

Обложка
щется

Обложка
щется

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№№ 404—405.

Содержаніе: Вертящійся волчокъ. Публичный докладъ, прочитанный въ засѣданіи „Британской Ассоціаціи“ въ Лидсѣ (Продолженіе). Проф. Джона Перри. — Законъ Паскаля. Историческій очеркъ профессора П. Дюгема. Переводъ *И. Л.* — Людвигъ Больцманъ. Къ вопросу объ основахъ механики и физики. Перевъ *И. Левитова*. — О прямой Эйлера. *Дм. Ефремова*. — Передача на разстояніи автографовъ и чертежей. — Простой выводъ основныхъ формулъ сферическихъ треугольниковъ. — Научная хроника: Первый международный конгрессъ для изученія радіологіи и іонизаціи. Математическая идея, лежащая въ основаніи Птолемеовой системы міра. — Разныя извѣстія: Присужденіе медалей Лондонскаго Королевскаго Общества. — Задачи для учащихся, №№ 689—694 (4 сер.). — Рѣшенія задачъ, №№ 588, 589, 590. — Объявленія.

ВЕРТЯЩІЙСЯ ВОЛЧОКЪ.

Публичный докладъ, прочитанный въ засѣданіи „Британской Ассоціаціи“ въ Лидсѣ.

Проф. Джона Перри.

(Продолженіе *).

Вы знаете, что гиростатъ, который подвѣшенъ такъ, что можетъ вращаться совершенно свободно вокругъ всякой оси, проходящей черезъ его центръ тяжести, принимаетъ въ пространствѣ опредѣленное направленіе, остающееся неизмѣннымъ, какъ бы ни поворачивать и ни передвигать подставку, на которой онъ подвѣшенъ. Его ось нельзя заставить перемѣнить свое направленіе какимъ бы то ни было образомъ. Этотъ гиростатъ (фиг. 49) не вполне свободенъ отъ всякаго тренія осей, о кото-

*) См. № 401 „Вѣстника“.

ромъ я говорилъ, и даже малѣйшее треніе оказываетъ на гиростатъ извѣстное дѣйствіе, вліяющее неблагоприятно на опытъ, который я хочу описать. Но мы должны помнить, что еслибы совсѣмъ не было никакого тренія, то ось гиростата, даже если бы онъ совсѣмъ не вращался, сохраняла бы въ пространствѣ неизмѣнное направленіе. Однако, вращающійся гиростатъ имѣетъ то преимущество, что дѣйствіе тренія не такъ сильно вліяетъ на положеніе его оси. Чѣмъ быстрѣ вращеніе, тѣмъ большее право мы имѣемъ пренебречь вліяніемъ тренія. Вы сами видѣли дѣйствіе, которое производитъ перемѣщеніе гиро-



Фиг. 49.

стата всевозможными способами: во-первыхъ, если гиростатъ не вращается, то треніе вызываетъ очень большое отклоненіе въ направленіи оси; во-вторыхъ, если, наоборотъ, гиростатъ, вращается, то, хотя треніе попрежнему имѣетъ мѣсто, но Вы видите, что приборъ подвергается при опытѣ еще болѣе рѣзкимъ перемѣщеніямъ, чѣмъ раньше, и все-таки его ось остается все время замѣтно параллельной самой себѣ. Я ставлю этотъ приборъ на столъ; онъ, конечно, принимаетъ участіе въ суточномъ движеніи земли, вращаясь вмѣстѣ съ нею вокругъ земной оси. Если бы ось совершенно неизмѣнно сохраняла свое направленіе и если бы она сейчасъ указывала своимъ концомъ въ горизонтальномъ направленіи какъ разъ на востокъ, то 6 часами позже она была бы направлена къ сѣверу и притомъ была бы наклонена внизъ; еще черезъ шесть часовъ она была бы направлена на западъ, принявъ горизонтальное положеніе, а послѣ полного оборота земли она указывала бы на ту же самую точку.

Теперь представьте себѣ, что я произвожу опытъ и вижу, что ось прибора сейчасъ указываетъ въ этой комнатѣ какъ разъ

на востокъ, между тѣмъ какъ по истеченіи нѣкотораго промежутка времени она оказывается направленной на западъ; такъ какъ я знаю, что гиростатъ сохраняетъ все время въ пространствѣ одно и то же направленіе, то отсюда вытекаетъ съ совершенной ясностью, что комната измѣнила свое положеніе въ пространствѣ. Допустите далѣе, что ось направлена теперь къ полярной звѣздѣ; тогда она и черезъ 6, 12, 18 или 24 часа всегда будетъ указывать на полярную звѣзду.

Однако, не легко устроить себѣ такого рода гиростатъ, лишенный тренія и способный сохранить быстрое вращеніе въ теченіе промежутка времени, достаточнаго для того, чтобы сдѣлать вращеніе комнаты замѣтнымъ для многочисленнаго собранія. вмѣсто этого я Вамъ расскажу, какъ сорокъ лѣтъ тому назадъ было доказано въ одной лабораторіи, что земля вращается вокругъ своей оси. Этотъ опытъ связанъ съ именемъ Фуко (Foucault), съ именемъ того естествоиспытателя, который вмѣстѣ съ Физо (Fizeau) показалъ, какъ можно измѣрить въ лабораторіи скорость свѣта, а затѣмъ, зная скорость свѣта,—также и разстояніе земли отъ солнца. Этотъ опытъ былъ намѣченъ въ Единбургѣ Лангомъ (Lang) въ 1836 году, но былъ произведенъ въ первый разъ Фуко въ 1852 году. При помощи этого опыта, если бы Вы находились на тѣлѣ, съ котораго Вы не имѣли бы возможности видѣть ни звѣздъ, ни какихъ либо другихъ внѣшнихъ предметовъ,—напримѣръ, если бы Вы жили въ подземныхъ странахъ,—Вы могли бы, во-первыхъ, узнать, имѣетъ ли мѣсто вращательное движеніе, и если оно имѣетъ мѣсто, то опредѣлить его скорость; во-вторыхъ, Вы могли бы опредѣлить меридіанъ, т. е. точно указать направленіе къ сѣверу; въ третьихъ, Вы могли бы узнать географическую широту мѣста. Возьмемъ гиростатъ въ родѣ этого (фиг. 46), но только гораздо большій, и подвѣсимъ его такъ, чтобы треніе было ослаблено въ значительно большей степени; тогда онъ будетъ имѣть возможность свободно двигаться въ горизонтальномъ и въ вертикальномъ направленіи. Цапфами колецъ для вертикальнаго движенія должны служить лезвья ножей изъ твердой стали. Для горизонтальнаго же движенія Фуко пользовался тонкой стальной проволокой. Далѣе, пусть на внѣшнемъ кругѣ нанесена въ поперечномъ направленіи точная шкала. Теперь мы при помощи микроскопа, снабженнаго перекрестными нитями, попробуемъ узнать, движется ли гиростатъ въ горизонтальномъ направленіи. Если тщательно произвести наблюденія, то оказывается, что такое движеніе имѣетъ мѣсто; но это не движеніе

гиростата, а движение микроскопа. Въ действительности микроскопъ, какъ всѣ другіе находящіеся въ комнатѣ предметы, движется кругомъ рамы гиростата.

Разсмотримъ теперь, что произошло. Комната вращается вокругъ земной оси, и мы знаемъ скорость этого вращенія; для нашей теперешней цѣли намъ нужно узнать, какая часть всего вращенія земли вокругъ оси совершается вокругъ какой либо вертикальной линіи въ комнатѣ. Если бы комната находилась на сѣверномъ полюсѣ, то вращеніе земли вокругъ своей оси цѣликомъ происходило бы вокругъ этой вертикали. Если бы комната находилась на экваторѣ, то не происходило бы никакого вращенія вокругъ ея вертикали. Подъ нашей же

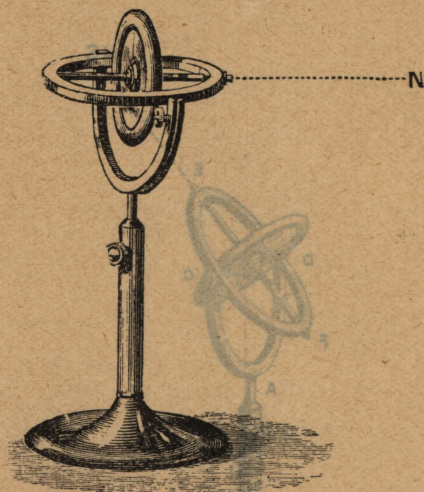


Фиг. 50.

широтой горизонтальная скорость вращенія вокругъ вертикальной оси составляетъ только четыре пятыхъ всей скорости вращенія земли вокругъ ея оси; эту величину мы и можемъ измѣрить при помощи нашего микроскопа. Слѣдовательно, въ какомъ-либо мѣстѣ на экваторѣ этотъ опытъ не далъ бы никакого результата; наоборотъ, подъ нашей широтой мы можемъ при помощи его получить лабораторное доказательство вращенія

земли. Фуко произвелъ измѣренія такого рода съ большою точностью.

Если теперь защемить раму гиростата такимъ образомъ, чтобы онъ не могъ совершать никакого другого движенія, кромѣ движенія въ горизонтальной плоскости, то тогда не можетъ обнаружиться то движеніе вокругъ вертикальной оси, которое земля стремится сообщить гиростату; однако, въ этомъ случаѣ вращеніе земли заставляетъ гиростатъ вращаться вокругъ оси, которая направлена съ сѣвера на югъ, вслѣдствіе чего его ось стремится расположиться въ направленіи съ юга на сѣверъ (фиг. 51). Поэтому съ помощью инструмента такого рода легко опре-

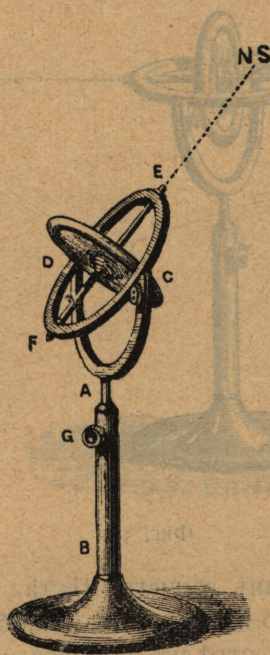


Фиг. 51.

дѣлать истинный меридіанъ даннаго мѣста. Если бы совсѣмъ не было никакого тренія, то инструментъ колебался бы около истиннаго меридіана, подобно стрѣлкѣ компаса, но только съ гораздо большимъ періодомъ колебанія.

Съ чувствомъ смущенія и удивленія обыкновенно узнаютъ въ первый разъ о томъ, что всѣ вращающіяся вокругъ своей оси тѣла, какъ, напримѣръ, маховыя колеса паровыхъ машинъ и т. п., в теченіе всего того времени, пока они находятся въ движеніи, постоянно стремятся повернуть свою ось по направленію къ полярной звѣздѣ; это непрерывное стремленіе вращающихся тѣлъ остается тшетнымъ, хотя они и рвутся со своихъ подставокъ къ объекту своихъ стремленій.

Опредѣливши меридіанъ (фиг. 51), мы можемъ теперь приступить къ третьему опыту. Поставимъ препятствіе горизонтальному движенію, т. е. движенію вокругъ вертикальной оси, но предоставимъ инструменту возможность двигаться вертикально въ плоскости меридіана вокругъ горизонтальной оси, подобно пассажному прибору въ обсерваторіи. Движеніе инструмента вмѣстѣ съ землею будетъ стремиться измѣнить его наклонное положеніе по отношенію къ земной оси; поэтому инструментъ располагается параллельно послѣдней. Тогда суточное вращеніе земли не производитъ уже никакого дальнѣйшаго измѣненія положенія инструмента въ пространствѣ, а потому онъ остается постоянно направленнымъ къ полярной звѣздѣ (фиг. 52). Можно



Фиг. 52.

