Обложка
ищется

Обложка
ищется

XXXIV Сем. № 2.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
Элементарной Математики.

№ 398.

ВЕРТЯЩІЙСЯ ВОЛЧОКЪ.

Публичный докладъ, прочитанный въ засѣданіи „Британской Ассоціаціи" въ Лидсѣ.

Проф. Джона Перри.

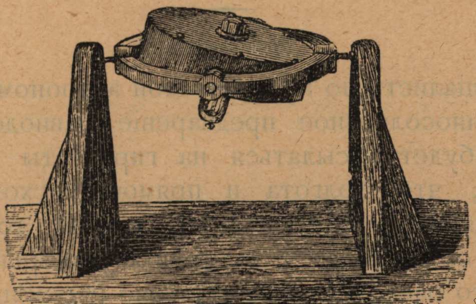
*(Продолженіе *).*

Если спеціалистъ по практической астрономіи станетъ Вамъ разъяснять лунносолнечное предвареніе равноденствій, то онъ, конечно, не будетъ ссылаться на гиростаты и волчки. Онъ скажетъ Вамъ, что долгота и прямое восхожденіе свѣтила видимо измѣняются; или, вѣрнѣе, что та точка эклиптики, отъ которой онъ исходитъ въ своихъ измѣреніяхъ, а именно точка весенняго равноденствія, медленно перемѣщается по кругу; перемѣщеніе это происходитъ въ направленіи обратномъ тому, въ которомъ движется земля по своей орбитѣ или же солнце въ своемъ видимомъ движеніи. Точка весенняго равноденствія при измѣреніяхъ на небесномъ сводѣ играетъ для астронома ту же

*) См № 397 „Вѣстника".

роль, какую долгота Гринвича для мореплавателя. Астрономъ скажетъ Вамъ, что аберрація свѣта и параллаксъ звѣздъ, а въ особенности «предходящее» движеніе (прецессія) точки весенняго равноденствія суть три важнѣйшія обстоятельства, которыя мѣшаютъ намъ, при наблюденіи въ обсерваторіи прохожденія свѣтилъ, констатировать, что земля движется вокругъ своей оси совершенно равномѣрно. Но если астрономъ описываетъ прецессію иначе, то это не должно скрывать отъ Васъ того физическаго факта, что здѣсь идетъ рѣчь о томъ же явленіи, которое мы изслѣдовали выше; хорошо освоившись съ особенностями волчковъ, мы легче поймемъ медленное коническое движеніе осей вращенія, чѣмъ тонкости небесныхъ измѣреній, въ области которыхъ вращается мысль астронома; эти измѣренія часто принуждаютъ человѣка, одареннаго высшими духовными способностями, вести жизнь, обремененную обыкновенной кропотливой работой, выполненіе которой мы, вообще, предоставляемъ дешевому писцу.

Такимъ образомъ «предходящее» движеніе (прецессія) земли принадлежитъ къ тому же типу, какъ и «предходящее» движеніе гиростата, подвѣшеннаго въ своемъ центрѣ тяжести, или тѣла, которое оставалось бы въ устойчивомъ равновѣсіи и не переклонялось бы ни въ какую сторону даже и безъ вращенія. Фактически «предходящее» движеніе земли сходно съ «предход щимъ» движеніемъ этого большого гиростата (фиг. 41), который подвѣшенъ на кольцахъ такъ, что если бы онъ не вращался,

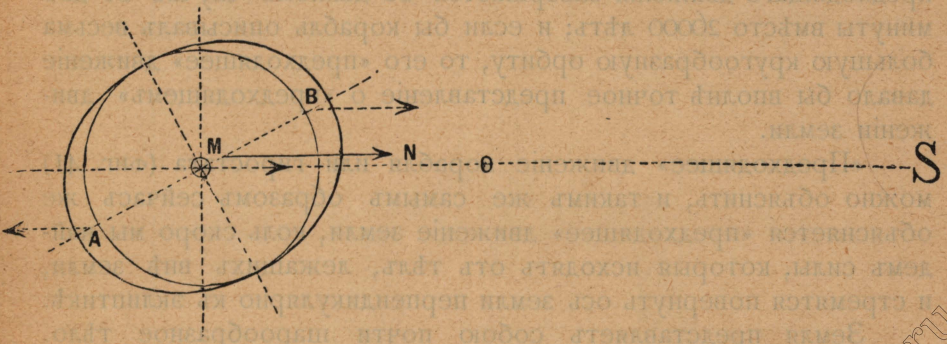


Фиг. 41.

