№ 416.

ВѢСТНИКЪ

ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Привать-Доцента В. Ф. Кагана.

XXXV-го Семестра № 8-й.

ОДЕССА.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.
1906.

MATHESIS

Издательство научныхъ и популярно-научныхъ сочиненій изъ области физико-математическихъ наукъ.

ВЫШЛИ ИЗЪ ПЕЧАТИ:

1. Г. АБРАГАМЪ, проф. **СБОРНИКЪ ЭЛЕМЕНТАРНЫХЪ ОПЫТОВЪ ПО ФИЗИКѢ**, составленный при участіи многихъ профессоровъ и преподавателей физики. Переводъ съ французскаго подъ редакціей Привать-доцента *Б. П. Вейнберга.* Часть I: Работы въ мастерской. Различные рецепты—Геометрія. Механика—Гидростатика. Гидродинамика. Капиллярность Теплота—Числовыя таблицы.
Ученымъ комитетомъ допущено въ ученическія библіотеки среднихъ учебныхъ заведеній, учительскихъ семинарій и городскихъ, по Положенію 31 мая 1872 г., училищъ, а равно и въ безплатныя народныя читальни и библіотеки.
XVI+272 стр. Со многими (свыше 300) рисунками. Цѣна 1 р. 50 к.

2. Г. АБРАГАМЪ, проф. **СБОРНИКЪ ЭЛЕМЕНТАРНЫХЪ ОПЫТОВЪ ПО ФИЗИКѢ.** Переводъ съ французскаго подъ редакціей Приватъ-доцента *Б. П. Вейнберга.* Часть II: Звукъ—Свѣтъ—Электричество—Магнитизмъ.
LXXV+434 стр. Со многими (свыше 400) рисунками. Цѣна 2 р. 75 к.

3. С. АРРЕНІУСЪ, проф. **ФИЗИКА НЕБА.** Разрѣшенный авторомъ и дополненный по его указаніямъ переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей Приватъ-доцента *А. Р. Орбинскаго.* Содержаніе: Неподвижныя звѣзды—Солнечная система—Солнце—Планеты, ихъ спутники и кометы—Космогонія.
VIII+250 стр. Съ 66 черными и 2 цвѣтными рисунками въ текстѣ и 1 черной и 1 цвѣтной отдѣльными таблицами. Цѣна 2 руб.
Ученымъ Комитетомъ М. Н. П. допущено въ ученическія, старшаго возраста, библіотеки среднихъ учебныхъ заведеній, а равно и въ безплатныя народныя библіотеки и читальни.

4. **УСПѢХИ ФИЗИКИ**, сборникъ статей о важнѣйшихъ открытіяхъ послѣднихъ лѣтъ въ общедоступномъ изложеніи. Подъ редакціей „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики“. Содержаніе: *Винеръ*, Расширеніе нашихъ чувствъ—*Пильчиковъ*, Радій и его лучи—*Дебіернъ*, Радій и радіоактивность—*Рихарцъ*, Электрическія волны—*Слаби*, Телеграфированіе безъ проводовъ—*Шмидтъ*, Задача объ элементарномъ веществѣ (основанія теоріи электроновъ).
IV+157 стр. Съ 41 рисункомъ и 2 таблицами. Цѣна 75 коп.

5. АУЭРБАХЪ, проф. **ЦАРИЦА МІРА И ЕЯ ТѢНЬ.** Общедоступное изложеніе основаній ученія объ *энергіи и энтропіи.* Пер. съ нѣмецкаго. Съ предисловіемъ *Ш. Э. Гильома,* Вице-Директора Международнаго Бюро Мѣръ и Вѣсовъ.
VIII+56 стр. Цѣна 50 к.

6. С. НЬЮКОМЪ, проф. **АСТРОНОМІЯ ДЛЯ ВСѢХЪ.** Переводъ съ англійскаго. Съ предисловіемъ Приватъ-доцента *А. Р. Орбинскаго.*
XXIV+285 стр. Съ портретомъ Автора, 64 рисунками въ текстѣ и 1 таблицей. Цѣна 1 р. 50 к.

7. Г. ВЕБЕРЪ и І. ВЕЛЬШТЕЙНЪ. **ЭНЦИКЛОПЕДІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ. Томъ I. Энциклопедія элементарной алгебры,** обраб. проф. *Веберомъ.* Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей Приватъ-доцента *В. Ф. Кагана.* Книга I. **Основанія ариѳметики**, гл. I—X. Книга II. **Алгебра**, гл. XI—XIX. Книга III. **Анализъ**, гл. XX—XXVI. **Выпускъ I.** Стр. 1—256. Главы I—XII. **Цѣна 1 р. 50 к.**
Выпускъ II печатается.

8. Дж. ПЕРРИ. Проф. **ВРАЩАЮЩІЙСЯ ВОЛЧОКЪ.** Публичная лекція съ 63 рисунками. Переводъ съ англійскаго. VII+96 стр. **Цѣна 60 к.**

ПЕЧАТАЮТСЯ:

1. К. ШЕЙДЪ. Проф. **ПРОСТЫЕ ХИМИЧЕСКІЕ ОПЫТЫ для юношества.** Переводъ съ нѣмецкаго, подъ редакціей Лаборанта Новороссійскаго Университета *Е. С. Ельчанинова.*

2. ДЕДЕКИНДЪ. Проф. **НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ИРРАЦІОНАЛЬНЫЯ ЧИСЛА.** Переводъ съ нѣмецкаго Приватъ-доцента *С. О. Шатуновскаго.* Съ приложеніемъ его статьи: **„Доказательство существованія трансцендентныхъ чиселъ“.**

СЪ ТРЕБОВАНІЯМИ ОБРАЩАТЬСЯ:

Одесса, Типографія М. Шпенцера, ул. Новосельскаго 66.

XXXV Сем. № 8.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
Элементарной Математики.

№ 416.

Отношеніе физической химіи къ физикѣ и химіи.

Проф. Вантъ-Гоффа.

Перевелъ I. Л.

(Читано на международномъ конгрессѣ наукъ и искусствъ).

Согласно намѣченному плану я имѣю въ виду разсмотрѣть общіе принципы и основныя понятія, которыя связываютъ физическую химію со смежными отраслями знанія, и при этомъ сдѣлать краткій обзоръ развитія этой науки.

Начнемъ съ опредѣленія: физическую химію я опредѣляю какъ науку, ставящую себѣ цѣлью разработку химіи путемъ примѣненія къ ней данныхъ физики. Исходя изъ этого опредѣленія, я могу ограничиться разсмотрѣніемъ отношеній физической химіи къ двумъ наукамъ, которыя она объединяетъ: къ химіи и къ физикѣ.

Чтобы остаться вѣрнымъ цѣлямъ настоящаго засѣданія, я долженъ обратить ваше вниманіе лишь на самыя общія идеи; въ виду этого я еще болѣе ограничу матеріалъ и остановлюсь на двухъ пунктахъ, соотвѣтственно двумъ основнымъ вопросамъ химіи:

1) чего достигла физическая химія въ вопросѣ о веществѣ?

2) что сдѣлано въ физической химіи по вопросу о сродствѣ?

Нижеслѣдующая маленькая табличка поможетъ намъ получить отвѣты на эти вопросы, такъ какъ она представляетъ обзоръ развитія нашей науки, каковой обзоръ, какъ мы уже сказали, также входитъ въ планъ настоящей лекціи.

I. Идеи о веществѣ.

1. Лавуазье, Дальтонъ (1808).
2. Гей-Люссакъ, Авогадро (1811).
3. Дюлонгъ, Пти, Митчерлихъ (1820).
4. Фарадей (1832).
5. Бунзенъ, Кирхгоффъ (1861).
6. Періодическая система (1869).
7. Пастеръ (1853), стереохимія (1874).
8. Рауль, Арреніусъ (1886—7).
9. Радіоактивность (Бекерель, Кюри).

II. Понятія о сродствѣ.

1. Бертоле, Гульдбергъ, Вааге (1867).
2. Берцеліусъ, Гельмгольцъ (1887).
3. Митчерлихъ, Шпрингъ (1904).
4. Девилль, Дебрэ, Бертло.
5. Томсонъ, Бертело (1865).
6. Горстманнъ, Джиббсъ, Гельмгольцъ.

I. Физическая химія и наши представленія о веществѣ.

Понятія объ атомахъ и молекулахъ. Въ общемъ можно сказать, что первоначально приложенія физическихъ свѣдѣній, въ цѣляхъ развитія нашихъ представленій о веществѣ, заключались главнымъ образомъ въ примѣненіи физическихъ методовъ и инструментовъ къ изученію свойствъ вещества. Это замѣчаніе относится преимущественно къ первому періоду развитія физической химіи.

Обозрѣвая исторію химіи, мы приходимъ къ заключенію, что однимъ изъ первыхъ рѣшающихъ шаговъ этой науки является изученіе физическаго свойства тѣлъ—вѣса, и примѣненіе для этой цѣли физическаго прибора—вѣсовъ. На этомъ построено обновленіе химіи Лавуазье; основными законами химіи о постоянствѣ вѣсовъ, о постоянныхъ и кратныхъ отношеніяхъ мы также обязаны вѣсовому изученію химическихъ превращеній. Дальтонъ объединилъ эти положенія помощью плодотворнаго, хотя и гипотетическаго представленія объ атомѣ, согласно которому, какъ всѣмъ вамъ извѣстно, каждый элементъ состоитъ изъ маленькихъ неизмѣнныхъ частичекъ, одинаковыхъ въ одномъ и томъ же элементѣ, но отличныхъ другъ отъ друга въ разныхъ элементахъ.