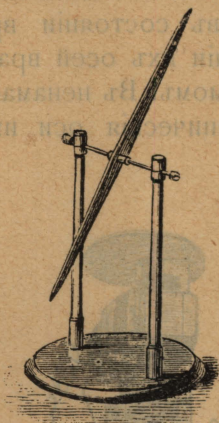
было бы произвести очень интересный опытъ, измѣряя при помощи точныхъ химическихъ вѣсовъ ту силу, съ которой подымается ось гиростата и такимъ образомъ въ извѣстномъ смыслѣ слова взвѣсить вращательное движеніе земли *).

Повернемъ теперь подставку *GB* прибора на 90° , послѣ чего ось гиростата получитъ возможность двигаться только

*) Сэръ William Thomson произвелъ это измѣреніе.

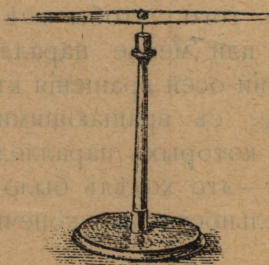
въ плоскости, образующей съ плоскостью меридіана прямой уголъ; тогда приборъ будетъ находиться, очевидно, подъ влияніемъ только одной вертикальной слагающей вращательнаго движенія земли, а потому ось прибора направится вертикально внизъ.

Послѣднее явленіе, какъ и предыдущее, о которомъ я говорилъ выше, имѣть глубокой смыслъ. Вотъ магнитная стрѣлка (фиг. 53),



Фиг. 53.

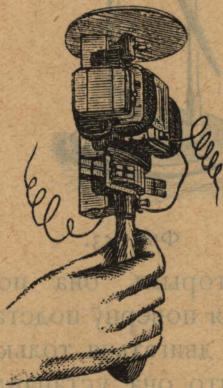
которая по способу, которымъ она подвѣшена, называется стрѣлкой наклоненія. Если я поверну подставку такъ, что стрѣлка будетъ имѣть возможность двигаться только перпендикулярно къ меридіану, то Вы видите, что она устанавливается вертикально. Нельзя не остановиться на этомъ сходствѣ свойствъ магнитной стрѣлки (фиг. 54) и гиростата (фиг. 51); оба прибора показываютъ на



Фиг. 54.

сѣверъ, коль скоро имъ предоставлена возможность совершать только горизонтальное движеніе, и Вы видите, что гиростатомъ,

въ которомъ треніе въ значительной мѣрѣ ослаблено, можно было бы пользоваться, какъ компасомъ или, во всякомъ случаѣ, какъ средствомъ для опредѣленія поправки компаса ¹⁾. Я сейчасъ обратилъ Ваше вниманіе на нѣкоторыя аналогіи; но необходимо подчеркнуть, что хотя это и аналогіи, но аналогіи вовсе не случайныя, такъ какъ несомнѣнно есть динамическая связь между магнетизмомъ и явленіями, наблюдаемыми въ гироскопѣ. Основой магнетизма является вращательное движеніе. Молекулы матеріи дѣйствительно находятся въ состояніи вращенія, и извѣстнаго рода согласіе въ направленіи ихъ осей вращенія вызываетъ то, что мы называемъ магнетизмомъ. Въ ненамагниченномъ стальномъ стержнѣ всѣ эти микроскопическія оси имѣютъ различныя на-



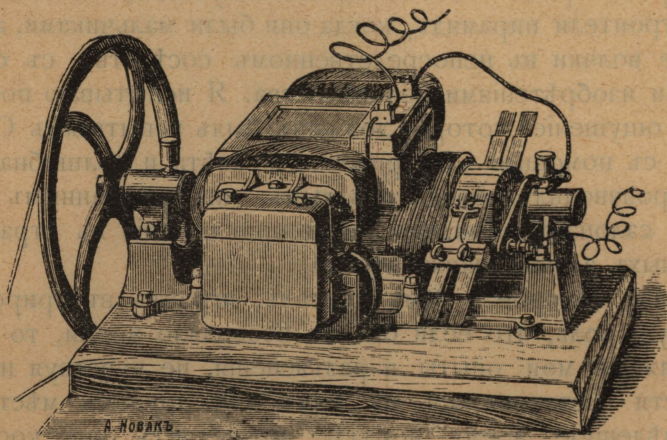
Фиг. 55.

правленія. Такимъ образомъ процессъ намагничиванія состоитъ по-просту въ достиженіи того, чтобы всѣ эти вращенія происходили вокругъ болѣе или менѣе параллельныхъ осей, т. е. онъ состоитъ въ приведеніи осей вращенія къ совпаденію. Масса, подобная сотовому меду, съ вращающимися гироскопами въ каждой ячейкѣ, всѣ оси которыхъ параллельны и которые вращаются въ одну сторону—это хотѣлъ было я сказать, и будетъ магнитъ; но въ дѣйствительности это, конечно, вовсе не будетъ

¹⁾ Я долженъ замѣтить, что въ первомъ случаѣ я говорю объ истинномъ меридіанѣ, а во второмъ—о магнитномъ меридіанѣ.

магнить со всѣми его свойствами, а только нѣчто во многихъ отношеніяхъ похожее на магнить ¹⁾.

Нѣкоторые изъ Васъ, видя около стола электромоторъ и другія электрическія приспособленія, подумаютъ, что послѣдніе имѣютъ какое-либо отношеніе къ теоріи, разъясняющей магнитныя явленія. Но я долженъ сознаться, что я пользуюсь электромоторомъ, который я держу въ рукѣ (фиг. 55), исключительно, какъ подходящимъ средствомъ, которое я могъ подыскать для того, чтобы приводить во вращеніе мои волчки и гиростаты. На веретенѣ этого мотора укрѣпленъ круглый кусокъ дерева; переставляя этотъ включатель, я могу зарядить моторъ электрической энергіей, и тогда деревянный кругъ приходитъ въ очень быстрое вращеніе. Достаточно мнѣ прикоснуться только краемъ его къ этимъ волчкамъ или гиростатамъ, чтобы сообщить имъ вращеніе. Вы видите, что я могу въ нѣсколько секундъ привести во вращеніе полдюжины волчковъ и гиростатовъ, напримѣръ, эту цѣпь гиростатовъ. Наоборотъ, этотъ моторъ большихъ размѣровъ (фиг. 56), слишкомъ тяжелый для того, чтобы я могъ



Фиг. 56.

сдвинуть его своими руками, прикрѣпить къ столу; я примѣняю

¹⁾ Если большой кусокъ желѣза заставить быстро вращаться сначала въ одну, а потомъ въ другую сторону вблизи тщательно подвѣшенной магнитной стрѣлки, которая хорошо защищена отъ дѣйствія воздушныхъ теченій, то, я думаю, должны произойти явленія, представляющія величайшій интересъ для теоріи магнетизма. До сихъ поръ мнѣ не удалось при этихъ изслѣдованіяхъ обнаружить какого-либо слѣда магнитнаго дѣйствія, но я приписываю этотъ неуспѣхъ относительной медленности вращенія, которое я примѣнялъ, а также недостаточной чувствительности моего магнетометра.

его для приведенія во вращеніе болѣе тяжелыхъ приборовъ. Теперь Вы навѣрно понимаете, что я пользуюсь этими аппаратами приблизительно такъ, какъ могли бы ими воспользоваться парикмахеръ, чтобы съ помощью ихъ причесать Ваши волосы, или же Сара или Жанна, чтобы при помощи ихъ почистить ножи, или, наконецъ, я пользуюсь ими совершенно такъ же, какъ я могъ бы воспользоваться и небольшой паровой машиной, если бы она болѣе соотвѣтствовала моимъ цѣлямъ. Но для меня было проще взять съ собою изъ Лондона эту батарею аккумуляторовъ и эти моторы, чѣмъ мѣшки съ углемъ, котлы и паровыя машины. Однако, при желаніи мы можемъ усмотрѣть болѣе глубокой смыслъ въ этой роли электричества. Любовь стара, какъ горы, между тѣмъ какъ вѣсточки любви разносятся ежедневно далеко по всей землѣ съ помощью телеграфа, этого самого молодого изъ всѣхъ покорныхъ слугъ человѣчества. А эти волчки были извѣстны, быть можетъ, нашимъ праотцамъ, и все-таки мы извлекли изъ нихъ лишь небольшую частицу той мудрости, которую волчки непрерывно предлагаютъ вниманію тупоумнаго міра. Игрушки вродѣ этихъ волчковъ запускали, быть можетъ, первые строители пирамидъ, когда они были мальчиками, а здѣсь Вы видите волчки въ непосредственномъ сосѣдствѣ съ самыми послѣдними изобрѣтеніями человѣчества. Я испытываю почти то же самое ощущеніе, которое долженъ былъ испытывать Стэнли, когда онъ съ помощью электрическаго свѣта и волшебнаго фонаря воспроизводилъ передъ ослѣдлымъ, цивилизованнымъ обществомъ въ салонахъ Лондона свои приключенія въ страшныхъ первобытныхъ африканскихъ лѣсахъ.

Явленіе, которое я Вамъ описалъ, играетъ въ природѣ такую важную роль, что если бы это позволяло время, то я могъ бы продолжать мои опыты и разъясненія, не чувствуя никакой потребности остановиться на томъ или другомъ мѣстѣ. Но время, удѣленное моему докладу, позволяетъ мнѣ коснуться еще только одного вопроса, а именно связи между свѣтомъ и электричествомъ, съ одной стороны, и свойствами волчковъ, съ другой.

(Продолженіе слѣдуетъ).

<http://ivofem.ru>

Законъ Паскаля.

Историческій очеркъ профессора Р. Duhem (Бордо).

Переводъ Г. Л.

(Окончаніе *).

VII. Вліяніе Торричелли.

Паскаль не ограничился доказательствомъ основного закона гидростатики помощью аксіомы, которую Декартъ кладетъ въ основу всей статики; чтобы обосновать свой законъ, онъ прибѣгнулъ еще къ другому принципу, который заключается въ томъ, что „подъ вліяніемъ своего вѣса тѣло не можетъ перемѣститься безъ того, чтобы центръ тяжести не занялъ при этомъ низшаго положенія“.

Одной этой аксіомы достаточно, чтобы обосновать всю статику, и Паскаль доказалъ это: „Съ помощью этого принципа“, говоритъ онъ въ своемъ маленькомъ *Трактатѣ механики*, „я объяснилъ, какъ достигается то умноженіе силъ, которое даютъ всѣ другіе инструменты механики, изобрѣтенные до настоящаго времени. Дѣйствительно, я показалъ, что, благодаря конструкціи этихъ всѣхъ машинъ, помощью которыхъ малый грузъ уравновѣшиваетъ большой, грузы эти (при равновѣсіи) такъ расположены, что, какое бы положеніе они ни заняли, ихъ общій центръ тяжести не можетъ занять низшаго положенія: отсюда слѣдуетъ, что они должны оставаться въ покоѣ, то есть сохранять равновѣсіе“.

Чтобы отыскать происхожденіе принципа статики, на который Паскаль ссылается въ этомъ отрывкѣ, пришлось бы обратиться къ далекому прошлому, къ тѣмъ ученіямъ, которыя зародились въ Сорбонской школѣ номиналистовъ середины XIV столѣтія, въ частности, пришлось бы обратиться къ трудамъ Альберта Саксонскаго. Можно было бы прослѣдить ту непрерывающуюся дѣнь традицій, которая тянется отъ схоластики 1350 года до Галилея; мы въ другомъ мѣстѣ¹⁾ пытались выполнить этотъ трудъ; адѣсь мы этимъ не будемъ заниматься, а ограничимся лишь разсмотрѣніемъ тѣхъ сочиненій, гдѣ эти идеи, корень которыхъ уходитъ въ глубину трехъ столѣтій, созрѣли окончательно, — а именно, сочиненій, несомнѣнно служившихъ источникомъ, изъ котораго черпалъ Паскаль: эту роль сыграли, главнымъ образомъ, творенія Торричелли.

