

$$=\frac{2\Delta^2}{R}\left(\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r_1{}^3}+\frac{1}{r_2{}^3}+\frac{1}{r_3{}^3}\right)$$

и

$$\left(\frac{AA'}{IA'}\cdot\frac{BB'}{IB'}\cdot\frac{CC'}{IC'}\right)\left(\frac{AA'}{I_1A'}\cdot\frac{BB_1'}{I_1B_1'}\cdot\frac{CC_1'}{I_1C_1'}\right)\left(\frac{AA_1'}{I_2A_1'}\cdot\frac{BB'}{I_2B'}\cdot\frac{CC_1'}{I_2C_1'}\right)\left(\frac{AA_1'}{I_3A_1'}\cdot\frac{BB_1'}{I_3B_1}\cdot\frac{CC'}{I_3C'}\right)=$$

$$=\frac{16p^2(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}{R^4.rr_1r_2r_3}=\frac{16\triangle^4}{R^4\triangle^2}=\frac{16\triangle^2}{R^4},$$

ибо

$$rr_1r_2r_3=\triangle^2.$$

14. Положимъ, что вписанный кругъ (I) и внѣвписанные круги (I_1, I_2, I_3) касаются сторонъ тр-ка BC, CA, AB:

$$\begin{array}{llll} (I) & \text{въ точкахъ} & \alpha, & \beta, \gamma, \\ (I_1) & \text{"} \quad \text{"} & \alpha_1, & \beta_1, \gamma_1, \\ (I_2) & \text{"} \quad \text{"} & \alpha_2, & \beta_2, \gamma_2, \\ (I_3) & \text{"} \quad \text{"} & \alpha_3, & \beta_3, \gamma_3. \end{array}$$

Чевіаны, пересѣкающіяся въ точкахъ *Жергона*, образуютъ четыре группы:

$$\begin{array}{lll} A\alpha, \; B\beta, \; C\gamma, & \text{пересѣкающіяся въ точкѣ} & \Gamma. \\ A\alpha_1, \; B\beta_1, \; C\gamma_1, & \text{"} \qquad \text{"} \quad \text{"} & \Gamma_1. \\ A\alpha_2, \; B\beta_2, \; C\gamma_2, & \text{"} \qquad \text{"} \quad \text{"} & \Gamma_2. \\ A\alpha_3, \; B\beta_3, \; C\gamma_3, & \text{"} \qquad \text{"} \quad \text{"} & \Gamma_3. \end{array}$$

Четыре группы, соотвѣтствующихъ имъ чевіанъ, пересѣкающихся въ точкахъ *Нагеля*, суть:

$$\begin{array}{lll} A\alpha_1, \; B\beta_2, \; C\gamma_3, & \text{пересѣкающіяся въ точкѣ} & N. \\ A\alpha, \; B\beta_3, \; C\gamma_2, & \text{"} \qquad \text{"} \quad \text{"} & N_1. \\ A\alpha_3, \; B\beta, \; C\gamma_1, & \text{"} \qquad \text{"} \quad \text{"} & N_2. \\ A\alpha_2, \; B\beta_1, \; C\gamma, & \text{"} \qquad \text{"} \quad \text{"} & N_3. \end{array}$$

Такъ какъ

$$A\beta=A\gamma=B\alpha_3=B\gamma_3=C\alpha_2=C\beta_2=p-a,$$

$$B\gamma=B\alpha=C\beta_1=C\alpha_1=A\beta_3=A\gamma_3=p-b,$$

$$C\alpha=C\beta=A\gamma_2=A\beta_2=B\gamma_1=B\alpha_1=p-c,$$

$$A\beta_1=A\gamma_1=B\alpha_2=B\gamma_2=C\alpha_3=C\beta_3=p,$$

то (по теоремѣ I)

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma\alpha}=\frac{A\gamma}{B\gamma}+\frac{A\beta}{C\beta}=\frac{p-a}{p-b}+\frac{p-a}{p-c}=\frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)},$$

$$\frac{B\Gamma}{\Gamma\beta}=\frac{B\gamma}{A\gamma}+\frac{B\alpha}{C\alpha}=\frac{p-b}{p-a}+\frac{p-b}{p-c}=\frac{b(p-b)}{(p-c)(p-a)},$$

$$\frac{C\Gamma}{\Gamma\gamma}=\frac{C\beta}{A\beta}+\frac{C\alpha}{B\alpha}=\frac{p-c}{p-a}+\frac{p-c}{p-b}=\frac{c(p-c)}{(p-a)(p-b)}$$

и

$$\frac{AN}{N\alpha}=\frac{A\gamma_3}{B\gamma_3}+\frac{A\beta_2}{C\beta_2}=\frac{p-b}{p-a}+\frac{p-c}{p-a}=\frac{a}{p-a},$$

$$\frac{BN}{N\beta}=\frac{B\gamma_3}{A\gamma_3}+\frac{B\alpha_1}{C\alpha_1}=\frac{p-c}{p-b}+\frac{p-a}{p-b}=\frac{b}{p-b},$$

$$\frac{CN}{N\gamma}=\frac{C\beta_2}{A\beta_2}+\frac{C\alpha_1}{A\alpha_1}=\frac{p-a}{p-c}+\frac{p-b}{p-c}=\frac{c}{p-c};$$

поэтому

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma\alpha}\cdot\frac{B\Gamma}{\Gamma\beta}\cdot\frac{C\Gamma}{\Gamma\gamma}=\frac{AN}{N\alpha}\cdot\frac{BN}{N\beta}\cdot\frac{CN}{N\gamma}=$$

$$=\frac{abc}{(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{abc.p}{\triangle^2}=\frac{4R}{r}$$