Подобно тому какъ изученіе вѣса повело къ представленію объ атомѣ, точно также изученіе другого физическаго свойства—объема и плотности—породило представленіе о молекулѣ. Понятіе объ этихъ молекулахъ, которыя можно разсматривать, какъ собранія атомовъ, является необходимымъ слѣдствіемъ, вытекающимъ изъ представленій Дальтона; двойное соединеніе можетъ, однако, содержать молекулы, составленныя какъ изъ двухъ, такъ и изъ двадцати атомовъ. Врядъ ли мнѣ теперь нужно напоминать вамъ, что Гей-Люссакъ и въ особенности Авогадро, изучая объемныя отношенія газовъ въ химическихъ соединеніяхъ, пришли къ заключенію, что при одинаковыхъ условіяхъ молекулы всѣхъ газовъ имѣютъ одинъ и тотъ же объемъ. Основываясь на этомъ обстоятельствѣ, мы получаемъ надежный методъ для опредѣленія относительнаго вѣса молекулъ газовъ.

Итакъ, изученіе физическихъ свойствъ—вѣса и плотности—породило понятія объ атомахъ и молекулахъ, понятія, установленныя столь точно, что относительные вѣса этихъ гипотетическихъ тѣлецъ представляютъ собою константы, лежащія въ основаніи всей химіи; точно также и дальнѣйшее изученіе физическихъ свойствъ привело къ широкимъ обобщеніямъ относительно природы атомовъ и молекулъ.

Свойства атомовъ. Что касается свойствъ атомовъ, то я желалъ бы обратить ваше вниманіе на четыре пункта первостепенной важности. Во первыхъ, Дюлонгъ и Пти нашли, что физическая величина, называемая теплоемкостью, одинакова для различныхъ атомовъ, т. е. количество теплоты, которое нужно затратить, чтобы получить опредѣленное повышеніе температуры, почти одинаково для соотвѣтствующихъ атомныхъ количествъ всѣхъ элементовъ; напр., для 7 частей литія и 240 частей уранія. Во вторыхъ, Фарадей, изучая электропроводность электролитовъ, т. е. водныхъ растворовъ солей, нашелъ, что количества электричества, переносимыя атомомъ, относятся другъ къ другу, какъ цѣлыя числа; числа эти выражаются, напримѣръ, 1 для калія и 2 для цинка. Гельмгольцъ выяснилъ природу этого основного свойства, представляющаго наилучшее выраженіе нашего понятія о валентности, допустивъ, что и электричество, подобно вѣсомому веществу, состоитъ изъ атомовъ, положительныхъ и отрицательныхъ, и что матеріальные атомы могутъ соединяться съ электрическими, и потому при электролизѣ переносятъ ихъ отъ одного полюса къ другому: такъ, напр., атомъ калія соединяется съ однимъ положительнымъ электрическимъ атомомъ; атомъ хлора—съ отрицательнымъ, атомъ цинка—съ двумя положительными.

Третьимъ крупнымъ шагомъ, сдѣланнымъ наукой, мы также обязаны изученію физическаго свойства—на этотъ разъ свѣта. Бунзенъ и Кирхгоффъ нашли, что атомы каждаго тѣла, нагрѣтаго до газообразнаго состоянія, посылаютъ опредѣленный рядъ свѣтовыхъ волнъ, порождающихъ характеристическія линіи спектра; послѣднія служатъ теперь наилучшимъ средствомъ для распознаванія того элемента, съ которымъ мы имѣемъ дѣло и для открытія новыхъ, пока еще неизвѣстныхъ элементовъ.

Послѣднее обобщеніе, о которомъ я долженъ здѣсь упомянуть и которымъ мы обязаны Ньюленду (Newlands), Менделѣеву и Латарю Мейеру, касается совокупности физическихъ свойствъ тѣла; оно состоитъ въ томъ, что физическія свойства представляютъ собою періодическія функціи атомнаго вѣса. Это обстоятельство наиболѣе рѣзко обнаруживается въ атомныхъ объемахъ, имѣющихъ свой максимумъ въ литіи (7), натріи (23), каліи (39), рубидіи (85) и цезіи (133).

Соотвѣтственная періодичность наблюдается и въ другихъ свойствахъ, напр. въ валентности или въ свойствѣ соединяться съ электрическимъ атомомъ, которое для вышеупомянутыхъ элементовъ выражается единицей. Аналогичныя свойства наблюдаемъ мы и въ точкахъ плавленія и кипѣнія, весьма низкихъ для упомянутыхъ металловъ.

Если бы намѣченная мною программа, въ которой я ограничилъ свою задачу обзоромъ прошлаго, не препятствовала мнѣ остановиться на новѣйшихъ изслѣдованіяхъ, то я обратилъ бы ваше вниманіе на одно новое физическое свойство—на радіоактивность, которую, повидимому, слѣдуетъ также признать атомнымъ свойствомъ. Здѣсь я ограничусь лишь замѣчаніемъ, что и радій былъ открытъ благодаря изслѣдованію физическихъ явленій, именно, благодаря наблюденіямъ надъ электропроводностью воздуха и изученію спектра.

Свойства молекулъ. Обращаясь къ молекуламъ, я имѣю въ виду представить въ общихъ чертахъ три важнѣйшихъ обобщенія. На первомъ планѣ стоитъ такъ называемый изоморфизмъ, открытіе, сдѣланное Митчерлихомъ и состоящее въ томъ, что аналогичное молекулярное строеніе соотвѣтствуетъ аналогичному внѣшнему кристаллическому строенію. Здѣсь я долженъ прибавить, что трудно найти болѣе удовлетворительное доказательство состоятельности нашего представленія о внутренней структурѣ вещества, чѣмъ то обстоятельство, что всѣ квасцы, внутреннее строеніе которыхъ мы признаемъ одинаковымъ, имѣютъ также одну и ту же кристаллическую форму.

Пастеръ сдѣлалъ второй шагъ впередъ, нѣкоторымъ образомъ аналогичный предыдущему, когда онъ, основываясь на оптической и кристаллографической диссимметріи вещества, сдѣлалъ заключеніе о диссимметріи молекулярнаго строенія. Напримѣръ, такую оптическую диссимметрію, въ смыслѣ вращенія плоскости поляризаціи, а также кристаллографическую, выражающуюся въ видѣ такъ называемаго энактіоморфнаго строенія кристалловъ, мы можемъ наблюдать въ правовращающей обыкновенной вино-каменной кислотѣ и въ ея лѣвовращающемъ антиподѣ. Предполагается, что и молекулы этихъ кислотъ имѣютъ аналогичныя структуры, отличающіяся другъ отъ друга, какъ правая рука отъ лѣвой. Всѣмъ извѣстно, что лишь послѣ этихъ открытій была установлена вѣроятная молекулярная структура вещества, что и послужило основаніемъ стереохиміи.

Третье крупное открытіе заключается въ способѣ опредѣленія молекулярнаго вѣса растворенныхъ веществъ. Этотъ способъ былъ найденъ благодаря примѣненію закона Авогадро къ осмотическимъ давленіямъ и работамъ Рауля, содержащимъ измѣренія точекъ замерзанія и давленій паровъ. Мы теперь можемъ утверждать, что жидкое состояніе вещества не характеризуется значительной сложностью молекулы. Крупная новая идея, которую Арреніусъ ввелъ въ науку и связалъ съ приведеннымъ выше положеніемъ, заключается въ томъ, что онъ допустилъ существованіе въ электролитахъ іоновъ; напр. въ обыкновенномъ растворѣ поваренной соли, по его мнѣнію, находятся отрицательно заряженные атомы хлора и положительно заряженные атомы натрія. Мы опять видимъ, какъ въ высшей степени плодотворная теорія была подсказана изученіемъ физическаго свойства—электропроводности.

Заключеніе. Если бы мы послѣ краткаго обзора свойствъ вещества пожелали заглянуть и въ сущность его природы, то мы должны были бы заключить, что вещество не непрерывно, но состоитъ изъ центровъ дѣйствія, имѣющихъ, повидимому, вѣчное бытіе и мѣняющихъ лишь свое мѣсто въ пространствѣ—т. е. изъ атомовъ. Послѣдніе связаны другъ съ другомъ—трудно сказать какимъ именно образомъ—и образуютъ молекулы. Мы должны исключить возможность комбинаціи, аналогичной той, которую представляетъ намъ планетная система и которая основана на тяготѣніи и уравновѣшивающей его центробѣжной силѣ; ибо при температурѣ абсолютнаго нуля нѣтъ вовсе движенія. Быть можетъ, недостающая намъ отталкивательная сила имѣетъ электрическое происхожденіе; тогда мы приходимъ къ нашей комбинаціи вещественныхъ и электрическихъ атомовъ. Есть нѣчто чарующее въ этой теоріи; если мы допустимъ, что атомъ угля соединенъ съ четырьмя одинаковыми электрическими атомами и удерживаетъ ихъ при помощи силъ, аналогичныхъ силамъ упругости, то этимъ можетъ быть объяснено какъ внутреннее равновѣсіе, такъ и тетраедрическая группировка. Новѣйшая гипотеза о томъ, что вещество состоитъ изъ однихъ лишь электрическихъ атомовъ, лежитъ за предѣлами намѣченной мною программы.