то онъ совершалъ бы колебанія на подобіе маятника. Теперь я приведу его во вращеніе, а именно, если смотрѣть сверху, въ направленіи, обратномъ движенію часовой стрѣлки; тогда Вы можете видѣть, какъ онъ движется «предходящимъ» движеніемъ въ направленіи часовой стрѣлки. А вотъ здѣсь у меня небольшое деревянное суденышко, имѣющее форму полушарія; на немъ находится гиростатъ, ось котораго вертикальна. Судно находится въ состояніи устойчиваго равновѣсія; если гиростатъ не вращается, то судно, будучи выведено изъ равновѣсія, медленно качается то въ одну, то въ другую сторону; если же привести гиростатъ во вращеніе, то оно движется «предходящимъ» движеніемъ въ направленіи, обратномъ вращенію гиростата. Астрономы со временъ Гиппарха производили многочисленныя наблюденія надъ движеніемъ земли; съ другой стороны, мы изслѣдовали особенности движенія гиростатовъ, а потому, естественно, мы ищемъ объясненія для «предходящаго» движенія земли. Экваторъ земли образуетъ съ плоскостью эклиптики, т. е. съ плоскостью земной орбиты, уголъ въ $23\frac{1}{2}^0$. Уголъ между осью вращенія земли и перпендикуляромъ къ плоскости эклиптики такимъ образомъ всегда остается равнымъ $23\frac{1}{2}^0$, и земная ось совершаетъ полный оборотъ въ 26000 лѣтъ. Пусть наружная поверхность воды, на которой плаваетъ этотъ деревянный корабликъ, представляетъ эклиптику. Ось вращенія гиростата наклонена къ вертикали подъ угломъ въ $23\frac{1}{2}^0$; только полный циклъ предходящаго движенія завершается въ данномъ случаѣ въ двѣ минуты вмѣсто 26000 лѣтъ; и если бы корабль описывалъ весьма большую кругообразную орбиту, то его «предходящее» движеніе давало бы вполнѣ точное представленіе о «предходящемъ» движеніи земли.

«Предходящее» движеніе корабля или гиростата (фиг. 41) можно объяснить, и такимъ же самымъ образомъ сейчасъ же объясняется «предходящее» движеніе земли, коль скоро мы найдемъ силы, которыя исходятъ отъ тѣлъ, лежащихъ внѣ земли, и стремятся повернуть ось земли перпендикулярно къ эклиптикѣ.

Земля представляетъ собою почти шарообразное тѣло. Если бы она была совершенно шарообразна и однородна, то равнодѣйствующая притягательныхъ силъ, исходящихъ отъ далекаго тѣла, проходила бы прямо черезъ ея центръ. Совершенно такъ же обстояло бы дѣло и въ томъ случаѣ, если бы земля была шарообразна, но не однородна, при чемъ массы одинаковой плотности были бы расположены шаровыми слоями, подобно шелухѣ луковицы. Но земля не шарообразна, и чтобы составить понятіе о притягательномъ дѣйствіи далекаго тѣла, было необходимо произвести наблюденія надъ маятникомъ на всей поверхности земли. Какъ Вы знаете, помѣщая маятникъ одной и той же длины въ различныхъ мѣстахъ, и опредѣляя продолжительность его колебанія, можно опредѣлить силу тяжести въ любомъ мѣстѣ. Съ другой стороны, Гринъ (Green) доказалъ, что если бы мы могли знать величину силы тяжести во всѣхъ мѣстахъ земной поверхности, то, не зная ничего о внутренности земли, мы все же могли бы съ совершенной точностью вычислить силу, съ которой земля притягиваетъ любое внѣшнее тѣло; такъ напримѣръ, мы могли бы вычислить эту силу для всякой точки лунной орбиты или для солнца. Вмѣстѣ съ тѣмъ мы опредѣлили бы такимъ образомъ силу, равную и противоположную той, съ которой такого рода тѣло дѣйствуетъ на землю. Наблюденія надъ маятникомъ были произведены на землѣ въ весьма многихъ мѣстахъ; поэтому мы знаемъ, хотя и не съ полной точностью, ту притягательную силу, съ которой дѣйствуютъ на землю тѣла, находящіяся внѣ ея. Такъ напримѣръ, мы знаемъ, что равнодѣйствующая силъ, притягивающихъ землю къ солнцу, не проходитъ черезъ центръ земной массы. Вы это гораздо лучше поймете, если я сошлюсь на этотъ рисунокъ, изображающій землю въ срединѣ зимы (фиг. 42), и постараюсь популярно изложить суть дѣла. Назовемъ черезъ A и B выступающія части земли,