и

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma\alpha}+\frac{B\Gamma}{\Gamma\beta}+\frac{C\Gamma}{\Gamma\gamma}=\frac{AN}{N\alpha_1}+\frac{BN}{N\beta_2}+\frac{CN}{N\gamma_3}=$$

$$=\frac{a}{p-a}+\frac{b}{p-b}+\frac{c}{p-c}=\frac{ar_1+br_2+cr_3}{\triangle}.$$

Замѣтивъ затѣмъ, что

$$\frac{A\alpha_1}{N\alpha_1}=\frac{AN}{N\alpha_1}+1=\frac{a}{p-a}+1=\frac{p}{p-a},$$

$$\frac{B\beta_2}{N\beta_2}=\frac{BN}{N\beta_2}+1=\frac{b}{p-b}+1=\frac{p}{p-b},$$

$$\frac{C\gamma_3}{N\gamma_3}=\frac{CN}{N\gamma_3}+1=\frac{c}{p-c}+1=\frac{p}{p-c},$$

получаемъ равенства:

$$\frac{A\alpha}{\Gamma\alpha}+\frac{B\beta}{\Gamma\beta}+\frac{C\gamma}{\Gamma\gamma}=\frac{A\alpha_1}{N\alpha_1}+\frac{B\beta_2}{N\beta_2}+\frac{C\gamma_3}{N\gamma_3}=$$

$$=p\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)=\frac{p(r_1+r_2+r_3)}{\triangle}=\frac{4R+r}{r}\ {}^{*)}$$

и

$$\frac{A\alpha_1}{N\alpha_1}\cdot\frac{B\beta_2}{N\beta_2}\cdot\frac{C\gamma_3}{N\gamma_3}=\frac{p^3}{(p-a)(p-b)(p-c)}=$$

$$=\frac{p^4}{\triangle^2}=\frac{p^2}{r^2}=\frac{(a+b+c)^2}{4r^2}.$$

---

*) Ибо $r_1+r_2+r_3=4R+r$.

Наконецъ, изъ равенствъ

$$\frac{AN}{A\alpha_1}=\frac{AN}{N\alpha_1}:\frac{A\alpha_1}{N\alpha_1}=\frac{a}{p},$$

$$\frac{BN}{B\beta_2}=\frac{BN}{N\beta_2}:\frac{B\beta_2}{N\beta_2}=\frac{b}{p},$$

$$\frac{CN}{C\gamma_3}=\frac{CN}{N\gamma_3}:\frac{C\gamma_3}{N\gamma_3}=\frac{c}{p}$$

слѣдуетъ, что

$$\frac{AN}{A\alpha_1}\cdot\frac{BN}{B\beta_2}\cdot\frac{CN}{C\gamma_3}=\frac{abc}{p^3}=$$

$$=\frac{4R\triangle}{p^3}=\frac{4Rr}{p^2}=\frac{16Rr}{(a+b+c)^2}.$$

15. Для чевіанъ, пересѣкающихся въ точкахъ Γ_1 и N_1, имѣя въ виду замѣчаніе къ теоремѣ I, находимъ:

$$\frac{A\Gamma_1}{\Gamma_1\alpha_1}=\frac{A\gamma_1}{B\gamma_1}+\frac{A\beta_1}{C\beta_1}=\frac{p}{p-c}+\frac{p}{p-b}=\frac{ap}{(p-b)(p-c)},$$

$$\frac{B\Gamma_1}{\Gamma_1\beta_1}=\frac{B\alpha_1}{C\alpha_1}-\frac{B\gamma_1}{A\gamma_1}=\frac{p-c}{p-b}-\frac{p-c}{p}=\frac{b(p-c)}{p(p-b)},$$

$$\frac{C\Gamma_1}{\Gamma_1\gamma_1}=\frac{C\alpha_1}{B\alpha_1}-\frac{C\beta_1}{A\beta_1}=\frac{p-b}{p-c}-\frac{p-b}{p}=\frac{c(p-b)}{p(p-c)}$$

и

$$\frac{AN_1}{N_1\alpha}=\frac{A\alpha}{B\alpha}+\frac{A\beta_3}{C\beta_3}=\frac{p-c}{p}+\frac{p-b}{p}=\frac{a}{p},$$

$$\frac{BN_1}{N_1\beta_3}=\frac{B\gamma_2}{A\gamma_2}-\frac{B\alpha}{C\alpha}=\frac{p}{p-c}-\frac{p-b}{p-c}=\frac{b}{p-c},$$

$$\frac{CN_1}{N_1\gamma_2}=\frac{C\beta_3}{A\beta_3}-\frac{C\alpha}{B\alpha}=\frac{p}{p-b}-\frac{p-c}{p-b}=\frac{c}{p-b}.$$

Поэтому (теор. II)

$$\frac{A\Gamma_1}{\Gamma_1\alpha_1}\cdot\frac{B\Gamma_1}{\Gamma_1\beta_1}\cdot\frac{C\Gamma_1}{\Gamma_1\gamma_1}=\frac{AN_1}{N_1\alpha}\cdot\frac{BN_1}{N_1\beta_3}\cdot\frac{CN_1}{N_1\gamma_2}=$$

$$=\frac{abc}{p(p-b)(p-c)}=\frac{abc(p-a)}{\triangle^2}=\frac{4R}{r_1}$$

и

$$\frac{A\Gamma_1}{\Gamma_1\alpha_1}+\frac{B\Gamma_1}{\Gamma_1\beta_1}+\frac{C\Gamma_1}{\Gamma_1\gamma_1}=\frac{AN_1}{N_1\alpha}+\frac{BN_1}{N_1\beta_3}+\frac{CN_1}{N_1\gamma_2}=$$

$$=\frac{a}{p}+\frac{b}{p-c}+\frac{c}{p-b}=\frac{ar+br_3+cr_2}{\Delta}.$$

Эти равенства и аналогичныя имъ для чевіанъ, пересѣкающихся въ точкахъ Γ_2 и N_2, Γ_3 и N_3, приводятъ къ слѣдующимъ результатамъ:

$$\left(\frac{A\Gamma}{\Gamma\alpha}\cdot\frac{B\Gamma}{\Gamma\beta}\cdot\frac{C\Gamma}{\Gamma\gamma}\right)\left(\frac{A\Gamma_1}{\Gamma_1\alpha_1}\cdot\frac{B\Gamma_1}{\Gamma_1\beta_1}\cdot\frac{C\Gamma_1}{\Gamma_1\gamma_1}\right)\left(\frac{A\Gamma_2}{\Gamma_2\alpha_2}\cdot\frac{B\Gamma_2}{\Gamma_2\beta_2}\cdot\frac{C\Gamma_2}{\Gamma_2\gamma_2}\right)\left(\frac{A\Gamma_3}{\Gamma_3\alpha_3}\cdot\frac{B\Gamma_3}{\Gamma_3\beta_3}\cdot\frac{C\Gamma_3}{\Gamma_3\gamma_3}\right)=$$