Теперь мы обратимся ко второй части нашей темы и коснемся вопроса о химическомъ сродствѣ; дѣйствительно, то, что связываетъ отдѣльные атомы другъ съ другомъ, должно имѣть близкое отношеніе къ химическому сродству.

II. Физическая химія и наши представленія о сродствѣ.

Первый періодъ въ исторіи физической химіи посвященъ главнымъ образомъ изученію физическихъ свойствъ вещества, тогда какъ второй и именно текущій періодъ науки характеризуется преобладающимъ значеніемъ проблемы о сродствѣ.

Рядомъ съ измѣненіемъ общей задачи науки мѣняются и методы ея; въ періодъ развитія нашихъ представленій о веществѣ физическая химія пользовалась физическими методами и приборами; при развитіи же нашихъ идей о сродствѣ физическая химія прибѣгаетъ къ физическимъ принципамъ.

Сродство, разсматриваемое какъ сила. На первыхъ порахъ сродство разсматривалось какъ сила, и поэтому естественно было приписывать Ньютонову тяготѣнію роль химическаго агента. Такимъ образомъ Бертоле и, гораздо успѣшнѣе его, Гульдбергъ и Вааге приложили къ рѣшенію проблемы сродства законы дѣйствія массъ, и установили положеніе, еще теперь извѣстное подъ именемъ закона массъ, согласно которому сродство пропорціонально вѣсу единицы объема.

Но какъ всѣ мы теперь знаемъ, сродство имѣетъ свою особенную природу и зависитъ не отъ одного лишь вѣса; наоборотъ, вообще говоря, наименѣе тяжелые элементы оказываются наиболѣе активными. Берцеліусъ построилъ свою систему, исходя изъ представленія, что элементы имѣютъ характеръ электрическаго заряда, либо положительнаго, либо отрицательнаго, и въ комбинаціяхъ взаимодѣйствуютъ благодаря электрическому притяженію. Гельмгольцъ сдѣлалъ въ этомъ направленіи дальнѣйшій шагъ, принявъ въ расчетъ количественную сторону дѣла. Разсматривая электрическіе заряды, о которыхъ говоритъ законъ Фарадея, онъ обращаетъ вниманіе на то важное, по его мнѣнію, обстоятельство, что притяженіе, обусловленное отрицательнымъ зарядомъ хлора и положительнымъ—водорода, далеко превосходитъ притяженіе, обусловленное тяготѣніемъ массъ. Тѣмъ не менѣе этимъ путемъ удовлетворительное представленіе о сродствѣ еще не достигнуто.

Сродство, измѣряемое работой. Послѣдователи другого направленія научной мысли разсматриваютъ не силу, но работу, представляемую сродствомъ; въ этомъ направленіи рѣшающее значеніе имѣло предложеніе, установленное Томсономъ и Бертело, гласящее, что теплота, развиваемая химической реакціей, соотвѣтствуетъ работѣ, которую сродство можетъ произвести. Дѣйствительно, основываясь на этомъ положеніи, во многихъ случаяхъ можно вычислить a priori количество теплоты, выдѣляемой при реакціи, и предсказать, въ какомъ направленіи разовьется реакція: направленіе послѣдней совпадаетъ съ направленіемъ выдѣленія теплоты. Однако, не смотря на важность этого принципа, онъ не абсолютно надеженъ: ему рѣшительно противорѣчатъ реакціи, сопровождаемыя *поглощеніемъ* теплоты, напр. реакція хлористоводородной кислоты съ сѣрнокислымъ натріемъ.

Важный шагъ впередъ, въ смыслѣ установленія яснаго и лишеннаго противорѣчій понятія о сродствѣ, представляетъ собою изученіе такъ называемыхъ обратимыхъ химическихъ процессовъ. Эта обратимость нуждается въ нѣкоторомъ объясненіи, которое легко получить при помощи нагляднаго примѣра: зарѣзавъ цыпленка и приготовивъ изъ него бульонъ, весьма трудно получить изъ бульона обратно цыпленка: это обстоятельство объясняется тѣмъ, что данная операція не обладаетъ обратимостью. Наоборотъ, если мы заморозимъ воду или превратимъ ее въ паръ, то мы безъ труда можемъ обратно получить воду.

На первый взглядъ химическія измѣненія представляются необратимыми; и дѣйствительно, многіе химическіе процессы необратимы, какъ, напримѣръ, необратима реакція взрыва пороха. Однако же множество химическихъ реакцій отличаются обратимостью, какъ то показываютъ изслѣдованія Бертело и С. Жиля (St. Gilles) о взаимодѣйствіи алкоголей и кислотъ, а также работы Девиля (Dewille) и Дебрей (Debray) о дѣйствіи высокихъ температуръ, при которыхъ разлагается даже вода. Дѣйствительно, мы знаемъ реакціи, соотвѣтствующія по своему типу испаренію, какъ напримѣръ, отнятіе паровъ воды отъ гидратовъ, а также реакціи типа замерзанія или плавленія, напримѣръ случаи расщепленія при опредѣленныхъ температурахъ двойныхъ солей на ихъ составныя части, вродѣ разложенія при 77°C двойной мѣдно-кальціевой соли уксусной кислоты. Такимъ образомъ, мы здѣсь имѣемъ примѣры обратимыхъ химическихъ реакцій, аналогичные химическимъ явленіямъ, гдѣ при совмѣстномъ существованіи двухъ химически различныхъ формъ вещества имѣетъ мѣсто равновѣсіе, совершенно такъ, какъ это бываетъ въ случаѣ существованія воды и ея паровъ при максимальномъ давленіи.

Такое обращеніе химическаго процесса можетъ возникнуть подъ вліяніемъ температуры, электричества, свѣта или давленія. Митчерлихъ предуказалъ, что въ послѣднемъ случаѣ мы можемъ легче всего получить критерій для измѣренія сродства. Для примѣра возьмемъ гипсъ. Жженый продажный гипсъ, смѣшанный съ водой, соединяется съ ней. Мы знаемъ, что при реакціи развивается давленіе; знаемъ также, что при достаточномъ возрастаніи давленія реакція задерживается и можетъ быть обращена: напр. Спрингъ (Spring) путемъ давленія получалъ изъ двусѣрнокислаго натрія обратно сѣрную кислоту. Въ такихъ случаяхъ можно точно установить предѣльное давленіе, такъ что при болѣе высокомъ давленіи получается обратно сѣрная кислота, а при чуть низшемъ верхъ беретъ дѣйствіе сродства. Если реакція протекаетъ при давленіи чуть меньшемъ того, которое задерживаетъ ее, что практически равносильно предѣльному давленію, то сродство совершаетъ максимальную работу, какую оно можетъ произвести; количество работы одно и то же, независимо отъ природы противоположнаго дѣятеля, будь то электричество или свѣтъ, или что-либо другое. Такимъ образомъ эта максимальная работа даетъ намъ надежное мѣрило сродства.

Благодаря весьма счастливому совпаденію такое представленіе о сродствѣ допускаетъ примѣненіе физическаго принципа, извѣстнаго подъ названіемъ второго закона термодинамики. Принципъ этотъ можно формулировать различнымъ образомъ. Для нашей цѣли можно изложить сущность этого принципа такъ: изъ всѣхъ возможныхъ процессовъ природы въ дѣйствительности происходятъ тѣ, которые сопровождаются уменьшеніемъ разности напряженія. Если въ двухъ частяхъ газа давленіе неодинаково, то произойдетъ движеніе въ такомъ направленіи, чтобы разность давленій уничтожилась; гдѣ имѣетъ мѣсто разность температуръ, тамъ передвиженіе вещества уравниваетъ ихъ. Любопытно, что такое простое правило, которое кажется намъ столь естественнымъ, ведетъ къ весьма важнымъ и точно выраженнымъ уравненіямъ, которыя установили Карно и Клаузіусъ. Въ области химіи эти принципы впервые примѣнилъ Горстманъ. Дальнѣйшія примѣненія принциповъ къ вопросамъ химіи были сдѣланы Массіеномъ (Massien), Джибсомъ и Гельмгольцемъ, которые установили систему соотношеній, касающихся проблемы о сродствѣ; здѣсь я изложу ихъ въ очень краткомъ видѣ:

1. Сродство можно опредѣлить, какъ максимальное количество работы, которое мы можемъ получить благодаря химической реакціи. Равновѣсіе имѣетъ мѣсто въ томъ случаѣ, когда количество это равно нулю.

2. Законъ массъ въ нѣсколько измѣненномъ видѣ можно получить и хорошо обосновать, если ограничить его примѣненіе случаемъ разрѣженныхъ газовъ и слабыхъ растворовъ.