Фиг. 42.

т. е. выдающійся поясъ земли, который придаетъ ей видъ померанца вмѣсто шара. Равнодѣйствующая силъ, притягивающихъ внутреннюю шарообразную часть, которую мы условимся считать однородной, проходитъ черезъ центръ.

Теперь я буду изслѣдовать притяженіе выступающаго пояса, обозначеннаго черезъ AB. Солнце притягиваетъ одинъ килограммъ массы земли въ B сильнѣе, чѣмъ въ A, такъ какъ B лежитъ къ нему ближе, чѣмъ A, а потому общая равнодѣйствующая всѣхъ силъ, притягивающихъ землю, имѣетъ направленіе MN, а не совпадаетъ съ прямой OO, проходящей черезъ центръ. Но мы знаемъ, что сила, дѣйствующая въ направленіи MN, можетъ быть замѣнена параллельной ей силой OO и парой силъ, которая стремится наклонить экваторъ къ солнцу.

Мы получимъ вѣрное представленіе о вращательномъ дѣйствіи этой пары силъ, если мы представимъ себѣ, что вся масса солнца распредѣлена равномѣрно въ видѣ кругообразнаго матеріальнаго кольца, діаметръ котораго равенъ 184 милліонамъ миль и которое наклонено къ земному экватору подъ угломъ въ $23\frac{1}{2}^0$. Подъ вліяніемъ притяженія этого кольца земля должна была бы качаться, подобно большому кораблю въ спокойномъ морѣ, который очень медленно колеблется, совершая въ три года только одно полное колебаніе. Но земля вращается вокругъ своей оси, и вращательная пара, или пара силъ дѣйствуетъ на нее совершенно такъ же, какъ тѣ силы, которыя все время стремятся привести вотъ эту модель корабля въ вертикальное положеніе; поэтому земля движется «предходящимъ» движеніемъ, полный періодъ котораго составляетъ 26000 лѣтъ. Если на этомъ корабликѣ нѣтъ никакого тѣла, вращающагося вокругъ оси, то полное колебаніе этого корабля совершается въ теченіе 3 секундъ; если же я приведу во вращеніе находящійся на корабликѣ гиростатъ, то время полнаго періода „предходящаго" движенія составляетъ 2 минуты. Въ обоихъ случаяхъ дѣйствіе вращенія выражается въ преобразованіи качанія съ короткимъ періодомъ въ „предходящее" движеніе съ болѣе продолжительнымъ періодомъ.

Между гиростатомъ и землей есть большая разница. Силы, дѣйствующія на волчокъ, всегда однѣ и тѣ же, между тѣмъ какъ силы, дѣйствующія на землю, постоянно измѣняются. Во время зимняго и лѣтняго солнцестоянія пара силъ достигаетъ наибольшаго значенія, а во время весенняго и осенняго равноденствія нѣтъ совсѣмъ никакой пары силъ, такъ что „предходящее" движеніе (прецессія) мѣняетъ свою скорость въ теченіе четверти года, отъ максимума до нуля и отъ нуля до максимума. Но оно совершается всегда въ одну и ту же сторону, а именно— въ направленіи, обратномъ вращенію земли вокругъ своей оси. Поэтому, говоря о „предходящемъ" движеніи земли, мы будемъ подразумѣвать всегда нѣкоторое среднее равномѣрное движеніе, между тѣмъ какъ на самомъ дѣлѣ это движеніе становится въ продолженіе четверти года то скорѣе, то снова медленнѣе.

