Обложка
ищется

Обложка
ищется

XXXIV Сем.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

№ 400.

Будущее научныхъ изслѣдованій.

Ш. Эд. Гилльомъ.

Поразительно быстрое развитіе науки и все выше и выше поднимающійся потокъ посвященныхъ ей печатныхъ трудовъ вызываютъ у многихъ здравомыслящихъ людей прямо непріятное ощущеніе. Если мы, говорятъ они себѣ, еле можемъ слѣдить за тою весьма ограниченною областью науки, которую мы выбрали себѣ въ качествѣ постояннаго предмета изученія, то что же сдѣлаютъ наши послѣдователи для ознакомленія съ наукою, за развитіемъ которой мы не можемъ болѣе слѣдить? Какъ изучатъ они то, что нужно будетъ знать для продолженія работы нашего поколѣнія? Другими словами, разумно ли, чтобы такое количество людей продолжало обогащать науку, если придетъ время, когда ни одинъ человѣкъ не въ состояніи будетъ изучить найденное его предшественниками?

Если поставить вопросъ такъ, то онъ является до нѣкоторой степени безотраднымъ. Разъ мы не можемъ знакомиться съ содержаніемъ всѣхъ тѣхъ печатныхъ трудовъ, какіе появляются теперь изо дня въ день, то позже никто не будетъ въ состояніи, въ разгарѣ этой производительной дѣятельности, овладѣть прошлымъ и идти нога въ ногу съ продолжающимся движеніемъ впередъ.

Но, къ счастью для будущаго научныхъ изслѣдованій, задача ставится не совсѣмъ въ такомъ видѣ: многочисленныя обстоятельства упрощаютъ ее и въ каждую данную эпоху приводятъ нужды основныхъ изслѣдованій приблизительно къ одному и тому же уровню. Послѣ каждаго открытія или научнаго спора, частности съ теченіемъ времени стушевываются и исчезаютъ: остается голый фактъ, отдѣленный отъ смежныхъ фактовъ и отъ тѣхъ путей и способовъ, которые были необходимы для его установки; и, чѣмъ дальше, тѣмъ менѣе важнымъ становится и самый фактъ, пока наконецъ и онъ совершенно не исчезнетъ. Въ цѣпи событій онъ былъ необходимымъ звеномъ; но промежутокъ времени, въ теченіе котораго необходимо было его знать, ограниченъ. Факты стушевываются по очереди, по мѣрѣ отдаленія отъ нихъ какъ во времени, такъ и въ пространствѣ,—и задача тѣхъ, которые ищутъ знанія, тѣмъ самымъ упрощается. Въ настоящее время даже для человѣка, весьма образованнаго, нѣтъ необходимости знать всѣ попытки, сдѣланныя Кеплеромъ для открытія его законовъ или Галилеемъ для извлеченія изъ явленій движенія понятія о массѣ. Механику почти безполезно быть освѣдомленнымъ относительно долговременнаго спора ньютоніанцевъ и картезіанцевъ о способѣ измѣренія того, что̀ тогда называли неправильно силою: одни понимали подъ этимъ энергію, другіе — количество движенія; обѣ стороны не могли придти къ соглашенію, и ихъ споръ заполнялъ, въ теченіи десятковъ лѣтъ, научные журналы. Что же знаютъ теперь объ этомъ тѣ, кто хочетъ знать лишь незыблемыя и всегда примѣнимыя основанія науки? Почти ничего, — а вмѣстѣ съ тѣмъ всякій порядочный ученикъ вполнѣ свободно обращается съ символами, выражающими представленія механики, и правильно прилагаетъ тѣ понятія, которыя въ нихъ сконденсированы. Если, позднѣе, въ его умѣ пробудится любопытство, если онъ захочетъ владѣть не орудіемъ, а научнымъ убѣжденіемъ, онъ прибѣгнетъ къ первоисточникамъ и ознакомится съ сомнѣніями, овладѣвавшими всякимъ изслѣдователемъ, которому наука обязана какимъ нибудь успѣхомъ.

Такъ было всегда: физики нашего времени страстно вчитывались въ работы, которыя привели къ столь простому представленію о тожественности электрическихъ и свѣтовыхъ волнъ; но это представленіе стало яснымъ въ ихъ умахъ лишь послѣ многихъ годовъ чтенія и размышленія. Лѣтъ черезъ двадцать, это понятіе будетъ столь очевиднымъ, что одного указанія будетъ достаточно, чтобы его поняли начинающіе студенты.

Этотъ принципъ конденсаціи, сгущенія, благодаря которому фактъ остается въ наукѣ освобожденнымъ отъ своей исторіи, является, быть можетъ, самымъ важнымъ факторомъ въ дѣлѣ исключенія тѣхъ становящихся безполезными, сопутствующихъ обстоятельствъ, изъ которыхъ выросъ самый незыблемый фактъ. Но есть и другіе принципы, ведущіе къ упрощенію задачи.

Одинъ изъ нихъ есть принципъ замѣщенія: мѣсто одной идеи заступаетъ другая; одно изслѣдованіе замѣняется другимъ. Въ средніе вѣка метафизика была въ большомъ почетѣ, и всякій образованный человѣкъ посвящалъ ей свое лучшее время. Современныя изслѣдованія не связаны неразрывно съ метафизикою, ставшею удѣломъ небольшого числа тонкихъ и мало утилитарныхъ умовъ, и вытѣснили метафизику цѣликомъ,—и такимъ образомъ тому значительному количеству времени, которое, шесть-семь вѣковъ назадъ, посвящали ей студенты, нѣтъ мѣста въ жизни большинства образованныхъ людей нашихъ дней. Было также время, когда изучали геральдику, сдѣлавшуюся теперь привилегіею немногихъ геральдистовъ, и рядъ другихъ наукъ, которыя были когда то полезны, а теперь имѣютъ такъ мало значенія, что очень небольшого числа людей достаточно, чтобы сохранять ихъ въ неприкосновенности и продолжать ихъ развитіе въ той мѣрѣ, въ какой ихъ можно еще считать необходимыми.

Мнѣ припоминается, какъ однажды въ дѣтствѣ, когда я пришелъ къ одному старику, который былъ извѣстенъ своимъ богатствомъ и своею скупостью, за взносомъ въ пользу школьной кассы, то онъ оказалъ мнѣ весьма недружелюбный пріемъ подъ тѣмъ предлогомъ, что въ его время каждый ребенокъ зналъ гномонику, а теперь ее изгнали изъ школъ. Нѣсколько смутившись своимъ невѣжествомъ, я удалился и побѣжалъ разспросить, что это за наука, за незнаніе которой насъ упрекаютъ. Когда я узналъ, что дѣло шло о вычерчиваніи циферблата солнечныхъ часовъ, то я могъ бы дать отвѣтъ, но было уже поздно: вѣдь у каждаго изъ насъ были карманные часы, а часы на колокольнѣ звонили цѣлые часы и четверти, и ни одному изъ насъ не было нужды въ устройствѣ солнечныхъ часовъ. Тотъ же, впрочемъ, кто изъ любопытства желалъ впослѣдствіи узнать, какъ это сдѣлать, научался этому въ десять минутъ благодаря достаточнымъ познаніямъ изъ астрономіи и геометріи.

Такимъ образомъ даже прогрессъ промышленности и общій строй жизни исключаютъ науки, сдѣлавшіяся безполезными, и даютъ возможность замѣнить ихъ другими. Въ наше время скорѣе будутъ учить ребенка разговаривать по телефону или справляться съ росписаніемъ желѣзныхъ дорогъ, чѣмъ вычерчивать циферблатъ солнечныхъ часовъ.

Теоріи также замѣщаютъ одна другую. Когда-то требовалось очень хорошо знать теорію истеченія свѣта и теорію флогистона, а обучившись теоріи колебаній и теоріи окисленія, мы можемъ вполнѣ,—если дѣло идетъ объ утилитарномъ преподаваніи,—обойти молчаніемъ тѣ теоріи, на смѣну которымъ послѣднія явились. О прежнихъ взглядахъ дѣлается лишь краткое упоминаніе въ курсахъ,—и вполнѣ правильно: ибо ничто не укрѣпляетъ такъ какого нибудь вѣрованія, какъ знаніе идей, которыя оно замѣнило подъ вліяніемъ экспериментальныхъ изслѣдованій.

Имѣя въ виду этотъ принципъ замѣщенія, можно почти съ увѣренностью сказать, что постоянно устанавливается равновѣсіе между новымъ и старымъ, между тѣмъ, что завоевано при прогрессивномъ развитіи человѣческаго разума, и тѣмъ, что стало отбросомъ на его пути.