3. Принципъ Томсона-Бертело принимаетъ нѣсколько измѣненную форму и выражается правиломъ: пониженіе температуры влечетъ за собою такую реакцію, которая сопровождается развитіемъ теплоты. Напримѣръ, согласно этому правилу при обыкновенной температурѣ вода является болѣе устойчивымъ соединеніемъ, чѣмъ гремучій газъ, тогда какъ въ случаѣ высокихъ температуръ соотношеніе это измѣняется въ обратномъ смыслѣ, какъ это было найдено Девилемъ.

4. Наконецъ, мы располагаемъ правиломъ фазъ, указывающимъ, напримѣръ, въ какомъ случаѣ химическая реакція аналогична плавленію или замерзанію, и въ какомъ случаѣ ее можно сравнить съ сгущеніемъ паровъ.

Замѣчательнѣе всего то обстоятельство, что мы располагаемъ безусловно надежными методами для рѣшенія задачъ, касающихся вопроса о сродствѣ, такъ что наши вычисленія даютъ намъ математически точныя предсказанія результатовъ опыта, хотя мы при этомъ можемъ пребывать въ совершенномъ невѣдѣніи какъ о природѣ сродства, такъ и о предполагаемомъ источникѣ его—веществѣ.

О вихревыхъ теченіяхъ.

Профессора Адами (Adami).

Перев. И. Левинъ.

Когда великій англійскій натуралистъ Исаакъ Ньютонъ (1642—1727) открылъ названный по его имени законъ тяготѣнія, по которому одна и та же сила заставляетъ камень падать на землю и удерживаетъ луну на ея пути, то ему тотчасъ стало ясно, что онъ вступилъ въ область, полную таинственности. Ибо до этого времени постоянныя наблюденія привели къ убѣжденію, что сила можетъ только непосредственно дѣйствовать на тѣло.

Тѣло можно нагрѣть, поддерживая подъ нимъ огонь; телѣга движется, если ее потянуть или толкать; но чтобы одно тѣло могло оказать притяженіе на другое, не находясь съ нимъ въ непосредственномъ соприкосновеніи, это казалось великому британцу невѣроятнымъ.

Теперь, конечно, уже извѣстно о существованіи такихъ физическихъ явленій, которыя познаются наблюдателемъ не путемъ рѣзкихъ чувствительныхъ ощущеній, какъ это было въ вышеупомянутыхъ фактахъ въ области теплоты и движенія. Такъ, напримѣръ, распространеніе звука происходитъ такимъ образомъ, что воздухъ, подобно опускающейся и поднимающейся спиральной пружинѣ, находится въ волнообразномъ движеніи и тѣмъ самымъ перемѣщаетъ звукъ на большія разстоянія. Также было уже со временъ глубокой древности извѣстно, что освѣщенное солнцемъ тѣло нагрѣвается, хотя солнце находится очень далеко отъ тѣла.

Уже Архимедъ (287—212 до Р. X.) умѣлъ съ помощью вогнутаго зеркала соединить солнечные лучи въ одну точку. По эмиссіонной или эманаціонной теоріи (теорія истеченія), установленной Ньютономъ, нужно было допустить, что солнце испускаетъ особенную свѣтящуюся матерію, названную эѳиромъ, которая движется съ громадной скоростью; солнечные лучи, поэтому, можно разсматривать, какъ совершенно тонкія нити, идущія отъ солнца къ освѣщенному тѣлу.

Когда подробнѣе было изслѣдовано распространеніе свѣта, голландецъ Гюйгенсъ (Huyghens, 1629—1695) пришелъ къ убѣжденію, что и свѣтъ распространяется путемъ волнообразнаго движенія и, какъ носителя послѣдняго онъ принялъ эѳиръ—безконечно-тонкую массу, проникающую во всѣ тѣла и наполняющую всю вселенную. Экспериментально, однако, существованіе эѳира еще до сихъ поръ не доказано. Чтобы дать понятіе о тѣхъ трудностяхъ, съ которыми сопряжено экспериментальное доказательство существованія эѳира, нужно замѣтить, что діаметръ молекулы воды, т. е. наименьшей части, изъ которой состоитъ вода, составляетъ 0,000014 миллиметра и что эѳиръ, проникая во всѣ промежутки этой водяной молекулы, долженъ состоять изъ еще несравненно меньшихъ молекулъ.

Страннымъ должно показаться то обстоятельство, что, хотя притягательная и отталкивательная сила магнитнаго полюса уже много столѣтій принималась, какъ дѣйствіе силы на разстояніе, ни Ньютонъ, ни Гюйгенсъ не допускали для этого явленія промежуточнаго фактора. Лишь англичанинъ Фарадей (1791—1867), одинъ изъ величайшихъ натуралистовъ всѣхъ временъ, отказался отъ воззрѣнія на магнитныя и электрическія явленія, какъ на дѣйствіе силы на разстояніе и принялъ эѳиръ, какъ связывающее звено, т. е., какъ носителя силы, исходящей отъ магнитнаго полюса или электрическаго тѣла, подобно тому, какъ это было уже введено при распространеніи свѣта.

Когда нѣмецкому изслѣдователю Генриху Герцу (1857—1894) удалось показать, что электричество есть тоже волнообразное движеніе, отличающееся отъ свѣтовыхъ колебаній только длиною волны и когда введеніемъ безпроволочнаго телеграфа была окончательно доказана возможность распространенія волнообразнаго движенія на громадныя разстоянія,—тогда въ научныхъ кругахъ появилось стремленіе дать гипотетическому эѳиру реальную почву.

При настоящемъ состояніи вспомогательныхъ средствъ, мы, къ сожалѣнію, должны пока отказаться отъ воспріятія эѳира своими чувствами. Мы должны поэтому ограничиться изслѣдованіями надъ тѣлами, которыхъ можно легко привести въ волнообразное движеніе и перенести полученные при изслѣдованіи выводы на эѳиръ. Наилучшимъ вспомогательнымъ средствомъ, дающимъ возможность вызвать волны и изучать ихъ, является вода, которую для этой цѣли наливаютъ въ стеклянное корыто и приводятъ въ волненіе янтарнымъ порошкомъ, что даетъ возможность изучать движенія отдѣльныхъ водяныхъ частицъ. Такіе опыты были произведены Д-мъ Гольцемъ, который примѣнилъ результаты своего изслѣдованія къ эѳиру. Трудъ свой онъ обнародовалъ подъ заглавіемъ: „Новѣйшіе, основанные на опытахъ, результаты о міровой силѣ и радіальныхъ теченіяхъ“.

Гольцъ укрѣплялъ цѣлый рядъ шарообразныхъ, конусообразныхъ и цилиндрическихъ тѣлъ каждое на оси и двигалъ ихъ въ водѣ прямолинейно или же вращалъ; при этомъ, кромѣ волнообразныхъ движеній появлялись еще и вихревыя движенія; послѣднія то и привели, главнымъ образомъ, Гольца къ убѣжденію, что и міровой эѳиръ находится въ постоянномъ вихревомъ движеніи.

Это вихревое движеніе можетъ произвести всякій искусный курильщикъ, выпуская кольца дыма. Къ сожалѣнію, они слишкомъ непостоянны для того, чтобы можно было надъ ними въ теченіе нѣкотораго времени произвести изслѣдованія.

Распространяя результаты своихъ опытовъ на вселенную, авторъ замѣнилъ шарообразныя, конусообразныя и цилиндрическія тѣла, которыми онъ пользовался при опытахъ, землею, воду—міровымъ эѳиромъ.

Земля, находясь во вращательномъ движенiи и двигаясь внутри эѳира, образуетъ въ немъ вихревыя теченiя, которыя, увлекая тѣло, лишенное опоры, служатъ причиною паденiя его на землю. Простымъ опытомъ авторъ доказываетъ, что если вращать въ водѣ цилиндрическое тѣло, снабженное внутри лопатообразнымъ наростомъ, то оно притягиваетъ къ себѣ, благодаря образовавшемуся радiальному теченiю, находящееся въ водѣ тѣло, что соотвѣтствуетъ притяженiю тѣла землею. Чтобы составить себѣ ясное понятiе о вихревыхъ нитяхъ, положимъ на магнитный стержень натянутый листъ бумаги и, осыпавъ его желѣзными опилками, замѣтимъ, что онѣ размѣщаются по извѣстнымъ направленiямъ, соотвѣтствующимъ вихревымъ нитямъ.

Вихревыя теченiя, сконцентрировавшись на обоихъ полюсахъ земли и внезапно разсѣявшись, производятъ сѣверное и южное сiянiя. Извѣстное явленiе прилива и отлива совпадаетъ съ ежедневными измѣненiями положенiя магнитной стрѣлки; отсюда авторъ дѣлаетъ заключенiе, что вихревыя теченiя, производя приливъ и отливъ, служатъ также причиною ежедневныхъ (перiодическихъ) измѣненiй магнитной стрѣлки. Вѣковыя измѣненiя, т. е. такiя, которыя можно замѣтить лишь черезъ большiе перiоды времени, авторъ объясняетъ космическими, намъ еще до сихъ поръ неизвѣстными явленiями. Движенiя планетъ вокругъ солнца, движенiе всей солнечной системы во вселенной, собственныя движенiя неподвижныхъ звѣздъ,—все это, по мнѣнiю автора, необходимое слѣдствiе радiальнаго теченiя, въ которомъ находится эѳиръ. Это утвержденiе получаетъ сильную поддержку со стороны Гастона, директора Роттердамской астрономической обсерваторiи, одного изъ лучшихъ знатоковъ Млечнаго пути, который онъ себѣ представляетъ только въ видѣ громадной туманной спирали. Напротивъ, утвержденiе автора, что взаимное притяженiе массъ между двумя тѣлами возможно только тогда, когда одно, по крайней мѣрѣ, изъ нихъ находится въ движенiи, нуждается еще въ экспериментальномъ доказательствѣ.