Но и луна точно такъ же, какъ и солнце, оказываетъ свое дѣйствіе: она стремится повернуть земной экваторъ въ плоскость лунной орбиты. Плоскость лунной орбиты почти совпадаетъ съ плоскостью эклиптики, а потому результирующее „предходящее" движеніе (прецессія) земли есть движеніе совершенно такого же рода, какое имѣло бы мѣсто, если бы дѣйствовало только одно изъ двухъ небесныхъ тѣлъ—либо луна, либо солнце.

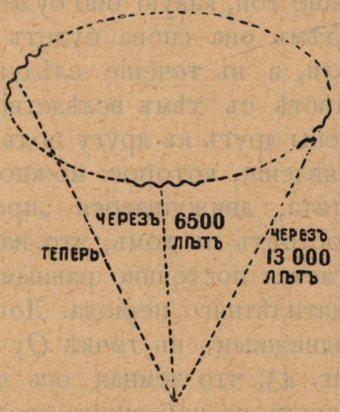
Такимъ образомъ, наблюдаемое въ дѣйствительности явленіе „предходящаго" движенія (прецессіи) земной оси по конусообразной поверхности, періодъ котораго равенъ 26000 лѣтъ, есть результатъ совмѣстнаго дѣйствія вращательныхъ силъ солнца и луны.

Здѣсь Вы можете видѣть примѣръ тѣхъ неточностей, которыя вкрадываются въ научныя объясненія явленій природы съ почти неизбѣжной необходимостью. До сихъ поръ я говорилъ, что „предходящее" движеніе земли происходитъ вслѣдствіе дѣйствія солнца. Это было позволительно, такъ какъ плоскость эклиптики всегда образуетъ съ земнымъ экваторомъ уголъ, который почти точно равенъ $23\frac{1}{2}^0$; хотя въ общемъ дѣйствіе луны почти сходно съ дѣйствіемъ солнца и лишь приблизительно въ два раза сильнѣе его, однако, оно въ значительно большей мѣрѣ подвержено измѣненіямъ. Болѣе сильное вліяніе луны на наклоненіе земной оси точно такъ же, какъ и возникновеніе подъ вліяніемъ луны приливовъ и отливовъ, слѣдуетъ приписать тому обстоятельству, что она находится гораздо ближе къ намъ, чѣмъ солнце; ~~и~~ это большее вліяніе луны обнаруживается, несмотря на то, что масса ея гораздо меньше по сравненію съ массой солнца.

Такъ какъ уголъ между эклиптикой и земнымъ экваторомъ равенъ $23\frac{1}{2}^0$, а лунная орбита наклонена къ эклиптикѣ подъ угломъ въ $5\frac{1}{2}^0$, то иногда бываютъ такіе моменты, когда лунная орбита образуетъ съ земнымъ экваторомъ уголъ въ 29^0, а иногда—въ 18^0; говоря точнѣе, этотъ уголъ медленно измѣняется отъ 29^0 до 18^0, а затѣмъ снова отъ 18^0 до 29^0 въ теченіе промежутка времени, приблизительно равнаго 19 годамъ. Это обстоятельство вызываетъ явленіе, извѣстное подъ именемъ „нутаціи" или каченія оси; это явленіе весьма замѣтно модифицируетъ вліяніе солнца на наклоненіе земной оси и существенно видоизмѣняетъ его. Подъ вліяніемъ того непостоянства, которымъ отличается дѣйствіе луны, земная ось описываетъ поверхность эллиптическаго конуса вокругъ прямой, которую называютъ среднимъ положенiемъ оси. При этомъ мы не должны также забывать, что въ теченiе каждаго луннаго мѣсяца влiянiе луны на наклоненiе земной оси два раза усиливается и два раза становится равнымъ нулю; такимъ образомъ дѣйствiе луны постоянно измѣняетъ свою величину.