*) См. № 401 „Вѣстника“.

¹⁾ Въ главахъ XV и XVI нашей работы „*Origines de la Statique*“; эти главы скоро будутъ опубликованы въ журналѣ „*Revue des Questions scientifiques*“.

Въ 1644 г. во Флоренціи вышелъ сборникъ математическихъ сочиненій Евангелиста Торричелли ¹⁾. Въ этомъ сборникѣ помѣщенъ трактатъ о движеніи тяжелыхъ тѣлъ ²⁾, который Торричелли, бывшій тогда ученикомъ Р. Castelli, послалъ изъ Рима Галилею. Престарѣлый геометръ, сосланный въ свою виллу d'Arcetri, доживалъ тогда свои дни, удрученный слѣпотой и болѣзнию, тяжесть которыхъ облегчала ему лишь заботливость, которой окружалъ его Вивіани; послѣдній пригласилъ автора замѣчательнаго трактата, и такимъ образомъ Галилей на закатѣ своихъ дней былъ учителемъ Торричелли.

Въ трактатѣ „*Sur le mouvement des graves*“ существенную роль играетъ теорія наклонной плоскости. Торричелли выводитъ ее изъ слѣдующаго ³⁾ принципа: „два тяжелыхъ тѣла, соединенныхъ вмѣстѣ, сами по себѣ не могутъ придти въ движеніе безъ того, чтобы центръ тяжести этой системы не опустился“.

Предложеніе это Торричелли комментируетъ слѣдующимъ образомъ: „Когда два тяжелыхъ тѣла соединены между собою такимъ образомъ, что одно изъ нихъ не можетъ придти въ движеніе, не вызвавъ тѣмъ самымъ движенія другого, то эти два тѣла можно разсматривать, какъ одно тяжелое тѣло, состоящее изъ двухъ частей, независимо отъ того, соединены ли эти два тѣла другъ съ другомъ посредствомъ рычага или блока, или же какимъ либо другимъ механизмомъ. Если такое сложное твердое тѣло составлено такимъ образомъ, что его центръ тяжести никоимъ образомъ не можетъ занять низшаго положенія, то оно, конечно, будетъ оставаться въ покоѣ въ томъ положеніи, которое оно занимаетъ: въ противномъ случаѣ его движеніе было бы тщетно, такъ какъ тѣло, передвигаясь лишь въ горизонтальномъ положеніи, не стремилось бы внизъ“.

Въ трактатѣ „*De motu gravium*“ Торричелли примѣняетъ указанный принципъ лишь къ случаю равновѣсія тяжелаго тѣла на наклонной плоскости; въ другомъ трактатѣ ⁴⁾ онъ изъ того же принципа выводитъ законъ равновѣсія рычага. Съ помощью этихъ указаній не трудно было вывести изъ того же принципа теорію различныхъ простыхъ машинъ. Это и выполнилъ Паскаль въ своемъ небольшомъ трактатѣ „*Traité de Mécanique*“, который до насъ не дошелъ.

Несомнѣнно, что Паскаль былъ знакомъ съ сочиненіями

¹⁾ „*Opera Geometrica*“ Evangelistae Torricelli: Teorentiae, typis Amatoris Massae et Laurentii de Landis, 1644.

²⁾ „*De motu gravium naturaliter descendantium, et projectorum libri duo*, in quibus ingenium naturae circa parabolicam lineam ludentis per motum ostenditur, et universa projectorum doctrina unius, descriptione semicirculi, absolvitur“.

³⁾ Torricelli: „*De motu gravium*“, стр. 99.

⁴⁾ *De dimensione parabolae solidique hyperbolici problemata duo*, стр. 14.

Торричелли, въ которыхъ излагается указанный новый принципъ статики.

Въ 1644 г. П. Мерсеннъ „выражаетъ надежду ¹⁾, что скоро появятся въ свѣтъ извѣстные труды глубокомысленнаго преемника Галилея—Торричелли“.

Дѣйствительно, трактаты послѣдняго скоро сдѣлались извѣстными въ кругу друзей Мерсенна. Въ 1647 г. въ этомъ кругу было еще неизвѣстно имя того, кому принадлежитъ идея знаменитаго опыта со ртутью. „Но, говоритъ Паскаль ²⁾, такъ какъ мы всѣ горѣли нетерпѣніемъ узнать имя этого человѣка, то мы написали объ этомъ въ Римъ (по адресу) Cavalier del Posso; послѣдній сообщилъ намъ (гораздо позже появленія въ свѣтъ моей книги), что открытіе принадлежитъ великому Торричелли, состоящему преподавателемъ математики у флорентійскаго герцога. Намъ пріятно было узнать, что авторомъ опыта оказался столь знаменитый и геніальный человѣкъ, котораго мы знали еще раньше по его геометрическимъ сочиненіямъ, превосходящимъ своими достоинствами всѣ подобные труды древнихъ геометровъ. Я увѣренъ, что съ такимъ моимъ отзывомъ согласится всякій, кто въ состояніи судить объ этихъ вещахъ“.

Итакъ, Паскаль былъ знакомъ съ сочиненіемъ Торричелли „*Opera geometrica*“ еще до того, какъ онъ началъ свои изслѣдованія о гидростатикѣ.

VIII.—Что имѣлъ въ виду Паскаль, составляя свой „трактатъ о равновѣсіи жидкостей“?

Мы остановили свое вниманіе на всѣхъ авторахъ, которые писали о равновѣсіи жидкостей непосредственно до Паскаля, и не задавались при этомъ вопросомъ, въ какой степени они сами находились подъ вліяніемъ еще болѣе старшихъ мыслителей, на примѣръ, Леонарда Да Винчи ³⁾. Мы видѣли, что всѣ указанные нами авторы: Мерсеннъ, Стевинъ, Бенедетти, Галилей, Декартъ и Торричелли оказали свое вліяніе на автора „*Трактата о равновѣсіи жидкостей*“; въ этомъ трактатѣ нѣтъ ни одной такой истины, которая не была бы обязана своимъ происхожденіемъ которому-нибудь изъ перечисленныхъ авторовъ.

Можно ли отсюда сдѣлать выводъ, что твореніе Паскаля есть лишь простая мозаика, рапсодія, лишенная оригинальности, цѣликомъ составленная изъ трудовъ предшественниковъ? Мы можемъ указать, какъ отвѣтилъ бы Паскаль на такую оцѣнку его труда; онъ предвидѣлъ возможность такой оцѣнки и выска-

¹⁾ F. Marini Mersenni Minimi „*Cogitata physico-mathematica*“; phaenomena hydraulica, с. 193.

²⁾ „*Lettre de Pascal a M. de Ribeyre*“ (Oeuvres complètes de Blaise Pascal, t. III, p. 76; Paris, Hachette, 1880).

³⁾ P. Duhem: „*Thimon le Juif et Léonard de Vinci*“. Статья эта въ скоромъ времени будетъ напечатана въ *Bulletin Italien*.

зался по этому поводу не въ „Трактатъ о равновѣсїи жидкостей“, а въ безсмертныхъ наброскахъ, въ видѣ которыхъ онъ оставилъ намъ свою *Апологію*.

„Пусть не говорятъ, что я не создалъ ничего новаго: расположеніе матеріала у меня новое. При игрѣ въ мячъ шаръ вѣдь одинъ и тотъ же, но одинъ игрокъ распоряжается имъ лучше, другой—хуже. Я ничего не имѣлъ бы противъ упрека, что я употребляю тѣ же слова, что и древніе. И подобно тому, какъ мы получаемъ различныя мысли, располагая различнымъ образомъ одни и тѣ же слова, точно такъ одни и тѣ же мысли при различномъ ихъ расположеніи образуютъ далеко не одно и то же цѣлое“.

Нельзя поэтому думать, что Паскаль въ своей гидростатикѣ не создалъ ничего новаго: расположеніе матеріала въ ней представляется новымъ.

Мерсеннъ читалъ все, что было написано о равновѣсїи жидкостей; но его сочиненія объ этомъ предметѣ написаны безъ всякой системы и руководящей мысли и представляютъ собою отрывочныя записи того, что онъ прочиталъ и что онъ самъ думалъ.

Бенедетти, который несомнѣнно находился подъ вліяніемъ идей, ведущихъ свое начало отъ Леонарда де Винчи, открылъ важную истину; но онъ не извлекъ изъ нея никакихъ слѣдствій; отъ его вниманія ускользнулъ даже выводъ принципа гидравлическаго пресса, напрашивавшійся самъ собой.

Стевинъ, несмотря на строгость и логическую безукоризненность, которая онъ обнаружилъ въ своихъ сочиненіяхъ, не замѣтилъ, однако, что законъ о давленіи, которое жидкость оказываетъ на стѣнки сосуда, содержитъ въ себѣ, какъ слѣдствіе, свойства тѣлъ плавающихъ или погруженныхъ. Свойства эти онъ обосновалъ непосредственно, не опираясь на основной законъ гидростатики, а этотъ послѣдній онъ не привелъ въ связь съ принципами статики.

Галилей, напротивъ, старался свести свойства тѣлъ плавающихъ и погруженныхъ къ общимъ законамъ равновѣсія; но изъ этихъ законовъ онъ не сдѣлалъ вывода о величинѣ давленія, которое жидкость оказываетъ на стѣнки сосуда.

Наконецъ, Декартъ и Торричелли формулировали два основныхъ принципа, изъ которыхъ каждый можетъ служить основаніемъ всего ученія о равновѣсїи; но ни тотъ, ни другой мыслитель не примѣнилъ своего принципа къ равновѣсію жидкостей.

Итакъ, всѣ истины, изъ которыхъ должна была сложиться гидростатика, уже были открыты; но онѣ были разбросаны безъ всякой связи другъ съ другомъ и ожидали того, кто могъ бы привести ихъ въ порядокъ и связать ихъ другъ съ другомъ, кто могъ бы изъ разрозненныхъ мыслей создать стройное и логическое ученіе.

Такимъ водчимъ явился Паскаль.

Въ теоріи насоса, которую намѣтилъ Бенедетти, Паскаль усмотрѣлъ основную истину гидростатики. Изъ этой истины онъ вывелъ, какъ слѣдствія, во-первыхъ, законъ о давленіи, производимомъ столбомъ жидкости, въ той формулировкѣ, которая раньше была дана Стевиномъ, во-вторыхъ, свойства погруженныхъ тѣлъ, извѣстныя еще со временъ Архимеда. Наконецъ, онъ показалъ, что эта важная истина можетъ быть выведена какъ изъ принципа Декарта, такъ и изъ принципа Торричелли; на эту мысль его навело одно замѣчаніе Галилея.

Конечно, нельзя не считать оригинальнымъ трудомъ такое сочиненіе, въ которомъ авторъ превращаетъ простое замѣчаніе своего предшественника въ важный и плодотворный принципъ.

„Я желалъ бы спросить у справедливыхъ людей, не одно ли и то же представляютъ собою принципъ: „Матерія по своей природѣ безусловно не въ состояніи мыслить“ и принципъ: „Я мыслю, слѣдовательно, я существую“ у Декарта и у святого Августина, который высказалъ ту же мысль двѣнадцатью столѣтіями раньше.