Состоянiе тѣла зависитъ отъ вихревыхъ теченiй, смотря по тому, какъ они окружаютъ отдѣльные атомы и молекулы какого-нибудь тѣла; послѣднее можетъ быть въ твердомъ, жидкомъ или газообразномъ состоянiи. Точно также вихревыя теченiя эѳира уясняютъ радiоактивность тѣлъ, Рёнтгеновскiе лучи и теорiю электроновъ. Если опыты, произведенные авторомъ, сдѣлаются всѣмъ извѣстными, то можно ожидать болѣе простого пониманiя природы, чѣмъ это было до сихъ поръ; тогда возможно будетъ всѣ явленiя природы свести къ вихревымъ и радiальнымъ теченiямъ.

Выполненiе этихъ опытовъ необходимо, ибо природа одарила насъ чувствами, которыя иногда оказываются далеко несовершенными. Мы едва ли въ состоянiи нашими вкусовыми и обонятельными нервами констатировать существованiе химическихъ веществъ, когда намъ въ этомъ отказываетъ химическiй научный методъ. Здѣсь можно только упомянуть о воспрiятiи нашимъ чувствомъ обонянiя свѣтильнаго газа и мускуса, а также и о томъ фактѣ, что языкъ и нёбо хорошаго знатока вина обладаютъ такими качествами, какихъ еще не достигла ни одна химическая лабораторія. Между тѣмъ, съ другой же стороны, нашъ органъ слуха ограниченъ, — онъ воспринимаетъ тоны, число колебаній которыхъ не меньше 12 и не больше 36000 въ секунду; еще болѣе ограниченъ нашъ глазъ, который видитъ непосредственно только тѣ свѣтовые лучи, длина волны которыхъ отъ 0,0008—0,0003 миллиметра. Электрическое чутье у насъ совсѣмъ отсутствуетъ, и мы вынуждены строить аппараты, дающіе возможность глазу видѣть и измѣрять электрическія явленія; ни однимъ изъ нашихъ чувствъ до сихъ поръ еще не удалось доказать существованіе эѳира.

Дѣленіе окружности на равныя части.

Проф. Г. Вебера.

(Переводъ съ нѣмецкаго).

Изъ сочиненія „Энциклопедія элементарной Алгебры“.

Корни изъ единицы.

1. Всякое комплексное число, въ зависимости отъ модуля и аргумента, выражается въ видѣ

$$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta).$$

Согласно § 47, 8,

$$z^n = r^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta). \qquad (1)$$

Эта формула даетъ возможность рѣшить слѣдующую задачу: опредѣлить всѣ числа, n-тая степень которыхъ равна данному числу c (вещественному или комплексному), т. е. найти корни уравненія:

$$z^n = c.$$

По основной теоремѣ алгебры это уравненіе должно имѣть n корней.

2. Пусть

$$c = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

гдѣ ρ есть положительное число, а φ содержится между 0 и 2π. Тогда

$$r^n\cos n\vartheta = \rho\cos\varphi, \quad r^n\sin n\vartheta = \rho\sin\varphi.$$

Возводя оба эти равенства въ квадратъ и складывая, получимъ, что $r^{2n} = \rho^2$. Такъ какъ и r должно быть положительнымъ числомъ, то

$$r = \sqrt[n]{\rho},$$

при чемъ подъ правой частію разумѣемъ единственное положительное значеніе корня n-той степени изъ ρ.

3. Опредѣливъ такимъ образомъ r, мы получимъ для ϑ:

$$\cos n\vartheta = \cos\varphi, \quad \sin n\vartheta = \sin\varphi.$$

Эти уравненія не опредѣляютъ φ однозначно. Въ самомъ дѣлѣ, согласно извѣстной теоремѣ тригонометріи, два угла, имѣющіе одинаковые косинусы и синусы, могутъ отличаться другъ отъ друга на 2π, повторенное цѣлое число разъ. Слѣдовательно,

$$n\vartheta = \varphi + 2\pi m, \quad \vartheta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi m}{n},$$

гдѣ m есть нѣкоторое цѣлое (положительное или отрицательное) число. Съ другой стороны, два значенія ϑ, разность которыхъ есть число, кратное 2π, даютъ одно и то же значеніе для z. Если положимъ $m = qn + k$, гдѣ k есть остатокъ отъ дѣленія m на n, то

$$\vartheta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} + 2\pi q.$$

Здѣсь всевозможныя значенія цѣлаго числа q даютъ одно и то же значеніе для z. Слѣдовательно, чтобы получить всѣ отличные другъ отъ друга корни n-той степени изъ c, достаточно въ формулѣ

$$z = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right]$$

дать k послѣдовательныя значенія: 0, 1, 2, . . . $n-1$. Послѣднюю формулу, согласно § 47, 6, можно представить въ видѣ:

$$z = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right)$$

или

$$z = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k.$$

4. Положимъ для сокращенія:

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},$$

$$\varepsilon^k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}.$$

Тогда $\varepsilon^n = 1$, а слѣдовательно и $\varepsilon^{kn} = 1$. Произведеніе двухъ сопряженныхъ мнимыхъ чиселъ:

$$\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad \cos\frac{2\pi k}{n} - i\sin\frac{2\pi k}{n}$$

равно 1, слѣдовательно мы можемъ положить:

$$\varepsilon^{-k} = \cos\frac{2\pi k}{n} - i\sin\frac{2\pi k}{n}.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ $\varepsilon^{-k} = \varepsilon^{n-k}$. Величины

$$1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3, \ldots \varepsilon^{n-1} \tag{2}$$

непремѣнно всѣ различны между собой. Дѣйствительно, если бы въ этомъ ряду $\varepsilon^k = \varepsilon^g$, то, въ силу упомянутаго свойства тригонометрическихъ функцій, числа $2\pi k/n$ и $2\pi g/n$ должны были бы отличаться другъ отъ друга только на число, кратное 2π, а слѣдовательно разность $\frac{k}{n} - \frac{g}{n}$ дожна была бы быть цѣлымъ числомъ, что, очевидно, невозможно.

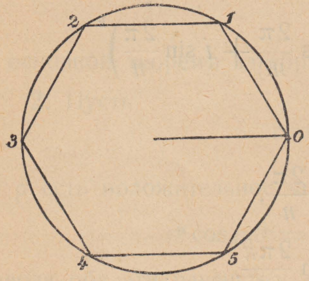
5. Величины (3) называются корнями n-той степени изъ 1. Ихъ имѣется n различныхъ между собой.

Они представляютъ собой корни функціи $x^n - 1$.

Всѣ корни n-той степени изъ даннаго числа c получаются, если одинъ изъ нихъ умножать послѣдовательно на n-тые корни изъ единицы [1]). За исключеніемъ случая $c = 0$, число различныхъ корней n-той степени изъ c равно n, т. е. числу различныхъ корней изъ 1.

6. На окружности, радіусъ которой мы примемъ равнымъ единицѣ длины, углы при центрѣ можно измѣрять соотвѣтствующими дугами. Четыремъ прямымъ угламъ соотвѣтствуетъ вся окружность, а число, ее измѣряющее, есть 2π. Если раздѣлить всю окружность на n равныхъ частей, то въ точкахъ дѣленія получимъ углы, соотвѣтствующіе правильному вписанному многоугольнику, а именно n-угольнику.

7. Расположимъ одну изъ точекъ дѣленія такъ, чтобы въ ней $x = 1$, $y = 0$. Тогда всѣ вершины нашего многоугольника будутъ геометрическими изображеніями n-тыхъ корней изъ единицы, т. е. комплексныхъ чиселъ (2). Условимся отсчитывать дуги и соотвѣтствующіе имъ углы отъ точки 0 (фиг. 18). Точку, соотвѣтствующую углу $2\pi k/n$, будемъ называть k-той вершиной многоугольника. Подобно этому, начальная точка можетъ быть названа нулевой или n-той вершиной.



Фиг. 18.

Обозначимъ сторону нашего правиль-

[1]) Это слѣдуетъ изъ равенства (2). Если мы положимъ

$$z_1 = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right),$$

наго n-угольника черезъ S_n. Тогда

$$S_n = 2 \sin \frac{\pi}{n}.$$

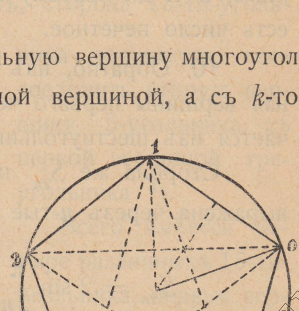
Величины S_n можно опредѣлить какъ геометрически, такъ и алгебраически. Аналитическая геометрія учитъ, что точки пересѣченія [2]) двухъ окружностей съ данными центрами и радіусами, а также и точки пересѣченія круга и прямой могутъ быть выражены алгебраически при помощи корней квадратныхъ уравненій. Обратно, квадратные корни изъ данныхъ чиселъ, если изобразить ихъ отрѣзками, можно построить циркулемъ и линейкой, а слѣдовательно привести задачу къ отысканію точекъ пересѣченія окружности или окружностей и прямыхъ линій.