Другимъ принципомъ является принципъ сгущенія путемъ обобщенія. При началѣ всякаго изслѣдованія послѣдовательно разбираютъ частные случаи; затѣмъ ихъ связываютъ одною мыслью, которая охватывала бы ихъ всѣ и изъ которой они вытекали бы совершенно естественнымъ путемъ, если бы человѣческому разуму было дано замѣчать общую основу прежде, чѣмъ онъ съ великимъ трудомъ пробьетъ себѣ дорогу сквозь многочисленныя частности.

Въ XVII вѣкѣ геометрія дошла до такого состоянія, что можно было опасаться въ самомъ непродолжительномъ времени страшнаго ея загроможденія,—это было время, когда Ферматъ, Роберваль, Декартъ придумывали для каждой задачи геніальное рѣшеніе, годное для этой одной задачи и мало подготовлявшее къ разрѣшенію другихъ задачъ, если не считать гимнастики, къ которой оно вынуждало мысль, дѣлая ее тѣмъ самымъ болѣе податливою. Накопленіе такихъ ухищреній привело къ открытію свойствъ циклоиды и другихъ кривыхъ, знаменитыхъ въ ту эпоху. Если бы геометрія не пришла тогда къ поворотной точкѣ своей исторіи, то она вскорѣ стала бы столь обширною, что мало людей могло бы надѣяться двинуть ее дальше впередъ.

Но тогда появились—почти одновременно—аналитическая геометрія Декарта и исчисленіе безконечно малыхъ Ньютона и Лейбница. Все сгустилось въ нѣсколько общихъ правилъ, которыя не только позволили вновь легко найти все то, что было обнаружено съ такимъ трудомъ, но и открыли безграничное поле для изслѣдованія не одному изыскателю: геометрическая наука стала безпредѣльною, и всякій добросовѣстный работникъ, владѣющій общими методами, можетъ обогатить ее при весьма скудныхъ изобрѣтательныхъ способностяхъ.

Конечно, чувство эстетики и удовлетвореніе отъ неожиданнаго талантливаго пріема при этомъ много теряютъ: но кто же будетъ сожалѣть о томъ времени, когда каждый винтъ дѣлали, выпиливая трехграннымъ напильникомъ борозду, округлившую металлическій цилиндръ? Не лучше ли, чтобы работникъ только слѣдилъ за станкомъ, нарѣзающимъ винтъ?

Подобныя сгущенія знаній были произведены открытіемъ принципа сохраненія энергіи, принципа сохраненія вещества и, вообще говоря, всѣхъ консервативныхъ принциповъ, указывающихъ окончательное состояніе явленія независимо отъ пути, по какому оно происходитъ. Пусть обучаютъ содержанію принципа: пусть иллюстрируютъ его немногими хорошо подобранными примѣрами, показывающими, въ чемъ сущность этого принципа и какъ онъ примѣняется,—и этимъ обогатятъ умъ студента въ тысячу разъ больше, чѣмъ если обучать его безчисленному количеству частныхъ случаевъ, большая часть которыхъ будетъ, при воспоминанiи, являться въ его памяти въ неполномъ и искаженномъ видѣ.

Но открытiе общихъ принциповъ есть непремѣнное слѣдствiе эволюцiи науки. Можетъ быть, не найдется примѣра въ исторiи развитiя науки, чтобы нагроможденiе частныхъ случаевъ не было, въ нѣкоторый данный моментъ, сведено къ одному общему принципу, изъ котораго они всѣ вытекали бы и который дѣлалъ бы безполезнымъ знанiе ихъ порознь.

Наконецъ, знанiе облегчается цѣлесообразною организацiею научной работы. Этотъ конституцiональный принципъ уступаетъ прочимъ въ возвышенности; онъ не представляетъ какого-нибудь естественнаго явленiя, но имѣетъ столь же большое практическое значенiе. Унификацiи во всѣхъ областяхъ знанiя, имѣющiя характеръ законодательства въ наукѣ, мощно способствуютъ прогрессу науки, устраняя всякiя ненужныя и не связанныя непрерывно съ предметомъ трудности и сохраняя тѣмъ самымъ время и познавательныя способности работниковъ для другихъ цѣлей.

Въ прежнiе годы, напримѣръ, всякiй долженъ былъ прекрасно знать сложную и трудно усвояемую систему мѣръ и вѣсовъ; тотъ же, кто имѣлъ дѣло съ обширнымъ кругомъ наукъ, кому приходилось пользоваться разнообразными книгами, долженъ былъ постоянно считаться съ очень большимъ числомъ сложныхъ и не связанныхъ между собою системъ,—и эта необходимость сохранилась, для нѣкоторыхъ наукъ, вплоть до эпохи, очень близкой къ нашей. Многiя работы по электричеству, написанныя лѣтъ тридцать назадъ, почти непонятны теперь изъ за примѣненныхъ въ нихъ единицъ, между тѣмъ какъ онѣ стали бы вполнѣ ясными, если бы перевести ихъ результаты на C. G. S. единицы. Лордъ Кельвинъ характеризовалъ систему англiйскихъ мѣръ, говоря, что полное ознакомленiе съ нею поглощаетъ ежедневно столько работы, что она является разрушительницею мозговъ. Каждый знаетъ, вдобавокъ, что, ни одинъ англичанинъ выходя изъ школы, кромѣ тѣхъ, кто по своей профессiи обязанъ хорошо это знать, не можетъ похвалиться умѣньемъ дать точное опредѣленiе всѣхъ единицъ, заключающихся въ британской системѣ мѣръ и вѣсовъ.

Въ этомъ случаѣ упрощенiе, достигнутое просто законодательнымъ актомъ, каковымъ явилось созданiе метрической системы, освободило научнымъ работникамъ достаточно времени и свободы мысли, чтобы позволить имъ накоплять значительное число фактовъ и полезныхъ идей.

Организованность научной работы заключается для многихъ также въ возможности, которую мы имѣемъ, если не владѣть, то по крайней мѣрѣ пользоваться весьма большимъ числомъ фактовъ. Хорошо составленныя таблицы, сжато составленные и распредѣленные въ хорошемъ порядкѣ рефераты даютъ изслѣдователю, который умѣетъ ими пользоваться, непосредственную и полную картину состоянія того вопроса, за который онъ хочетъ приняться. Изданіе „Fortschritte der Physik“ является превосходнымъ примѣромъ этого. Если кто захочетъ узнать, что сдѣлано по какому-нибудь специальному физическому вопросу, тому достаточно открыть оглавленіе этого изданія за послѣдній годъ и затѣмъ шагъ за шагомъ идти назадъ вплоть до эпохи, когда эти факты уже отходятъ къ исторіи науки и выходятъ за предѣлы того знанія, которымъ можно теперь непосредственно пользоваться.

Затѣмъ есть громадное количество работъ, единственною цѣлью которыхъ было опредѣлить численное значеніе нѣкоторой физической постоянной. Иногда двѣ или три сотни страницъ, въ которыхъ измѣренія подробнѣйше описаны для нѣсколькихъ десятковъ сотоварищей по метрологіи, приводятъ къ одному числу, такъ что результатъ, которымъ могутъ воспользоваться всѣ, сводится къ одной строчкѣ. Пусть составятъ числовыя таблицы всѣхъ подобныхъ опубликованныхъ результатовъ, — и въ двух- или трех-томномъ трудѣ мы будемъ имѣть все то существенное, что заключается въ цѣлой библіотекѣ.

Изслѣдователь, которому нужно знать постоянныя природы, хранитъ съ дюжину ихъ у себя въ памяти; если онъ особенно одаренъ въ этомъ отношеніи, то онъ можетъ сконденсировать въ памяти для постояннаго употребленія, самое большое, сотню ихъ. Для всѣхъ остальныхъ цѣлей полуминутная справка въ такой книгѣ даетъ все, что ему нужно.

Составить такія таблицы, быть научными администраторами всевозможныхъ родовъ и во всевозможной степени, не является, можетъ быть, дѣломъ самыхъ выдающихся умовъ: работа этихъ умовъ будетъ направлена на открытіе новыхъ явленій и на выработку великихъ принциповъ; но всѣ, кто внесетъ свою долю въ дѣло подобной административной конденсаціи, окажутъ большую услугу прогрессу науки, сохраняя время ея работникамъ.

Вотъ нѣкоторыя мысли, позволяющія смотрѣть съ довѣріемъ на будущее.

Конечно, все бо́льшая и бо́льшая специализація будетъ необходимымъ условіемъ научной работы. Энциклопедисты будутъ становиться все рѣже и рѣже и, можетъ быть, совсѣмъ исчезнутъ. Но изслѣдователи могутъ продолжать обогащать наше наслѣдственное достояніе; не настало еще время считать мѣру переполненною, потому что процессъ сгущенія совершается безостановочно, непрерывно очищая почву для дальнѣйшаго движенія впередъ.

Перев. *Б. П. Вейнбергъ* (Одесса).

Законъ Паскаля.

Историческій очеркъ профессора **P. Duhem** (Бордо).

Переводъ У. Л.