Въ общемъ луна и солнце, а также въ незначительной степени и звѣзды дѣйствуютъ вмѣстѣ, вызывая „предходящее" движенiе (прецессiю), которое повторяется въ той же послѣдовательности по истеченiи 25695 лѣтъ. „Предходящее" движенiе не вполнѣ равномѣрно, а именно—его скорость достигаетъ наибольшаго значенiя зимою и лѣтомъ; такимъ образомъ происходитъ измѣненiе скорости, перiодъ котораго составляетъ полъ года. Но естъ еще одно измѣненiе скорости, перiодъ котораго составляетъ половину луннаго мѣсяца; сегодня вечеромъ скорость „предходящаго" движенiя больше той, какую оно будетъ имѣть въ ближайшее воскресенье; затѣмъ она снова будетъ возрастать въ теченiе ближайшей недѣли, а въ теченiе слѣдующей недѣли снова будетъ убывать. Вмѣстѣ съ тѣмъ вслѣдствiе того, что орбиты земли и луны наклонены другъ къ другу подъ угломъ въ $5\frac{1}{2}^0$, происходитъ еще одно явленiе, которое можно сравнить съ качанiемъ нашего гиростата, движущагося „предходящимъ" движенiемъ; явленiе это состоитъ въ томъ, что наклоненiе земной оси къ эклиптикѣ не остается постоянно равнымъ $23\frac{1}{2}^0$, но мѣняется въ теченiе девятнадцатилѣтняго перiода. Допустимъ, что центръ земли остается неподвижнымъ въ точкѣ O; тогда мы видимъ на этой модели и на фиг. 43, что земная ось описываетъ въ 25866 лѣтъ почти полный кругъ на небесномъ сводѣ, при чемъ ея скорость колеблется, измѣняясь перiодически черезъ каждые полъ года и черезъ каждые полъ мѣсяца. Однако, линiя, описываемая земной осью на небесномъ сводѣ, не вполнѣ сходна съ дугою круга; на самомъ дѣлѣ это волнистая линiя съ болѣе крупными волнами, соотвѣтствующими постоянному перiоду въ 19 лѣтъ, а также еще съ болѣе мелкими выпуклостями, которыя отвѣчаютъ полугодовымъ и четырнадцатидневнымъ перiодамъ. Главная же причина нутацiи, а именно такъ называемое девятнадцатилѣтнее отступающее движенiе лунныхъ узловъ, возникаетъ совершенно такимъ же образомъ, какъ и „предходящее" движенiе гиростата, а именно—оно совершается подъ влiянiемъ пары силъ, которая дѣйствуетъ на тѣло, вращающееся вокругъ своей оси.

Представьте себѣ, что земля остается неподвижной и что солнце и луна движутся вокругъ нея. Гауссъ показалъ, что при этомъ допущенiи массы солнца и луны должны дѣйствовать на землю такимъ же образомъ, какъ это имѣло бы мѣсто, если бы массы ихъ были распредѣлены на всемъ протяженiи соотвѣтствующихъ орбитъ. Представьте себѣ, напримѣръ, что масса луны распредѣлена вдоль всей своей орбиты въ видѣ твердаго кольца, дiаметръ котораго равенъ 480000 миль, и при томъ такъ, что тамъ, гдѣ теперь скорость больше, расположено меньше вещества, такъ что кольцо толще въ апогеѣ и тоньше въ перигеѣ луны. Такого рода кольцо, окружающее землю, было бы подобно кольцамъ Сатурна, узлы которыхъ также обнаруживаютъ „предходящее" движенiе; но только кольца Сатурна не твердыя тѣла, такъ какъ въ противномъ случаѣ они



Фиг. 43.

никоимъ образомъ не могли бы оставаться въ равновѣсiи. Оставимъ теперь землю и представимъ себѣ, что существуетъ только одно вышеупомянутое кольцо и что центръ его совершаетъ годовое движенiе вокругъ солнца; тогда это кольцо, образуя съ плоскостью эклиптики уголъ въ $5\frac{1}{2}^{0}$, придетъ въ колебательное движенiе: оно будетъ качаться, пока не отклонится по другую сторону плоскости эклиптики на такой же самый уголъ, а потомъ опять возвратится въ прежнее положенiе. Но это кольцо совершаетъ одинъ полный оборотъ вокругъ своего центра въ 27 солнечныхъ сутокъ и 8 часовъ; поэтому оно уже не будетъ качаться изъ одной стороны въ другую подобно кораблю сидящему на мели, но придетъ въ „предходящее“ движенiе въ направленiи, противоположномъ его собственному вращенiю. Такъ какъ движенiе кольца, если смотрѣть на эклиптику съ сѣвера, противоположно движенiю часовой стрѣлки, то это отступающее движенiе лунныхъ узловъ совершается въ направленiи часовой стрѣлки. Это то же самое явленiе, какъ и предваренiе равноденствiй (прецессiя) только съ гораздо болѣе короткимъ перiодомъ въ 6798 сутокъ вмѣсто 25866 лѣтъ.