Если S_n можно алгебраически опредѣлить при помощи ряда квадратныхъ корней, то геометрическое построеніе правильнаго n-угольника можетъ быть выполнено циркулемъ и линейкой. Обратно, если правильный n-угольникъ можно построить циркулемъ и линейкой, то алгебраическое опредѣленіе n-тыхъ корней изъ единицы приводится къ ряду квадратныхъ уравненій.

8. Положимъ

$$S_{n,k} = 2 \sin \frac{k\pi}{n};$$

$S_{n,k}$ есть хорда, которую получимъ, если начальную вершину многоугольника, обозначенную 0, соединимъ не съ смежной вершиной, а съ k-той. Тогда $S_{n,k} = S_{n,n-k}$. Если k больше 1 и меньше $n-1$, и не имѣетъ общихъ дѣлителей съ n, то $S_{n,k}$ есть сторона звѣзднаго многоугольника (см. фиг. 19 для пятиугольника); если k и n имѣютъ общаго множителя, то $S_{n,k}$ есть сторона многоугольника съ меньшимъ числомъ сторонъ [3]).



Фиг. 19.

9. Если S_n извѣстно, то S_{2n} найдемъ съ помощью извлеченія квадратнаго корня, т. е. съ помощью геометрическаго построенія (дѣленія угла пополамъ).

то корнями n-ой степени изъ числа c, какъ показываетъ формула (2), служатъ

$$z_1,\ z_1\varepsilon,\ z_1\varepsilon^2,\ z_1\varepsilon^3 \ldots z_1\varepsilon^{n-1}.$$

[2]) Т. е., конечно, координаты точекъ пересѣченія.

[3]) Чтобы опредѣлить, сколько сторонъ будетъ имѣть звѣздный (или иногда

Наиболѣе простое рѣшеніе этой задачи получается изъ тригонометрическихъ формулъ:

$$1 + \cos a = 2\cos^2 \frac{1}{2} a,$$

$$1 - \cos a = 2\sin^2 \frac{1}{2} a;$$

изъ второй при $\alpha = \frac{\pi}{n}$ слѣдуетъ:

$$2 - \sqrt{4 - S_n^2} = 4\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2 = S_{2n}^2,$$

а изъ первой:

$$2 + \sqrt{4 - S_n^2} = 4\left(\cos\frac{\pi}{2n}\right)^2 = 4\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right)\right)^2.$$

Слѣдовательно, мѣняя знакъ при квадратномъ корнѣ, мы получаемъ формулу, соотвѣтствующую дѣленію пополамъ угла, смежнаго съ $\frac{\pi}{n}$.

Итакъ, съ помощью геометрическаго построенія мы всегда можемъ получить изъ n-угольника $2n$-угольникъ, а изъ $2n$-угольника — $4n$-угольникъ, и т. д.; поэтому мы можемъ ограничиться предположеніемъ, что n есть число нечетное.

10. Обратно, изъ $2n$-угольника мы получимъ n-угольникъ, соединяя вершины перваго черезъ одну; такъ, напримѣръ, треугольникъ получается изъ шестиугольника, пятиугольникъ изъ десятиугольника и т. д.

Сторона же S_{2n} при нечетномъ n можетъ быть непосредственно выражена черезъ n-тые корни единицы (ε). Дѣйствительно:

$$S_{2n} = 2\sin\frac{\pi}{2n} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right) = 2\cos\frac{n-1}{4}\frac{2\pi}{n} =$$

$$= -2\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right) = -2\cos\frac{n+1}{4}\frac{2\pi}{n}.$$

обыкновенный) многоугольникъ, который мы получимъ, послѣдовательно соединяя вершины n-угольника черезъ k вершинъ, нужно опредѣлить, сколько понадобится провести такихъ діагоналей, чтобы возвратиться къ начальной вершинѣ. Если это число діагоналей есть x, то мы обойдемъ, такимъ образомъ, kx вершинъ. Мы возвратимся въ точку исхода, если kx кратно n. Если k и n суть числа первыя между собой, то наименьшее значеніе x, при которомъ kx дѣлится на n, есть n. Если k и n имѣютъ общаго дѣлителя d, то наименьшее значеніе x есть $\frac{n}{d}$.

Съ другой стороны, согласно п. 4:

$$\varepsilon^k + \varepsilon^{-k} = 2\cos\frac{2\pi k}{n};$$

смотря по тому, какое изъ двухъ чиселъ $n-1$ или $n+1$ дѣлится на 4, n имѣетъ видъ $4m+1$ или $4m-1$, слѣдовательно:

$$S_{2n} = \varepsilon^{\frac{n-1}{4}} + \varepsilon^{-\frac{n-1}{4}}, \quad n = 4m+1.$$

$$S_{2n} = -\varepsilon^{\frac{n+1}{4}} - \varepsilon^{-\frac{n+1}{4}}, \quad n = 4m-1. \tag{3}$$

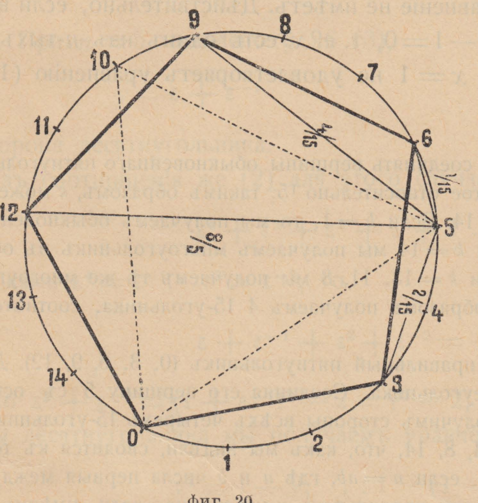
11. Если a и b суть натуральныя числа, не имѣющія общихъ дѣлителей, то по § 70 можно опредѣлить два такихъ цѣлыхъ и положительныхъ числа x и y, что

$$bx - ay = 1.$$

Если $ab = n$, то можно удовлетворить равенству:

$$\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi x}{a} - \frac{2\pi y}{b}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что сторона n-угольника получится, если точку $\frac{2\pi x}{a}$ соединить съ точкой $\frac{2\pi y}{b}$. Такъ, напримѣръ, сторона 15-ти-угольника получается, если соединить вторую вершину 5-угольника съ первой вершиной треугольника [4]).



фиг. 20.

Всего имѣется четыре различныхъ 15-ти-угольника, первыя вершины которыхъ лежатъ при: $\frac{2\pi}{15}, \frac{4\pi}{15}, \frac{8\pi}{15}, \frac{14\pi}{15}$. Мы найдемъ ихъ, если одну изъ вершинъ треугольника соединимъ съ четырьмя вершинами пятиугольн. (фиг. 20) [5]).

---

[4]) Въ данномъ случаѣ $a = 3$, $b = 2$, $x = 1$, $y = 2$.

[5]) Мы видѣли выше, что мы получимъ звѣздный многоугольникъ, содержа-

Благодаря вышеизложенному, мы можемъ въ дальнѣйшемъ ограничиться только тѣми многоугольниками, въ которыхъ число сторонъ есть нечетное простое число или степень нечетнаго простого числа [6]).

Алгебраическое опредѣленіе корней изъ единицы.

1. Имѣя въ виду формулу суммы геометрической прегрессіи (§ 58) или частное отъ дѣленія $x^n - 1$ на $x - 1$ по § 61, мы можемъ написать:

$$(x-1)\,(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)=x^n-1.$$

Подставимъ вмѣсто x какой нибудь изъ корней n-той степени изъ единицы; правая часть будетъ ровна 0, а слѣдовательно должна обратиться въ нуль и лѣвая часть. При $x=1$ первый множитель лѣвой части, $x-1$, исчезаетъ, а второй получаетъ значеніе n. Если вмѣсто x подставимъ какой-нибудь корень, отличный отъ 1, т. е. одно изъ чиселъ (§ 96, (2)):

$$\varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3 \ldots \varepsilon^{n-1},$$

то долженъ обратиться въ нуль другой множитель. Итакъ, степени числа ε суть корни уравненія $(n-1)$-ой степени

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1=0; \qquad (1)$$

другихъ же корней это уравненіе не имѣетъ. Дѣйствительно, если выполняется уравненіе (1), то и $x^n-1=0$, т. е. x есть одинъ изъ n-тыхъ корней изъ единицы. Значеніе же $x=1$ не удовлетворяетъ уравненію (1) [7]).