Большинство физиковъ издавна привыкло считать *законъ Паскаля* основнымъ закономъ гидростатики, и многимъ покажется страннымъ, что существенныя положенія этой науки были извѣстны еще до Паскаля. Такъ, еще въ концѣ XVI столѣтія Симонъ Стевинъ изъ Брюгге (Bruges) создалъ полную теорію равновѣсія жидкостей. Правда, ходъ мыслей у Стевина совершенно другой, чѣмъ у Паскаля, такъ что нѣкоторые склонны думать, что послѣдній заново открылъ то, что́ было извѣстно Стевину. Мало того, твореніе Паскаля о равновѣсіи жидкостей во многихъ вызываетъ удивленіе, какъ образецъ научнаго открытія, сдѣланнаго исключительно единоличными усиліями, и какъ примѣръ метода, помощью котораго физикъ открываетъ истину, не имѣя другихъ руководителей, кромѣ опыта и разсужденія. Справедливо ли такое мнѣніе? Воздается ли дань удивленія творенію Паскаля за то именно, что́ дѣйствительно заслуживаетъ удивленія? Постараемся разобраться въ этихъ вопросахъ.

I. Нѣкоторыя извлеченія изъ „Трактата о равновѣсіи жидкостей“.

Прочтемъ сперва нѣсколько отрывковъ изъ сочиненія Паскаля: „*Трактатъ о равновѣсіи жидкостей*“ [1])—они облегчатъ намъ задачу сравненія, которое намъ придется сдѣлать.

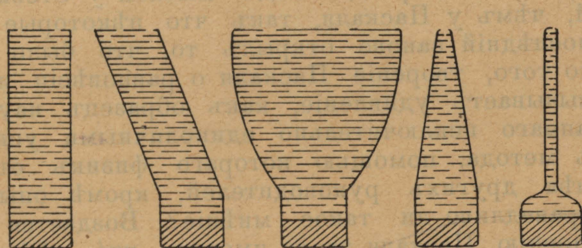
Глава I. *Жидкости оказываютъ давленіе (pésent) соразмѣрно своему уровню (suivant leur hauteur).*

„Прикрѣпимъ къ стѣнѣ нѣсколько сосудовъ (фиг. 1): одинъ, имѣющій цилиндрическую форму, другой—изогнутый, третій—расширяющійся кверху, четвертый—суживающійся кверху и, наконецъ, пятый сосудъ, состоящій изъ тонкой трубки, которая заканчивается внизу расширеніемъ (на фигурѣ 1 онъ представленъ крайнимъ справа); основанія всѣхъ сосудовъ представляютъ собою отверстія, имѣющія равную площадь. Отверстія затыкаются пробками, и въ сосуды наливаютъ воду. Количество воды въ каждомъ сосудѣ различное, но уровень ея во всѣхъ сосудахъ одинаковый; опытъ показываетъ, что во всѣхъ сосудахъ къ пробкѣ нужно приложить одинаковую силу, чтобы помѣшать на-

[1]) Этотъ трактатъ вышелъ въ свѣтъ, благодаря стараніямъ Périer, въ Парижѣ въ 1663 г., т. е. черезъ годъ послѣ смерти Паскаля. Но написанъ онъ былъ много лѣтъ раньше. Дѣйствительно, въ 1658 г. Паскаль занимался задачей о циклоидѣ. Извѣстно, каково было тогда его настроеніе: еще за много (нѣсколько) лѣтъ передъ этимъ онъ отрекся отъ всѣхъ научныхъ изысканій.

пору воды вытолкнуть пробку; сила эта измѣряется вѣсомъ столба жидкости, заключеннаго въ первомъ сосудѣ, томъ именно, который на всемъ своемъ протяженіи имѣетъ одинаковую площадь сѣченія. Напримѣръ, если водяной столбъ вѣситъ сто ливровъ [1]), то точно такую же силу нужно приложить ко всѣмъ пробкамъ даже и въ пятомъ сосудѣ, хотя бы вѣсъ воды, которую онъ вмѣщаетъ, былъ не больше одной унціи...

„Если мы заморозимъ воду въ пятомъ сосудѣ и ледъ не пристанетъ къ стѣнкамъ сосуда, какъ это обыкновенно и бываетъ въ дѣйствительности, то для уравновѣшенія льда на другую чашку вѣсовъ придется положить одну лишь унцію; но прибли-



Фиг. 1.

зимъ къ сосуду огонь и растопимъ ледъ,—тогда для равновѣсія понадобится уже 100 ливровъ, хотя вѣсъ воды, какъ мы предположили, не превышаетъ одной унціи.

„То же самое происходитъ, если отверстія, затыкаемыя пробкой, находятся не внизу сосуда, а сбоку, или даже въ верхней его части, наверху; доказать это нетрудно слѣдующимъ образомъ.

„Возьмемъ закрытый со всѣхъ сторонъ сосудъ съ двумя отверстіями наверху: одно весьма узкое, а другое—сравнительно широкое; къ этимъ отверстіямъ нужно припаять трубки соотвѣтственной ширины; вставимъ въ широкую трубку поршень, а въ узкую нальемъ воды: эта послѣдняя будетъ выталкивать поршень изъ широкой трубки *кверху*, и чтобы помѣшать этому, на поршень нужно положить большой грузъ. Подобно этому въ первомъ примѣрѣ, когда мы брали сосуды съ отверстіями у основаній, нужно было приложить силу въ сто ливровъ, чтобы уравновѣсить давленіе воды *внизъ;* точно такъ же, если мы возьмемъ сосудъ, имѣющій отверстіе съ поршнемъ сбоку, то придется приложить такую же силу, чтобы воспрепятствовать водѣ выталкивать поршень сбоку. Если трубка, наполненная водой, будетъ

[1]) 1 ливръ = 500 граммовъ.

въ сто разъ шире или уже, то для равновѣсія придется положить такой же грузъ, какъ и раньше, если только уровень жидкости остается тотъ же; какъ бы мало мы ни измѣнили величину нагрузки, вода опустится и подыметъ вверхъ уменьшенный грузъ.

Если же мы будемъ наливать въ трубку воду до уровня вдвое большаго; или же, если мы увеличимъ вдвое отверстіе для поршня, то, чтобы уравновѣсить вдвое болѣе широкій поршень, придется употребить вдвое большую силу. Отсюда видно, что сила, необходимая для того, чтобы помѣшать жидкости вылиться изъ отверстія, пропорціональна высотѣ уровня воды, а не количеству ея, и что во всѣхъ случаяхъ сила эта измѣряется вѣсомъ столба воды, имѣющаго вышину, равную высотѣ уровня воды, и основаніе, равное площади отверстія.

Глава II. *Почему давленіе, производимое жидкостью, пропорціонально ея высотѣ?*

„Мы видѣли во всѣхъ предыдущихъ примѣрахъ, что малымъ количествомъ воды можно уравновѣсить тяжелый грузъ; остается объяснить, отчего происходитъ это умноженіе силы. Для этого обратимся къ слѣдующему опыту.

„Возьмемъ закрытый со всѣхъ сторонъ сосудъ съ двумя отверстіями: одно въ сто разъ шире другого. Наполнимъ сосудъ водой и вставимъ въ отверстія соотвѣтственной величины поршни; тогда одинъ человѣкъ, давя на малый поршень, можетъ уравновѣсить силу ста человѣкъ, которые давятъ на поршень, въ сто разъ болѣе широкій, и сила его превосходитъ такимъ образомъ силу каждаго изъ ста человѣкъ на 99 человѣческихъ силъ.

„Въ какомъ бы отношеніи мы ни взяли площади отверстій,— если только таково же отношеніе приложенныхъ силъ, то эти послѣднія взаимно уравновѣшиваются. Такимъ образомъ мы видимъ, что сосудъ, наполненный водой, вноситъ въ механику новый принципъ, и представляетъ собою своеобразную машину для умноженія силы до какой угодно степени: помощью этой машины человѣкъ можетъ поднять сколь угодно большой грузъ.

„Достойно удивленія, что и въ этой новой машинѣ соблюдается то общее правило, которому подчинены всѣ прочія уже извѣстныя намъ машины, каковы рычагъ, воротъ, безконечный винтъ и др.: во сколько разъ увеличивается сила, во столько же разъ удлиняется путь (ея точки приложенія). Дѣйствительно, одно отверстіе въ сто разъ больше другого; очевидно поэтому, что, вдвинувъ малый поршень на одинъ дюймъ, мы подвинемъ бóльшій лишь на сотую часть дюйма... Такъ что отношеніе путей равно отношенію силъ; это обстоятельство можно принять за истинную причину разсматриваемаго явленія—ясно, что одно и то же—заставить сто ливровъ воды подняться на одинъ дюймъ, или ливръ на сто дюймовъ. Такимъ образомъ, въ разсматриваемомъ случаѣ одинъ ливръ и сто ливровъ воды такъ между собой связаны, что первый, подвигаясь на 100 дюймовъ, заставляетъ сто ливровъ перемѣститься на одинъ дюймъ; одинъ ливръ воды заключаетъ въ себѣ силу на то, чтобы подвинуть сто ливровъ воды на одинъ дюймъ, и такая же сила заключается въ ста ливрахъ воды, подымающихъ одинъ ливръ на сто дюймовъ.