Я рѣшительно не сталъ бы отрицать того, что Декартъ самостоятельно пришелъ къ этой идеѣ, даже допуская, что онъ напалъ на нее исключительно благодаря творенію великаго монаха: понятно, написать случайно изреченіе, не дѣлая его предметомъ дальнѣйшаго подробнаго обсужденія, это далеко не равносильно тому, чтобы замѣтить, что въ этомъ изреченіи содержится удивительная цѣпь заключеній, изъ которыхъ выясняется различіе между тѣлеснымъ міромъ и духовнымъ, и сдѣлать его основнымъ принципомъ цѣлаго ученія о природѣ, какъ это старался сдѣлать Декартъ. Мы не станемъ обсуждать, дѣйствительно ли удалось ему осуществить это намѣреніе, но уже одно лишь подобное стремленіе даетъ намъ право сказать, что указанная мысль въ *его* сочиненіяхъ столь же мало похожа на ту же мысль, мимоходомъ высказанную другими, какъ непохожъ человѣкъ, полный силы и энергіи, на покойника.

Одинъ случайно скажетъ мысль, не понимая всего величія ея, а другой изъ той же мысли извлечетъ поразительный рядъ умозаключеній, и тогда эта мысль уже не принадлежитъ тому, кто первый ее случайно высказалъ: такъ, роскошное растеніе, возросшее на плодородной почвѣ, не должно считаться собственностью того человѣка, который случайно, самъ того не подозревая, бросилъ въ землю сѣмя“.

Когда Паскаль писалъ свой „Трактатъ о равновѣсіи жидкостей“, онъ видѣлъ свою задачу не въ томъ, чтобы открыть новыя истины, а лишь въ томъ, чтобы расположить открытыя уже истины въ опредѣленномъ порядкѣ. „Я кое-что въ этомъ немного смыслю, говоритъ онъ о порядкѣ изложенія¹⁾; знаю однако, что лишь немногіе понимаютъ, какое это имѣетъ значеніе“.

¹⁾ Pascal: „Pensées“, Ed. Havet, Art.

Этимъ неподражаемымъ искусствомъ располагать свои мысли Паскаль гордился больше, чѣмъ остроуміемъ изобрѣтателя, которое онъ обнаружилъ въ своей геометрической работѣ: „Нѣтъ лучшаго способа ¹⁾ сдѣлать свои доказательства убѣдительными, чѣмъ тѣ приемы, которые примѣняются въ геометріи. Я лично въ примѣненіи этихъ приемовъ достигъ большихъ результатовъ, чѣмъ въ самой геометріи...“

Логическое построение гидростатики нельзя считать легкой и простой задачей: для выполненія этого дѣла требуется такая сила ума, которая присуща лишь немногимъ: „Умы человѣческіе различно ²⁾ устроены: одни разбираются въ явленіяхъ одного порядка и теряются въ явленіяхъ другого порядка. Одни хорошо умѣютъ выводить слѣдствія изъ небольшого числа принциповъ: въ этомъ умѣньи выражается прямолинейность мысли; другіе удачно дѣлаютъ заключенія тамъ, гдѣ принциповъ много. Напримеръ, одни хорошо разбираются въ свойствахъ воды, гдѣ приходится имѣть дѣло съ небольшимъ числомъ принциповъ; но изъ этихъ немногихъ принциповъ вытекаютъ столь тонкіе выводы, что сдѣлать ихъ могутъ лишь тѣ, которые надѣлены въ необычайной степени прямолинейностью мышленія; такіе мыслители могутъ, однако, при этомъ не представлять собою великихъ геометровъ. Дѣйствительно, математика заключаетъ въ себѣ большое число принциповъ, а между тѣмъ можно представить себѣ мыслителя, который въ состояніи вполне исчерпывающимъ образомъ развить небольшое число принциповъ, будучи безсильнымъ проникнуть вглубь тамъ, гдѣ приходится имѣть дѣло съ множествомъ принциповъ“.

Такимъ образомъ нужно полагать, что Паскаль не задавался цѣлью открыть такіе теоремы, которыя до него никѣмъ не были высказаны; онъ желалъ лишь показать, какимъ образомъ можно изъ небольшого числа принциповъ, выражающихъ свойства воды, вывести самыя тонкія и отдаленныя слѣдствія.

Теперь намъ станутъ понятны многія особенности „Трактата о равновѣсіи жидкостей“; понятно теперь, почему при изложеніи теоремъ нигдѣ не обозначено имя автора, почему Паскаль не цитируетъ никого изъ своихъ предшественниковъ и не называетъ даже ни Архимеда, ни П. Мерсенна, несмотря даже на то, что послѣдній былъ его другомъ и вдохновителемъ его трудовъ въ области гидростатики. Конечно, не упоминая именъ физиковъ, которые раньше его формулировали законы равновѣсія жидкостей, Паскаль и въ мысляхъ не имѣлъ присваивать себѣ открытія, сдѣланныя другими; кто можетъ считать Паскаля столь глупымъ

¹⁾ Pascal: „*De l'esprit géométrique*“. Pensées, Ed. Havet, стр. 525.

²⁾ Pascal: „*Pensées*“, Ed. Havet, Art. VII, 2.

и тщеславнымъ, чтобы приписать ему желаніе выдавать себя за творца принципа Архимеда? Ставя себѣ цѣлью привести въ систему извѣстныя истины, открытіе которыхъ онъ отнюдь не приписывалъ себѣ, Паскаль не имѣлъ надобности говорить объ авторахъ.

Онъ вовсе не желалъ открывать новыя истины, а лишь расположить, привести въ опредѣленную систему тѣ истины, которыя были открыты еще до него; онъ не считалъ эту задачу слишкомъ мелкой для своего генія: чтобы выполнить ее успѣшно, нужна крайняя послѣдовательность ума.

Что таковъ былъ взглядъ одного изъ геніальнѣйшихъ и оригинальнѣйшихъ мыслителей, какихъ только знаетъ человѣчество, объ этомъ теперь не лишнее вспомнить. Дѣйствительно, въ настоящее время физики охотно преклоняются предъ каждымъ открытіемъ новаго факта или непредвидѣннаго закона; но они, повидимому, слишкомъ низко цѣнятъ усилія тѣхъ, кто стремится привести въ опредѣленную систему груду фактовъ, открытыхъ другими, и старается логически свести множество законовъ, найденныхъ другими, къ небольшому числу принциповъ. Не къ нимъ ли относятся слѣдующія слова Паскаля ¹⁾?

„Всѣ эти люди видѣли явленія, но они не видятъ причинъ. Въ сравненіи съ тѣми, которые открыли причины, они представляются въ такомъ же свѣтѣ, какъ люди, имѣющіе только глаза,—въ сравненіи съ людьми, которые одарены разумомъ; потому что дѣйствія какъ бы осязаются нами, тогда какъ созерцаніе доступно лишь нашему разуму. Правда, самыя дѣйствія открываются умомъ, но этотъ умъ находится въ такомъ же отношеніи къ мыслителю, проникающему въ причины, въ какомъ тѣлесныя чувства находятся къ разуму“.

¹⁾ Pascal: „*Pensées*“, Ed. Havet, Art. V, 9.

Къ вопросу объ основахъ механики и физики.

Людвига Больцмана.

(Изъ книги: „Vorlesungen über die Prinzipie der Mechanik“, t. II, § 35).

Перев. I. Левинтовъ.

Представленіе о центральныхъ силахъ, дѣйствующихъ между матеріальными точками то въ явной, то въ неявной формѣ, играло руководящую роль въ историческомъ ходѣ постепеннаго развитія механики вплоть до настоящаго ея состоянія. Однако же отсюда отнюдь нельзя заключать, что это представленіе сохранить навсегда фундаментальное значеніе для механики. Вѣдь довольно часто случается, что предложеніе, установленное первоначально съ нѣкоторыми ограничивающими его условіями, впоследствии оказывается имѣющимъ болѣе общее значеніе. Такъ, нѣкоторые принципы механики, напримѣръ, принципъ возможныхъ перемѣненій или принципъ стаціонарнаго дѣйствія, сохраняютъ свою силу и при такихъ условіяхъ, которыя не могутъ быть выполнены помощью центральныхъ силъ.

Часто дѣйствительно высказывался взглядъ, что нужно совершенно оставить представленіе о центральныхъ силахъ и вмѣсто него положить въ основаніе механики какой-либо общій принципъ. Если мы для этой цѣли остановимъ свой выборъ на принципѣ энергіи, то придется присоединить къ нему цѣлый рядъ дополнительныхъ предложеній, такъ какъ этотъ принципъ далеко не имѣетъ того общаго характера, какимъ отличаются уравненія механики; такимъ образомъ опять-таки придется отказаться отъ мысли вывести весь матеріалъ изъ одного единственнаго принципа. Не то будетъ, если мы выберемъ принципъ стаціонарнаго дѣйствія, такъ какъ изъ этого принципа дѣйствительно можно вывести уравненія механики во всей ихъ совокупности.

Здѣсь можно принять во вниманіе и тотъ случай, когда состояніе системъ опредѣляется координатами особаго рода, не тѣми, которыми задается положеніе въ пространствѣ трехъ измѣреній. Такъ, напримѣръ, Гибсъ, Гельмгольцъ и другіе установили нѣкоторыя соотношенія, содержащія въ качествѣ переменныхъ температуру, электрическое состояніе и подобныя имъ величины, при чемъ изъ этихъ соотношеній, какъ частные случаи, вытекаютъ принципы механики и, въ частности, принципъ стаціонарнаго дѣйствія. Опять-таки, съ другой точки зрѣнія, эти соотношенія имѣютъ далеко не столь общій характеръ. Часто они примѣняются исключительно къ такимъ состояніямъ, которыя лишь безконечно мало отличаются отъ состоянія равновѣсія. Кромѣ того, они содержатъ въ себѣ нѣкоторыя чуждыя механикѣ неясности въ видѣ, напримѣръ, принципа энтропіи и принципа необрати-

мости, и множество найденныхъ опытнымъ путемъ свойствъ температуры, электричества—свойствъ, имѣющихъ далеко не столь простой характеръ, какъ представленіе о геометрическихъ соотношеніяхъ между точками.

Въ теоріи электричества, теплоты и т. д. мы встрѣчаемъ уравненія, вполне аналогичныя уравненіямъ механики. Обстоятельство это, равно какъ и специфическія свойства величинъ, съ которыми мы имѣемъ дѣло въ этихъ теоріяхъ, возможно объяснить, допустивши, что соотвѣтственныя явленія обусловлены скрытымъ механическимъ движеніемъ; равнымъ образомъ механическіе образы проливаютъ свѣтъ на неясности, присущія величинамъ, съ которыми мы встрѣчаемся въ прочихъ отдѣлахъ физики; напри- мѣръ, понятія энтропіи и необратимости дѣлаются ясными, если изучить комплексъ, состоящій изъ весьма многочисленныхъ матеріальныхъ точекъ, пользуясь методами теоріи вѣроятностей.

Утверждая, что механическіе образы могутъ пролить свѣтъ на нѣкоторыя неясности, вродѣ указанныхъ выше, я отнюдь, однако, не думаю, что положеніе и движеніе матеріальныхъ точекъ въ пространствѣ представляютъ собою нѣчто такое, что простѣйшіе элементы его могутъ быть объяснены вполне. Напротивъ, объяснить послѣдніе элементы нашего познанія есть вообще вещь невозможная: вѣдь объяснить—значитъ свести къ болѣе знакомому, и потому именно то, къ чему мы сводимъ все, навсегда должно остаться необъяснимымъ. Поэтому, если бы даже все было объяснено помощью простѣйшихъ основныхъ понятій механики, то эти послѣднія должны зато навѣки остаться столь же необъяснимыми, какъ это имѣетъ мѣсто въ ученіи объ электричествѣ.

