Обложка
ищется

Обложка
ищется

XXXIV Сем. №7.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
Элементарной Математики.

№ 403.

Историческій очеркъ
развитія ученія объ основаніяхъ геометріи.

Приватъ-доцента В. Кагана.

(*Продолженіе* *).

Какова же геометрическая система на поверхностяхъ этого типа? Очень опредѣленное указаніе на это мы встрѣчаемъ уже у Миндинга въ другомъ мемуарѣ, опубликованномъ годомъ позже предыдущаго [1]).

Самый мемуаръ содержитъ мало интереснаго; но въ немъ имѣется слѣдующее замѣчательное указаніе:

„Что на каждой поверхности постоянной положительной кривизны стороны и углы треугольника, составленнаго кратчайшими линіями, связаны соотношеніями сферической тригонометріи, становится очевиднымъ, если припомнимъ, что каждая поверхность этого рода развертывается на сферу. Если же мѣра кри-

[1]) *F. Minding.* „Beiträge zur Theorie der kürzesten Linien auf krummen Flächen". Journal für reine und angew. Math. B. XX. 1840.

*) См. № 402 „Вѣстника".

визны отрицательна, то остаются въ силѣ тѣ же формулы съ тою только разницей, что тригонометрическія функціи замѣняются гиперболическими. Именно, если a, b, c суть стороны треугольника, A есть уголъ, противолежащій сторонѣ a, и k постоянная мѣра кривизны, то можно безъ труда доказать справедливость слѣдующей формулы:

$$\cos(a\sqrt{k}) = \cos(b\sqrt{k})\cos(c\sqrt{k}) + \sin(b\sqrt{k})\sin(c\sqrt{k})\cos A \qquad (4)$$

независимо отъ того, имѣетъ ли k положительное или отрицательное значеніе".

Съ другой стороны, хорошо извѣстно, что тригонометрическія уравненія гиперболической геометріи получаются изъ уравненій сферической геометріи, если мы замѣнимъ тригонометрическія функціи гиперболическими. И дѣйствительно, уравненіе (4) при отрицательномъ k совпадаетъ съ основнымъ уравненіемъ тригонометріи Лобачевскаго. Въ „Новыхъ Началахъ" это уравненіе фигурируетъ въ томъ же видѣ и указана его связь съ основными уравненіями сферической тригонометріи. Однако, это замѣчательное совпаденіе было замѣчено гораздо позже.

У Миндинга нѣтъ никакихъ указаній на то, какимъ образомъ онъ пришелъ къ этому замѣчательному результату. Полный выводъ тригонометріи на поверхностяхъ постоянной отрицательной кривизны мы находимъ въ мемуарѣ Кодацци, опубликованномъ въ 1857 г. [1]). Мы изложимъ здѣсь сущность этого вывода, чтобы лучше выяснить значеніе элемента дуги въ дѣлѣ построенія геометрической системы поверхности.

Отнесемъ поверхность къ полярнымъ геодезическимъ координатамъ. Пусть AB будетъ геодезическая полярная ось, AC геодезическій радіусъ векторъ точки C, CB нѣкоторая другая кривая на поверхности. Въ этой координаціи, какъ мы видѣли выше, элементъ длины выражается формулой (8) на стр. 253 (предыд. сем.).

$$ds = \sqrt{dr^2 + m^2 d\varphi^2},$$

а въ частности на поверхности, имѣющей постоянную отрицательную кривизну $k = -\frac{1}{R^2}$, формулой (15) на стр. 273 (предыд. сем.):

$$ds = \sqrt{dr^2 + R^2 \operatorname{Sinh}^2 \frac{r}{R} d\varphi^2},$$

такъ что $E = 1$, $F = 0$, $G = m^2 = R \operatorname{Sinh}^2 \frac{r}{R}$.

[1]) *D. Codazzi.* „Intorno alle superficie le quali hanno constante il prodotto dé' due raggi di curvatura". Annali di Scienza di mat. e fis. T. VIII. 1857.

Какъ и въ случаѣ полярныхъ координатъ на плоскости, уголъ $\theta = ACB$ опредѣляется изъ уравненія:

$$\operatorname{Cos}\theta = \frac{dr}{ds}, \quad \operatorname{Sin}\theta = \frac{m d\varphi}{ds}, \tag{7}$$

гдѣ dr и ds суть дифференціалы радіуса вектора и дуги кривой BC въ точкѣ C [1]). Съ другой стороны, если BC есть геодезическая линія, то ея координаты удовлетворяютъ уравненію (7) на стр. 253, которое въ полярныхъ координатахъ имѣетъ видъ:

$$m \frac{dm}{dr} d\varphi^2 = ds d \frac{dr}{ds};$$

но, въ виду соотношеній (7), это уравненіе можно представить въ видѣ:

$$\frac{\partial m}{\partial r} d\varphi + d\theta = 0.$$

Если сюда вновь вмѣсто $d\varphi$ поставить $\frac{dr}{m} tg\theta$, то оно приметъ видъ:

$$\frac{\partial m}{\partial r} \operatorname{Sin}\theta dr + \operatorname{Cos}\theta d\theta = 0.$$

Если теперь m есть функція одного только перемѣннаго r, то послѣднее уравненіе имѣетъ интегралъ:

$$m \operatorname{Sin}\theta = \mathrm{Const}.$$

Такой случай и имѣетъ мѣсто на поверхностяхъ постоянной отрицательной кривизны, гдѣ $m = R \operatorname{Sinh} \frac{r}{R}$. Слѣдовательно, на этихъ поверхностяхъ

$$\operatorname{Sinh} \frac{r}{R} \operatorname{Sin}\theta = \mathrm{Const}.$$

Въ нашемъ геодезическомъ треугольникѣ ABC при точкѣ B $r = c$ и $\operatorname{Sin}\theta = \operatorname{Sin} B$, а при точкѣ C $r = b$ и $\operatorname{Sin}\theta = \operatorname{Sin} C$. Поэтому во всякомъ геодезическомъ треугольникѣ на поверхности постояной отрицательной кривизны

$$\operatorname{Sinh} \frac{c}{r} : \operatorname{Sin} C = \operatorname{Sinh} \frac{b}{r} : \operatorname{Sin} B = \operatorname{Sinh} \frac{a}{r} : \operatorname{Sin} A.$$

---

[2]) Это соотношеніе можно получить также изъ формулы (18). Дѣйствительно, уравненіе кривой AC есть $\varphi = \mathrm{const}$, уравненіе кривой BC, скажемъ, $r = \chi(\varphi)$. Тогда формула (18) даетъ $\operatorname{Cos}\theta = \frac{\chi'(\varphi)}{\sqrt{[\chi'(\varphi)]^2 + m^2}}$. Но такъ какъ на кривой AB $dr = \chi'(\varphi) d\varphi$, а $ds = d\varphi \sqrt{[\chi'(\varphi)]^2 + m^2}$, то $\operatorname{Cos}\theta = \frac{dr}{ds}$.

Такимъ образомъ мы уже имѣемъ два соотношенія между сторонами и углами треугольника на поверхности отрицательной кривизны. Чтобы получить третье соотношеніе, Кодацци производитъ еще одно интегрированіе. Но Эшерихъ, правда, гораздо позже, обнаружилъ, что третье уравненіе можетъ быть получено безъ новаго интегрированія. Мы привели весь этотъ выводъ для того, чтобы на этомъ примѣрѣ выяснить, въ какой мѣрѣ выраженіе дифференціала дуги опредѣляетъ собой геометрію поверхности [1]).

„Когда Миндингъ сдѣлалъ въ XX томѣ журнала Крелля свои указанія" (относительно основныхъ тригонометрическихъ уравненій на поверхностяхъ постоянной отрицательной кривизны), говоритъ Ф. Клейнъ, „а въ XVII томѣ того же журнала Лобачевскій опубликовалъ свои изслѣдованія о „Воображаемой Геометріи", то можно было бы думать, что не понадобится много времени, чтобы установить связь между этими замѣчательными результатами, полученными совершенно различнымъ образомъ". Между тѣмъ на это потребовалось цѣлыхъ 30 лѣтъ. Правда, Риманъ, какъ мы увидимъ ниже, уже въ 1854 г. зналъ эту зависимость; но его работа была опубликована гораздо позже въ томъ же году, когда Бельтрами опубликовалъ свой „Опытъ истолкованія неевклидовой геометріи".

Такой перерывъ объясняется, какъ мы уже говорили выше, тѣмъ, что работы Лобачевскаго и Больэ прошли почти незамѣченными при ихъ жизни и были вовсе забыты съ ихъ смертью. Гауссу, который при жизни такъ тщательно скрывалъ свои идеи по этому вопросу, все же суждено было сыграть важную роль въ дѣлѣ ихъ возрожденія.