$$=\left(\frac{AN}{N\alpha_1}\cdot\frac{BN}{N\beta_2}\cdot\frac{CN}{N\gamma_3}\right)\left(\frac{AN_1}{N_1\alpha}\cdot\frac{BN_1}{N_1\beta_3}\cdot\frac{CN_1}{N_1\gamma_2}\right)\left(\frac{AN_2}{N_2\alpha_3}\cdot\frac{BN_2}{N_2\beta}\cdot\frac{CN_2}{N_2\gamma_1}\right)\left(\frac{AN_3}{N_3\alpha_2}\cdot\frac{BN_3}{N_3\beta_1}\cdot\frac{CN_3}{N_3\gamma}\right)=$$

$$=\frac{256R^4}{rr_1r_2r_3}=\frac{256R^4}{\Delta^2},$$

$$\left(\frac{A\Gamma}{\Gamma\alpha}\cdot\frac{B\Gamma}{\Gamma\beta}\cdot\frac{C\Gamma}{\Gamma\gamma}\right)+\left(\frac{A\Gamma_1}{\Gamma_1\alpha_1}\cdot\frac{B\Gamma_1}{\Gamma_1\beta_1}\cdot\frac{C\Gamma_1}{\Gamma_1\gamma_1}\right)+$$

$$+\left(\frac{A\Gamma_2}{\Gamma_2\alpha_2}\cdot\frac{B\Gamma_2}{\Gamma_2\beta_2}\cdot\frac{C\Gamma_2}{\Gamma_2\gamma_2}\right)+\left(\frac{A\Gamma_3}{\Gamma_3\alpha_3}\cdot\frac{B\Gamma_3}{\Gamma_3\beta_3}\cdot\frac{C\Gamma_3}{\Gamma_3\gamma_3}\right)=$$

$$=\left(\frac{AN}{N\alpha_1}\cdot\frac{BN}{N\beta_2}\cdot\frac{CN}{N\gamma_3}\right)+\left(\frac{AN_1}{N_1\alpha}\cdot\frac{BN_1}{N_1\beta_3}\cdot\frac{CN_1}{N_1\gamma_2}\right)+$$

$$+\left(\frac{AN_2}{N_2\alpha_3}\cdot\frac{BN_2}{N_2\beta}\cdot\frac{CN_2}{N_2\gamma_1}\right)+\left(\frac{AN_3}{N_3\alpha_2}\cdot\frac{BN_3}{N_3\beta_1}\cdot\frac{CN_3}{N_3\gamma}\right)=$$

$$=4R\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)=\frac{8Rp}{\Delta}=\frac{8R}{r},\ ^{*)}$$

$$\left(\frac{A\Gamma}{\Gamma\alpha}+\frac{B\Gamma}{\Gamma\beta}+\frac{C\Gamma}{\Gamma\gamma}\right)+\left(\frac{A\Gamma_1}{\Gamma_1\alpha_1}+\frac{B\Gamma_1}{\Gamma_1\beta_1}+\frac{C\Gamma_1}{\Gamma_1\gamma_1}\right)+$$

$$+\left(\frac{A\Gamma_2}{\Gamma_2\alpha_2}+\frac{B\Gamma_2}{\Gamma_2\beta_2}+\frac{C\Gamma_2}{\Gamma_2\gamma_2}\right)+\left(\frac{A\Gamma_3}{\Gamma_3\alpha_3}+\frac{B\Gamma_3}{\Gamma_3\beta_3}+\frac{C\Gamma_3}{\Gamma_3\gamma_3}\right)=$$

$$=\left(\frac{AN}{N\alpha_1}+\frac{BN}{N\beta_2}+\frac{CN}{N\gamma_3}\right)+\left(\frac{AN_1}{N_1\alpha}+\frac{BN_1}{N_1\beta_3}+\frac{CN_1}{N_1\gamma_2}\right)+$$

$$+\left(\frac{AN_2}{N_2\alpha_3}+\frac{BN_2}{N_2\beta}+\frac{CN_2}{N_2\gamma_1}\right)+\left(\frac{AN_3}{N_3\alpha_2}+\frac{BN_3}{N_3\beta_2}+\frac{CN_3}{N_3\gamma}\right)=$$

$$=\frac{2p(r+r_1+r_2+r_3)}{\Delta}=\frac{2p(4R+2r)}{\Delta}=\frac{4(2R+r)}{r}.$$

---

*) Ибо $\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{p}{\Delta}+\frac{p-a}{\Delta}+\frac{p-b}{\Delta}+\frac{p-c}{\Delta}=\frac{2p}{\Delta}=\frac{2}{r}$.

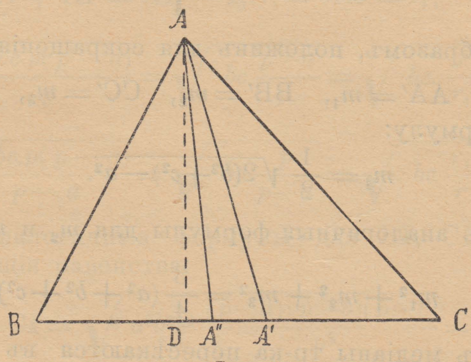
16. Ограничиваясь этими примѣрами, замѣтимъ, что теорема I имѣетъ важное значенiе при опредѣленiи *степени точки* относительно окружности, описанной около треугольника, при посредствѣ чевiанъ, пересѣкающихся въ этой точкѣ. Такъ какъ при этомъ приходится, какъ увидимъ дальше, пользоваться формулами, содержащими не только отношенiя отрѣзковъ чевiанъ, но и самыя величины этихъ прямыхъ, то мы докажемъ сначала извѣстную теорему *Stewart'a*, дающую наиболѣе общiй способъ вычисленiя чевiанъ по даннымъ отрѣзкамъ, образуемымъ ими на сторонахъ треугольника.