Не стану также спорить о томъ, какое понятіе само по себѣ представляется наиболѣе яснымъ: понятіе ли о положеніи въ пространствѣ, или понятіе о температурѣ, или понятіе объ электрическомъ зарядѣ: такой споръ былъ бы лишенъ содержания. Однакоже, если бы мы могли объяснить не только всѣ явленія движенія, наблюдаемыя въ твердыхъ, жидкихъ и газообразныхъ тѣлахъ, но и явленія теплоты, свѣта, электричества, магнетизма, тяжести—всѣ помощью представленія о движеніяхъ матеріальныхъ точекъ въ пространствѣ, слѣдовательно, помощью одного единственнаго принципа, то мы несомнѣнно достигли бы этимъ болѣе-шей ясности, чѣмъ въ томъ случаѣ, если мы станемъ для каждаго изъ вышеуказанныхъ дѣятелей примѣнять цѣлый инвентаръ столь разнородныхъ межъ собою понятій, какими являются температура, электрическій зарядъ, потенциалъ и т. п.—независимо отъ того, выдаемъ ли мы эти разнородныя понятія за нѣчто совершенно самостоятельное, или же разсматриваемъ ихъ лишь какъ раздѣльные множители ¹⁾ энергіи, которые надо постулировать

¹⁾ *Примѣчаніе переводчика:* каждая форма энергіи характеризуется двумя такъ называемыми множителями энергіи. Напримѣръ, для теплоты такіе множители суть: количество теплоты и температура, для электричества—количество электричества и потенциалъ, для тяжести—масса и высота поднятія.

для каждой формы энергіи отдѣльно.

Если мы вообще станемъ задумываться о грядущемъ столѣтій или даже столѣтіяхъ, то я охотно соглашаюсь, что безразсудно было бы надѣяться, что современное механическое міропониманіе сохранится на вѣки вѣковъ хотя бы даже лишь въ своихъ наиболѣе существенныхъ чертахъ.

Я также и въ мысляхъ не имѣю относиться свысока къ попыткамъ установить уравненія болѣе общаго характера, изъ которыхъ вытекали бы, какъ частный случай, уравненія механики. Я даже считалъ бы достигнутой цѣль моего труда, если бы я, показавъ, какой ясностью можетъ и должно отличаться представленіе о мірѣ, посодѣйствовалъ этимъ построенію новаго, еще болѣе всеобъемлющаго и болѣе яснаго представленія міра, будь то на основѣ принципа энергіи, либо принципа стационарнаго дѣйствія, либо же принципа кратчайшаго пути. Противъ чего я рѣшительно возстаю, это противъ того легкомыслія, съ которымъ уже хотять сдавать въ архивъ механическую картину міра, хотя мы не располагаемъ еще другой картиной, подробно разработанной отъ перваго основанія до приложенія ея къ важнѣйшимъ явленіямъ, которыя столь исчерпывающимъ образомъ представлены въ нашей старой міровой картинѣ,—и даже не отдають себѣ отчета въ тѣхъ трудностяхъ, которыя лежатъ на пути къ такому построенію. Въ особенности я долженъ замѣтить, что, желая избѣгать представленія о матеріальныхъ точкахъ, мы не имѣемъ права вводить ихъ все-таки снова въ механику ¹⁾, а должны ввести другія отдѣльныя сущности или элементы, свойства которыхъ слѣдуетъ изобразить съ такой ясностью, какой отличается представленіе о матеріальныхъ точкахъ.

Все предыдущее было написано мною лѣтъ семь тому назадъ, и такимъ образомъ заключительное предложеніе представляетъ собою требованіе, которое я выставилъ семь лѣтъ тому назадъ (таковъ именно возрастъ рукописи въ ея первоначальномъ видѣ). Я нарочно напечаталъ все безъ измѣненій. То, чего я ожидалъ по истеченіи столѣтій или даже тысячелѣтій, наполовину уже произошло за промежутокъ въ семь лѣтъ.

Но не изъ энергетики и не изъ феноменологіи ²⁾ блеснула лучъ надежды на немеханическое объясненіе природы: онъ исходитъ изъ новой атомистической теоріи, предъ фантастическими гипотезами которой совершенно блѣднѣютъ гипотезы старой атомистической теоріи подобно тому, какъ атомы этой по-

¹⁾ *Примѣчаніе переводчика.* По мнѣнію Больцмана, противники атомистики безсознательно для себя мыслятъ атомистически, когда они пользуются дифференціальными уравненіями. Ср. Vorles. t. I, § 1.

²⁾ *Примѣчаніе переводчика.* Наиболѣе виднымъ представителемъ этого направленія слѣдуетъ признать знаменитаго ученаго и мыслителя Эрнеста Маха, по мнѣнію котораго цѣль науки сводится лишь къ простѣйшему, „наиболѣе экономному“ описанію явленій, каковое описаніе и должны представлять собою дифференціальныя уравненія механики и физики.

слѣдней своей малостью совершенно затмили элементарныя тѣльца древности. Нужно ли мнѣ разяснять, что я здѣсь разумѣю теорію электроновъ? Эта теорія отнюдь не обнаруживаетъ стремленія объяснить понятія массы и силы, принципъ инерціи и т. п. помощью болѣе простаго, болѣе понятнаго чего-то; ея простѣйшіе основныя принципы и законы несомнѣнно останутся столь же необъяснимыми, какъ это имѣетъ мѣсто въ механической теоріи міра. Но если намъ удастся вывести всю механику изъ другихъ представлений, безъ которыхъ намъ все-равно не обойтись при объясненіи явленій электромагнетизма, то мы останемся въ выигрышѣ не менѣе, чѣмъ если бы намъ удалось объяснить механически явленія электромагнетизма. Отъ души желаю удачи новой теоріи, пусть она лишь выполнитъ то требованіе, которое я поставилъ семь лѣтъ тому назадъ!

О прямой Эйлера.

Дм. Ефремова (Иваново-Вознесенскъ).

(Продолженіе *).

12. Для опредѣленія угловъ α , β , γ , составленныхъ прямою Эйлера тр-ка ABC съ его сторонами, мы пользовались равенствами (I) и (II). Но легко убѣдиться, что равенства (II) имѣютъ мѣсто не только для прямой Эйлера, или ей параллельной, но и для всякой сѣкущей тр-ка; равенство же (I), выведенное изъ свойствъ прямой Эйлера, является характеристичнымъ для этой прямой, или для прямой, ей параллельной. Другими словами, сѣкущая тр-ка параллельна прямой Эйлера (или совпадаетъ съ ней), если углы, составленные ею со сторонами тр-ка (α , β , γ), удовлетворяютъ равенству (I). Этимъ замѣчаніемъ мы воспользуемся для доказательства слѣдующей теоремы.

Теорема Zeeman'a. *Если сѣкущая даннаго тр-ка ABC параллельна его прямой Эйлера, то прямая Эйлера каждою изъ тр-въ, составленныхъ двумя сторонами тр-ка ABC и сѣкущею, параллельна третьей сторонѣ даннаго тр-ка.*

Положимъ, что сѣкущая $A_1B_1C_1$ тр-ка ABC (фиг. 2) параллельна его прямой Эйлера, или совпадаетъ съ ней, такъ что углы α , β , γ , составленные ею со сторонами тр-ка, удовлетворяютъ равенству (I)

$$\cos A \cos \alpha + \cos B \cos \beta + \cos C \cos \gamma = 0.$$

*) См. № 403 „Вѣстника“.

Въ тр-къ AB_1C_1 , составленномъ съкущено со сторонами AB и AC , углы суть

$$180^\circ - A, \beta \text{ и } 180^\circ - \gamma;$$

стороны же этого тр-ка, противолежащія этимъ угламъ, образуютъ съ прямою CB углы *)

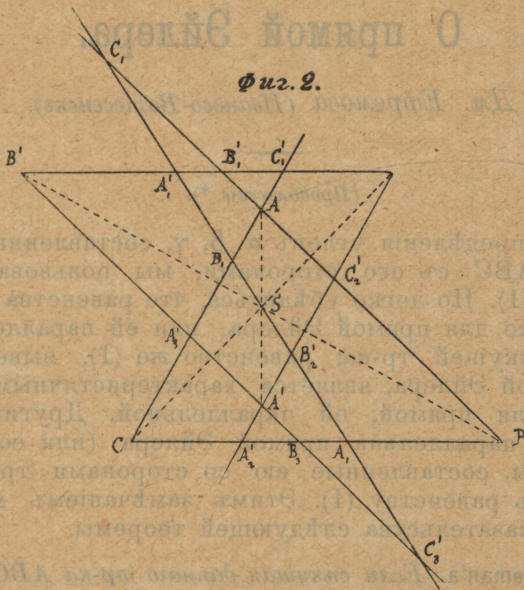
$$180^\circ - \alpha, B \text{ и } 180^\circ - C.$$

Такъ какъ

$$\begin{aligned} \cos(180^\circ - A)\cos(180^\circ - \alpha) + \cos\beta\cos B + \cos(180^\circ - \gamma)\cos(180^\circ - C) = \\ = \cos A\cos\alpha + \cos B\cos\beta + \cos C\cos\gamma = 0, \end{aligned}$$

то, на основаніи сдѣланнаго замѣчанія, заключаемъ, что BC па-

Фиг. 2.



раллельна прямой Эйлера тр-ка AB_1C_1 , или обратно, что прямая Эйлера тр-ка AB_1C_1 параллельна BC .

Такимъ же образомъ можно убѣдиться, что прямая Эйлера тр-въ BA_1C_1 и CA_1B_1 соответственно параллельны AC и AB .

*) За направленія сторонъ тр-въ AB_1C_1 принимаются направленія отъ A къ B_1 , отъ B_1 къ C_1 и отъ C_1 къ A .

13. Положимъ, что стороны тр-въ AB_1C_1 , BA_1C_1 и CA_1B_1 пересѣкаются съ ихъ прямыми Эйлера въ точкахъ:

$$A'_1, B'_1, C'_1; \quad A'_2, B'_2, C'_2; \quad A'_3, B'_3, C'_3. \quad (\text{фиг. 2}).$$

Изъ теоремы Зеeman'a слѣдуетъ, что тр-ки $AB'_1C'_1$, $BA'_2C'_2$, $CA'_3B'_3$ подобны тр-ку ABC . Чтобы найти отношеніе подобія ихъ, опредѣлимъ отрезокъ $B'_1C'_1$.