Въ концѣ пятидесятыхъ годовъ Петерсъ началъ издавать переписку между Гауссомъ и Шумахеромъ [2]). Во второмъ томѣ, появившемся въ 1860 г., помѣщены два письма отъ 1831 г., изъ которыхъ второе отъ 12-го іюля содержитъ краткое изложеніе извѣстныхъ взглядовъ Гаусса по этому вопросу,—а въ пятомъ томѣ письмо отъ 28 ноября 1846 г. [3]), въ которомъ онъ восторженно говоритъ о Лобачевскомъ и обращаетъ вниманіе Шумахера на его замѣчательный мемуаръ. Этимъ было обращено вниманіе всего математическаго міра на работы Лобачевскаго и его „Воображаемая геометрія" была вновь призвана къ жизни.

---

[1]) *G. v. Escherich.* „Die Geometrie auf den Flächen constanter negativer Krümmung". Sitzungsberichte der K. Akad. der Wissen. zu Wien. B. LXIX. 1874.

[2]) „Briefwechsel zwischen C. F. Hauss und G. C. Schumacher". Herausgegeben von C. A. F. Peters. Altona. Послѣдовательные томы появлялись въ различные годы, послѣдній въ 1863.

[3]) См. стр. 55 предыд. сем.

Піонерами въ дѣлѣ этого возрожденія явились Бальтцеръ, Гуэль и Баттальини.

Бальтцеръ, профессоръ гимназіи въ Дрезденѣ, написалъ руководство „Элементы математики" въ двухъ томахъ, получившее большое распространеніе въ Германіи; второй томъ посвященъ геометріи. Въ 1867 г. появилось второе изданіе этого сочиненія [1]). Въ предисловіи ко второму тому онъ даетъ краткія указанія на идеи Гаусса, Лобачевскаго и Больэ, съ ссылкой на переписку Гаусса съ Шумахеромъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ въ текстѣ имъ совершенно измѣнено изложеніе главы о параллельныхъ линіяхъ. Здѣсь изложены работы Лежандра, вкратцѣ выясняется сущность идей Лобачевскаго и указывается литература; подборъ этихъ указаній обнаруживаетъ, что Бальтцеръ изучилъ этотъ вопросъ очень тщательно. Его популярная книга, такимъ образомъ, содѣйствовала возрожденію этихъ идей.

Гуэль, профессоръ университета въ Бордо, еще раньше много интересовался основаніями геометріи. Въ 1863 году онъ опубликовалъ мемуаръ „Опытъ раціональнаго изложенія основаній элементарной геометріи", о которомъ намъ придется еще говорить ниже [2]). Въ этомъ мемуарѣ, однако, теорія параллельныхъ линій изложена по обычному плану и никакихъ указаній на неевклидову геометрію нѣтъ. Но послѣ опубликованія писемъ Гаусса Гуэль занялся работами Лобачевскаго и Больэ и тщательно ихъ изучилъ. Въ 1866 г. онъ перевелъ на французскій языкъ „Geometrische Untersuchungen" Лобачевскаго [3]), а въ слѣдующемъ 1867 г. имъ былъ переведенъ на французскій языкъ „Appendix" Больэ [4]). Въ томъ же году имъ выпущена небольшая брошюра „Опытъ критики основаній геометріи" [5]), которая представляетъ собой переработку упомянутаго выше мемуара въ „Архивѣ" Грюнерта (о ней мы также будемъ говорить еще ниже); здѣсь уже изложены обстоятельно основныя идеи новаго геометрическаго ученія.

Въ томъ же году Баттальини, профессоръ университета въ Неаполѣ, познакомившись съ идеями Лобачевскаго по переводу

---

[1]) *R. Baltzer.* „Die Elemente der Mathematik". Zweite verbesserte Ausgabe. Leipzig. 1867.

[2]) *J. Hoüel.* „Essai d'une exposition rationelle des principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire". Archiv der Mathem. und Physik. XL. 1863.

[3]) *N. Lobatschefsky.* „Études géométriques sur la théorie des parallèles". Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles à Bordeaux. IV. 1866. Выпущено также отдѣльной брошюрой въ изданіи G. Villars (второе изд. въ 1895 г.).

[4]) *J. Bolyai.* „La science absolue de l'espace, indépendante de la vérité ou fausseté de l'axiome d'Euclide". Mémoires de Bordeaux. V. 1867.

[5]) *J. Hoüel.* „Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géométrie". Paris. 1867.

Гуэля, перевелъ на итальянскій языкъ „Пангеометрію“ [1]) и даже далъ оригинальный выводъ гиперболической тригонометріи [2]).

Въ слѣдующемъ 1868 г. Баттальини перевелъ на итальянскій языкъ „Appendix“ Больэ [3]), а Гуэль перевелъ на французскій языкъ упомянутый выше мемуаръ Баттальини [4]).

Такимъ образомъ забытыя идеи Гаусса, Лобачевскаго и Больэ вновь возродились къ жизни, а въ 1868 г. они сразу получили значительное развитіе, такъ какъ въ этомъ году появились три замѣчательныхъ мемуара—Бельтрами, Римана и Гельмгольца, имѣвшіе огромное значеніе въ развитіи этихъ идей.

(Прдолженіе слѣдуетъ).

Законъ Паскаля.

(3)

Историческій очеркъ профессора **P. Duhem** (Бордо).

Переводъ I. Л.

*(Продолженіе *).*

Заглавіе упомянутаго письма: „О машинѣ, толкающей и подымающей воду“. Здѣсь мы находимъ слѣдующія страницы:

„Въ фонтанѣ цилиндрическая часть насоса, куда входитъ поршень, который гонитъ воду, должна имѣть не бо́льшій діаметръ, чѣмъ трубка, по которой вода подымается вверхъ, и вотъ по какой причинѣ: если бы первый діаметръ превышалъ второй, то вѣсъ поршня, который гонитъ воду, долженъ былъ бы значительно провосходить вѣсъ воды, взятой въ объемѣ цилиндра, высота котораго равна высотѣ фонтана, а площадь основанія — сѣченію цилиндрической части насоса.

„Пусть, напримѣръ (фиг. 3), F изображаетъ трубку, по которой вода подымается вверхъ, и AU — цилиндрическую часть насоса; предположимъ, что обѣ трубки имѣютъ одинаковую вы-

---

[1]) *N. Lobatschefsky.* „Pangeometria o sunto di geometria fondato sopra una theoria generale e rigoroso delle parallele“. Giornale di Matematiche. V. 1867.

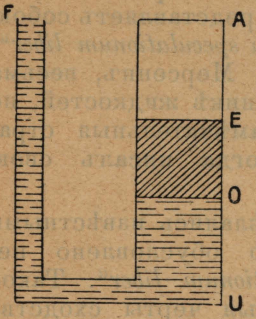
[2]) *G. Battaglini.* „Sulla geometria imaginaria di Lobatschefsky“. Въ томъ же журналѣ.

[3]) *J. Bolyai.* „Sulla Scienza dello spazio assolutamente vera“. Giorn. di Matem. VI. 1868.

[4]) *G. Battaglini.* „Sur la géométrie de Lobatschefsky“. Nouvelles Annales de Mathém. 2 série. VII. 1868.

*) См. № 401 „Вѣстника“.

шину, но вторая шире первой. Вообразимъ, что оба сосуда до краевъ наполнены водой. Очевидно, что давленіе воды въ обѣихъ трубкахъ взаимно уравновѣшивается, хотя объемъ и вѣсъ воды, заключенной въ сосудѣ F, меньше, чѣмъ въ сосудѣ AU. Объясняется это тѣмъ обстоятельствомъ, что вода сосуда AU не давитъ всѣмъ своимъ вѣсомъ на воду, заключенную въ трубкѣ F: давленіе распредѣляется пропорціонально поверхности дна сосуда...



Фиг. 3.