Я Вамъ сказалъ, что если бы намъ была извѣстна масса солнца или луны, то мы могли бы опредѣлить размѣръ силъ или, вѣрнѣе говоря, вращательнаго момента, величиною котораго измѣряется ихъ стремленiе наклонить земную ось. Мы знаемъ скорость, съ которой вращается земля; мы произвели также наблюденiя надъ ея „предходящимъ“ движенiемъ. Слѣдуя методу, который я только что набросалъ въ общихъ чертахъ, мы найдемъ, что скорость „предходящаго“ движенiя тѣла, вращающагося вокругъ своей оси, должна равняться вращательному моменту пары силъ, дѣленному на скорость вращенiя вокругъ оси и на моментъ инерцiи *) тѣла, вычисленный относительно его оси вращенiя. Поэтому скорость „предходящаго“ движенiя тѣмъ больше, чѣмъ больше вращательный моментъ и чѣмъ меньше скорость вращенiя вокругъ оси и моментъ инерцiи тѣла. Если даны значенiя всѣхъ этихъ величинъ за исключенiемъ одной, то легко вычислить значенiе этой послѣдней величины. Обыкновенно при вычисленiяхъ такого рода мы имѣемъ въ виду опредѣленiе массы луны, такъ какъ явленiе „предходящаго“ движенiя (прецессiи) и наступленiе приливовъ и отливовъ суть единственныя явленiя, которыя даютъ намъ возможность вычислить массу луны.

(Продолженiе слѣдуетъ).

---

*) Инерцiя тѣла (или масса) обозначаетъ приблизительно то сопротивленiе, которое оказываетъ тѣло измѣненiю скорости при прямолинейномъ или поступательномъ перемѣщенiи, а моментъ инерцiи обозначаетъ сопротивленiе измѣненiю скорости вращательнаго движенiя.

О разложенiи функцiй въ непрерывныя дроби.

П. Свѣшникова.

*(Продолженiе *).*

13. Извѣстно, что

$$\lg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$$

для значенiй x, модули которыхъ менѣе **1**.

Отсюда можно вывести:

$$\lg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\cfrac{x}{1-\cfrac{\frac{x^2}{1.3}}{1-\cfrac{\frac{4x^2}{3.5}}{1-\cfrac{\frac{9x^2}{5.7}}{1-\ldots}}}}=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{4x^2}{5-\cfrac{9x^2}{7-\cfrac{16x^2}{9-\ldots}}}}}.$$

Полагая $x=\frac{1}{y}$, находимъ:

$$\lg\sqrt{\frac{y+1}{y-1}}=\cfrac{1}{y-\cfrac{1}{3y-\cfrac{4}{5y-\cfrac{9}{7y-\ldots}}}}$$

14. Поступая, какъ и прежде, получимъ разложенiя

$$\lg\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}=\cfrac{x^2}{2.1-\cfrac{x^2}{1-\cfrac{x^2}{2.3-\cfrac{2x^2}{1-\cfrac{2x^2}{2.5-\cfrac{3x^2}{1-\cfrac{3x^2}{2.7-\ldots}}}}}}},$$

*) См. № 397 „Вѣстника“.

$$\lg\sqrt{1+x^2}=\cfrac{x^2}{2.1+\cfrac{x^2}{1+\cfrac{x^2}{2.3+\cfrac{2x^2}{1+\cfrac{2x^2}{2.5+\cfrac{3x^2}{1+\cfrac{3x^2}{2.7+\ldots}}}}}}},$$

зная, что $\lg\sqrt{\dfrac{1}{1+x^2}}=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^6}{6}+\ldots+\dfrac{x^{2n}}{2n}+\ldots$

$$\lg\sqrt{1+x^2}=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}-\frac{x^8}{8}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2n}+\ldots,$$

гдѣ модуль $x<1$.