Теорема III. *(Stewart). Если AA' есть чевiана тр-ка ABC, то*

$$b^2.BA' + c^2.CA' = \overline{AA'}^2.a + a.BA'.CA',$$

гдѣ a, b, c—стороны тр-ка.

Для доказательства обозначимъ чрезъ D основанiе перпендикуляра изъ A на BC (фиг. 3). Изъ тр-въ $AA'C$ и $AA'B$



Фиг. 3.

слѣдуетъ, что

$$b^2 = \overline{AA'}^2 + \overline{CA'}^2 + 2CA'.DA',$$

$$c^2 = \overline{AA'}^2 + \overline{BA'}^2 - 2BA'.DA'.$$

Умноживъ первое изъ этихъ равенствъ на BA', а второе—на CA', и сложивъ ихъ, получимъ:

$$b^2.BA' + c^2.CA' = \overline{AA'}^2(BA' + CA') + BA'.CA'(BA' + CA');$$

но

$$BA' + CA' = BC = a;$$

слѣдовательно

$$b^2.BA' + c^2.CA' = \overline{AA'}^2.a + a.BA'.CA',$$

что и требовалось доказать.

Необходимо замѣтить, что когда основанiе чевiаны A' находится на продолженiи стороны BC, то меньшiй изъ отрѣзковъ

BA′ и CA′, служащій продолженіемъ стороны BC, согласно замѣчанію къ теоремѣ I, входитъ въ это равенство какъ отрицательный, т. е. со знакомъ *минусъ*.

17. Въ видѣ примѣровъ, опредѣлимъ длины нѣкоторыхъ извѣстныхъ чевіанъ.

Положимъ, что чевіаны AA′, BB′, CC′ суть *медіаны* тр-ка. Такъ какъ въ этомъ случаѣ

$$BA' = CA' = \frac{a}{2},$$

то, по предыдущей теоремѣ,

$$b^2 \cdot \frac{a}{2} + c^2 \cdot \frac{a}{2} = \overline{AA'}^2 a + \frac{a^3}{4},$$

откуда

$$\overline{AA'}^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}.$$

Такимъ образомъ, положивъ для сокращенія

$$AA' = m_1, \quad BB' = m_2, \quad CC' = m_3,$$

получаемъ формулу:

$$m_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}.$$

Составивъ аналогичныя формулы для m_2 и m_3, увидимъ, что

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

Такъ какъ медіаны тр-ка пересѣкаются въ его ортоцентрѣ G такъ, что

$$\frac{AG}{m_1} = \frac{BG}{m_2} = \frac{CG}{m_3} = \frac{2}{3},$$

то изъ этого равенства слѣдуетъ, что

$$\overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 = \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

18. Положимъ еще, что

$$AA' = l_1, \quad BB' = l_2, \quad CC' = l_3$$

суть внутреннія биссектрисы тр-ка. Такъ какъ при этомъ

$$\frac{BA'}{CA'} = \frac{c}{b},$$

то

$$BA' = \frac{ac}{b+c} \text{ и } CA' = \frac{ab}{b+c};$$

поэтому, по послѣдней теоремѣ,

$$b^2\cdot\frac{ac}{b+c}+c^2\cdot\frac{ab}{b+c}=l_1{}^2.a+\frac{a^3bc}{(b+c)^2},$$

откуда

$$l_1{}^2=bc-\frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$

и

$$l_1=\frac{2}{b+c}\sqrt{bc.p(p-a)}.$$

При помощи этой формулы и пропорцій (12)

$$\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{IA}'}=\frac{\mathrm{AI}_1}{\mathrm{I}_1\mathrm{A}'}=\frac{b+c}{a},$$

принимая во вниманіе, что

$$\mathrm{AI}+\mathrm{IA}'=\mathrm{AI}_1-\mathrm{I}_1\mathrm{A}_1=\mathrm{AA}'=l_1,$$

находимъ, что

$$\mathrm{AI}=\frac{\sqrt{bc.p(p-a)}}{p}=\sqrt{bc\frac{p-a}{p}}=\sqrt{bc.\frac{r}{r_1}}$$

и

$$\mathrm{AI}_1=\frac{\sqrt{bc.p(p-a)}}{p-a}=\sqrt{bc\frac{p}{p-a}}=\sqrt{bc\frac{r_1}{r}}.$$

Составивъ аналогичныя формулы для BI, CI и BI_2, CI_3, получимъ слѣдующія равенства:

$$\mathrm{AI.BI.CI}=\sqrt{a^2b^2c^2\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}}=$$

$$=\frac{abc}{p^2}\triangle=\frac{4\mathrm{R}\triangle^2}{p^2}=4\mathrm{R}r^2;$$

$$\mathrm{AI}_1.\mathrm{BI}_2.\mathrm{CI}_3=\sqrt{a^2b^2c^2\frac{p^3}{(p-a)(p-b)(p-c)}}=$$

$$=\frac{abc}{\triangle}p^2=\frac{4\mathrm{R}\triangle}{\triangle}p^2=4\mathrm{R}p^2.$$

19. Обозначивъ черезъ

$$\mathrm{AA}''=l'_1,\quad \mathrm{BB}''=l'_2,\quad \mathrm{CC}''=l'_3$$

внѣшнія биссектрисы тр-ка, на основаніи той же пропорціи

$$\frac{\mathrm{BA}''}{\mathrm{CA}''}=\frac{c}{b},$$

получимъ равенства:

$$\mathrm{BA}''=\frac{ac}{b-c}\ \text{и}\ \mathrm{CA}''=\frac{ab}{b-c},$$

вслѣдствіе которыхъ, по той же теоремѣ, получимъ уравненіе

$$-b^2\frac{ac}{b-c}+c^2\frac{ab}{b-c}=l'^2_1.a-\frac{a^3bc}{(b-c)^2},$$

изъ котораго находимъ, что

$$l'^2_1=-bc+\frac{a^2bc}{(b-c)^2}$$

и

$$l'_1=\frac{2}{b-c}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}.$$

По аналогіи съ этой формулой

$$l'_2=\mathrm{BB}''=\frac{2}{a-c}\sqrt{ac(p-a)(p-c)}$$

и

$$l'_3=\mathrm{CC}''=\frac{2}{a-b}\sqrt{ab(p-a)(p-b)};$$

такъ какъ эти прямыя дѣлятся въ I_1 такъ, что (13)

$$\frac{\mathrm{BI}_1}{\mathrm{I}_1\mathrm{B}''}=\frac{a-c}{b}\ \text{и}\ \frac{\mathrm{CI}_1}{\mathrm{I}_1\mathrm{C}''}=\frac{a-b}{c},$$