„Вернемся къ сосудамъ AU и F. Подобно тому, какъ вода въ сосудѣ F выдерживаетъ давленіе воды въ трубкѣ AU, точно такъ этому же давленію можно противупоставить, взамѣнъ воды въ трубкѣ F, какое угодно тѣло такого же вѣса, помѣстивъ его внутрь трубки F, лишь бы это тѣло вполнѣ приходилось къ внутренней поверхности трубки такимъ именно образомъ, чтобы между этой поверхностью и внѣшней поверхностью поршня не проникалъ ни воздухъ, ни вода. Это само собой разумѣется. Съ другой стороны, въ цилиндрѣ AU, который, какъ мы предположили, шире трубки F, лишь такой поршень можетъ выдержать давленіе воды въ трубкѣ F, вѣсъ котораго не уступаетъ вѣсу всей воды, налитой въ трубкѣ AU до того же уровня, что и въ трубкѣ F. Поэтому, если вода въ трубкѣ F вѣситъ одинъ ливръ, а площадь сѣченія трубки AU въ десять разъ болѣе сѣченія трубки F, то, чтобы противостоять давленію воды въ этой послѣдней, поршень цилиндра AU долженъ быть точно прилаженъ къ нему и долженъ вѣсить десять ливровъ; для того же, чтобы гнать воду по трубкѣ F, поршень долженъ вѣсить болѣе десяти ливровъ. Предположимъ, что вещество поршня настолько плотнѣе воды, что соотвѣтственный вѣсъ его занимаетъ всего лишь объемъ EO. Тогда объемъ EO такого вещества въ состояніи преодолѣть давленіе воды въ трубкѣ F; тѣло же менѣе плотное не годится для этой цѣли“.

Benedetti замѣщалъ поршень столбомъ воды одинаковаго вѣса сперва въ узкой трубкѣ, а затѣмъ въ широкомъ цилиндрѣ насоса; если бы онъ сдѣлалъ это замѣщеніе одновременно въ обѣихъ трубкахъ, онъ былъ бы истиннымъ изобрѣтателемъ гидравлическаго пресса. Во всякомъ случаѣ ни для Мерсенна, ни для Паскаля не составляло бы большого труда изобрѣсти этотъ прессъ послѣ того, какъ они познакомились съ письмомъ Benedetti къ Giovanni—Paolo Capra. Но читали ли П. Мерсеннъ и Блэзъ Паскаль это письмо?

Изъ собственнаго признанія П. Мерсенна мы знаемъ, что онъ былъ знакомъ съ трудомъ „*Diversarum speculationum liber*“, въ которомъ находится интересующее насъ письмо. Въ своей книгѣ

„*Harmonie Universelle*“ [1]) онъ излагаетъ теорію равновѣсія вѣсовъ, пользуясь понятіемъ момента силы; при этомъ онъ ссылается на Benedetti, говоря: „такъ дѣлаетъ Бенедетти въ третьей главѣ своей механики“. Но отдѣлъ „*De mechanicis*“ представляетъ собою одну изъ важнѣйшихъ частей книги „*Diversarum speculationum liber*“. Поэтому не можетъ подлежать сомнѣнію, что Мерсеннъ, весьма интересовавшійся всякимъ трудомъ по механикѣ жидкостей, не оставилъ безъ вниманія вышеприведенныя замѣчательныя страницы и вспомнилъ о нихъ впослѣдствіи, когда писалъ свою гидростатику.

Благодаря Мерсенну идеи Benedetti сдѣлались извѣстными Паскалю. Возможно также, что вліяніе это обусловлено непосредственно чтеніемъ „*Diversarum speculationum liber*“. Такое предположеніе подтверждаютъ многочисленныя черты сходства между сочиненіями обоихъ авторовъ. Паскаль указываетъ, что къ каждому отверстію пресса нужно приладить поршень, „который былъ бы какъ разъ впору“, а Benedetti настаиваетъ на томъ, чтобы „поршень вполнѣ приходился ко внутренней поверхности трубки такимъ именно образомъ, чтобы между этой поверхностью и внѣшней поверхностью поршня не проникалъ ни воздухъ, ни вода. Benedetti объясняетъ равновѣсіе неравныхъ массъ воды въ сообщающихся сосудахъ, имѣющихъ различные поперечники, тѣмъ обстоятельствомъ, что „вѣсъ распредѣляется пропорціонально площади дна сосуда“; Паскаль же замѣчаетъ: „для лучшаго уясненія, что вода одинаково сжата подъ обоими поршнями: хотя одинъ поршень вѣситъ въ сто разъ больше другого, зато онъ давитъ на число частицъ, въ сто разъ большее, чѣмъ второй“. Изъ закона сообщающихся сосудовъ Benedetti выводитъ теорію насоса, допуская возможность замѣнить водяной столбъ поршнемъ, имѣющимъ тотъ же вѣсъ. Паскаль же идетъ какъ разъ обратнымъ путемъ, и выводитъ изъ принципа гидравлическаго пресса законъ равновѣсія въ двухъ сообщающихся сосудахъ: „вода въ обѣихъ этихъ трубкахъ въ сущности представляетъ собою два поршня, вѣса́ которыхъ пропорціональны площадямъ отверстій“. Нельзя не усмотрѣть родственныхъ чертъ между мыслями Паскаля и Benedetti.

V. Вліяніе Галилея.

При всемъ этомъ сходствѣ здѣсь обнаруживается существенное различіе. Путь, которымъ шелъ Паскаль, противоположенъ, такъ сказать, пути, который избралъ Benedetti. Въ изложеніи Паскаля законъ равновѣсія жидкостей въ сообщающихся сосудахъ представляетъ собою не основной принципъ,

[1]) „*Harmonie Universelle*“ содержитъ теорію и практику музыки, съ изслѣдованіемъ теоріи звуковъ, движеній, консонансовъ и диссонансовъ, тоновъ, композицій, голоса, пѣнія, и всякаго рода музыкальныхъ инструментовъ, соч. францисканецъ F. Marin Mersenne, Парижъ MDCXXXVI, Nouvelles observations physiques et mathématiqnes, V-e observation, p. 17.

а выводъ. Точно также принципъ гидростатическихъ законовъ выводится, какъ слѣдствіе болѣе общей аксіомы о равенствѣ работы двигателя и работы сопротивленія,—аксіомы, которая имѣетъ мѣсто при равновѣсіи всякой машины.

Benedetti не желалъ пользоваться этимъ послѣднимъ принципомъ; въ немъ онъ усматривалъ одну изъ тѣхъ аксіомъ, на которыя ссылалась школа механиковъ, основанная въ XIII-омъ столѣтіи математикомъ Jordanus de Nemore; методы этой школы онъ подвергъ рѣзкой критикѣ [1]. Весьма естественно, что Benedetti, вѣрный методу Архимеда, воспользовался принципомъ, хотя далеко не общаго характера, но имѣющимъ то преимущество, что въ его точности можно удостовѣриться непосредственно путемъ опыта.

Поэтому очень возможно, что не чтеніе трудовъ Benedetti навело Паскаля на мысль разсматривать гидравлическій прессъ, какъ машину, гдѣ „путь увеличивается пропорціонально приложенной силѣ".

П. Мерсеннъ, напротивъ, былъ сильно заинтересованъ въ томъ, чтобы вывести законы гидростатики изъ принципа возможныхъ перемѣщеній, нашедшаго столько удачныхъ примѣненій къ различнымъ вопросамъ механики. Но онъ, повидимому, не понималъ, какимъ образомъ примѣнить этотъ принципъ къ равновѣсію жидкостей. Слѣдующій отрывокъ изъ „*Cogitata*" показываетъ намъ ошибочные пункты въ его разсужденіяхъ объ этомъ предметѣ.

„Тѣ свойства системы твердыхъ тѣлъ, которыя обусловлены ихъ положеніемъ относительно центра равновѣсія или точки опоры рычага, въ жидкихъ тѣлахъ зависятъ отъ различныхъ высотъ трубокъ и неравныхъ размѣровъ сосудовъ: подобно тому, какъ подвѣсокъ движется тѣмъ быстрѣе, чѣмъ дальше его разстояніе отъ центра равновѣсія, точно такъ и части воды движутся тѣмъ быстрѣе, чѣмъ болѣе онѣ удалены отъ уровня жидкости въ сосудѣ, или другими словами, чѣмъ выше уровень жидкости въ сосудѣ. И подобно тому, какъ неравные грузы могутъ взаимно уравновѣшиваться на чашкахъ вѣсовъ при соотвѣтственныхъ длинахъ плечъ, точно такъ и неравныя массы воды могутъ взаимно уравновѣситься благодаря различному расположенію сосудовъ, ихъ содержащихъ"...

Мы видимъ, что Мерсеннъ не могъ научить Паскаля примѣнять къ теоріи равновѣсія жидкостей принципъ возможныхъ скоростей; но это сумѣлъ сдѣлать Галилей.

Въ 1612 г. Галилей напечаталъ сочиненіе о плавающихъ

[1]) P. Duhem: „Les origines de la statique", гл. X. La réaction contr- Jordanus—Guido Ubaldo—Benedetti (Revue des Questions scientifiques, 3-e ésérie, t. VI, октябрь 1904).