щій 15 сторонъ, если будемъ соединять вершины обыкновеннаго пятиугольника черезъ k, гдѣ k есть число простое относительно 15; такимъ образомъ, k можетъ имѣть значенія 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14. Если $k=1$, то мы получаемъ обыкновенный правильный 15-ти угольникъ При $k=14$ мы получаемъ многоугольникъ въ обратномъ порядкѣ. Точно такъ же при $k=13$, 11, 8 мы получаемъ тѣ же многоугольники, что при $k=2$, 4, 7. Такимъ образомъ получаемъ 4 15-угольника, соотвѣтствующіе $k=1$, 2, 4, 7.

На фиг. 19 изображенъ правильный пятиугольникъ (0, 3, 6, 9, 12). Далѣе 0 5 есть сторона правильнаго треугольника. Соединяя его вершину 5 съ остальными вершинами пятиугольника, получимъ стороны всѣхъ четырехъ 15-угольниковъ.

Авторъ беретъ $k=2$, 4, 8, 14, что, какъ мы видѣли, сводится къ тому же.

[6]) Какъ показано выше, если $n=ab$, гдѣ a и b числа первыя между собой, то мы умѣемъ построить сторону правильнаго n-угольника, если умѣемъ построить сторону a-угольника и сторону b-угольника.

[7]) Это значитъ, корнями уравненія (1) служатъ $(n-1)$ чиселъ:

$$\varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3 \ldots \varepsilon^{n-1}.$$

Положимъ $x=\varepsilon$; тогда изъ уравненія (1) слѣдуетъ, что

$$\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\ldots+\varepsilon^{n-1}=-1. \qquad (2)$$

Мы получаемъ, такимъ образомъ, теорему: сумма $n-1$ корней n-той степени изъ единицы, отличныхъ отъ 1, равна -1.

2. Уравненіе (1), по своимъ характернымъ особенностямъ, часто можетъ быть разрѣшено до конца. Мы покажемъ это на нѣкоторыхъ примѣрахъ.

Для $n=3$ равенство (2) даетъ:

$$\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$$

или

$$\varepsilon+\varepsilon^{-1}=-1.$$

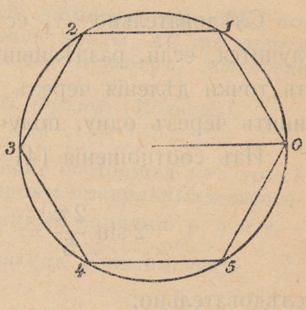
Въ виду соотношенія (3) § 96-го это равенство выражаетъ, что сторона правильнаго шестиугольника равна 1, т. е. радіусу фиг. 21.

Такимъ образомъ

$$\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}, \quad \sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

и слѣдовательно:

$$\varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon^{-1}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$



фиг. 21.

3. При $n=5$, согласно § 96 (3),

$$y=\varepsilon+\varepsilon^{-1}$$

есть сторона десятиугольника.

Изъ соотношенія же (2) для этого случая получимъ:

$$\varepsilon^4+\varepsilon^3+\varepsilon^2+\varepsilon+1=0,$$

а такъ какъ $\varepsilon^4=\varepsilon^{-1}$, $\varepsilon^3=\varepsilon^{-2}$, то

$$\varepsilon+\varepsilon^{-1}+\varepsilon^2+\varepsilon^{-2}=-1.$$

Но $\varepsilon^2+\varepsilon^{-2}=(\varepsilon+\varepsilon^{-1})^2-2=y^2-2$; поэтому для опредѣленія стороны десятиугольника мы получаемъ уравненіе:

$$y^2=1-y, \quad y:1=(1-y):y. \qquad (3)$$

Это уравненіе во второй своей формѣ показываетъ, что сторона десятиугольника равна большей части радіуса, раздѣленнаго въ крайнемъ и среднемъ отношеніи (§ 31, 6). Алгебраическое рѣшеніе уравненія (3) даетъ:

$$y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 2\cos\frac{2\pi}{5}. \qquad (4)$$

Второй корень есть:

$$y_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = 2\cos\frac{4\pi}{5}.$$

Что здѣсь подъ $\sqrt{5}$ нужно разумѣть положительное его значеніе, слѣдуетъ изъ того, что уголъ $\frac{2\pi}{5}$ лежитъ въ первой четверти и поэтому имѣетъ положительный косинусъ. Чтобы выяснить значеніе второго корня, обратимъ вниманіе на то, что

$$2\cos\frac{4\pi}{5} = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{5}\right) = -2\sin\frac{3\pi}{10}.$$

Слѣдовательно $-y_1$ есть сторона звѣзднаго десятиугольника, который получится, если, раздѣливши окружность на 10 равныхъ частей, соединять точки дѣленія черезъ двѣ. Если вершины этого десятиугольника соединить черезъ одну, получимъ звѣздный пятиугольникъ.

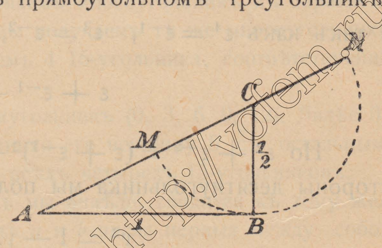
Изъ соотношенія (4) получимъ:

$$2\sin\frac{2\pi}{5} = \sqrt{4 - y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

а слѣдовательно:

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5} - 1 + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right).$$

4. Чтобы построить величины y и $-y_1$, обратимъ вниманіе на то, что $5 = 1^2 + 2^2$. Слѣдовательно, если въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC одинъ катетъ $= \frac{1}{2}$, а другой $= 1$, то гипотенуза равна $\frac{1}{2}\sqrt{5}$. Если отъ гипотенузы отнять $\frac{1}{2}$, то получимъ y, а если прибавить $\frac{1}{2}$, получимъ $-y_1$. На чертежѣ (фиг. 22) отрѣзокъ $AM = y$, $AN = -y_1$.



Фиг. 22.

(Продолженіе слѣдуетъ).

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ" и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 749 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$\frac{x^2(x^2+y^5)}{x^7-y^7}=a,\quad \frac{y^2(y^2+x^5)}{x^7-y^7}=b.$$

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 750 (4 сер.). На полуокружности даннаго діаметра $AB=2R$ построить точку C такъ, чтобы для нея произведеніе хорды AC на длину перпендикуляра CD, опущеннаго изъ этой точки на діаметръ, достигала *maximum*'a.

О. Фроловъ (Вольскъ).

№ 751 (4 сер.). Въ полукругъ вписана ломаная, состоящая изъ трехъ сторонъ a_p, a_q, a_r, которыя суть соотвѣтственно стороны правильныхъ многоугольниковъ о p, q, r сторонахъ. Опредѣлить численныя значенія p, q и r.

В. Шлыгинъ (ст. Урюпинская).

№ 752 (4 сер.). Доказать, что число

$$\left(n-\frac{t^2-1}{16}\right)^{8n}-1$$

дѣлится на $16n+1$, если $16n+1$ — простое число, которое не есть дѣлитель t и если $\frac{t^2-1}{16}$ — цѣлое число

А. Брюхановъ (Иркутскъ).

№ 753 (4 сер.). Построить отрѣзокъ наименьшей длины, раздѣляющій данный треугольникъ ABC на двѣ равновеликія части.

(Заимств.).

№ 754 (4 сер.). Съ высотъ $H=40$ метровъ и $h=10$ метровъ брошены одновременно два тѣла: одно съ высоты H внизъ безъ начальной скорости и другое съ высоты h вверхъ съ нѣкоторой начальной скоростью. Опредѣлить эту скорость, зная, что оба тѣла достигаютъ земли одновременно. Опредѣлить также разстояніе между тѣлами въ тотъ моментъ, когда брошенное вверхъ тѣло достигаетъ точки наивысшаго поднятія.

Л. Ямпольскій (Одесса).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 644 (4 сер.). *Доказать, что число*

$$(a-b)\sqrt{ab}$$

дѣлится на 24, если ab *есть точный квадратъ и если* a *и* b *суть цѣлыя числа одинаковой четности.*

Пусть d—общій дѣлитель чиселъ a и b. Тогда $\frac{a}{d}=x$, $\frac{b}{d}=y$, гдѣ x и y—числа взаимно простыя. Перемноживъ равенства $\frac{a}{d}=x$, $\frac{b}{d}=y$ получимъ $\frac{ab}{d^2}=xy$ (1). Пусть

$$x=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n} \quad (2), \quad y=q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\cdots q_m^{\beta_m} \quad (3),$$

гдѣ $p_1, p_2, \ldots, p_n$—различные простые множители разложенія x и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ —ихъ соотвѣтственные показатели, $q_1, q_2, \ldots, q_m$ — различные простые множители разложенія y и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ — ихъ соотвѣтственные показатели. Изъ равенствъ (2), (3) находимъ

$$xy=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\cdots q_m^{\beta_m} \quad (4).$$