то

$$\mathrm{BI}_1=\frac{\sqrt{ac(p-a)(p-c)}}{p-a}=\sqrt{ac\frac{p-c}{p-a}}=\sqrt{ac\frac{r_1}{r_3}}$$

и

$$\mathrm{CI}_1=\frac{\sqrt{ab(p-a)(p-b)}}{p-a}=\sqrt{ab\frac{p-b}{p-a}}=\sqrt{ab\frac{r_1}{r_2}}.$$

Изъ найденныхъ выраженій для AI_1, BI_1, CI_1 слѣдуетъ, что

$$\mathrm{AI}_1.\mathrm{BI}_1.\mathrm{CI}_1=abc\sqrt{\frac{r_1^3}{rr_2r_3}}=4\mathrm{R}r_1^2.$$

Аналогичныя равенства имѣютъ мѣсто и для произведеній $\mathrm{AI}_2.\mathrm{BI}_2.\mathrm{CI}_2$ и $\mathrm{AI}_3\,\mathrm{BI}_3.\mathrm{CI}_3$.

20. Найдемъ еще длину чевіаны $\mathrm{A}\alpha$, проходящей черезъ точку Жергона Г. Въ этомъ случаѣ (14)

$$\mathrm{B}\alpha=p-b\ \text{и}\ \mathrm{C}\alpha=p-c;$$

поэтому, по теоремѣ Stewart'a,

$$b^2(p-b)+c^2(p-c)=\overline{\mathrm{A}\alpha}^2.a+a(p-b)(p-c),$$

откуда

$$\overline{\mathrm{A}\alpha}^2=\frac{b^2(p-b)+c^2(p-c)}{a}-(p-b)(p-c).$$

(Продолженіе слѣдуетъ).

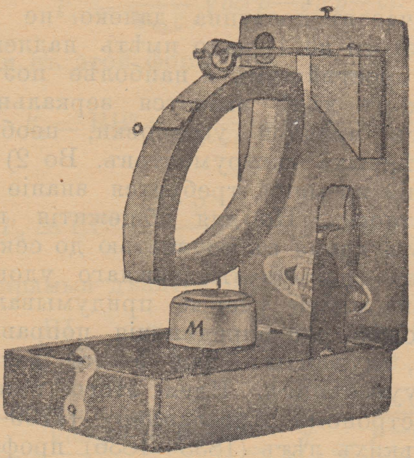
Солнечный двуугольникъ.

Н. Адамовича.

Знаніе болѣе или менѣе точнаго времени служитъ повседневною заботою не только каждаго астронома или мореплавателя, но и всякаго образованнаго человѣка. Между тѣмъ операція повѣрки часовъ доступна далеко не каждому. Дѣло въ томъ, что для этого во 1) надо имѣть надлежащіе инструменты, изъ которыхъ простѣйшимъ и наиболѣе поэтому употребительнымъ въ морскомъ дѣлѣ является зеркальный секстантъ, ибо онъ не требуетъ прочной установки, необходимой для всѣхъ другихъ угломѣрныхъ инструментовъ. Во 2) для инструментальнаго опредѣленія времени требуется знаніе астрономіи и въ 3) нѣкоторая опытность. Но для общежитія нѣтъ настоятельной надобности знать время съ точностью до секундъ. Погрѣшность, не превосходящая полминуты, каждаго удовлетворяетъ вполнѣ. Поэтому издавна многіе ученые придумывали различные общедоступные способы для опредѣленія поправки часовъ. Однимъ изъ приборовъ, служащихъ для этого, является описываемый солнечный двуугольникъ. Идея этого прибора принадлежитъ германскому астроному Аргеландеру (1799—1875), бывшему въ теченіе нѣсколькихъ лѣтъ (1833—1836) профессоромъ Гельсингфорскаго университета; но опубликована она была его ученикомъ докторомъ Крюгеромъ (директ. обсерват. въ Килѣ). Въ представленіи Аргеландера и Крюгера этотъ приборъ имѣлъ форму треугольника, въ какомъ видѣ онъ и былъ первоначально осуществленъ бывшимъ механикомъ Пулковской обсерваторіи В. Гербстомъ. Но точность наблюденій была достигнута значительно большая, когда Гербстъ далъ этому прибору устройство, совершенно понятное изъ прилагаемаго рисунка. Приборъ состоитъ изъ двухъ дугообразныхъ деревянныхъ пластинокъ, принадлежащихъ кругу радіуса 57,2 миллим. и соединенныхъ между собою. На внутренней сторонѣ одной дуги нанесена миллиметровая шкала. На другой дугѣ имѣется круглое отверстіе и подвѣсъ. Двуугольникъ подвѣшивается къ пластинкѣ, укрѣпленной на крышкѣ ящика, въ которомъ приборъ хранится. Чтобы двуугольникъ оставался въ вертикальной плоскости, къ дугѣ со шкалой подвѣшивается грузикъ *М.* Когда желательно произвести повѣрку часовъ солнечнымъ двуугольникомъ, устанавливаютъ его утромъ около 8 или 9 часовъ и поворачиваютъ подставку такъ, чтобы лучи солнца, проходя черезъ отверстіе въ верхней дугѣ, падали на шкалу. Тогда тамъ появляется круглое изображеніе солнца, которое, по мѣрѣ увеличенія высоты солнца, будетъ медленно опускаться. Когда этотъ движущійся кружокъ коснется своимъ нижнимъ краемъ ближайшаго къ нему дѣленія, надо быстро посмотрѣть на часы и замѣтить ихъ показаніе, т. е. число минутъ и секундъ, а также номеръ того дѣленія, котораго касается кружокъ во время наблюденія.