тѣлахъ [1]). Основная цѣль этого сочиненія заключается въ томъ, чтобы свести къ принципу возможныхъ скоростей всѣ слѣдствія, вытекащія изъ принципа Архимеда. Разсужденія свои авторъ ведетъ не совсѣмъ правильнымъ путемъ: принципъ возможныхъ скоростей въ примѣненіи къ конечному перемѣщенію, а не къ безконечно малому даетъ здѣсь вѣрный результатъ лишь благодаря совершенно исключительной и счастливой случайности; объ этомъ обстоятельствѣ мы упоминаемъ лишь мимоходомъ, и не будемъ на немъ останавливаться, тѣмъ болѣе, что работа Галилея о погруженныхъ тѣлахъ непосредственно насъ теперь не интересуетъ.

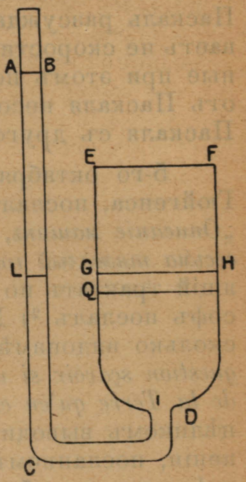
Наше вниманіе мы остановимъ на небольшомъ отрывкѣ, въ которомъ великій флорентинскій геометръ выводитъ законъ равновѣсія жидкости въ двухъ сообщающихся сосудахъ изъ принципа возможныхъ скоростей. Вотъ переводъ этого интереснаго отрывка:

„Разсмотримъ приложенный здѣсь чертежъ (фиг. 4). Если я не ошибаюсь, то эта фигура можетъ послужить для того, чтобы вывести изъ заблужденія нѣкоторыхъ механиковъ-практиковъ, которые, исходя изъ ложныхъ принциповъ, берутся за невыполнимыя предпріятія. Весьма широкій сосудъ EIDF соединенъ съ очень узкой трубочкой ICAB; въ оба сосуда мы наливаемъ воду до уровня LGH. Въ такомъ положеніи вода будетъ сохранять равновѣсіе, какъ ни странно кажется это многимъ людямъ; дѣйствительно, они не могутъ объяснить себѣ, по какой причинѣ тяжелый грузъ большой массы воды GD, оказывающій давленіе внизъ, не въ состояніи погнать и поднять вверхъ малое количество воды, заключенное въ трубкѣ CL, тогда какъ это ничтожное количество воды заграждаетъ выходъ этой большой массѣ воды и не даетъ ей опускаться. Но это недоумѣніе разрѣшится сейчасъ же, когда мы представимъ себѣ, что вода въ широкой трубкѣ опустилась съ уровня GH до уровня Q, и разсмотримъ, какое вліяніе это окажетъ на воду CL. Вода, упавшая съ уровня GH до уровня Q, перемѣстится и одновременно подымется въ узкой трубкѣ съ высоты L до высоты AB; разность уровней LB превышаютъ разность GQ во столько разъ, во сколько ширина сосуда GHD превосходитъ ширину трубки LC—другими словами, во сколько разъ масса воды GHD превосходитъ массу LC. Но

[1]) „Discorso al Serenissimo Don Cosimo II, Gran Duca di Toscana, intorno alle cose che stanno in su l'acqua o che in quella si muovono, di *Galileo Galilei*, filosofo e matematico della medesima Altessa Serenissima"; *Firenze*, 1612. Діалогъ этотъ перепечатанъ во всѣхъ изданіяхъ сочиненій Галилея.

подобно тому, какъ при движенiи системы двухъ тѣлъ *„моментъ“* скорости движенія одного уравновѣшивается *„моментомъ“*, обусловленнымъ тяжестью другого, что есть удивительнаго въ томъ, что весьма быстрое подыманіе малаго количества воды CL равносильно весьма медленному опусканію большой массы воды GD?

„Здѣсь происходитъ то же самое явленіе, которое имѣетъ мѣсто въ римскихъ вѣсахъ, гдѣ грузъ въ два ливра можетъ уравновѣсить грузъ въ 200 ливровъ, но при этомъ всякій разъ первый грузъ проходитъ пространство во сто разъ большее, чѣмъ второй; это имѣетъ мѣсто, когда одно плечо коромысла въ сто разъ длиннѣе другого“. Поразительно сходство между этимъ отрывкомъ, заимствованнымъ у Галилея, и тѣми страницами, которыя мы привели изъ сочиненія Паскаля; но читалъ ли Паскаль діалогъ *„Discorso intorno alle cose che stanno in su l'acqua?“*



Фиг. 4.

Мерсеннъ несомнѣнно былъ знакомъ съ этимъ діалогомъ и цѣнилъ его весьма высоко. Въ своихъ *„Cogitata physico mathematica“* онъ даетъ весьма пространное изложеніе [1]) метода, которымъ пользовался Галилей, трактуя о плавающихъ и погруженныхъ тѣлахъ; этому изложенію предшествуетъ восторженный отзывъ о Галилеѣ и его открытіяхъ. Правда, тотъ отрывокъ діалога, который мы выше цитировали, Мерсеннъ не воспроизвелъ въ своей книгѣ и даже не изложилъ его вкратцѣ; но и тѣхъ извлеченій изъ *„Discorso“*, которыя имѣются въ книгѣ Мерсенна, вполнѣ достаточно даже не для такого генія, какъ Паскаль, чтобы придти къ выводамъ, изложеннымъ въ вышеприведенномъ отрывкѣ. Впрочемъ, удовлетворило ли Паскаля краткое изложеніе Мерсенна? Не познакомился ли онъ непосредственно съ сочиненіемъ Галилея? Не послѣдовалъ ли онъ совѣту своего друга монаха, который отзывался объ этомъ діалогѣ въ слѣдующихъ выраженіяхъ: [2]) „эту небольшую остроумную книжку я рекомендую прочесть каждому мыслящему человѣку“?

VI. Вліяніе Декарта.

Изложеніе Паскаля отличается отъ изложенія Галилея одной особенностью, которая заключается въ слѣдующемъ: Въ опытѣ, гдѣ уровень воды понижается въ широкой трубкѣ и повышается въ узкой, Галилей сравниваетъ одновременныя *скорости* подыма-

---

[1]) F. Marini. Mersenni Minimi *Cogitata physico-mathematica;* De hydraylicis, p. 193—202.

[1]) Mersenne: *Loc. cit.*, p. 195.

ющейся воды и опускающейся: для равновѣсія, по его мнѣнію, необходимо, чтобы эти скорости были обратно пропорціональны соотвѣтственнымъ вѣсамъ поднявшейся воды и опустившейся; Паскаль разсуждаетъ почти такимъ же образомъ; но онъ сравниваетъ не скорости поднятія и пониженія уровня, а *пути*, пройденные при этомъ поднятіи и пониженіи. Въ этомъ отличіи Галилея отъ Паскаля несомнѣнно сказывается еще вліяніе, оказанное на Паскаля съ другой стороны: здѣсь сказывается вліяніе Декарта.

5-го октября 1637 года Декартъ, по просьбѣ Константина Гюйгенса, послалъ [1]) ему небольшое сочиненіе подъ заглавіемъ: „*Описаніе машинъ, помощью которыхъ можно малой силой поднять весьма тяжелый грузъ*"; сочиненіе это представляетъ собою настоящій трактатъ по статикѣ. Немного спустя, 13 іюля 1638 г. философъ послалъ [2]) Мерсенну новое изданіе той же книжки, нѣсколько видоизмѣненное, подъ новымъ заглавіемъ: „*Examen de la question sçavoir si un corps pèse plus ou moins estant proche du centre de la Terre qu'en estant esloigné*". Въ изложеніи Декарта статика вся цѣликомъ выводится изъ одной единственной аксіомы; въ сочиненіи, посланномъ Мерсенну, Декартъ формулируетъ эту аксіому слѣдующимъ образомъ.

„Доказательство этого опирается всего лишь на одинъ принципъ, который представляетъ собою общее основаніе всей статики; состоитъ онъ въ слѣдующемъ: *чтобы поднять нѣкоторый грузъ на опредѣленную высоту, нужно затратить такую же точно силу, какая нужна для того, чтобы поднять меньшій грузъ на высоту во столько разъ больше предыдущей, во сколько разъ грузъ легче, или для того, чтобы поднять болѣе тяжелый грузъ на соотвѣтственно меньшую высоту*. Напримѣръ, той силой, которая нужна для поднятія 100 ливровъ на высоту двухъ футовъ, можно также поднять 200 ливровъ на высоту одного фута, или грузъ въ 50 ливровъ на четыре фута, и такъ далѣе, лишь бы только эту силу приложить къ грузу.