„Для большей ясности можно еще прибавить, что вода одинаково сжата подъ обоими поршнями; дѣйствительно, хотя первый несетъ на себѣ въ сто разъ бо́льшій грузъ, чѣмъ второй, зато онъ соприкасается съ числомъ частицъ, во столько же разъ бо́льшимъ; такъ что каждая частица сжата въ одинаковой степени; такимъ образомъ всѣ находятся въ одинаковыхъ условіяхъ, а потому остаются въ покоѣ...

„Дадимъ еще одно доказательство, которое поймутъ одни лишь математики; прочіе могутъ пропустить его.

„Примемъ какъ правило, что тѣло можетъ двигаться подъ вліяніемъ силы тяжести исключительно въ томъ случаѣ, когда центръ тяжести получаетъ при этомъ движеніи низшее положеніе, т. е. опускается. Исходя отсюда, мы сейчасъ докажемъ, что оба поршня... другъ друга уравновѣшиваютъ. Ихъ общій центръ тяжести находится на прямой, соединяющей ихъ собственные центры тяжести, и дѣлитъ ее въ отношеніи, обратно пропорціональномъ ихъ вѣсамъ. Предположимъ теперь, что поршни перемѣщаются (если это возможно); какъ мы раньше показали, пройденные пути обратно пропорціональны вѣсамъ: если мы разсмотримъ общій центръ тяжести при новомъ положеніи поршней, то мы найдемъ, что онъ остался тамъ же, гдѣ былъ раньше... Такимъ образомъ система, состоящая изъ обоихъ поршней, вмѣстѣ взятыхъ, перемѣстилась, а ея центръ тяжести не понизился: это противорѣчитъ нашему принципу; слѣдовательно, поршни не могутъ перемѣститься, т. е. они остаются въ покоѣ, другими словами, въ равновѣсіи, что и требовалось доказать.

„... Итакъ, мы будемъ считать истиной слѣдующее положеніе: если сосудъ, полный воды, имѣетъ отвертіе, и къ этимъ послѣднимъ приложены силы, пропорціональныя площадямъ отверстій, то силы эти уравновѣшиваютъ другъ друга; предложеніе это выясняетъ основную причину равновѣсія жидкостей. Изложимъ сейчасъ нѣсколько относящихся сюда примѣровъ.

. . . .

Глава III. *Примѣры и причины равновѣсія жидкостей.*

„Если сосудъ, наполненный водой, имѣетъ два отверстія, и къ послѣднимъ припаяно по трубкѣ, то вода, налитая въ обѣ трубки до одного и того же уровня, остается въ равновѣсіи.

„Дѣйствительно, такъ какъ уровень воды въ обѣихъ трубкахъ одинаковый, то вѣса́ воды въ нихъ относятся, какъ ширины трубки, т. е. какъ площади отверстій; поэтому массы воды въ обѣихъ трубкахъ въ сущности представляютъ собою два поршня, вѣса́ которыхъ пропорціональны площадямъ отверстій; слѣдовательно, согласно предыдущимъ доказательствамъ вода остается въ равновѣсіи“.

. . . .

Въ только что приведенныхъ отрывкахъ заключается все то существенное, что Паскаль написалъ о принципѣ гидростатики. Является вопросъ, каковы источники этихъ мыслей: представляютъ ли они результатъ наблюденій Паскаля, лично имъ произведенныхъ и *самостоятельно продуманныхъ*, или же, наоборотъ, Паскаль нашелъ зародышъ своего принципа „въ книгахъ и среди людей“? Постараемся отвѣтить на эти вопросы.

II. Вліяніе Мерсенна.

Чтобы точнѣе опредѣлить, подъ чьимъ вліяніемъ Паскаль могъ и даже долженъ былъ находиться, когда писалъ свои изысканія о равновѣсіи жидкостей, разсмотримъ, при какихъ обстоятельствахъ онъ предпринялъ свое изслѣдованіе.

Объ этихъ обстоятельствахъ разсказываетъ намъ самъ Паскаль: „Въ 1644 году, говоритъ онъ [1]), парижскій монахъ P. Merssenne получилъ письмо изъ Италіи о томъ, что опытъ, о которомъ мы говорили [2]), кѣмъ-то былъ выполненъ — кѣмъ именно, осталось намъ неизвѣстнымъ. P. Mersenne попытался повторить опытъ въ Парижѣ; такъ какъ опытъ ему не удался, то онъ оставилъ дальнѣйшія попытки и даже пересталъ думать въ этомъ направленіи. Впослѣдствіи, побывавши по другому дѣлу въ Римѣ, онъ собралъ обстоятельныя свѣдѣнія объ интересующемъ насъ опытѣ и съ этими точными свѣдѣніями возвратился въ Парижъ.

„Когда вѣсть объ этомъ дошла до насъ въ 1646 г. въ Руанъ, гдѣ я тогда находился, мы сдѣлали этотъ итальянскій опытъ, пользуясь мемуарами P. Merssenne'а; опытъ прекрасно удался, и я повторилъ его нѣсколько разъ. Благодаря этому многократному повторенію, я убѣдился въ достовѣрности истины, доказываемой этимъ опытомъ. Тогда я сдѣлалъ вытекающіе изъ нея выводы; для доказательства этихъ послѣднихъ я произвелъ цѣлый рядъ новыхъ опытовъ, совершенно отличныхъ отъ первоначальнаго; при этихъ опытахъ присутствовали болѣе пятисотъ человѣкъ разныхъ званій, въ томъ числѣ пять или шесть іезуитовъ изъ Руанской коллегіи“.

---

[1]) Lettre de *Pascal* à M. de Ribeire (Oeuvres complètes de Blaise Pascal t. III p. 74; Paris, Hachette, 1880).

[2]) Рѣчь идетъ объ опытѣ Торричелли.

Изъ этого отрывка видно, что опыты свои по гидростатикѣ Паскаль предпринялъ подъ вліяніемъ мемуаровъ Мерсенна. Конечно, Мерсеннъ, внимательно слѣдившій за текущими научными изслѣдованіями, не могъ не заинтересоваться упомянутыми опытами, которые предпринялъ сынъ его друга и его личный другъ. Въ послѣднемъ опубликованномъ имъ сочиненіи этотъ ученый францисканецъ упоминаетъ [1]), что онъ повторилъ нѣкоторые опыты со ртутью „въ присутствіи остроумнаго философа R. P. Vatier, нѣкоторыхъ другихъ іезуитовъ и знаменитыхъ двухъ Паскалей: отца и сына". Въ этомъ же сочиненіи Мерсеннъ упоминаетъ о первоначальныхъ наблюденіяхъ Паскаля. Итакъ, Мерсеннъ былъ хорошо знакомъ съ первыми трудами Блэза Паскаля по механикѣ жидкостей; можно поэтому съ увѣренностью сказать, что и Паскаль хорошо зналъ все то, что Мерсеннъ писалъ о томъ же предметѣ.

Съ другой стороны, въ 1644 г., т. е. какъ разъ въ то время, когда Мерсеннъ узналъ объ опытѣ со ртутью, онъ опубликовалъ сочиненіе [2]); въ этомъ послѣднемъ, какъ и въ большинствѣ своихъ сочиненій, трудолюбивый монахъ говоритъ о самыхъ разнообразныхъ вещахъ, совершенно не заботясь о порядкѣ. Нѣсколько главъ этого сочиненія посвящены равновѣсію и движенію жидкостей; въ одной изъ этихъ главъ мы находимъ [3]) слѣдующія страницы:

„... VIII.—Давленіе воды на плоскую горизонтальную поверхность равно вѣсу столба воды, основаніе котораго равно площади поверхности, а высота равна вертикальному разстоянію этой поверхности отъ свободной поверхности воды...

„IX. Предыдущее положеніе несказанно поразило бы читателя, если бы онъ представилъ себѣ, какой оттуда вытекаетъ выводъ: именно, одинъ ливръ воды можетъ давить на дно сосуда съ такой же силой, какъ тысяча ливровъ, и даже какъ цѣлый океанъ. Въ самомъ дѣлѣ, вообразимъ себѣ, что вода океана съ одной стороны и одинъ ливръ воды съ другой—налиты въ два сосуда съ равными основаніями; предположимъ далѣе, что сосудъ, въ которомъ налитъ ливръ воды, представляетъ собою столь узкую трубку, что вода въ ней находится на такомъ же уровнѣ, какъ вода океана во второмъ сосудѣ; тогда ливръ воды будетъ давить на дно сосуда съ такой же силой, какъ цѣлый океанъ...