Пусть 5 февраля въ С.-Петербургѣ наблюдалось прохожденіе нижняго края кружка черезъ дѣленія 15 и 16-ое въ 9 ч. 21 м. 15 с. и въ 9 ч. 41 м. 45 с.

Послѣ полудня слѣдимъ, когда свѣтлый кружокъ, поднимаясь, опять подойдетъ къ тѣмъ же дѣленіямъ. Пусть кружокъ



касался 15 дѣленія въ 2 ч. 12 м. 50 с., а 16-го—въ 1 ч. 52 м. 10 с. Вычислимъ половину промежутка между утреннимъ и вечернимъ моментами наблюденія и найдемъ для 15-го дѣленія 2 ч. 25 м. 47,5 с., а для 16-го 2 ч. 5 м. 12,5 с.

Далѣе, надо обратиться къ таблицѣ поправокъ, даваемыхъ уравненіемъ времени. Для 5 февраля возьмемъ + 14 м. Теперь только остается къ утреннему моменту прибавить найденныя числа, увеличенныя на 14 м. Получаемъ:

Для 15-го дѣленія.	Для 16-го дѣленія.
9 ч. 21 м. 15 с.	9 ч. 41 м. 45 с.
+ 2 25 47,5	+ 2 5 12,5
+ 14	+ 14
12 ч. 1 м. 2,5 с.	12 ч. 0 м. 57,5 с.

Среднее изъ обоихъ опредѣленій даетъ 12 ч. 1 м. 0 с., т. е. наши часы были ровно на одну минуту впереди.

Такимъ образомъ, единственное, что надо имѣть для опредѣленія этимъ приборомъ поправки часовъ,—это таблицу, которую можно найти въ любомъ учебникѣ космографіи.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“ и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 783 (4 сер.). Діаметры описаннаго около треугольника ABC круга, проходящіе черезъ вершины A, B, C, пересѣкаютъ противоположныя стороны соотвѣтственно въ точкахъ A', B', C'. Доказать равенство

$$R=\frac{1}{6}\left(\frac{a^2}{AA'}+\frac{b^2}{BB'}+\frac{c^2}{CC'}\right),$$

гдѣ a, b, c—стороны треугольника, R—радіусъ круга описаннаго.

Д. Ефремовъ (Иваново-Вознесенскъ).

№ 784 (4 сер.). Черезъ точку A, взятую на окружности даннаго круга радіуса R, проводятъ діаметръ AB; изъ той же точки A проводятъ хорду AA_1, равную сторонѣ правильнаго вписаннаго треугольника, изъ точки A_1 — хорду A_1A_2, равную сторонѣ вписаннаго квадрата, такъ что точки A_2 и B лежатъ по разныя стороны прямой AA_1, изъ точки A_2—хорду A_2A_3, равную сторонѣ правильнаго вписаннаго пятиугольника (при томъ такъ, что точки A_3 и A лежатъ по разныя стороны прямой A_1A_2, и т. д.,..., наконецъ, изъ точки A_{n-1} проводятъ хорду $A_{n-1}A_n$, равную сторонѣ правильнаго вписаннаго $n+2$-угольника (такъ, что A_n и A_{n-3} лежатъ по разныя стороны прямой $A_{n-2}A_{n-1}$). Найти предѣлъ, къ которому стремится длина дуги BA_n при безконечномъ возрастаніи числа n.

В. Шлыгинъ (ст. Урюпинская).

№ 785 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$x^3+y^3+z^3=\frac{73}{8},$$

$$xy+xz+yz=x+y+z,$$

$$xyz=1.$$

Н. Пѣтуховъ (Екатеринбургъ).

№ 786 (4 сер.). Доказать, что при n цѣломъ и положительномъ выраженіе

$$\frac{\left\{2[3.5.17.257\ldots(2^{2^h}+1)]\right\}^{2^n}+1}{2+3.5.17\ldots(2^{2^n}+1)}$$

равно цѣлому числу.

А. Брюхановъ (Иркутскъ).

№ 787 (4 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^4+ax^3\sqrt{3}+a^4=0.$$

(Заимств.).

№ 788 (4 сер.). Для опредѣленія внутренняго сопротивленія неполяризующагося гальваническаго элемента соединяютъ n совершенно тожественныхъ ему элементовъ послѣдовательно и столько же такихъ же элементовъ—параллельно; затѣмъ положительные полюсы обѣихъ баттарей соединяются проволокой ничтожно малаго сопротивленія, а отрицательные—черезъ реостатъ. Включивъ изъ послѣдняго въ цѣпь w омовъ, наблюдаютъ отсутствіе тока. Чему равно искомое внутреннее сопротивленіе?

Л. Ямпольскій (Braunschweig).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 661 (4 сер.). *Рѣшить систему уравненій:*

$$y^n + z^{-n} = a,$$

$$z^n + x^{-n} = b,$$

$$x^n + y^{-n} = c.$$

Полагая $x^n = t$, $y^n = u$, $z^n = v$ (1), приводимъ данную систему къ виду:

$$u + \frac{1}{v} = a \quad (2), \quad v + \frac{1}{t} = b \quad (3), \quad t + \frac{1}{u} = c \quad (4).$$

Записавъ уравненія (2) и (3) въ видѣ $a - u = \frac{1}{v}$, $b - \frac{1}{t} = v$ и затѣмъ перемноживъ ихъ, получимъ $(a-u)\left(b - \frac{1}{t}\right) = 1$ (5). Подставивъ въ равенство (5) значеніе u изъ равенства (4), получимъ $\left(a - \frac{1}{c-t}\right)\left(b - \frac{1}{t}\right) = 1$, откуда, послѣ обычныхъ преобразованій, находимъ:

$$(ab-1)t^2 + (b+c-a-abc)t + (ac-1) = 0 \quad (6).$$

Изъ уравненія (6) получимъ

$$t = \frac{abc+a-b-c \pm\sqrt{(abc+a-b-c)^2-4(ab-1)(ac-1)}}{2(ab-1)} \quad (7).$$