„Съ справедливостью этого легко согласиться, если принять во вниманіе, что результатъ всегда долженъ быть пропорціоналенъ вызвавшему его дѣйствію: *поэтому, если той силой, которой можно поднять сто ливровъ на высоту двухъ футовъ, мы нѣкоторый грузъ подымаемъ лишь на высоту одного фута, то изъ этого слѣдуетъ, что нашъ грузъ вѣситъ 200 ливровъ* *). Дѣйствительно, не все ли

---

[1]) „*Oeuvres*" de Descartes, publiées par Ch. Adam et P. Tannery; *Correspondance*, n° LXXXIX, t. I, p. 431.

[2]) „*Oeuvres*" de Descartes, publiées par Ch. Adam et P. Tannery; *Correspondance*, n° CXXIX, t. II, p. 222.

*) (*Примѣчаніе переводчика*: переводъ вольный, такъ какъ текстъ искаженъ: ainsi que, s'il est nécessaire d'employer la force par laquelle on peut lever un poids de 100 livres à la hauteur d'un pied seulement, cela tesmoigne que celuy-cy pése 200 livres).

равно: поднять 100 ливровъ на одинъ футъ, и затѣмъ еще 100 ливровъ на футъ, или же поднять (сразу) 200 ливровъ на одинъ футъ или 100 ливровъ на высоту двухъ футовъ".

Этотъ принципъ статики составляетъ предметъ многихъ писемъ Декарта къ Мерсенну [1]). Декарту пришлось защищать этотъ принципъ противъ нападокъ со стороны нѣкоторыхъ геометровъ, къ числу которыхъ принадлежали какъ самъ Мерсеннъ, такъ и Des Argues, сомнѣвавшіеся въ вѣрности принципа; они не совсѣмъ понимали мысль Декарта, такъ какъ слово *сила* они понимали въ томъ смыслѣ, какой мы придаемъ ему нынче, тогда какъ Декартъ подъ этимъ словомъ подразумѣвалъ то понятіе, которое мы теперь обозначаемъ терминомъ *работа*. Декартъ долженъ былъ отстаивать свой принципъ еще передъ приверженцами Галилея, которые утверждали, что сопротивленіе и движущую силу надо помножить не на пути, пройденные точками ихъ приложенія, но на соотвѣтственныя скорости. Оба правила въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ приводили къ одинаковымъ слѣдствіямъ. Но правило Галилея имѣло за собой авторитетъ Архимеда *(Вопросы механики);* приверженцамъ этого правила Декартъ указывалъ, что оно тѣсно связано съ принципами перипатетической динамики, которые должны уже быть признаны несостоятельными, тогда какъ принципъ, который онъ предлагаетъ, не зависитъ отъ науки о движеніи.

Послѣ нѣкоторой борьбы Мерсеннъ кончилъ тѣмъ, что принялъ принципъ статики въ формулировкѣ Декарта; съ надлежащаго разрѣшенія автора онъ включилъ въ свои *Cogitata physico-mathematica* [2]) какъ самую аксіому Декарта, такъ и многочисленныя слѣдствія, вытекающія изъ нея.

Трудолюбивый монахъ сообщилъ о статикѣ Декарта геометрамъ, съ которыми онъ имѣлъ сношенія, между прочимъ Робервалю и Декарту; при этомъ онъ, конечно, не забылъ и Паскаля. Послѣдній, какъ мы увидимъ, вполнѣ и всецѣло присоединился къ принципу, на которомъ основана вся статика; мало того, онъ воспользовался этимъ принципомъ для доказательства основного закона равновѣсія жидкостей.

(Продолженіе слѣдуетъ).

---

[1]) Подробную исторію этого принципа можно найти въ нашемъ сочиненіи: *Происхожденіе статики*, гл. XIV; французская статика.—René Descartes (*Revue des Questions* scientifiques, 3-e série, t. VII, p. 462; 1905).

[2]) *F. Marini Mersenni*. Minimi Cogitata physico-mathematica; Tractatus mechanicus, p. 35.

О прямой Эйлера.

Дм. Ефремова (Иваново-Вознесенскъ).

*(Продолженіе *).*

II.

8. Обозначимъ чрезъ A_1, B_1, C_1 точки пересѣченія сторонъ даннаго тр-ка BC, CA, AB съ прямою Эйлера OH. Для опредѣленія сторонъ тр-въ A_1B_1C, A_1BC_1 и AB_1C_1 замѣтимъ, что

$$CA_1 = \frac{p}{\sin\alpha},\ BA_1 = \frac{n}{\sin\alpha},$$

$$AB_1 = \frac{m}{\sin\beta},\ CB_1 = \frac{p}{\sin\beta}, \tag{7}$$

$$BC_1 = \frac{n}{\sin\gamma},\ AC_1 = \frac{m}{\sin\gamma};$$

подставивъ сюда вмѣсто m, n, p ихъ значенія (1) и имѣя въ виду равенства

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

получимъ:

$$CA_1 = -2R\cdot\frac{\cos C.\cos\gamma}{\sin\alpha} = -a\cdot\frac{\cos C.\cos\gamma}{\sin A.\sin\alpha},$$

$$BA_1 = 2R\,\frac{\cos B\cos\beta}{\sin\alpha} = a\cdot\frac{\cos B.\cos\beta}{\sin A.\sin\alpha},$$

$$AB_1 = 2R\cdot\frac{\cos A.\mathrm{sos}\alpha}{\sin\beta} = b\cdot\frac{\cos A.\cos\alpha}{\sin B.\sin\beta},$$

$$CB_1 = -2R\cdot\frac{\cos C.\cos\gamma}{\sin\beta} = -b\cdot\frac{\cos C.\cos\gamma}{\sin B.\sin\beta}, \tag{8}$$

$$BC_1 = 2R\cdot\frac{\cos B.\cos\beta}{\sin\gamma} = c\cdot\frac{\cos B.\cos\beta}{\sin C.\sin\gamma},$$

$$AC_1 = 2R\cdot\frac{\cos A.\cos\alpha}{\sin\gamma} = c\cdot\frac{\cos A.\cos\alpha}{\sin C.\sin\gamma}.$$

*) См. № 402 „Вѣстника“.

Далѣе, изъ тѣхъ же тр-въ имѣемъ:

$$\frac{A_1B_1}{\sin C}=\frac{CA_1}{\sin\beta}=\frac{CB_1}{\sin\alpha},$$

$$\frac{B_1C_1}{\sin A}=\frac{AB_1}{\sin\gamma}=\frac{AC_1}{\sin\beta},$$

$$\frac{A_1C_1}{\sin B}=\frac{BC_1}{\sin\alpha}=\frac{BA_1}{\sin\gamma};$$

отсюда, на основанiи полученныхъ выше формулъ (8), находимъ:

$$A_1B_1=-2R\cdot\frac{\sin C.\cos C.\cos\gamma}{\sin\alpha.\sin\beta}=-c\cdot\frac{\cos C.\cos\gamma}{\sin\alpha.\sin\beta},$$

$$B_1C_1=2R\cdot\frac{\sin A.\cos A.\cos\alpha}{\sin\beta.\sin\gamma}=a\cdot\frac{\cos A.\cos\alpha}{\sin\beta.\sin\gamma}, \qquad (9)$$

$$A_1C_1=2R\cdot\frac{\sin B.\cos B.\cos\beta}{\sin\alpha.\sin\gamma}=b\cdot\frac{\cos B.\cos\beta}{\sin\gamma.\sin\alpha}.$$

9. Такъ какъ (фиг. 1)

$$CA_1+Ba_1=a,$$

$$AB_1+CB_1=b,$$

$$BC_1-AC_1=c,$$

то, на основанiи формулъ (8),

$$\sin A.\sin\alpha=\cos B.\cos\beta-\cos C.\cos\gamma,$$

$$\sin B.\sin\beta=\cos A\cos\alpha-\cos C\cos\gamma, \qquad (III)$$

$$\sin C.\sin\gamma=\cos B\cos\beta-\cos A\cos\alpha.$$

Если изъ перваго изъ этихъ равенствъ вычесть два послѣднихъ, то получится, что

$$\sin A.\sin\alpha=\sin B\sin\beta+\sin C.\sin\gamma; \qquad (IV)$$

вслѣдствiе этого послѣднiя равенства (III) преобразуются въ слѣдующiя:

$$\sin B.\sin\beta+\sin C.\sin\gamma=\cos B\cos\beta-\cos C\cos\gamma,$$

$$\sin A.\sin\alpha-\sin C.\sin\gamma=\cos A\cos\alpha-\cos C\cos\gamma, \qquad (V)$$

$$\sin A.\sin\alpha-\sin B.\sin\beta=\cos B\cos\beta-\cos A\cos\alpha.$$

Замѣтивъ еще, что (фиг. 1)

$$A_1B_1+B_1C_1=A_1C_1,$$

на основанiи формулъ (9), получимъ:

$$\sin A\cos A\sin\alpha\cos\alpha=\sin B.\cos B\sin\beta\cos\beta+\sin C\cos C\sin\gamma\cos\gamma,$$

или

$$\sin 2A.\sin 2\alpha = \sin\ B.\sin 2\beta + \sin 2C.\sin 2\gamma. \qquad \text{(VI)}$$

10. Пусть R_1, R_2, R_3 суть радіусы круговъ, описанныхъ около тр-въ AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C.