Полагая во второй формулѣ $x=\dfrac{1}{y}$, получимъ:

$$\lg\sqrt{1+\frac{1}{y}}=\cfrac{1}{2.1y+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2.3y+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{2.5y+\ldots+\cfrac{k}{1+\cfrac{k}{2(2k+1)y+\ldots}}}}}}}$$

Въ этомъ разложенiи пред. $\dfrac{a_{2k}a_{2k+1}}{b_{2k+1}}=$ пред. $\dfrac{2(2k+1)y}{k}=4y$.

Полагая здѣсь y послѣдовательно равнымъ 2, 3, 4, находимъ:

$\lg\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{11366}{56064}$ до $\dfrac{1}{29959504}$, $\lg\sqrt{\dfrac{4}{3}}=\dfrac{731}{5082}$ до $\dfrac{1}{32097912}$,

$\lg\sqrt{\dfrac{5}{4}}=\dfrac{1211}{10854}$ до $\dfrac{1}{192419712}$ или

$\lg\sqrt{\dfrac{3}{2}}=0{,}20273259$ до $0{,}000000033\ldots$ (седьмая подходящая дробь),

$\lg\sqrt{\dfrac{4}{3}}=0{,}14384100$ до $0{,}000000031\ldots$ (шестая „ „),

$\lg\sqrt{\dfrac{5}{4}}=0{,}11157186$ до $0{,}000000005\ldots$ („ „ „),

$$\lg\sqrt{\frac{3}{2}}+\lg\sqrt{\frac{4}{3}}=\lg\sqrt{2}=0{,}34657359 \text{ до } 0{,}000000064\ldots,$$

$$\lg 2=0{,}69314718 \text{ до } 0{,}000000128\ldots,$$

$$\lg\sqrt{\frac{5}{4}}+\lg 2=\lg\sqrt{5}=0{,}80471904 \text{ до } 0{,}000000133\ldots,$$

$$\lg\sqrt{5}+\lg\sqrt{2}=\lg\sqrt{10}=1{,}15129263 \text{ до } 0{,}000000197\ldots,$$

$$\lg 10=2{,}30258526 \text{ до } 0{,}000000394\ldots,$$

$$\lg 10=2{,}302585 \text{ съ ошибкой менѣе } 0{,}000001.$$

15 Извѣстно, что

$$\lg(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$$

Отсюда найдемъ:

$$\lg(1+x)=\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{3+\cfrac{2x}{2+\cfrac{2x}{5+\cfrac{3x}{2+\cfrac{3x}{7}+\ldots+\cfrac{kx}{2+\cfrac{kx}{2k+1+\ldots}}}}}}}}$$

16. Положимъ, что

$$f(a,\,b)=1+\frac{a}{b}+\frac{a^2}{b(b+1)}+\frac{a^3}{b(b+1)(b+2)}+\ldots+$$
$$+\frac{a^n}{b(b+1)(b+2)\ldots(b+n-1)}+\ldots,$$

$$f(a,\,b+1)=1+\frac{a}{b+1}+\frac{a^2}{(b+1)(b+2)}+\frac{a^3}{(b+1)(b+2)(b+3)}+\ldots+$$
$$+\frac{a^n}{(b+1)(b+2)\ldots(b+n)}+\ldots,$$

$$F(a,\,b)=1+\frac{2a}{b}+\frac{3a^2}{b(b+1)}+\frac{4a^3}{b(b+1)(b+2)}+\ldots+$$
$$+\frac{(n+1)a^n}{b(b+1)(b+2)\ldots(b+n-1)}+\ldots$$

Вычитаніемъ находимъ $F(a,\ b)-f(a,\ b)=$

$$=\frac{a}{b}+\frac{2a^2}{b(b+1)}+\frac{3a^3}{b(b+1)(b+2)}+\ldots+\frac{na^n}{b(b+1)\ldots(b+n-1)}+\ldots=$$

$$=\frac{a}{b}\left[1+\frac{2a}{b+1}+\frac{3a^2}{(b+1)(b+2)}+\ldots+\frac{na^{n-1}}{(b+1)(b+2)\ldots(b+n-1)}+\ldots\right];$$

$$f(a,b)-f(a,\ b+1)=\frac{a}{b(b+1)}+\frac{2a^2}{b(b+1)(b+2)}+$$

$$+\frac{3a^3}{b(b+1)(b+2)(b+3)}+\ldots+\frac{na^n}{b(b+1)(b+2)\ldots(b+n)}+\ldots=$$

$$=\frac{a}{b(b+1)}\left[1+\frac{2a}{b+2}+\frac{3a^2}{(b+2)(b+3)}+\ldots+\frac{na^{n-1}}{(b+2)(b+3)\ldots(b+n)}+\ldots\right].$$