Подставивъ значеніе t въ равенство (3), опредѣляемъ v; тогда, называя выраженіе $(abc+a-b-c)^2-4(ab-1)(ac-1)$ черезъ R, имѣемъ:

$$v = b - \frac{2(ab-1)}{abc+a-b-c \pm\sqrt{R}} = b - \frac{2(ab-1)\left[abc + a-b-c \mp\sqrt{R}\,\right]}{(abc+a-b-c)^2-R} =$$

$$= b - \frac{2(ab-1)\left[abc + a-b-c \mp\sqrt{R}\,\right]}{4(ab-1)(ac-1)},$$

или, сокращая на $2(ab-1)$, вычитая и дѣлая приведеніе въ числителѣ,

$$v = \frac{abc-a-b+c\pm\sqrt{R}}{2(ac-1)} \quad (8).$$

Выраженіе R можно представить въ одномъ изъ видовъ:

$$R = (abc+a-b-c)^2-4(ab-1)(ac-1) = (abc-a+b-c)^2-4(bc-1)(ab-1) =$$

$$= (abc-a-b+c)^2-4(bc-1)(ac-1) = [abc-(a+b+c)]^2-4 \quad (9).$$

Записавъ въ формулѣ (8) R въ видѣ (см. (9)) $(abc-a-b+c)^2-4(bc-1)(ac-1)$, подставивъ значеніе v (см. (8)) въ равенство (2), опредѣляя u и освобождаясь отъ ирраціональности въ знаменателѣ, сокращаемъ на $2(ac-1)$ и, послѣ вычитанія и приведенія въ числителѣ, находимъ

$$u=\frac{abc-a+b-c\pm\sqrt{R}}{2(bc-1)} \quad (10).$$

Изъ формулъ ((7), (8), (10)) (см. (1)), имѣемъ:

$$x=\sqrt[n]{\frac{abc+a-b-c\pm\sqrt{R}}{2(ab-1)}}, \qquad y=\sqrt[n]{\frac{abc-a+b-c\pm\sqrt{R}}{2(bc-1)}},$$

$$z=\sqrt[n]{\frac{abc-a-b+c\pm\sqrt{R}}{2(ac-1)}},$$

гдѣ (см. (9)) $R=[abc-(a+b+c)]^2-4$ (см. (9)) и гдѣ передъ радикаломъ $\sqrt{R}$ надо взять вездѣ или верхній или нижній знаки. Полученныя нами рѣшенія системы выведены въ томъ предположеніи, что

$$ab-1\neq 0, \quad bc-1\neq 0, \quad ac-1\neq 0 \quad (11).$$

Если изъ трехъ количествъ $ab-1$, $bc-1$, $ac-1$ только одно, напр., $bc-1$, равно 0, т. е. $bc-1=0$, $ab-1\neq 0$, $ac-1\neq 0$, (12), то выраженіе (см. (9)) $R=(abc-a-b+c)^2-4(bc-1)(ac-1)$ обращается въ точный квадратъ; въ этомъ случаѣ $\sqrt{R}=abc-a-b+c$, и для t (см. (7)) получаются два раціональныхъ рѣшенія, которыя, принимая во вниманіе равенство $bc-1=0$, можно представить въ видѣ:

$$t_1=\frac{a-b}{ab-1} \quad (13), \qquad t_2=\frac{1}{b}=c \quad (14).$$

Подставляя значеніе $t_2=c$ (см. (14)) въ равенство (4), приходимъ къ невозможному равенству $\frac{1}{u}=0$; такимъ образомъ рѣшеніе (14) придется отбросить.

Подставляя значеніе t въ равенства (3) и (4) и принимая во вниманіе, что $bc=1$, находимъ $u_1=\frac{b(1-ab)}{1-b^2}$, $v_1=\frac{1-b^2}{a-b}$ (15). При наличности условій (12) $a\neq b$, такъ какъ при $a=b$ мы имѣли бы $ac-1=bc-1=0$, что противорѣчитъ неравенству $ac-1\neq 0$; слѣдовательно, (см. (13), (15)) если $b^2\neq 1$, то для t, u, v получаются рѣшенія, отличныя отъ нуля, и въ этомъ случаѣ система имѣетъ рѣшенія $x=\sqrt{\frac{a-b}{ab-1}}$, $y=\sqrt{\frac{b(1-ab)}{1-b^2}}$, $z=\sqrt{\frac{1-b^2}{a-b}}$.

Если же $b^2=1$, то $v_1=0$, u_1 теряетъ всякій смыслъ (см. (15)), и система не имѣетъ рѣшеній (см. (2), (4)). Если два изъ количествъ $ab-1$, $bc-1$, $ac-1$ равны нулю, а третье не равно нулю, напримѣръ, $ab-1$, $ac-1=0$, $bc-1\neq 0$ (16), то равенство (6) приметъ видъ $(b+c-a-abc)t=0$, или (см. (16)) $[c-a+b(1-ac)]t=(c-a)t=\left(\frac{1}{a}-a\right)t=\frac{1-a^2}{a}\cdot t=0$ (17). При наличности условій (16) $a^2\neq 1$, такъ какъ при $a^2=1$, мы имѣли бы $a=\pm 1$, откуда (см. (16)) $b=c=\pm 1$, $bc-1=(\pm 1)^2-1=0$, что противно условію; слѣдовательно (см. (17)) $t=0$, и система (см. (3)) не имѣетъ рѣшеній. Если же $ab-1=bc-1=$ $=ac-1=0$, то $a=b=c=\pm 1$. Равенства (2), (3), (4) принимаютъ видъ $u+\frac{1}{v}=1$, $v+\frac{1}{t}=1$, $t+\frac{1}{u}=1$, (18), или $u+\frac{1}{v}=-1$, $v+\frac{1}{t}=-1$,

$t+\frac{1}{u}=-1$ (19). Изъ системы (18) имѣемъ $v=1-\frac{1}{t}$, $u=\frac{1}{1-t}$; подставляя эти значенія u и v въ первое изъ равенствъ (18), мы видимъ, что при произвольномъ t, не равномъ однако 0 или 1, они удовлетворяютъ ему. Итакъ, въ этомъ случаѣ $x=\sqrt[n]{t}$, $y=\sqrt[n]{\frac{1}{1-t}}$, $z=\sqrt[n]{1-\frac{1}{t}}$, гдѣ $t\neq 0$, $t\neq 1$. Точно также система (19) даетъ $x=\sqrt[n]{t}$, $y=\sqrt[n]{\frac{-1}{1+t}}$, $z=\sqrt[n]{-1-\frac{1}{t}}$, гдѣ $t\neq 0$, $t\neq -1$.