Съ этой цѣлью во второй изъ формулъ (9)

$$B_1C_1 = 2R \frac{\sin A \cos A \cos \alpha}{\sin \beta \sin \gamma}$$

замѣнимъ R , A , α , β , γ соответственно чрезъ R_1 , $180^\circ - A$, $180^\circ - \alpha$, B , $180^\circ - C$; получимъ:

$$B'_1C'_1 = 2R_1 \frac{\sin A \cos A \cos \alpha}{\sin B \sin C};$$

отсюда, послѣ подстановки значенія R_1 (10),

$$R_1 = R \frac{\cos A \cos \alpha}{\sin \beta \sin \gamma},$$

находимъ, что

$$\begin{aligned} B'_1C'_1 &= 2R \frac{\sin A \cos^2 A \cos^2 \alpha}{\sin B \sin C \sin \beta \sin \gamma} = \\ &= a \cdot \frac{\cos^2 A \cdot \cos^2 \alpha}{\sin B \sin C \sin \beta \sin \gamma}; \end{aligned}$$

слѣдовательно,

$$\frac{B'_1C'_1}{BC} = \frac{B'_1C'_1}{a} = \frac{\cos^2 A \cos^2 \alpha}{\sin B \sin C \sin \beta \sin \gamma};$$

но (11)

$$\frac{\cos^2 A \cdot \cos^2 \alpha}{\sin B \sin C \sin \beta \sin \gamma} = \frac{\Delta_1}{\Delta};$$

значить,

$$\frac{B'_1C'_1}{BC} = \frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что

$$\frac{A'_2C'_2}{AC} = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad \text{и} \quad \frac{A'_3B'_3}{AB} = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

14. Итакъ, сходственные линіи подобныхъ тр-въ $AB'_1C'_1$, $BA'_2C'_2$, $CA'_3B'_3$ и ABC относятся, какъ

$$\Delta_1 : \Delta_2 : \Delta_3 : \Delta.$$

Поэтому, обозначивъ чрезъ h_1, h_2, h_3 высоты тр-ка ABC, соответствующія его вершинамъ A, B, C, а чрезъ x, y, z — высоты тр-въ $AB_1C_1, BA_2C_2, CA_3B_3$, соответствующія ихъ вершинамъ A, B, C, получимъ:

$$\frac{x}{h_1} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \frac{y}{h_2} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \frac{z}{h_3} = \frac{\Delta_3}{\Delta};$$

отсюда, на основаніи равенствъ

$$ah_1 = bh_2 = ch_3 = 2\Delta,$$

находимъ, что

$$x = \frac{2\Delta_1}{a}, \quad y = \frac{2\Delta_2}{b}, \quad z = \frac{2\Delta_3}{c}. \quad (14)$$

Если отсюда выразить $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ чрезъ x, y, z и полученныя выраженія подставить въ равенство:

$$\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1 = \Delta,$$

то получимъ

$$by + cz - ax = 2\Delta. \quad (X)$$

15. Пусть прямая Эйлера тр-въ AB_1C_1, BA_2C_2 и CA_3B_3 пересѣкаются между собою въ точкахъ A', B', C' (фиг. 2).

Обозначивъ разстоянія между параллельными прямыми BC и $B'C'$, AC и $C'A'$, AB и $A'B'$ соответственно чрезъ ξ, η, ζ , получимъ:

$$\begin{aligned} \xi &= h_1 + x = h_1 + \frac{2\Delta_1}{a} = \frac{2(\Delta + \Delta_1)}{a}, \\ \eta &= h_2 - y = h_2 - \frac{2\Delta_2}{b} = \frac{2(\Delta - \Delta_2)}{b}, \\ \zeta &= h_3 - z = h_3 - \frac{2\Delta_3}{c} = \frac{2(\Delta - \Delta_3)}{c}; \end{aligned} \quad (15)$$

отсюда

$$a\xi = 2(\Delta + \Delta_1),$$

$$b\eta = 2(\Delta - \Delta_2),$$

$$c\zeta = 2(\Delta - \Delta_3);$$

сложивъ эти равенства, увидимъ, что

$$a\xi + b\eta + c\zeta = 6\Delta - 2(\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1),$$

т. е. что

$$a\xi + b\eta + c\zeta = 4\Delta. \quad (XI)$$

16. Изъ теоремы Зеeman'a слѣдуетъ, что тр-къ $A'B'C'$, составленный прямыми Эйлера тр-въ AB_1C_1 , BA_1C_1 и CA_1B_1 , гомотетиченъ съ тр-мъ ABC .

Это слѣдствіе дополняется слѣдующей теоремой.

Теорема. Если стороны тр-ка BC , CA , AB пересѣкаются съ его прямой Эйлера въ точкахъ A_1 , B_1 , C_1 , то прямые Эйлера тр-въ AB_1C_1 , BA_1C_1 , CA_1B_1 образуютъ тр-къ $A'B'C'$, равный тр-ку ABC .

Обозначимъ чрезъ S центръ гомотетіи тр-въ ABC и $A'B'C'$ (фиг. 2) и чрезъ ξ , η , ζ разстоянія его отъ сторонъ BC , CA и AB . Такъ какъ разстоянія точки S отъ соответственныхъ сторонъ тр-въ ABC и $A'B'C'$ пропорціональны, то

$$\frac{\xi'}{\xi - \xi'} = \frac{\eta'}{\eta - \eta'} = \frac{\zeta'}{\zeta - \zeta'}$$

или

$$\frac{\xi'}{\xi} = \frac{\eta'}{\eta} = \frac{\zeta'}{\zeta};$$

отсюда, по свойству равныхъ отношеній,

$$\begin{aligned} \frac{\xi'}{\xi} = \frac{\eta'}{\eta} = \frac{\zeta'}{\zeta} = \\ = \frac{a\xi' + b\eta' + c\zeta'}{a\xi + b\eta + c\zeta}; \end{aligned}$$

но

$$\begin{aligned} a\xi' + b\eta' + c\zeta' = \\ = 2\text{пл. } BSC + 2\text{пл. } CSA + 2\text{пл. } ASB = 2\Delta \end{aligned}$$

и (XI)

$$a\xi + b\eta + c\zeta = 4\Delta;$$

поэтому

$$\frac{\xi'}{\xi} = \frac{\eta'}{\eta} = \frac{\zeta'}{\zeta} = \frac{1}{2}.$$

Изъ этихъ равенствъ видно, что центръ гомотетіи S тр-въ ABC и $A'B'C'$ равно отстоитъ отъ соответственныхъ сторонъ ихъ; слѣдовательно, эти тр-ки равны.

17. Тр-ки ABC и $A'B'C'$ имютъ общую прямую Эйлера.

Чтобы доказать это, достаточно доказать, что соответственные стороны тр-въ ABC и $A'B'C'$ пересѣкаются съ прямою Эйлера тр-ка ABC въ точкахъ соответственныхъ, а для этого достаточно убѣдиться, что, напримѣръ, $B'A_1 = BA_1$, или что $A_1B'_1 = A_1B_1$.

Отрѣзокъ $A_1B'_1$, какъ внутренняя часть прямой Эйлера тр-ка AB_1C_1 , опредѣляется по первой изъ формулъ (9)

$$A_1B_1 = -c \frac{\cos C \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta},$$

если въ ней замѣнить c чрезъ AB_1 и C , γ , α , β соответственно чрезъ $180^\circ - \gamma$, $180^\circ - C$, $180^\circ - \alpha$, B ; получится:

$$A'_1B'_1 = -AB_1 \frac{\cos C \cdot \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta};$$

но (8)

$$AB_1 = b \cdot \frac{\cos A \cos \alpha}{\sin B \cdot \sin B};$$

поэтому

$$A'_1B'_1 = -b \frac{\cos A \cos \alpha \cos C \cos \gamma}{\sin^2 B \sin \alpha \sin \beta},$$

или

$$A'_1B'_1 = -a \frac{\cos A \cos \alpha \cos C \cos \gamma}{\sin A \cdot \sin \alpha \sin B \sin \beta}.$$

Для опредѣленія $A_1B'_3$ замѣтимъ, что

$$A_1B'_3 = CA_1 - CB'_3.$$

Такъ какъ (8)

$$CA_1 = -a \cdot \frac{\cos C \cdot \cos \gamma}{\sin A \cdot \sin \alpha}$$

и (n°14)

$$\frac{CB'_3}{a} = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

откуда (11)

$$CB'_3 = a \frac{\cos^2 C \cdot \cos^2 \gamma}{\sin A \sin B \sin \alpha \sin \beta},$$

то

$$\begin{aligned} A_1B'_3 &= CA_1 - CB'_3 = \\ &= -a \frac{\cos C \cos \gamma}{\sin A \sin \alpha} - a \cdot \frac{\cos^2 C \cos^2 \gamma}{\sin A \sin B \sin \alpha \sin \beta} = \\ &= -a \frac{\cos C \cdot \cos \gamma}{\sin A \sin \alpha} \cdot \frac{\sin B \sin \beta + \cos C \cos \gamma}{\sin B \sin \beta}; \end{aligned}$$

но (III)

$$\sin B \sin \beta + \cos C \cos \gamma = \cos A \cos \alpha;$$

поэтому

$$A_1B'_3 = -a \frac{\cos A \cos \alpha \cos C \cos \gamma}{\sin A \sin \alpha \sin B \sin \beta},$$

т. е.

$$A_1B'_3 = A'_1B'_1,$$

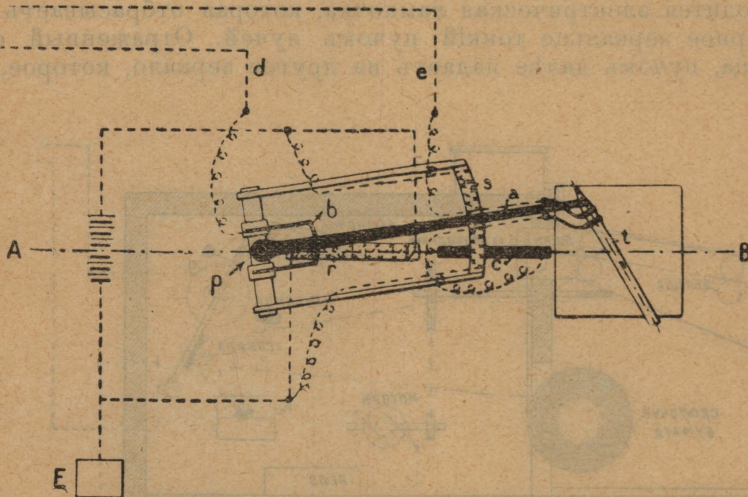
что и требовалось доказать.

Такъ какъ прямыя, соединяющія соотвѣтственные точки гомотетичныхъ фигуръ, проходятъ чрезъ ихъ центръ гомотетіи, то на основаніи доказаннаго заключаемъ, что *центръ гомотетіи* *тр-ъ ABC* и *A'B'C* находится на ихъ общей прямой Эйлера.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Передача на разстоянія автографовъ и чертежей.

Для этой цѣли служитъ приборъ *Gruhn'a*, извѣстный подъ названіемъ *телавтографа*. Дѣйствіе этого прибора поясняется фигурами 1 и 2.

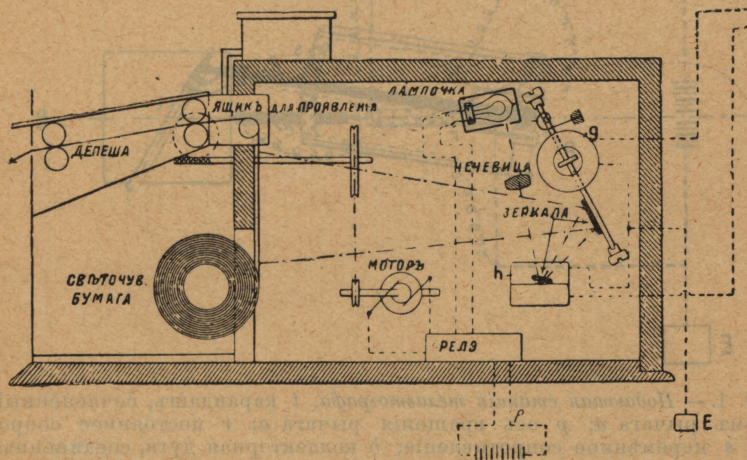


Фиг. 1. — Подающая станція телавтографа, *t* карандашъ, сочлененный съ плечомъ рычага *a*; *p* ось вращенія рычага *a*; *r* постоянное сопротивление; *s* переменное сопротивление; *b* коллекторная дуга, соединенная съ проволокой *d*; *c* коллекторный стержень, соединенный съ проволокой *e*.