Такъ какъ

$$2R_1 = \frac{B_1C_1}{\sin A}, \quad 2R_2 = \frac{A_1C_1}{\sin B}, \quad 2R_3 = \frac{A_1B_1}{\sin C},$$

то, вслѣдствіе формулъ (9),

$$R_1 = R\,\frac{\cos A\cos\alpha}{\sin\beta.\sin\gamma},$$

$$R_2 = R\,\frac{\cos B\cos\beta}{\sin\gamma\sin\alpha}, \qquad (10)$$

$$R_3 = -R\,\frac{\cos C\cos\gamma}{\sin\alpha.\sin\beta}.$$

Изъ этихъ равенствъ слѣдуетъ, что

$$R_1\sin\beta\sin\gamma + R_2\sin\gamma\sin\alpha - R_3\sin\alpha\sin\beta =$$

$$= R(\cos A\cos\alpha + \cos B\cos\beta + \cos C\cos\gamma);$$

отсюда, на основаніи равенства (I),

$$R_1\sin\beta\sin\gamma + R_2\sin\gamma\sin\alpha = R_3\sin\alpha\sin\beta. \qquad \text{(VII)}$$

Выразивъ B_1C_1, A_1C_1 и A_1B_1 чрезъ R_1, R_2 и R_3 и подставивъ полученныя выраженія въ равенство (фиг. 1),

$$A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1,$$

найдемъ, что

$$R_1\sin A + R_3\sin C = R_2\sin B,$$

или

$$aR_1 + cR_3 = bR_2.$$

11. Обозначимъ Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3 площади тр-въ ABC, AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C. Такъ какъ

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{AB_1.AC_1}{bc},$$

$$\frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{BC_1.BA_1}{ca}$$

и

$$\frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{CA_1.CB_1}{ab},$$

то на основанiи формулъ (8), получимъ

$$\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{\cos^2 A.\cos^2\alpha}{\sin B.\sin\beta.\sin C.\sin\gamma},$$

$$\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{\cos^2 B.\cos^2\beta}{\sin C\sin\gamma\sin A\sin\alpha}, \qquad (11).$$

$$\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{\cos^2 C.\cos^2\gamma}{\sin A\sin\alpha\sin B\sin\beta}.$$

На основанiи формулъ (10) вторыя части этихъ равенствъ представляются еще въ другомъ видѣ, именно:

$$\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{\cos A.\cos\alpha}{\sin B.\sin C}\cdot\frac{\cos A\cos\alpha}{\sin\beta.\sin\gamma}=$$

$$=\frac{R_1}{R}\cdot\frac{\cos A.\cos\alpha}{\sin B.\sin C}=$$

$$=\frac{R_1}{R}\cdot\frac{\cos A.\cos\alpha}{\sin\beta.\sin\gamma}\cdot\frac{\sin\beta.\sin\gamma}{\sin B.\sin C}=$$

$$=\frac{R_1^2}{R^2}\cdot\frac{\sin\beta.\sin\gamma}{\sin B.\sin C};$$

поэтому

$$\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{R_1^2}{R^2}\cdot\frac{\sin\beta.\sin\gamma}{\sin B.\sin C},$$

$$\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{R_2^2}{R^2}\cdot\frac{\sin\gamma\sin\alpha}{\sin C\sin A}, \qquad (12)$$

$$\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{R_3^2}{R^2}\cdot\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin A.\sin B}.$$

Изъ этихъ равенствъ слѣдуетъ, что

$$\frac{\Delta_1}{R_1^2\sin A\sin\beta\sin\gamma}=\frac{\Delta_2}{R_2^2\sin B\sin\gamma\sin\alpha}=\frac{\Delta_3}{R_3^2\sin C\sin\alpha\sin\beta}=$$

$$=\frac{\Delta}{R^2\sin A\sin B\sin C}; \qquad (13)$$

а такъ какъ

$$\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1=\Delta,$$

то

$$R_2^2\sin B\sin\gamma\sin\alpha+R_3^2\mathrm{fin}C\sin\alpha\sin\beta-R_1^2\sin A\sin\beta\sin\gamma=$$

$$=R^2\sin A\sin B\sin C. \qquad (IX).$$

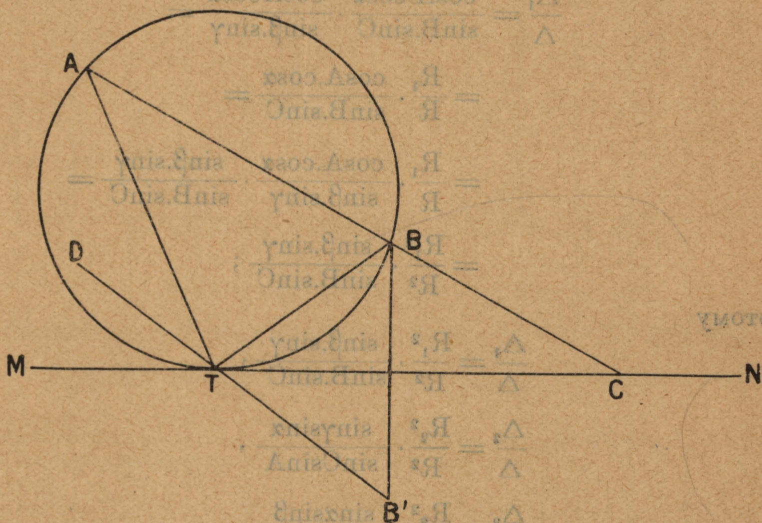
(Продолженiе слѣдуетъ).

Извѣстная конструктивная задача.

Прапорщика Е. Григорьева въ Ташкентѣ.

Построить кругъ, касательный данной прямой и проходящій черезъ двѣ данныя точки.

Пусть MN данная прямая, A и B двѣ данныя точки. Рѣшеніе задачи сводится къ построенію точки касанія T искомаго круга съ прямой MN. Легко видѣть, что если прямыя AB и MN пересѣкаются въ точкѣ C, то разстояніе TC есть средне-пропорціональное между разстояніями CA и CB и такимъ образомъ, по правиламъ приложенія алгебры къ геометріи, точка касанія мо-



жетъ быть построена. Въ этомъ состоитъ общеизвѣстный и употребительный способъ рѣшенія предложенной задачи. Отдавая должное простотѣ такого рѣшенія, намъ кажется позволительнымъ искать и иной пріемъ, основанный на чисто геометрическихъ соображеніяхъ; такія рѣшенія всегда представляютъ больший теоретическій интересъ, чѣмъ рѣшенія съ участіемъ алгебры.

Дѣйствительно, положеніе точки T можетъ быть опредѣлено слѣдующимъ образомъ. Пусть B′ — точка, симметричная съ B относительно прямой MN. Проведя черезъ B′ и T прямую до нѣкоторой точки D и соединивъ T съ A и B, находимъ, что

$$\angle ATD = \angle ACT$$

на основаніи слѣдующаго ряда равенствъ:

$$\angle ATD = \angle ATM - \angle DTM = \angle ATM - \angle BTC =$$
$$= \angle ATM - \angle TAC = \angle ACT.$$

Стало быть:

$$\angle ATB' = \angle ACN;$$

а это значитъ, что изъ точки T отрѣзокъ AB' опредѣленной длины видѣнъ подъ извѣстнымъ угломъ ACN, т. е., другими словами, положеніе точки T на MN мы найдемъ, пересѣкая прямую MN дугой сегмента, построеннаго на AB' и вмѣщающаго извѣстный уголъ ACN. Послѣ этого остается провести черезъ три точки A, B, T окружность, которая и будетъ искомая.