---

[1]) *Novarum observationum physico-mathematicarum* F. Marini Mersenni minimi, tomus III, quibus accessit Aristarchus Samius *de mundi systemate*, Parisiis, Sumptibus Antonii Bertier, viâ Jacobaeâ, sub signo Fortunae MDCXLVII, стр. 218.

[2]) F. Marini Mersenni Minimi *Cogitata physico-mathematica*, in quibus tam naturae quam artis effectus admirandi certissimis demonstrationibus explicantur; Parisiis, sumptibus Antonii Bertier, viâ Jacobeâ, MDCXLIV.

[3]) F. Marini Merseni *Cogitata physico-mathematica; Ars navigandi*; Hydrostaticae liber primus, c. 227—229.

„XI. — Предположимъ, что мы желаемъ вдавить палку въ океанъ; допустимъ, что океанъ запертъ въ сосудѣ, дно котораго мѣшаетъ его водамъ вылиться, а крышка, давя на нихъ сверху, мѣшаетъ имъ подняться. Добиться этого послѣдняго нельзя иначе, какъ приложивъ къ крышкѣ силу, во столько разъ превышающую давленіе палки, во сколько разъ основаніе послѣдней меньше поверхности океана.

„XII.—Если палка погрузится въ воду сквозь отверстіе въ крышкѣ нашего сосуда, то послѣдняя испытаетъ со стороны находящейся подъ ней воды давленіе снизу вверхъ, равное тому давленію, по которому она подверглась бы сверху внизъ, если бы на ней находился деревянный цилиндръ, имѣющій такую же высоту, какъ палка, и основаніе, равное площади крышки нашего гипотетическаго сосуда. Кромѣ того, палка и деревянный цилндръ производили бы одинаковое давленіе и на боковыя стѣнки сосуда; если мы просверлимъ отверстіе въ стѣнкѣ сосуда, или въ днѣ его, или наконецъ, въ крышкѣ его, то для того, чтобы не дать водѣ вылиться, нужно будетъ примѣнить силу, равную вѣсу соотвѣтственнаго цилиндра.

„XIII.—Если вода въ сосудѣ замерзнетъ, то соотношенія между движеніями и скоростями, разсмотрѣнныя нами выше, уже не будутъ имѣть мѣста“.

Эти страницы опубликованы въ 1644 году, за два года до того, какъ Паскаль приступилъ къ изученію гидростатики; онѣ, конечно, были извѣстны ему раньше, чѣмъ онъ началъ самъ работать въ той же области. Сопоставляя только что приведенные отрывки изъ трудовъ Паскаля: *Traité de l'équilibre des liqueurs*, мы не можемъ не признать поразительнаго сходства между ними. Конечно, на обоихъ сравниваемыхъ трудахъ ясно сказываются своеобразныя умственныя физіономіи ихъ творцовъ; тамъ, гдѣ пылкое воображеніе Мерсенна ищетъ разительныхъ образовъ и прибѣгаетъ къ парадоксальнымъ положеніямъ, тамъ разсудочность Паскаля заботится прежде всего о порядкѣ и ясности; Паскаль довольствуется сопоставленіемъ одного ливра воды со ста ливрами, Мерсеннъ же одному ливру противуставитъ цѣлый океанъ. Но подъ этими чисто внѣшними отличіями мы находимъ совершенно одинаковыя истины. Можно считать несомнѣннымъ, что наиболѣе важныя положенія своего „*Трактата о равновѣсіи жидкостей*“ Паскаль заимствовалъ у автора *Cogitata physico-mathematica*. Принципъ гидравлическаго давленія ясно выраженъ въ трудѣ ученаго монаха. Послѣ этого ясно, что, по справедливости, слѣдовало бы *принципъ Паскаля* переименовать въ *принципъ Мерсенна*. Вліяніе Мерсенна сказалось даже и въ остроумномъ замѣчаніи о томъ, что достаточно заморозить воду, чтобы законы равновѣсія совершенно измѣнились. Итакъ, созидая гидростатику, Паскаль широко пользовался трудомъ П. Мерсенна.

Съ одной стороны, заимствуя у Мерсенна, Паскаль тѣмъ самымъ черпалъ изъ сокровищницы знаній всей Европы; дѣйствительно, Мерсеннъ, съ одной стороны, поставилъ себѣ задачу знакомить ученыхъ различныхъ странъ съ открытіями, сдѣланными во Франціи [1]); съ другой стороны, на его же долю выпала миссія знакомить французовъ со всѣми выдающимися изслѣдованіями иностранныхъ ученыхъ въ областяхъ механики и физики. Благодаря такому посредничеству Мерсенна, Паскаль имѣлъ возможность познакомиться со всѣми достигнутыми въ Европѣ наиболѣе цѣнными пріобрѣтеніями въ ученіи о равновѣсіи жидкостей. Теперь мы покажемъ многочисленные слѣды подобныхъ отраженныхъ вліяній, которыя Паскаль испыталъ благодаря Мерсенну.

(Продолженіе слѣдуетъ).

О нѣкоторыхъ свойствахъ логариѳмовъ.

Студ. Харьк. унив. И. Чернушенко.

*(Окончаніе *).*

Логариѳмическая прогрессія.

Опредѣленіе. Логариѳмической прогрессіей называется рядъ чиселъ, въ которомъ логариѳмическое отношеніе каждаго послѣдующаго къ своему предыдущему, или наоборотъ, есть величина постоянная.

Напримѣръ, рядъ чиселъ: $\div\!\!\div$ 3, 9, 81, 6561 . . . представляетъ логариѳмическую прогрессію, постоянное которой равно 2. Для обозначенія того, что данный рядъ есть логариѳмическая прогрессія, мы будемъ употреблять знакъ $\div\!\!\div$.

Возьмемъ прогрессію $\div\!\!\div\ a_1, a_2, \ldots, a_n$; по опредѣленію прогрессіи имѣемъ: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$, а отсюда $a_2 = a_1{}^q$; $a_3 = a_2{}^q; \ldots a_n = a^q_{n-1}$; эти равенства показываютъ, какъ построить логариѳмическую прогрессію по данному первому члену и постоянному. Всякая логариѳмическая прогрессія будетъ удовлетворять опредѣленію, будемъ ли мы брать отношеніе послѣду-

[1]) Когда Паскаль въ 1647 г. напечаталъ небольшой трудъ подъ названіемъ „Nouvelles expériences touschnnt le vide“ и „разослалъ его во всѣ тѣ города Франціи, гдѣ онъ имѣлъ честь быть знакомымъ съ лицами, интересующимися этими изысканіями“, „Р. Мерсеннъ, не довольствуясь этимъ, попросилъ у него нѣсколько экземпляровъ для разсылки ихъ ученымъ Швеціи, Голландіи, Польши и другихъ странъ“ (Lettres de Pascal à M. de Ribeyre).

*) См. № 399 „Вѣстника“.

ющаго къ предыдущему или предыдущаго къ послѣдующему; поэтому, въ противоположность радикальной прогрессіи, логариѳмическая имѣетъ только одинъ видъ. Въ зависимости отъ того, какъ мы выберемъ первый членъ и постоянное, видъ логариѳмической прогрессіи будетъ разнообразиться. Такъ, если постоянное будетъ отрицательно, то четные члены логариѳмической прогрессіи будутъ возрастать, а нечетные убывать или наоборотъ; это происходитъ оттого, что показатели будутъ то положительны, то отрицательны, а слѣдовательно, сами члены прогрессіи будутъ то цѣлыми числами, то дробными. Если постоянное будетъ дробь, то логариѳмическая прогрессія будетъ аналогична безконечно-убывающей кратной прогрессіи съ тою разницей, что въ кратной прогрессіи $\lim |a_n| = 0$, а въ логариѳмической $\lim |a_n| = 1$. Если же мы, не ограничиваясь вещественными значеніями, допустимъ и мнимыя, то разнообразіе еще увеличится, что можно видѣть на слѣдующемъ примѣрѣ: если $a_1 = 3$; $q = 2i$, то получимъ слѣдующій рядъ: $\div\!\!\div$ 3, 9^i, $^1/_{81}$, $^1/_{6561^i}$, 43046721...

Теорема 1. Всякій членъ логариѳмической прогрессіи равенъ ея первому члену съ показателемъ, равнымъ постоянному въ степени числа предшествующихъ членовъ.