Обыкновенный карандашъ *t* сочлененъ съ концомъ весьма подвижного рычага *a*. Послѣдній позволяетъ пишущему или чертящему свободно передвигать карандашъ въ какую-угодно сторону по пластинкѣ, назначенной спеціально для этой цѣли. Другой конецъ плеча соединенъ съ осью вращенія *p*, которая можетъ передвигаться вдоль прямой *AB*. Такимъ образомъ карандашъ можетъ описывать какую-угодно линію, и благодаря его перемѣщеніямъ плечо рычага испытываетъ колебательное движеніе и перемѣщается направо и налѣво вдоль прямой *AB*. На чертежѣ буквой *r* обозначено постоянное сопротивление, а буквой *s*—переменное сопротивление, которое соединено съ пле-

чомъ рычага; оба эти сопротивленія находятся въ связи съ батареей изъ 8 сухихъ элементовъ; *b* изображаетъ небольшую коллекторную дугу, изолированную отъ подвижного рычага, на которомъ она укрѣплена, а *c* означаетъ неподвижный коллекторный стержень. Оба эти коллектора соединены съ передаточными проволоками *d* и *e*. Часть тока отъ батареи проходитъ черезъ коллекторы по передаточнымъ проволокамъ; токи, проходящіе черезъ эти проволоки, мѣняютъ свою силу въ зависимости отъ перемѣщеній пишущаго карандаша. Каждой точкѣ плоскости чертежа соответствуютъ двѣ различныя, вполне опредѣленные силы тока, такъ что перемѣщенія карандаша, такъ сказать, превращаются въ модификаціи тока. Спиральныя линіи на рисункѣ изображаютъ гибкіе проводящіе шнуры, допускающіе свободное перемѣщеніе карандаша.

На станціи полученія токи входятъ въ пріемный аппаратъ, гдѣ находится электрическая лампочка, которая отбрасываетъ на миниатюрное зеркальце тонкій пучокъ лучей. Отраженный отъ зеркальца, пучокъ далѣе падаетъ на другое зеркало, которое, въ



Фиг. 2. — Станція полученія.

свою очередь, отражаетъ его на свѣточувствительную бумагу. Помощью чечевицы лучи концентрируются въ опредѣленномъ фокусѣ. Оба зеркальца могутъ передвигаться подъ вліяніемъ токовъ, чакъ какъ ихъ оси вращенія снабжены магнитными иглами. Эти послѣднія приходятъ въ колебательное движеніе, благодаря дѣйствію двухъ катушекъ *g* и *h*, въ обмотки которыхъ входятъ приходящіе токи. Одно зеркальце колеблется сверху внизъ, другое—справа налѣво, въ зависимости отъ перемѣщеній пишущаго карандаша на станціи отправленія. Отраженный лучъ испыты-

ваетъ такія же самыя перемѣщенія, которыя комбинируются въ соотвѣтственное результирующее движеніе. Такимъ образомъ, благодаря вращенію зеркалъ, свѣтовой лучъ описываетъ такую же линію, какъ и пишущій карандашъ, представляя собою свѣто-

*det original Handskriften
ten auf grosse Entfernungen.
Nähers durch Czuzanna, Charlottenburg 5.*

*det original Händstirpf.
ten auf grosse Entfernungen.
Nähers durch Czuzanna Charlottenburg 5.*

Фиг. 3. — Налѣво представленъ оригиналъ телеграммы, направо — также телеграмма въ передачѣ телавтогра.

вой карандашъ, такъ сказать, пишущій на фотографической бумагѣ.

Проявленіе производится автоматическимъ путемъ и требуетъ всего 10 секундъ; т. е. автографированная депеша приходитъ на станцію полученія черезъ десять секундъ послѣ того, какъ она была написана карандашомъ на станціи отправленія.

Опыты съ телавтографомъ удались на сравнительно большихъ разстояніяхъ (Берлинъ—Дрезденъ).

(Revue générale).

Простой выводъ основныхъ формулъ сферическихъ треугольниковъ.

На прилагаемомъ чертежѣ сферическій треугольникъ ABC взятъ на сферѣ, радіусъ которой равенъ единицѣ. Стороны BC, AC и AB треугольника обозначимъ соотвѣтственно черезъ a , b и c .

Изъ точки C опустимъ перпендикуляры CP на плоскость AOB; изъ точки P опустимъ перпендикуляръ PS и PQ соотвѣтственно на стороны OA и OB, и соединимъ точку C съ точками Q и S:

$$\angle PSC = A \text{ и } \angle PQC = B.$$

Далѣе легко найдемъ:

$$OQ = \cos a \quad (1) \quad CQ = \sin a \quad (2)$$

$$OS = \cos b \quad (3) \quad CS = \sin b \quad (4)$$

$$PS = CS \cos \angle PSC = \sin b \cos A \quad (5)$$

$$PQ = CQ \cos \angle CQP = \sin a \cos B \quad (6)$$

$$CP = CQ \sin \angle CQP = \sin a \sin B \quad (7)$$

$$CP = CS \sin \angle PSC = \sin b \sin A \quad (8).$$

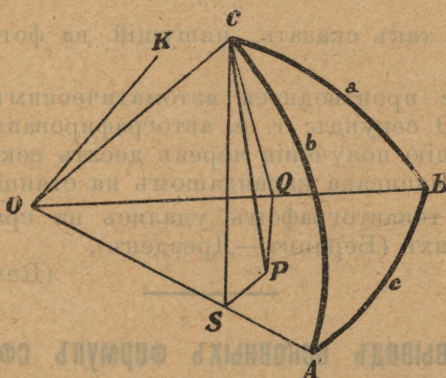
1. Сравнивая формулы (7) и (8), находимъ:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b}.$$

Замѣняя въ чертежѣ буквы B и b соответственно черезъ C и c , получимъ:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin c}, \text{ слѣдовательно,}$$

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \dots \dots \dots (I).$$



2.—Проектируя ломанную линію $OSPQ$ на прямую OQ , найдемъ, въ силу основной теоремы теории проекцій:

$OQ = (OS)_{OQ} + (SP)_{OQ} + (PQ)_{OQ}^* = OS \cos c + SP \sin c$, откуда найдемъ съ помощью формулъ (1), (3) и (5);

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \dots \dots \dots (II).$$

3.—Проектируя ту же ломанную на прямую OK , проведенную въ плоскости AOB перпендикулярно къ прямой OS , мы имѣемъ:

$$(OQ)_{OK} = (OS)_{OK} + (SP)_{OK} + (PQ)_{OK} \text{ или}$$

$$OQ \sin c = SP + PQ \cos c,$$

откуда, пользуясь формулами (1) и (6), получимъ:

$$\cos a \sin c = \sin b \cos A + \sin a \cos c \cos B \dots \dots \dots (III).$$

*) Символь $(OS)_{OQ}$ обозначаетъ проекцію отрезка OS на прямую OQ .

4.—Дляъ обѣ части равенства (III) на $\sin a$ и замѣняя отноше-
 ние $\frac{\sin b}{\sin a}$ равнымъ ему отноше-
 ніемъ $\frac{\sin B}{\sin A}$ форм. (I), мы
 получимъ:

$$\cot g a \sin c = \cos c \cos B + \sin B \cot g A \quad \dots \dots \dots (IV).$$

5.—Примѣняя формулы (II) и (III) къ полярному треуголь-
 нику, получимъ:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \quad \dots \dots \dots (V)$$

$$\cos A \sin C = -\sin A \cos C \cos b + \sin B \cos a \quad \dots \dots \dots (VI).$$

(L'Enseignement mathématique).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

**Первый международный конгрессъ для изученія радиологии и іони-
 зации.** Конгрессъ этотъ состоялся осенью въ сентябрѣ истекшаго
 года въ Льежѣ. Онъ состоялъ изъ двухъ секцій: біологической и
 физической. Доклады первой секціи трактуютъ о той видной
 роли, которую Рентгеновы и Бекерелевы лучи играютъ въ со-
 временной терапіи. Что касается докладовъ, посвященныхъ во-
 просамъ физики, то среди множества работъ спеціального харак-
 тера есть и такія, которыя затрагиваютъ чрезвычайно общіе и
 важные вопросы науки. Отмѣтимъ напримѣръ слѣдующіе до-
 клады:

J. M. del Castillo (Мадридъ): Критическія замѣчанія о
 гипотезѣ распадаенія атомовъ и физико-химической диссоціаціи
 молекулъ.

R. Fabinyi (Klausenberg): Объ измѣненіи свойствъ хими-
 ческихъ элементовъ.

Th. Tommasina (Женева): Кинетическая теорія электро-
 новъ, какъ основа электронной теоріи излученій.

Отмѣтимъ еще вступительный докладъ Бекереля: Анализъ
 излученія радиоактивныхъ тѣлъ.

Въ своемъ заключительномъ общемъ засѣданіи конгрессъ
 единогласно принялъ резолюцію, содержаніе которой заключается
 въ слѣдующемъ.

Члены международного конгресса для изученія радиологии и
 іонизации хорошо понимаютъ, какую опасность для свободнаго
 научнаго изслѣдованія представляетъ протектионизмъ и регла-
 ментация; тѣмъ не менѣе они считаютъ безусловно необходимымъ,
 чтобы правительства запретили барышническую скупку нѣкото-
 рыхъ полезныхъ веществъ, но чтобы при этомъ самыя правитель-
 ства не дѣлали себѣ изъ этихъ веществъ монополіи, и гаранти-
 ровали законодательнымъ путемъ ихъ доступность для научныхъ

и лечебныхъ цѣлей. Поэтому конгрессъ постановляетъ избрать международную комиссію изъ авторитетныхъ лицъ, которые отстаивали бы лечебные и научные интересы, имѣющіе отношеніе къ радиоактивнымъ веществамъ. Комиссія имѣетъ собираться сама ежегодно, а каждые пять лѣтъ она организуетъ международный конгрессъ.

Комиссія, выбранная первымъ конгрессомъ, заключается въ числѣ своихъ членовъ свѣтила современной науки. Отмѣтимъ слѣдующія имена: Круксъ, Лордъ Кельвинъ, Рамсей, Лордъ Раллей, Лоренцъ, Пуанкаре, Больцманъ, Бекерель, Рѣнтгенъ и др. Представителемъ Россіи въ этой комиссіи состоитъ г. Егоровъ.

(Physik. Zeit.).

Математическая идея, лежащая въ основаніи Птолемеевой системы міра. Какъ извѣстно, движенія планетъ объясняются помощью теоріи эпицикловъ Птолемея слѣдующимъ образомъ: допускается, что центръ планеты описываетъ съ постоянной угловой скоростью окружность—эпициклъ, центръ которой въ свою очередь совершаетъ равномерное движеніе по окружности, которая называется деферентомъ и центромъ которой служитъ земля. Въ основѣ такого представленія можно распознать ту же самую идею, которая заключается въ предложеніи Фурье о разложеніи функцій въ тригонометрическій рядъ. Въ самомъ дѣлѣ, движеніе планеты на аналитическомъ языкѣ представится въ видѣ нѣкоторыхъ функцій, выражающихъ зависимость координатъ свѣтила отъ времени; но эти функціи можно съ любой степенью точности выразить помощью достаточнаго числа членовъ нѣкоторыхъ тригонометрическихъ рядовъ: интерпретируя это обстоятельство геометрически, мы заключаемъ, что движеніе планеты, каково бы оно ни было въ дѣйствительности, съ любой степенью точности можетъ быть принято за совокупность достаточнаго числа различныхъ образомъ подобранныхъ равномерныхъ круговыхъ движеній. Въ эпоху Птолемея степень развитія астрономическихъ свѣдѣній и наблюденій была такова, что можно было удовольствоваться двумя первыми членами тригонометрическаго ряда, выражающаго координату свѣтила, какъ функцію отъ времени: соотвѣстственно съ этимъ Птоломей представляетъ движеніе планеты, какъ совокупность *двухъ* круговыхъ равномерныхъ движеній: по эпициклу и деференту.