Э. Лейнъкъ (Рига); *С. Конюховъ* (Никитовка); *А. Варенцовъ* (Ростовъ н/Д); *Н. Доброгаевъ* (Немировъ); *А. Саркисянъ* (Тифлисъ); *Г. Лебедевъ* (Харьковъ);

№ 674 (4 сер.). *Доказать справедливость тожества:*

$$(2^{2^0}+1)(2^{2^1}+1)(2^{2^2}+1)\ldots(2^{2^{n-1}}+1)(2^{2^n}+1)=2^{2^{n+1}}-1.$$

Полагая въ равенствѣ

$$2^{2^{m+1}}-1=\left(2^{2^m}\right)^2-1=\left(2^{2^m}+1\right)\left(2^{2^m}-1\right)$$

$m=0, 1, 2, \ldots, n-1, n$ получимъ

$$\begin{aligned}
&\left(2^{2^0}+1\right)\left(2^{2^0}-1\right)=\left(2^{2^0}+1\right).1=2^{2^1}-1,\\
&\left(2^{2^1}+1\right)\left(2^{2^1}-1\right)=2^{2^2}-1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\qquad\qquad (2).\\
&\left(2^{2^{n-1}}+1\right)\left(2^{2^{n-1}}-1\right)=2^{2^n}-1,\\
&\left(2^{2^n}+1\right)\left(2^{2^n}-1\right)=2^{2^{n+1}}-1.
\end{aligned}$$

Перемножая равенства (2) и сокращая обѣ части на произведеніе $\left(2^{2^1}-1\right)\left(2^{2^1}-1\right)\ldots\left(2^{2^n}-1\right)$, получимъ:

$$\left(2^{2^0}+1\right)\left(2^{2^1}+1\right)\ldots\left(2^{2^n}+1\right)=2^{2^{n+1}}-1.$$

А. Турчаниновъ (Брестъ); *Г. Лебедевъ* (Харьковъ); *Н. Доброгаевъ* (Немировъ); *Э. Лейнъкъ* (Рига).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.

ОТКРЫТА ПОДПИСКА НА
ИЗВѢСТІЯ
МОСКОВСКАГО
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАГО ИНСТИТУТА.

Годъ XII.
1906.

Извѣстія выходятъ **четырьмя** книгами въ годъ, составляющими не менѣе 35 листовъ текста in 8°.

ПРОГРАММА ИЗВѢСТІЙ:

Оффиціальный отдѣлъ.

I. Правительственныя распоряженія, касающіяся М. С. Х. Института.

II. Постановленія Совѣта Института и относящіяся къ нимъ приложенія: а) программы и планы лекцій и практическихъ занятій въ Институтѣ; б) отчеты объ экскурсіяхъ, ежегодно совершаемыхъ студентами Института подъ руководствомъ профессоровъ, преподавателей и пр.; в) работы коммиссій, назначаемыхъ Совѣтомъ Института для разслѣдованія различныхъ вопросовъ и г) отчеты о командировкахъ членовъ совѣта и другихъ лицъ, служащихъ въ Институтѣ.

III. Нѣкоторые изъ журналовъ засѣданій Сельскохозяйственнаго комитета, состоящаго при Институтѣ, а именно тѣ, которые имѣютъ особенное значеніе для учебной и ученой дѣятельности Института.

IV. Годичный отчетъ о состояніи Института.

V. Каталоги и описанія библіотеки, разнообразныхъ коллекцій и учебныхъ пособій, находящихся при Институтѣ.

Неоффиціальный отдѣлъ.

I. Труды профессоровъ, преподавателей, ассистентовъ, студентовъ Института и постороннихъ лицъ, а именно:
а) естественно-историческіе и
б) статистико-экономическіе (преимущественно касающіеся изученія русскаго народнаго хозяйства).

Сюда входятъ какъ отдѣльныя самостоятельныя изслѣдованія, такъ и совмѣстныя работы, исполненныя въ лабораторіяхъ, кабинетахъ, на опытномъ полѣ или на предполагаемой опытной станціи, пасѣкѣ, въ лѣсной дачѣ, огородѣ, питомникѣ и пр.

II. Критическія и библіографическія статьи о выдающихся произведеніяхъ народнохозяйственной и естественноисторической литературы.

III. Метеорологическія наблюденія, произведенныя на обсерваторіи Института.

Работы могутъ сопровождаться рисунками, таблицами, чертежами, діаграммами и нр. и, по желанію автора, краткимъ резюме на какомъ-либо иностранномъ языкѣ (резюме должно быть составлено самимъ авторомъ и прислано въ редакцію одновременно со статьею). Оглавленія каждой книги Извѣстія, кромѣ русскаго языка, печатается еще на французскомъ языкѣ.

ПОДПИСКА принимается въ канцеляріи Московскаго Сельскохозяйственнаго Института и въ книжн. магазин. Карбасникова (Москва, Варшава, Вильна, С.-Петербургъ) и „Трудъ" (Москва, Тверская).

ПОДПИСНАЯ ЦѢНА въ годъ, за четыре книги, **5 руб.**; для студентовъ высшихъ учебныхъ заведеній **2 руб 50 к.**; цѣна отдѣльной книги **1 р. 50 коп**; отдѣльные оттиски статей естественноисторическихъ и статистико-экономическихъ высылаются названными книжными магазинами наложеннымъ платежемъ по разсчету **20 коп.** за листъ.

Редакторы: { **С. И. Ростовцевъ.** / **Д. Н. Прянишниковъ.**