Доказательство. По опредѣленію прогрессіи, имѣемъ:

$$\frac{a_2}{a_1} = q, \quad \frac{a_3}{a_2} = q, \dots \frac{a_n}{a_{n-1}} = q;$$

перемножая эти равенства почленно, мы послѣ упрощенія получимъ:

$$\frac{a_n}{a_1} = q^{n-1},$$

или:

$$a_n = a_1^{q^{n-1}}, \text{ что и т. д.} \tag{1}$$

Какъ логариѳмическая пропорція не обладаетъ такъ называемымъ главнымъ свойствомъ пропорцій, такъ и логариѳмическая прогрессія не обладаетъ свойствомъ, аналогичнымъ тому, по которому въ разностной прогрессіи сумма, а въ кратной произведеніе членовъ, равноотстоящихъ отъ концовъ прогрессіи, равна суммѣ или произведенію крайнихъ.

Формула произведенія членовъ прогрессіи. Изъ способа построенія прогрессіи извѣстно, что: $a_2 = a_1^q$; $a_3 = a_2^q$; ... $a_n = a_{n-1}^q$; перемножая эти равенства почленно, находимъ: $a_2 a_3 \dots a_n = (a_1 a_2 \dots a_{n-1})^q$ или, обозначая произведеніе n членовъ прогрессіи черезъ P_n, $P_n : a_1 = P_n^q : a_n^q$; отсюда имѣемъ $P_n^{q-1} = a_n^q : a_1$, — и наконецъ:

$$P_n = \sqrt[q-1]{a_n^q : a_1}. \tag{2}$$

Возвышая подрадикальное выраженіе въ—1-ую степень, а показателя корня умножая на -1, мы получимъ формулу (2) въ другой формѣ:

$$P_n = \sqrt[1-q]{a_1 : a_n^q}. \qquad (3)$$

Если же мы вмѣсто a_n вставимъ въ формулу (2) его значеніе изъ формулы (1), то получимъ:

$$P_n = \sqrt[q-1]{a_1^{q^n-1}} \text{ или } P_n = \sqrt[1-q]{a_1^{1-q^n}}. \qquad (4)$$

Какъ въ кратной прогрессіи, у которой $\lim|a_n| = 0$, S_n при $n = \infty$ есть величина конечная и вполнѣ опредѣленная, такъ и въ логариѳмической прогрессіи, у которой $\lim|a_n| = 1$, P_n при возрастаніи n до ∞ есть тоже величина конечная и вполнѣ опредѣленная. Въ самомъ дѣлѣ, $P_n = \sqrt[1-q]{a_1^{1-q^n}}$ или $P_n = a_1^{\frac{1-q^n}{1-q}}$;

отсюда $P_n = a_1^{\frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}}$; при увеличеніи n до ∞ q^n стремится къ 0, такъ какъ q — правильная дробь, а слѣдовательно, и $\frac{q^n}{1-q}$ также стремится къ 0; поэтому въ предѣлѣ будемъ имѣть

$$\lim P_n\Big|_{n=\infty} = \lim a_1^{\frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}}\Big|_{n=\infty} = a_1^{\frac{1}{1-q}} \text{ или проще}$$

$$P = \sqrt[1-q]{a_1},$$

формула, вполнѣ аналогичная формулѣ суммы членовъ безконечно-убывающей кратной прогрессіи.

Задача. Вставить между числами a и b m среднихъ такъ, чтобы полученный рядъ представлялъ логариѳмическую прогрессію.

Рѣшеніе. Очевидно, намъ нужно найти постоянное; обозначимъ его черезъ q, тогда $a = a_1$, $b = a_n$ и мы получимъ по формулѣ (1) $b = a^{q^{m+1}}$, откуда: $q^{m+1} = \frac{b}{a}$, и наконецъ: $q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$.

Такъ какъ корень $(m+1)$-ой степени имѣетъ $m+1$ значеній, то мы получимъ между числами a и b $m+1$ логариѳмическихъ прогрессій.

Теорема 2. Если мы между каждыми двумя членами логариѳмической прогрессіи съ постояннымъ q вставимъ по m среднихъ, то полученный рядъ чиселъ представитъ одну логариѳмическую прогрессію съ постояннымъ, равнымъ $\sqrt[m+1]{q}$.

Доказательство. Возьмемъ прогрессію $\div\!\div$ a, b, $c\ldots$ и между каждыми двумя членами вставимъ по m среднихъ; постоянныя отдѣльныхъ прогрессій между a и b, b и c и т. д. будутъ $\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$, $\sqrt[m+1]{\frac{c}{b}}$, $\sqrt[m+1]{\frac{d}{c}}$ и т. д.; но, по опредѣленію прогрессіи, $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\ldots=q$, — слѣдовательно, всѣ отдѣльныя постоянныя равны между собою и равны $\sqrt[m+1]{q}$; вслѣдствіе же того, что послѣдній членъ каждой прогрессіи служитъ первымъ членомъ слѣдующей прогрессіи, полученный рядъ чиселъ представляетъ одну логариѳмическую прогрессію, что и требовалось доказать.

Объ одномъ видѣ кратныхъ чиселъ.

М. С. Бритмана.

Пусть будетъ a цѣлое число, въ составъ котораго не входятъ множители 2 и 5. Тогда дробь $\frac{1}{a}$ можетъ быть обращена въ чистую періодическую дробь $0,(b)$, гдѣ черезъ b обозначенъ періодъ. Обративъ теперь эту періодическую дробь въ обыкновенную, получаемъ:

$$0,(b)=\frac{b}{99\ldots9}.$$

Здѣсь въ знаменателѣ цифра 9 повторена столько разъ, сколько цифръ въ періодѣ b, считая и всѣ нули. Такъ какъ одна и та же періодическая дробь можетъ получиться только отъ равныхъ дробей, то

$$\frac{1}{a}=\frac{b}{99\ldots9}.$$

Отсюда имѣемъ

$$a.b=99\ldots9.$$

Разсмотримъ сначала тотъ случай, когда число a не дѣлится безъ остатка на 3 (слѣдовательно, a не дѣлится безъ остатка и на 9). Въ этомъ случаѣ b должно раздѣлиться на 9 на основаніи теоремы: „если произведеніе двухъ цѣлыхъ чиселъ A и B дѣлится безъ остатка на нѣкоторое третье цѣлое число C, взаимно простое съ A, то B дѣлится безъ остатка на C“. Такимъ образомъ

$$a\cdot\frac{b}{9}=11\ldots1,$$

гдѣ $\frac{b}{9}$ равняется цѣлому числу. Мы получили, слѣдовательно теорему:

„Для всякаго числа, въ составъ котораго не входятъ множители 2, 5 и 3, можно найти кратное число, изображаемое только цифрой 1, повторенной нѣсколько разъ“.

Если число a' не содержитъ множителей 2 и 5, но содержитъ множителя 3 въ какой либо (цѣлой) степени, то обратимъ дробь $\frac{1}{9a'}$ въ чистую періодическую. Пусть эта періодическая дробь будетъ $0,(b')$. Тогда

$$\frac{1}{9a'}=\frac{b'}{99\ldots9} \text{ и } 9a'.b'=99\ldots9,$$

откуда

$$a'.b'=11\ldots1.$$

Такимъ образомъ, и для всякаго цѣлаго числа, въ составъ котораго не входятъ множители 2 и 5, но входитъ множитель 3 въ нѣкоторой степени, можно найти кратное число, изображаемое только цифрой 1, повторенной нѣсколько разъ.

Разсматриваемое кратное, какъ легко сообразить, содержитъ, если можно такъ выразиться, цифру 1 не болѣе, какъ $(a-1)$ разъ въ первомъ случаѣ и не болѣе, какъ $(9a'-1)$ разъ во второмъ случаѣ.

Помноживъ кратное число $11\ldots1$ на однозначное число l, получимъ новое кратное $ll\ldots l$, изображаемое при помощи только одной цифры l.

Помноживъ кратное $11\ldots1$ на двузначное число, содержащее m десятковъ и n единицъ, гдѣ $m<10$, $n<10$ и $m+n=$ $=p<10$, получаемъ новое кратное вида $mpp\ldots pn$.

Найдемъ, для примѣра, кратное вида $11\ldots1$ для числа 7.

$$\frac{1}{7}=0,(142857);\quad \frac{1}{7}=\frac{142857}{999999};$$

$$7.142857=999999;\quad 7\cdot\frac{142857}{9}=111111;$$

$$7.15873=111111; \text{ отсюда имѣемъ:}$$

$$111111:7=15873.$$

Найдемъ еще кратное вида $11\ldots1$ для 21.

$$21.9=189;\quad \frac{1}{189}=0,(005291);$$

$$\frac{1}{189}=\frac{5291}{999999};\quad 189.5291=999999;$$

$$21.5291=111111; \text{ отсюда имѣемъ:}$$

$$111111:21=5291.$$

Искомое кратное есть **111111**. Изъ перваго примѣра также видно, что **111111** дѣлится безъ остатка на 21 (потому что дѣлится безъ остатка на 7 и на 3).

Доказательство теоремы Моавра и слѣдствія къ ней.

Н. Агрономовъ студ. 1 курса.