Нѣкоторое преимущество послѣдняго способа можно видѣть въ томъ, что изложенное рѣшеніе доступно и для тѣхъ, кто въ изученіи геометріи ушелъ не далѣе главы объ измѣреніи угловъ, представляя въ то же время одну изъ хорошихъ иллюстрацій къ этой главѣ.

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Премія имени Bolyai. Мы уже сообщали, что для присужденія этой преміи выбрана коммиссія изъ 4-хъ членовъ: F. Klein (Геттингенъ), G. Darboux (Парижъ), J. König и G. Rados (Будапештъ). Коммиссія остановилась на работахъ *Пуанкаре* и *Давида Гильберта*. Согласно уставу преміи, коммиссія должна принять во вниманіе *совокупность всѣхъ научныхъ заслугъ* увѣнчиваемаго лица и *общее значеніе* его работъ для развитія математики. Исходя изъ такихъ соображеній, коммиссія на этотъ разъ присудила премію Пуанкаре, который началъ свою научную дѣятельность еще въ 1879 г. и съ тѣхъ поръ работаетъ во всѣхъ отрасляхъ чистой и прикладной математики, всюду открывая новые горизонты. При этомъ коммиссія сочла нужнымъ признать универсальное значеніе изслѣдованій Гильберта, постановивъ, наряду съ отчетомъ о трудахъ Пуанкаре, опубликовать также подробный докладъ о работахъ Гильберта.

Директоръ Пулковской Обсерваторіи *Баклундъ* избранъ почетнымъ докторомъ Капштатскаго Университета.

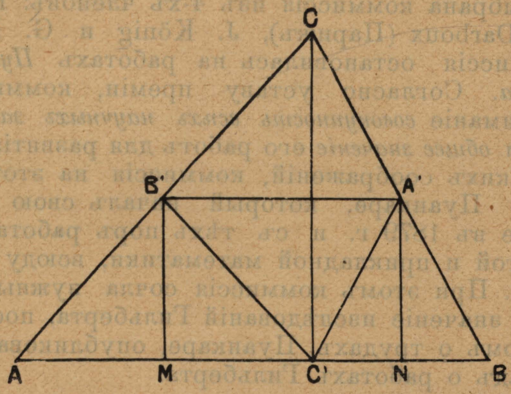
Архивъ математиковъ. Союзъ нѣмецкихъ математиковъ предполагаетъ учредить архивъ, въ которомъ будетъ храниться научное наслѣдіе математиковъ, какъ-то: рукописи, имѣющія историческую цѣнность, курсы лекцій и т. п.; при чемъ архивъ сдѣлаетъ всѣ эти матеріалы доступными для пользованія.

Торжество въ память Эйлера. 15 апрѣля (н. с.) 1907 г. истекаетъ 200-лѣтіе со дня рожденія знаменитаго математика Леонарда Эйлера. Союзъ нѣмецкихъ математиковъ уже началъ готовиться къ тому, чтобы подобающимъ образомъ отпраздновать эту годовщину.

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ МЕЛОЧИ.

Наглядное доказательство теоремы о суммѣ внутреннихъ угловъ треугольника.

Вырѣжемъ изъ бумаги треугольникъ ABC и проведемъ высоту CC′. Дѣлимъ пополамъ отрѣзокъ C′B въ точкѣ N и отрѣзокъ AC′ въ точкѣ M. Сложимъ бумагу вдоль прямыхъ NA′ и MB′, перпендикулярныхъ къ сторонѣ AB и пересѣкающихъ сто-



роны BC и AC соотвѣтственно въ точкахъ A′ и B′; начертимъ прямыя A′C′ и B′C′.

Складывая оконечности треугольника по прямымъ MB′, NA′ и A′B′, мы найдемъ, что углы A, B и C даннаго треугольника равны соотвѣтственно угламъ B′C′A, BC′A′ и A′C′B′, и такимъ образомъ въ суммѣ составляютъ два прямыхъ угла.

(Row. Geometric Exercises in Paper Folding).

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги: 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ" и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ. будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ

№ 683 (4 сер.). Построить четыреугольникъ, зная его углы, одну изъ сторонъ и уголъ между діагоналями.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 684 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$\frac{x}{y}=\left(\frac{x-z}{a-c}\right)^2,$$

$$\frac{y}{z}=\left(\frac{y-x}{b-a}\right)^2,$$

$$\frac{z}{x}=\left(\frac{z-y}{c-b}\right)^2.$$

Е. Григорьевъ (Ташкентъ).

№ 685 (4 сер.). Найти два цѣлыхъ числа, изображенныхъ по десятичной системѣ, зная, что каждое изъ нихъ есть точный квадратъ и что одно изъ нихъ обращается въ другое послѣ взаимной перестановки двухъ послѣднихъ цифръ

Ш. (Одесса).

№ 686 (4 сер.) Дано, что p—цѣлое положительное число и что каждое изъ чиселъ p и $8p^2+1$ простое; доказать, что $8p^2-p+2$ тоже простое число.

А. *Брюхановъ* (Иркутскъ).

№ 687 (4 сер.). Въ окружности даны неподвижный діаметръ AB и точка J на прямой AB; произвольную точку M окружности соединяютъ съ J прямой и опускаютъ изъ центра O перпендикуляръ на AM; найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія P этого перпендикуляра съ прямой JM.

(Заимств.).

№ 688 (4 сер.). Составленъ приборъ изъ двухъ равныхъ проводящихъ шариковъ; одинъ изъ нихъ A неподвиженъ, а другой B привязанъ къ концу нити длиною въ $l=13$ сантиметровъ. Масса m каждаго шарика равна 2,3 грамма. Шарики, находясь въ соприкосновеніи, получаютъ каждый электрическій зарядъ q, вслѣдствіе чего подвижный шарикъ B отклоняется на уголъ $\Theta=60°$. Опредѣлить зарядъ q.

(Заимств.) *М. Гербановскій.*

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 582 (4 сер.). *Найти цѣлыя значенія* x *и* y, *удовлетворяющія равенству*

$$x^3+4096=2^y.$$

Представимъ предложенное равенство въ видѣ

$$x^3+2^{12}=2^y \quad (1).$$

Лѣвая часть этого равенства есть число цѣлое, а потому $y\geqslant 0$. Посмотримъ, нѣтъ ли цѣлыхъ значеній y, меньшихъ 12, при которыхъ x также получаетъ цѣлыя значенія. Изъ уравненія (1) имѣемъ:

$$x^3=-(2^{12}-2^y)=2^y(2^{12-y}-1) \quad (2).$$

При y цѣломъ и меньшемъ 12 выраженіе $2^{12-y}-1$ представляетъ собою нечетное цѣлое число, а такъ какъ все число $2^y(2^{12-y}-1)$ должно быть (см. (2)) точнымъ кубомъ, то y кратно 3, а потому,—такъ какъ $12>y\geqslant 0$—, то y равно 0, 3, 6 или 9. Но числа $2^{12-0}-1=4095$, $2^{12-3}-1=511$, $2^{12-6}-1=63$, $2^{12-9}-1=7$ не суть точные кубы, а потому при $y=0$, 3, 6, 9 число x (см. (2)) не есть цѣлое, такъ что нельзя предположить, что $y<12$. Будемъ теперь искать цѣлыя значенія x и y при условіи $y\geqslant 12$. Въ этомъ случаѣ запишемъ равенство (1) въ видѣ $x^3=2^y-2^{12}=2^{12}(2^{y-12}-1)$ (3). Такъ какъ (см. (3)) x^3 и 2^{12} суть точные кубы, то и $2^{y-12}-1=z^3$, гдѣ z число цѣлое, или $2^{y-12}=z^3+1$ (4). Такъ какъ z^3+1 кратно $z+1$, то (см. (4)) и 2^{y-12} кратно $z+1$; поэтому $z+1=2^u$ (5), гдѣ u — цѣлое неотрицательное число; подставляя значеніе z изъ равенства (5) въ равенство (4), находимъ: $2^{y-12}=(2^u-1)^3+1=2^{3u}-3.2^{2u}+3.2^u$, откуда

$$2^{y-12}=2^u(2^{2u}-3.2^u+3) \quad (6).$$

Сравнивая лѣвую и правую части равенства (6), мы видимъ, что множитель $2^{2u}-3.2^u+3$, будучи нечетнымъ *положительнымъ* числомъ и являясь въ то же время дѣлителемъ степени 2^{y-12} можетъ равняться лишь 1, т. е. $2^{2u}-3.2^u+3=1$, или $(2^u)^2-3(2^u)+2=0$, откуда $2^u=1$ или $2^u=2$. Слѣдовательно, $u=0$ или $u=1$. Подставляя эти значенія u въ равенство (6), находимъ $2^{y-12}=1$ или $2^{y-12}=2$, откуда $y-12=0$ или $y-12=1$, т. е. $y=12$ или $y=13$; соотвѣтствующія значенія (см. (1)) x, а именно 0 или 16 также оказываются цѣлыми. Итакъ искомыя цѣлыя рѣшенія суть: $x=0$, $y=12$; $x=16$, $y=13$.