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Присужденіе медалей Лондонскаго Королевскаго Общества. Въ истекшемъ году эти медали присуждены слѣдующимъ лицамъ: Профессору Ладенбургу въ Бреславлѣ, проф. Менделѣеву, проф. Righi (Болонья), проф. Пойнтингу въ Бирмингамѣ, и профессору Shertington въ Ливерпулѣ.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакция просит не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникъ“ и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакция не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакция проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникъ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 689 (4 сер.). Найти три такихъ цѣлыхъ числа, чтобы ихъ произведеніе равнялось суммѣ ихъ произведеній по два.

Проф. В. Ермаковъ (Кіевъ).

№ 690 (4 сер.). Вычислить углы треугольника ABC изъ уравненій

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{60} = \frac{\cos A + \cos B + \cos C}{35} = \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{48}.$$

Е. Григорьевъ (Ташкентъ).

№ 691 (4 сер.). Доказать, что разность

$$N^{2N} - 1$$

дѣлится на $4N + 1$, если $4N + 1$ число простое.

А. Брюхановъ (Иркутскъ).

№ 692 (4 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\sqrt{1-x^2} = (a - \sqrt{x})^2.$$

С. Адамовичъ (Двинскъ).

№ 693 (4 сер.). Построить окружность, встрѣчающую сторону AB даннаго угла BAC въ точкахъ D , E и сторону AC въ точкахъ F и H такъ, чтобы отношенія $\frac{AD}{DE}$ и $\frac{AF}{FH}$ были данной величины.

Н. С. (Одесса).

№ 694 (4 сер.). Въ калориметрѣ, масса котораго, введенная на воду, равна 500 граммовъ, погружена металлическая нить сопротивленіемъ въ 10,5 ома. Черезъ эту нить въ продолженіе одной минуты пропускаютъ токъ силой въ 2 ампера, причемъ наблюдается повышеніе температуры на $1,2^\circ$. По этимъ даннымъ требуется опредѣлить механическій эквивалентъ теплоты.

(Займств.) М. Гербановскій.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 588 (4 сер.). Обозначая через a_n сторону правильного вписаннаго въ кругъ многоугольника объ n сторонахъ, доказать, что

$$a_{2n} < \frac{2}{3} a_n.$$

Основываясь на этомъ неравенствѣ, показать, что сторона правильного многоугольника, вписаннаго въ кругъ постояннаго радіуса, при безконечномъ возрастаніи числа сторонъ есть величина безконечно малая.

Пусть $AB = a_n$, C —середина хорды AB , M —середина дуги $AB = \frac{2\pi}{n}$. Тогда $\sphericalangle MB = \frac{\pi}{n}$, $\sphericalangle MAC = \frac{\sphericalangle MB}{2} = \frac{\pi}{2n}$ (1), откуда $AM = \frac{AC}{\cos \sphericalangle MAC}$, или (см. (1))

$$a_{2n} = \frac{a_n}{2 \cos \frac{\pi}{2n}} \quad (2).$$

Такъ какъ $n \geq 3$, то (см. (2))

$$a_{2n} = \frac{a_n}{2 \cos \frac{\pi}{2n}} \leq \frac{a_n}{2 \cos \frac{\pi}{6}} = \frac{a_n}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a_n}{\sqrt{3}},$$

т. е.

$$a_{2n} \leq \frac{a_n}{\sqrt{3}} \quad (3).$$

Но $\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{2}{3}$, а потому (см. (3))

$$a_{2n} < \frac{2}{3} a_n \quad (4).$$

Изъ неравенства (4) имѣемъ: $a_{4n} < \frac{2}{3} a_{2n} < \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} a_n$, т. е.

$$a_{4n} < \left(\frac{2}{3}\right)^2 a_n; \quad a_{8n} < \frac{2}{3} a_{4n} < \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^2 a_n, \text{ т. е. } a_n < \left(\frac{2}{3}\right)^3 a_n, \text{ и вообще}$$

(индуктивно) $a_{2^k n} < \left(\frac{2}{3}\right)^k a_n$ (5). Полагая въ формулѣ (5) $n=6$ и называя радіусъ круга черезъ r , получимъ:

$$a_{2^k 6} < \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot r = \frac{r}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^k} = \frac{r}{1 + \frac{k}{2} + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^k}} \leq \frac{r}{1 + \frac{k}{2}}.$$

Итакъ $a_{2^k 6} < \frac{r}{1 + \frac{k}{2}}$ (6) Рѣшивъ неравенство $\frac{r}{1 + \frac{k}{2}} < \varepsilon$ (7), гдѣ ε —

произвольно выбранный отъѣзжокъ, получимъ $k > 2 \left(\frac{r}{\varepsilon} - 1 \right)$ (8), откуда,

принимая во внимание, что сторона правильного многоугольника уменьшается съ увеличеніемъ числа сторонъ, выводимъ: если $n > 2^k \cdot 6$, гдѣ $k > 2 \left(\frac{r}{\varepsilon} - 1 \right)$, то (см. (6), (7), (8)) $a_n < \varepsilon$, т. е. a_n есть переменная безконечно убывающая при безконечно возрастающемъ n .

Г. Оганяницъ (Эривань); А. Турчаниновъ (Брестъ); В. Смирновъ (Москва).

№ 589 (4 сер.). Решит систему уравненій

$$(x+y)(z+v) = \lambda, \quad (x+z)(y+v) = \mu$$

$$(x+v)(y+z) = \nu, \quad xyzv = \sigma^2$$

и примѣнить полученныя формулы, полагая $\lambda = 162$, $\mu = 152$, $\nu = 140$, $\sigma = 30$.

(Займств. изъ *Casopis*).

(Сложивъ два первыя изъ данныхъ уравненій и вычтя изъ результата третье, получимъ: $2yz + 2xv = \lambda + \mu - \nu$, откуда

$$yz + xv = \frac{\lambda + \mu - \nu}{2} \quad (1).$$

Представивъ четвертое изъ данныхъ уравненій въ видѣ $(yz)(xv) = \sigma^2$ (2), мы видимъ (см. (1), (2)), что xz и xv суть корни квадратнаго уравненія

$$t^2 - \frac{\lambda + \mu - \nu}{2} t + \sigma^2 = 0 \quad (3), \quad \text{откуда}$$

$$t = \frac{\lambda + \mu - \nu \pm \sqrt{(\lambda + \mu - \nu + 4\sigma)(\lambda + \mu - \nu - 4\sigma)}}{4} \quad (4).$$

Подобнымъ же образомъ находимъ, что пары произведеній xz , yv и xy , zv суть соответственно корни квадратныхъ уравненій $t^2 - \frac{\lambda + \nu - \mu}{2} t + \sigma^2 = 0$

(5) и $t^2 - \frac{\mu + \nu - \lambda}{2} t + \sigma^2 = 0$ (6). Пусть теперь a , b , c суть соответственно какія-либо три значенія корней уравненій (3), (5), (6). Тогда можно положить

$$xy = c, \quad zx = b, \quad yz = a \quad (7).$$

Перемножая равенства (7), получимъ: $(xyz)^2 = abc$, $xyz = \pm \sqrt{abc}$ (8). Для равенство (8) на каждое изъ равенствъ (7), получимъ:

$$x = \pm \frac{\sqrt{abc}}{a}, \quad y = \pm \frac{\sqrt{abc}}{b}, \quad z = \pm \frac{\sqrt{abc}}{c} \quad (9).$$

Пользуясь же четвертымъ изъ данныхъ уравненій, имѣемъ

$$v = \pm \frac{\sigma^2}{\sqrt{abc}} \quad (10).$$

Если каждое изъ уравненій (3), (5), (6) имѣетъ неравные корни, то система равенствъ (7) можетъ принять 8 различныхъ видовъ, а потому, замѣчая, что въ формулахъ (9) и (10) можно взять одновременно тотъ или другой знакъ, мы убѣждаемся, что предложенная система уравненій имѣетъ вообще 16 рѣшеній. Въ случаѣ, когда $\lambda = 162$, $\mu = 152$, $\nu = 140$, $\sigma = 30$, уравненія (3), (5), (6) обращаются соответственно въ $t^2 - 87t + 30^2 = 0$, $t^2 - 75t + 30^2 = 0$, $t^2 - 65t + 30^2 = 0$ и даютъ соответственно для a , b , c слѣдующія значенія: $c = 75$ или 12, $b = 60$ или 15, $a = 45$ или 20. Подставляя каждую изъ 8-ми воз-

возможных комбинацій этихъ значений a, b, c въ формулы (9) и (10) получаемъ слѣдующую таблицу рѣшеній:

$$x = \pm 6 ; \pm 4 ; \pm 3 ; \pm 2 ; \pm 15; \pm 10; \pm 12,5; \pm 5 ,$$

$$y = \pm 1,5; \pm 5 ; \pm 15; \pm 10; \pm 3 ; \pm 2 ; \pm 15; \pm 4 ,$$

$$z = \pm 10; \pm 15; \pm 5 ; \pm 7,5; \pm 4 ; \pm 6 ; \pm 3\frac{1}{3} ; \pm 3 ;$$

$$v = \pm 2 ; \pm 3 ; \pm 4 ; \pm 6 ; \pm 5 ; \pm 7,5; \pm 6 ; \pm 15.$$

Числа каждаго изъ столбцовъ этой таблицы, взятые одновременно со знакомъ $+$ или $-$, даютъ одну изъ системъ рѣшеній предложенной системы уравненій.

В. Гейманъ (Θеодосія); Оганниъ (Эривань); А. Брюхановъ (Иркутскъ); В. Смирновъ (Москва); Н. Агрономовъ (Вологда).

№ 590 (4 сер.). Доказать, что площадь всякаго треугольника ABC такъ относится къ площади треугольника, вершины котораго суть точки встрѣчи биссектрисъ внутреннихъ угловъ треугольника ABC съ окружностью описаннаго около него круга, какъ діаметръ круга вписаннаго въ треугольникъ ABC къ радіусу круга описаннаго.

Называя стороны, полупериметръ, углы, радіусы круговъ вписаннаго и описаннаго и площадь даннаго треугольника ABC черезъ $a, b, c, p, A, B, C; r, R, S$, а площадь и углы треугольника $A'B'C'$ черезъ A', B', C' и S' , получимъ:

$$S' = \frac{A'B' \cdot A'C' \cdot \sin A'}{2} = \frac{2R \sin C' \cdot 2R \sin B' \cdot \sin A'}{2} = 2R^2 \sin A' \sin B' \sin C' \quad (1).$$

$$\text{Но } A' = \frac{\angle ABV' + \angle ACC'}{2} = \angle ABB' + \angle ACC' = \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{B+C}{2}, \text{ и}$$

точно также $B' = \frac{C+A}{2}, C' = \frac{A+B}{2}$; поэтому (см. (1))

$$S' = 2R^2 \sin \frac{B+C}{2} \sin \frac{C+A}{2} \sin \frac{A+B}{2} = 2R^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} =$$

$$= 2R^2 \cdot \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \cdot \sqrt{\frac{p(p-c)}{bc}} = \frac{2R^2 p S}{abc},$$

откуда

$$\frac{S}{S'} = \frac{abc}{2R^2 p} = \frac{2 \frac{abc}{4R} : p}{R} \quad (2),$$

или, такъ какъ $\frac{abc}{4S} = R$ и $S = pr$, то (см. (2))

$$\frac{S}{S'} = \frac{2S : p}{R} = \frac{2r}{R}.$$

В. Гейманъ (Θеодосія); Г. Оганниъ (Эривань); Э. Лейтманъ (Рига); Н. Агрономовъ (Вологда); Г. Лебедевъ (Полтава).

Обложка
щется

Обложка
щется