Теорема Моавра. Для всякаго n цѣлаго или дробнаго, положительнаго или отрицательнаго $(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta)$ будетъ однимъ изъ значеній выраженія:

$$(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n.$$

Доказательство, Возьмемъ два извѣстныхъ тригонометрическихъ равенства (форм. Симсона):

$$1)\left\{\begin{array}{ll} \sin n\vartheta = 2\cos\vartheta\sin(n-1)\vartheta - \sin(n-2)\vartheta & (\alpha) \\ \cos n\vartheta = 2\cos\vartheta\cos(n-1)\vartheta - \cos(n-2)\vartheta & (\beta) \end{array}\right.$$

Обозначимъ $\sin n\vartheta$ черезъ U_n, $\sin(n-1)\vartheta$ черезъ U_{n-1}, вообще, $\sin k\vartheta$ черезъ U_k; $2\cos\vartheta$ примемъ равнымъ $2a$. Тогда равенство (α) перепишется такъ:

$$2)\ U_n = 2aU_{n-1} - U_{n-2}.$$

Предположимъ, что

$$3)\ U_n = xp^n + yt^n,$$

гдѣ x, y, p, величины, намъ пока неизвѣстныя, но не зависящія отъ n. Тогда по аналогіи съ равенствомъ 3 напишемъ:

$$4)\left\{\begin{array}{l} U_{n-1} = xp^{n-1} + yt^{n-1}, \\ U_{n-2} = xp^{n-2} + yt^{n-2}. \end{array}\right.$$

Подставляемъ въ формулу 2 значенія U_{n-1}, U_{n-2}, U_{n-3} изъ формулъ 3 и 4; получимъ:

$$5)\ xp^n + yt^n = 2a(xp^{n-1} + yt^{n-1}) - (xp^{n-2} + yt^{n-2}).$$

Или

$$6)\ xp^{n-2}(p^2 - 2ap + 1) + yt^{n-2}(t^2 - 2at + 1) = 0.$$

Сдѣлаемъ такъ, чтобы лѣвая часть обратилась въ нуль при всякомъ n. Съ этою цѣлью мы положимъ, что

$$7)\left\{\begin{array}{l} p^2 - 2ap + 1 = 0, \\ t^2 - 2at + 1 = 0. \end{array}\right.$$

Откуда

$$8)\left\{\begin{array}{l} p = a \pm \sqrt{a^2 - 1}, \\ t = a \pm \sqrt{a^2 - 1}. \end{array}\right.$$

Выбираемъ одно значеніе для p, другое для t.

$$9) \begin{cases} p = a + \sqrt{a^2 - 1}, \\ t = a - \sqrt{a^2 - 1}. \end{cases}$$

При этихъ значеніяхъ p и t равенство (3) имѣетъ мѣсто при любомъ цѣломъ n, если оно справедливо для двухъ предшествующихъ значеніяхъ числа n. Остается только показать, что формула (3) имѣетъ мѣсто при $n = 1$ и $n = 2$, чтобы отсюда заключить, что она остается въ силѣ при всякомъ цѣломъ n.

Сообразно равенствомъ 3 имѣемъ:

$$10) \begin{cases} xp + yt = U_1 = \sin\vartheta = \sqrt{1 - a^2}, \\ xp^2 + yt^2 = U_2 = \sin 2\vartheta = 2a\sqrt{1 - a^2}. \end{cases}$$

Рѣшаемъ систему 10:

$$11) \begin{cases} x = \frac{1}{2i}, \\ y = -\frac{1}{2i}, \text{ гдѣ } i = \sqrt{-1}. \end{cases}$$

Подставляя въ равенство $U_n = xp^n + yt^n$ (11) полученныя значенія x, y, p, t изъ формулъ 9 и 11, найдемъ, что

$$12) \quad U_n = \sin n\vartheta = \frac{1}{2i}\left[\left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right)^n - \left(a - \sqrt{a^2 - 1}\right)^n\right]$$

или, помня, что $2a = 2\sin\vartheta$, получимъ:

$$13) \quad \sin n\vartheta = \frac{1}{2i}\left[(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n - (\cos\vartheta - i\sin\vartheta)^n\right].$$

Подобными разсужденіями находимъ, что и

$$14) \quad \cos n\vartheta = \frac{1}{2}\left[(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n + (\cos\vartheta - i\sin\vartheta)^n\right].$$

Складывая и вычитая равенства 13 и 14, получимъ:

$$15) \quad (\cos n\vartheta \pm i\sin n\vartheta) = (\cos\vartheta \pm i\sin\vartheta)^n.$$

Обобщеніе къ дробнымъ значеніямъ показателя производится обычнымъ путемъ.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги: 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ" и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 665 (4 сер.). Построить треугольникъ ABC, зная разность сторонъ $b-c$, разность высотъ $h_c - h_b$ и радіусъ r вписаннаго круга.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 666 (4 сер.). Доказать, что если p и $2p+1$ числа простыя и $p \geqslant 5$, то $4p+1$ число составное.

А. Брюхановъ (Иркутскъ).

№ 667 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$xy + \frac{c}{d}x + \frac{a}{b}y = \frac{m}{bd},$$

$$yz + \frac{e}{f}y + \frac{c}{d}z = \frac{n}{df},$$

$$zx + \frac{a}{b}z + \frac{e}{f}x = \frac{p}{fb}.$$

С. Розенблатъ (Балта).

№ 668 (4 сер.). Рѣшить уравненіе

$$m^2x^2(a^2 - mx) = a^3(a+1).$$

С. Адамовичъ (Суворовскій корпусъ).

№ 669 (4 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$x^y - y^2 = 1.$$

Н. Орлицкій (Харьковъ).

№ 670 (4 сер.). Въ сосудъ, совершенно наполненный водой, вводятъ нерастворимое твердое тѣло и удаляютъ перелившуюся черезъ верхъ жидкость; тогда вѣсъ сосуда увеличивается на 20,75 граммовъ. Если бы сосудъ былъ наполненъ масломъ, плотность котораго равна 0,9, то увеличеніе вѣса равнялось бы 21,58 грамма. Опредѣлить вѣсъ, объемъ и удѣльный вѣсъ тѣла.

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 560 (4 сер.). *При какихъ раціональныхъ значеніяхъ* n *дробь*

$$\frac{n^2+1}{n(n^2-1)}.$$

несократима.

(Заимств. изъ *L'Éducation Mathématique*).

Обозначая раціональное значеніе n, заданное въ несократимомъ видѣ, черезъ $\frac{a}{b}$, получимъ:

$$\frac{n^2+1}{n(n^2-1)}=\frac{b(a^2+b^2)}{a(a^2-b^2)}, \qquad (1)$$

гдѣ a и b—цѣлыя взаимно простыя числа. Изъ равенства

$$(a^2-b^2)+b.b=a^2 \qquad (2)$$

видно, что всякій общій дѣлитель чиселъ a^2-b^2 и b есть также общій дѣлитель чиселъ a^2 и b; но такъ какъ a и b суть числа, взаимно простыя, то и a^2 и b, а потому (см. (2)) и числа a^2-b^2 и b суть взаимно простыя. Точно такъ же изъ равенства $(a^2+b^2)-a.a=b^2$ видно, что a^2+b^2 и a суть взаимно простыя. Изъ равенства $(a^2+b^2)+(a^2-b^2)=2a^2$ видно, что всякій общій дѣлитель пары чиселъ a^2+b^2 и a^2-b^2 есть также общій дѣлитель пары чиселъ a^2+b^2 и $2a^2$ и, наоборотъ, всякій общій дѣлитель чиселъ a^2+b^2 и $2a^2$ есть также общій дѣлитель чиселъ a^2+b^2 и a^2-b^2, такъ что и общій наибольшій дѣлитель чиселъ a^2+b^2 и a^2-b^2 равенъ общему наибольшему дѣлителю чиселъ a^2+b^2 и $2a^2$. Выше было показано, что a^2+b^2 и a суть числа, взаимно простыя; значитъ числа a^2+b^2 и a^2 суть также взаимно простыя; слѣдовательно, общій наибольшій дѣлитель чиселъ a^2+b^2 и $2a^2$ равенъ общему наибольшему дѣлителю чиселъ a^2+b^2 и 2. Общій наибольшій дѣлитель чиселъ a^2+b^2 и 2 равенъ 2 или 1, смотря по тому, будутъ ли числа a и b одной четности (т. е. оба четныя или оба нечетныя) или разной. Если a и b числа одной четности, то множители a^2+b^2 и a^2-b^2 оба кратны 2, такъ что дробь (1) сократима; если же a и b суть числа разной четности, то, какъ выше было показано, каждое изъ чиселъ b и a^2+b^2 оказывается взаимно простымъ съ каждымъ изъ чиселъ a и a^2-b^2, такъ что дробь (1) несократима. Итакъ, для несократимости дроби (1) необходимо и достаточно, чтобы числитель и знаменатель несократимой дроби $\frac{a}{b}$ были числа разной четности $\left(\text{напримѣръ: } n=\frac{2}{3},\ n=\frac{15}{4}\right)$. Если $b=1$, то для несократимости разсматриваемой дроби a должно быть четно; отсюда слѣдуетъ, что дробь (1) несократима лишь при четныхъ цѣлыхъ значеніяхъ n, а при нечетныхъ—сократима.