Г. Оганянцъ (Эривань); *С. Конюховъ* (Никитовка); *В. Смирновъ*; *Н. Плахово* (Винница); *Э. Лейнъкъ* (Рига); *Е. Хандановъ* (Тифлисъ).

№ 583 (4 сер.). *Рѣшит уравненіе*

$$x^4+ax+a\left(\frac{a}{64}-1\right)=0.$$

Заимств. изъ *Supplemento al Periodico di Matematica.*

Представимъ данное уравненіе въ видѣ

$$x^4+ax+\frac{a^2}{64}-a+2x^2\cdot\frac{a}{8}-2x^2\cdot\frac{a}{8}=0,$$

откуда

$$x^4+2x^2\cdot\frac{a}{8}+\frac{a^2}{64}=2x^2\cdot\frac{a}{8}-ax+a=\frac{a(x^2-4x+4)}{4},$$

или

$$\left(x^2+\frac{a}{8}\right)^2=\left[\frac{\sqrt{a}}{2}(x-2)\right]^2,\quad \left(x^2+\frac{a}{8}\right)^2-\left[\frac{\sqrt{a}}{2}(x-2)\right]^2=0,$$

$$\left[x^2+\frac{a}{8}+\frac{\sqrt{a}}{2}(x-2)\right]\left[x^2+\frac{a}{8}-\frac{\sqrt{a}}{2}(x-2)\right]=0.$$

Такимъ образомъ или $x^2+\frac{a}{8}+\frac{\sqrt{a}}{2}(x-2)=0$,

или $x^2+\frac{a}{8}-\frac{\sqrt{a}}{2}(x-2)=0$.

Рѣшая каждое изъ этихъ квадратныхъ уравненій, получимъ

$$x=\frac{-\sqrt{a}\pm\sqrt{16\sqrt{a}-a}}{4}\quad\text{или}\quad x=\frac{\sqrt{a}\pm\sqrt{-16\sqrt{a}-a}}{4}.$$

Г. Оганянцъ (Москва); *С. Конюховъ* (Никитовка); *Н. Доброгаевъ* (Спб.); *А. Варенцовъ* (Ростовъ н/Д); *Е. Хандановъ* (Тифлисъ).

№ 584 (4 сер.). *Въ треугольникѣ* ABC *проводятъ параллельную* BC *прямую, пересѣкающую стороны* AB *и* AC *соотвѣтственно въ точкахъ* D *и* E. *Доказать, что общая хорда круговъ, имѣющихъ діаметрами отрѣзки* DC *и* BE, *перпендикулярна къ* BC *и проходитъ черезъ вершину* A.

Заимств. изъ *Supplemento al Periodico di matematica*.

Опустимъ изъ точекъ D и E соотвѣтственно перпендикуляры DM и EN на прямыя AC и AB. Такъ какъ углы BNE и DMC прямые, то точки N и M лежатъ соотвѣтственно на окружностяхъ, описанныхъ на отрѣзкахъ BE и DC, какъ на діаметрахъ; такимъ образомъ прямыя AB и AC встрѣчаютъ эти окружности соотвѣтственно въ парахъ точекъ B, N и C, M. Изъ подобія треугольниковъ AEN и ADM и, съ другой стороны, вслѣдствіе параллельности прямыхъ DE и BC, имѣемъ: $\frac{AN}{AM}=\frac{AE}{AD}=\frac{AC}{AB}$, откуда $AN.AB=AM.AD$. Итакъ степени *) точки A относительно окружностей, описанныхъ на отрѣзкахъ BE и DC, какъ діаметрахъ, равны; слѣдовательно точка A лежитъ на радикальной оси, или, въ данномъ случаѣ, на общей хордѣ обѣихъ окружностей *). Съ другой стороны, называя средины отрѣзковъ BE и DC соотвѣтственно черезъ O и O', мы видимъ, что линія центровъ разсматриваемыхъ окружностей, какъ прямая, соединяющая средины діагоналей трапеціи $BDEC$, есть средняя ея линія, такъ что прямая OO' параллельна BC. Общая хорда окружностей O и O', проходя черезъ точку A и будучи перпендикулярна къ линіи центровъ OO', перпендикулярна и къ параллельной ей прямой BC, т. е. общая хорда есть высота треугольника ABC, проведенная изъ вершины A.

Е. Хандановъ (Тифлисъ); *Н. С.* (Одесса); *С. Конюховъ* (Никитовка).

---

*) См. „Новая геометрія треугольника“ Дм. Ефремова §§ 22—30, стр. 64—67.

№ 585 (4 сер.). *Шаръ, наполненный сухимъ воздухомъ при* 0^0 *и атмосферномъ давленіи въ* 758 *миллиметровъ, уравновѣшенъ на вѣсахъ. Когда затѣмъ внутреннее давленіе воздуха, находящагося въ шарѣ, было приведено къ* 8 *миллиметрамъ, то для равновѣсія потребовалось положить грузъ вѣсомъ* 9,7 *грамма на чашку вѣсовъ, на которой помѣщенъ шаръ. Опредѣлить объемъ полости шара. Удѣльный вѣсъ воздуха въ нормальныхъ условіяхъ равенъ* 0,0013.

Пусть x—объемъ полости шара, выраженный въ кубическихъ сантиметрахъ. Удѣльный вѣсъ воздуха при нормальныхъ условіяхъ, т. е. при 0^0 и при давленіи 760 милмиметровъ равенъ 0,0013. Но по закону Бойля-Маріотта удѣльный вѣсъ газа при постоянной температурѣ прямо пропорціоналенъ давленію. Поэтому удѣльный вѣсъ воздуха при 0^0 и при давленіи въ 1 миллиметръ равенъ $\frac{0,0013}{760}$, при 0^0 и при давленіи въ 758 миллиметровъ онъ равенъ $\frac{0,0013.758}{760}$, а при 0^0 и давленіи въ 8 миллиметровъ равенъ $\frac{0,0013x}{760}$. Слѣдовательно, вѣсъ воздуха, наполняющаго полость шара при 0^0 и давленіи въ 758 миллиметровъ, равенъ $\frac{0,0013.758x}{760}$ граммовъ, а вѣсъ воздуха, наполняющаго ту же полость шара при 0^0 и при давленіи въ 8 миллиметровъ, равенъ $\frac{0,0013.8x}{760}$ граммовъ. Разность этихъ вѣсовъ, согласно условію, равна 9,7 граммовъ, т. е.

$$\frac{0,0013.758x}{76} - \frac{0,0013.8x}{760} = 9,7,$$

или

$$\frac{0,0013.75}{76} \cdot x = 9,7,$$

откуда

$$x = \frac{9,7.76}{0,0013.75} = 7561,02 \text{ куб. сант.} = 7,56102 \text{ литра.}$$

Г. Оганянцъ (Москва); *А. Варенцовъ* (Ростовъ н/Д); *Е. Хандановъ* (Тифлисъ)

№ 586 (4 сер.). *Найти общаго наибольшаго дѣлителя всѣхъ значеній, которыя имѣетъ выраженіе*

$$7^{n+2} + 8^{2n+1}$$

при п *цѣломъ и не отрицательномъ.*

Представимъ данное выраженіе въ видѣ

$$7^{n+2}+8^{2n+1}+7^n.8-7^n8=(7^{n+2}+7^n.8)+(8^{2n+1}-7^n.8)=$$

$$=7^n(7^2+8)+8[(8^2)^n-7^n]=57.7^n+8(64^n-7^n) \qquad (1)$$

Число $64^n - 7^n$ кратно разности $64 - 7 = 57$ а потому (см. (1)) и все разсматриваемое выраженіе кратно 57 при всякомъ цѣломъ и не отрицательномъ n. Но при $n=0$ разсматриваемое выраженіе равно $7^2+8=57$, такъ что искомый общій наибольшій дѣлитель равенъ 57.

Д. Колянковскій (Немировъ); *В. Гейманъ* (Өеодосія); *Г. Оганянцъ* (Эривань); *Е. Хандановъ* (Тифлисъ); *В. Смирновъ* (Москва).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера. ул. Новосельскаго, д. № 66.

Обложка
ищется

Обложка
ищется