Такъ какъ числа x и y взаимно простыя, то въ рядѣ простыхъ чиселъ $p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_m$ нѣтъ одинаковыхъ, а потому формула (4) даетъ разложеніе xy. Но по условію ab есть точный квадратъ, а потому (см. (1)) и xy есть точный квадратъ; слѣдовательно (см. (4)) каждый изъ показателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ есть число четное, откуда вытекаетъ, что каждое изъ чиселъ x и y (см. (2), (3)) есть точный квадратъ. Полагая $x=m^2$, $y=n^2$, гдѣ m и n числа цѣлыя, имѣемъ: $a=dx=dm^2$, $b=dy=dn^2$, откуда

$$(a-b)\sqrt{ab}=(dm^2-dn^2)\sqrt{d^2m^2n^2}=d^2(m^2-n^2)mn \quad (5).$$

Пусть числа a и b оба нечетныя; тогда и m и n, какъ ихъ дѣлители, суть числа нечетныя, т. е. $m=2\alpha+1$, $n=2\beta+1$, гдѣ α и β числа цѣлыя. Слѣдовательно

$$m^2-n^2=(2\alpha+1)^2-(2\beta+1)^2=4[\alpha(\alpha+1)-\beta(\beta+1)] \quad (6).$$

Каждое изъ чиселъ $\alpha(\alpha+1)$ и $\beta(\beta+1)$, какъ произведеніе двухъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ, есть число четное; поэтому (см. (6)) m^2-n^2 кратно 8, а потому (см. (5)) и $(a-b)\sqrt{ab}$ кратно 8. Пусть теперь a и b оба четныя; тогда и d, ихъ общій наибольшій дѣлитель, есть число четное, а потому (см. (5)) d^2 кратно 4; но $(m^2-n^2)mn$ всегда кратно 2, такъ какъ при нечетности каждаго изъ чиселъ m и n разность m^2-n^2 кратна 2, а при четности хоть одного изъ нихъ произведеніе mn кратно 2; слѣдовательно (см. (5)) число $d^2(m^2-n^2)mn$ кратно 8, а потому и $(a-b)\sqrt{ab}$ кратно 8. Итакъ, при условіяхъ, указанныхъ въ задачѣ, число $(a-b)\sqrt{ab}$ кратно 8; но оно кратно и 3. Дѣйствительно, если хоть одно изъ чиселъ m или n кратно 3, то mn кратно 3, а потому (см. (5)) $(a-b)\sqrt{ab}$ кратно 3; если же m и n оба не кратны 3, то по теоремѣ Fermat'а разности m^2-1 и n^2-1 кратны 3, а потому и число $m^2-1-(n^2-1)=m^2-n^2$, а вмѣстѣ съ тѣмъ (см. (5)) и число $(a-b)\sqrt{ab}$ кратно 3. Будучи кратно взаимно простыхъ чиселъ 8 и 3, число $(a-b)\sqrt{ab}$ кратно ихъ произведенія $8.3=24$.

Э. Лейнъкъ (Рига); *Г. Лебедевъ* (Полтава).

№ 645 (4 сер.). *Данъ полукругъ діаметра* AB=2R. *Изъ точки* M *дуги полукруга опускаютъ перпендикуляръ* MP, *проводятъ хорды* AM *и* BM *и затѣмъ вращаютъ всю фигуру вокругъ оси* AB. *Полагая* AP=x, *вычислить въ функціи* R *и* x *выраженіе*

$$y = \frac{\text{об. сегм. AM} + 4\ \text{об. сегм. BM}}{\text{об.}\triangle \text{AMB}},$$

гдѣ об. сегм. AM, об. сегм. BM и об. △ AMB *суть объемы тѣлъ, получаемыхъ соотвѣтственно отъ вращенія вокругъ оси* AB *сегментовъ, отсѣкаемыхъ отъ полукруга хордами* AM *и* BM, *и треугольника* AMB. *Изслѣдовать, какъ измѣняется* y *съ измѣненіемъ* x *и найти* minimum y.

Заимств. изъ *l'Éducation Mathématique.*

Обозначимъ PB черезъ z и MP черезъ u; тогда

$$x+z=2R \quad (1), \qquad u^2=xz=x(2R-x) \quad (2).$$

Выражая об. сегм. AM, какъ разность тѣлъ, полученныхъ отъ вращенія вокругъ AB полусегмента AMP и треугольника AMP, получимъ (см. (2))

$$\text{об. сегм. } AM=\pi x^2\left(R-\frac{x}{3}\right)-\frac{\pi u^2 x}{3}=\frac{\pi x^2(3R-x)-\pi x^2(2R-x)}{3}=\frac{\pi x^2 R}{3} \quad (3).$$

Подобнымъ же образомъ находимъ, что

$$\text{об. сегм. } BM=\frac{\pi z^2 R}{3} \quad (4).$$

Наконецъ (см. (2), (1))

$$\text{об.}\triangle AMB=\frac{\pi u^2 x}{3}+\frac{\pi u^2 z}{3}=\frac{\pi u^2(x+z)}{3}=\frac{2\pi Rxz}{3} \quad (5).$$

Слѣдовательно (см. (3), (4), (5))

$$y=\frac{\dfrac{\pi x^2 R}{3}+\dfrac{4\pi z^2 R}{3}}{\left(\dfrac{2\pi Rxz}{3}\right)}=\frac{x^2+4z^2}{2xz}=\frac{x}{2z}+\frac{2z}{x} \quad (6).$$

Называя положительную величину $\frac{x}{2z}$ черезъ v^2, получимъ (см. (6))

$$y=v^2+\frac{1}{v^2}=\left(v^2+\frac{1}{v^2}-2\right)+2=\left(v-\frac{1}{v}\right)^2+2 \quad (7),$$

откуда видно, что minimum y наступаетъ при $v-\frac{1}{v}=0$, т. е. (см. (1)) при $v^2=\frac{x}{2z}=\frac{x}{2(2R-x)}=1$ (8), откуда $x=\frac{4R}{3}$; этому значенію x отвѣчаетъ наименьшее значеніе y, равное (см. (7)) 2. Замѣнимъ въ равенствѣ (7) значеніе v^2 черезъ v'^2 и назовемъ соотвѣтствующее значеніе y черезъ y'; тогда

$$y'-y=v'^2-\frac{1}{v'^2}-v^2+\frac{1}{v^2}=(v'^2-u^2)\left(1-\frac{1}{v^2 v'^2}\right) \quad (9).$$

Изъ равенства (9) видно, что при $0<v^2<v'^2<1$ имѣемъ $y'<y$, а при $1<v^2<v'^2$ имѣемъ $y'>y$, такъ что при возрастаніи v^2 отъ 0 до 1 значеніе y убываетъ (см. (7)) отъ ∞ до 2, а при возрастаніи v^2 отъ 1 до ∞ значеніе y возрастаетъ отъ 2 до ∞; но такъ какъ сумма двухъ положительныхъ чиселъ x и z постоянна (см. (1)), то отношеніе $\frac{x}{z}$ и x возрастаютъ одновременно, а потому (см. (8)) при возрастаніи x отъ 0 до $\frac{4R}{3}$ значеніе v^2 возрастаетъ отъ 0 до 1, а при возрастаніи x отъ $\frac{4R}{3}$ до $2R$ значеніе v^2 возрастаетъ отъ 1 до ∞, Итакъ, при возрастаніи x отъ 0 до $\frac{4R}{3}$ значеніе y убываетъ отъ ∞ до 2, а при дальнѣйшемъ возрастаніи x отъ $\frac{4R}{3}$ до $2R$ значеніе y возрастаетъ отъ 2 до ∞.

Э. Лейнъкъ (Рига); *Н. С.* (Одесса).

№ 647 (4 сер.) *Рѣшить систему уравненій*

$$x(y-z)+y(y+z)=a,$$
$$y(z-x)+z(z+x)=b,$$
$$z(x-y)+x(x+y)=c.$$

Складывая второе и третье изъ данныхъ уравненій, находимъ

$$x^2+2xz+z^2=b+c, \quad \text{или} \quad (x+z)^2=b+c \qquad (1).$$

Подобнымъ же образомъ получимъ

$$(y+z)^2=a+b, \quad (x+y)^2=a+c \qquad (2).$$

Изъ равенствъ (1), (2) находимъ

$$x+z=\pm\sqrt{b+c}, \quad y+z=\pm\sqrt{a+b}, \quad x+y=\pm\sqrt{a+c} \qquad (3).$$

Рѣшая систему (3), получимъ

$$x=\frac{\pm\sqrt{b+c}\pm\sqrt{a+c}\mp\sqrt{a+b}}{2},$$

$$y=\frac{\pm\sqrt{a+c}\pm\sqrt{a+b}\mp\sqrt{b+c}}{2}, \qquad (4).$$

$$z=\frac{\pm\sqrt{a+b}\pm\sqrt{b+c}\mp\sqrt{a+c}}{2}.$$

Такъ какъ система уравненій (1), (2), равносильная данной, удовлетворяется при любомъ выборѣ знака передъ радикалами въ формулахъ (3), то въ каждой изъ формулъ (4) въ отдѣльности можно поставить передъ радикалами либо верхніе, либо нижніе знаки по произволу; такимъ образомъ, данная система имѣетъ вообще 8 рѣшеній.

Д. Коляnковскій (Брацлавъ); *Орловъ* (Спб.); *Н. Орлицкій* (Варшава); *Э. Лейнъкъ* (Рига); *С. Конюховъ* (Никитовка); *Н. Доброгаевъ* (Немировъ); *Г. Лебедевъ* (Харьковъ); *Я. Виленкинъ* (Елатьма).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера. ул. Новосельскаго, д. № 66.