Г. Оганянцъ (Москва); *Н. Готлибъ* (Митава).

№ 563 (4 сер.). *Два треугольника* AOB *и* A′OB′, *имѣющіе общую вершину* O, *лежатъ въ одной плоскости* α. *Одинъ изъ этихъ треугольниковъ вращается вокругъ точки* O, *оставаясь въ плоскости* α. *Дано, что прямыя* AA′ *и* BB′ *остаются параллельными при выше указанномъ вращеніи, на какой бы уголъ ни повернулся одинъ изъ треугольниковъ. Доказать, что треугольники* AOB *и* A′OB′ *равны.*

Оставляя треугольникъ AOB неподвижнымъ, повернемъ треугольникъ $A'OB'$ такъ, чтобы прямыя AB и $A'B'$ стали параллельны; такъ какъ, по условію, прямыя AA' и BB' тоже параллельны, то фигура $ABB'A'$ есть параллелограммъ, а потому $AB=A'B'$. Точка O не можетъ лежать внѣ параллелограмма $ABB'A'$, такъ какъ, при такомъ предположеніи, точки A' и B' при поворотѣ треугольника $A'OB'$ на 180^0 пришли бы соотвѣтственно въ такія положенія A'' и B'', что отрѣзки AB и $A''B''$ оказались бы параллельными, но направленными прямо противоположно, такъ что прямыя AA'' и BB'' были бы непараллельны, какъ діагонали параллелограмма $ABA''B''$, что противно условію Итакъ, при параллельности сторонъ AB и $A'B'$, точка O лежитъ внутри параллелограмма $ABA''B''$, а потому углы AOB и $A'OB'$ расположены въ плоскости α обратно, т. е. вращеніе стороны OA внутри угла AOB по направленію къ сторонѣ OB обратно вращенію стороны OA' внутри угла $A'OB'$ по направленію къ OB'. Поэтому, если повернуть треугольникъ $A'OB'$ такъ, чтобы сторона OA' пошла по сторонѣ OA, то точки B и B' окажутся по разныя стороны прямой OA; слѣдовательно, нельзя допустить, что стороны OA и OA' неравны, такъ какъ, въ этомъ предположеніи, прямая AA', совпадая съ OA, пересѣкается съ прямой BB', соединяющей двѣ лежащія по разныя стороны OA точки B и B', а это противорѣчитъ условію. Итакъ, $OA=OA'$; точно такъ же докажемъ, что $OB=OB'$; а раньше было доказано, что $AB=A'B'$. Слѣдовательно, треугольники AOB и $A'OB'$ равны по тремъ сторонамъ.

Замѣчаніе. Наоборотъ, если треугольники AOB и $A'OB'$ равны, такъ что $OA=OA'$, $OB=OB'$, $AB=A'B'$, и обратно расположены на плоскости α, то прямая AA' перпендикулярна къ биссектрисѣ OX угла AOA' при вершинѣ O равнобедреннаго треугольника AOA'. Но, прибавляя къ равнымъ угламъ AOX и $A'OX$ по равнымъ угламъ AOB и $A'OB'$, мы убѣждаемся, что прямая XO есть также биссектрисса угла BOB' при вершинѣ O равнобедреннаго треугольника BOB', а потому и BB' перпендикулярна къ OX. Будучи обѣ перпендикулярны къ OX, прямыя AA' и BB' параллельны.

С. Конюховъ (Никитовка); *Н. С.* (Одесса).

№ 574 (4 сер..) *Рѣшить уравненіе*

$$\frac{x^2}{8a}+\frac{2x}{3}=\sqrt{\frac{x^3}{3a}+\frac{x^3}{4}-\frac{a}{2}}.$$

Изъ даннаго уравненія вытекаетъ:

$$\left(\frac{x^2}{8a}+\frac{2x}{3}+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{x^3}{3a}+\frac{x^2}{4}.$$

откуда, по перенесеніи всѣхъ членовъ въ лѣвую часть, по раскрытіи скобокъ и послѣ приведенія, имѣемъ:

$$\frac{x^4}{64a^2}-\frac{x^3}{6a}+\frac{23}{72}x^2+\frac{2a}{3}x+\frac{a^2}{4}=0. \qquad (1)$$

Но лѣвая часть равенства (1) есть квадратъ трехчлена $\frac{x^2}{8a}-\frac{2}{3}x-\frac{a}{2}$

такъ что $\left(\frac{x^2}{8a}-\frac{2}{3}x-\frac{a}{2}\right)^2=0$, т. е. $\frac{x^2}{8a}-\frac{2}{3}x-\frac{a}{2}=0$, откуда

$$x_1=6a, \quad x_2=-\frac{2}{3}a.$$

Провѣривъ полученныя рѣшенія, находимъ, что оба они удовлетворяютъ данному уравненію.

А. Варенцовъ (Ростовъ н/Д); *М. Кузнецовъ* (Астрахань); *В. Гейманъ* (Өеодосія); *Н. Агрономовъ* (Вологда); *Г. Оганянцъ* (Москва); *Е. Хандановъ* (Тифлисъ); *В. Смирновъ*.

№ 578 (4 сер.). *Доказать, что для всякаго вписаннаго въ кругъ пятиугольника справедливо равенство*

$$d_1d_2(l_1-l_2)+d_2d_3(l_2-l_3)-d_3b_4(l_3-l_4)+d_4d_5(l_4-l_5)+d_5d_1(l_5-l_1)=$$
$$=l_1l_3(d_1-d_3)+l_2l_4(d_2-d_3)+l_3l_5(d_3-d_5)+l_4l_1(d_4-d_1)+l_5l_2(d_5-d_2),$$

гдѣ l_i $(i=1, 2, 3, 4, 5)$ *обозначаетъ длину стороны пятиугольника, а* d_i *— длину діагонали, несмежной со стороной* l_i.

Заимств. изъ *Supplemento al Periodico di Matematica.*

Примѣняя теорему Птоломея къ вписанному въ кругъ четыреугольнику, діагонали котораго суть d_1 и d_2, а стороны l_3, l_4, l_5, d_4, получимъ:

$$d_1d_2=l_4d_4+l_3l_5 \qquad (1).$$

Подобнымъ же образомъ находимъ:

$$d_2d_3=l_5d_5+l_1l_4 \quad (2), \qquad d_3d_4=l_1d_1+l_2l_5 \quad (3),$$
$$d_4d_5=l_2d_2+l_1l_3 \quad (4), \qquad d_5d_1=l_3d_3+l_2l_4 \quad (5).$$

Помножая равенства (1), (2), (3), (4), (5) соотвѣтственно на l_1-l_2, l_2-l_3, l_3-l_4, l_4-l_5, l_5-l_1 и затѣмъ складывая ихъ, имѣемъ:

$$d_1d_2(l_1-l_2)+d_2d_3(l_2-l_3)+d_3d_4(l_3-l_4)+d_4d_5(l_4-l_5)+d_5d_1(l_5-l_1)=$$
$$=(l_4d_4+l_3l_5)(l_1-l_2)+(l_5d_5+l_1l_4)(l_2-l_2)+(l_1d_1+l_2l_5)(l_3-l_4)+$$
$$+(l_2d_2+l_1l_3)(l_4-l_5)+(l_3d_3+l_2l_4)(l_5-l_1) \qquad (1).$$

Открывая скобки во второй части равенства (1) и дѣлая приведеніе, находимъ:

$$d_1d_2(l_1-l_2)+d_2d_3(l_2-l_3)+d_3d_4(l_3-l_4)+d_4d_5(l_4-l_5)+d_5d_1(l_5-l_1)=$$
$$=l_1l_3d_1-l_1l_3d_3+l_2l_4d_2-l_2l_4d_4+l_3l_5d_3-l_3l_5d_5+l_4l_1d_4-l_4l_1d_1+l_5l_2d_5-$$
$$-l_5l_2d_2=l_1l_3(d_1-d_3)+l_2l_4(d_2-d_4)+l_3l_5(d_3-d_5)+l_4l_1(d_4-d_1)+l_5l_2(d_5-d_2).$$

А. Варенцовъ (Ростовъ н/Д); *М. Кузнецовъ* (Астрахань); *С. Конюховъ* (Никитовка); *Г. Оганянцъ* (Москва); *А. Турчаниновъ* (Брестъ).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Дозволено цензурою, Одесса 24-го Ноября 1905 г.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера. ул. Новосельскаго, д. № 66.

Обложка
ищется

Обложка
ищется