Такимъ образомъ $F(a,\ b)-f(a,\ b)=\dfrac{a}{b}F(a,\ b+1)$;

$$f(a,\ b)-f(a,\ b+1)=\frac{a}{b(b+1)}F(a,\ b+2);$$

$$f(a,b+1)-F(a,b+1)=-\frac{a}{b+1}F(a,\ b+2).$$

Отсюда:

$$F(a,b)-F(a,b+1)=\frac{a}{b}F(a,b+1)-\frac{a(b-1)}{b(b+1)}F(a,b+2);$$

$$bF(a,b)=(a+b)F(a,b+1)-\frac{a(b-1)}{b+1}F(a,b+2);$$

$$\frac{bF(a,\ b)}{aF(a,\ b+1)}=\frac{a+b}{a}-\frac{a(b-1)F(a,\ b+2)}{a(b+1)F(a,\ b+1)};$$

$$\frac{aF(a,\ b+1)}{bF(a,\ b)}=\frac{a}{a+b-(b-1)\cdot\dfrac{aF(a,\ b+2)}{(b+1)F(a,\ b+1)}}.$$

Полагая $b=1$, находимъ $\dfrac{F(a,\ 2)}{F(a,\ 1)}=\dfrac{1}{a+1}$.

Точно также $\dfrac{aF(a,\ b+2)}{(b+1)F(a,\ b+1)}=\dfrac{a}{a+b+1-b\cdot\dfrac{aF(a,\ b+3)}{(b+2)F(a,\ b+2)}}$

и т. д. Отсюда находимъ:

$$\frac{aF(a,b+1)}{bF(a,\ b)}=\cfrac{a}{a+b-\cfrac{(b-1)a}{a+b+1-\cfrac{ba}{a+b+2-\cfrac{(b+1)a}{a+b+3-\ldots}}}}$$

Но $f(a,1)=1+\dfrac{a}{1}+\dfrac{a^2}{1.2}+\dfrac{a^3}{1.2.3}+\ldots+\dfrac{a^n}{1.2.3\ldots n}+\ldots=e^a$;

$$f(a,\ 2) = 1 + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{2.3} + \frac{a^3}{2.3.4} + \ldots + \frac{a^n}{2.3.4\ldots(n+1)} + \ldots;$$

$$af(a,2) = e^a - 1,\ f(a,\ 2) = \frac{e^a - 1}{a};$$

$$F(a,2) = 1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{a^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots = e^a;$$

$$F(a,\ 1) = 1 + \frac{2a}{1} + \frac{3a^2}{1.2} + \frac{4a^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{(n+1)a^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots =$$

$$= (a+1)F(a,\ 2) = (a+1)e^a;$$

$$F(a,3) = 1 + \frac{2a}{3} + \frac{3a^2}{3.4} + \frac{4a^3}{3.4.5} + \ldots + \frac{(n+1)a^n}{3.4.5\ldots(n+2)} + \ldots;$$

изъ равенства $F(a,\ 2) - f(a,\ 2) = \frac{a}{2} F(a,\ 3)$ находимъ:

$$F(a,\ 3) = \frac{2e^a(a-1)+2}{a^2}.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{aF(a,3)}{2F(a,2)} = \frac{a \cdot \frac{2(ae^a - c^a + 1)}{a^2}}{2e^a} = \cfrac{a}{a+2-\cfrac{a}{a+3-\cfrac{2a}{a+4-\cfrac{3a}{a+5-\ldots}}}},$$

$$\frac{e^a - a - 1}{a} = \cfrac{a}{2-a+\cfrac{a}{3-a+\cfrac{2a}{4-a+\cfrac{3a}{5-a+\ldots}}}},$$

$$\frac{a}{e^a - 1} = \cfrac{1}{1+\cfrac{a}{2-a+\cfrac{a}{3-a+\cfrac{2a}{4-a+\cfrac{3a}{5-a+\ldots}}}}},$$

$$e = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\cfrac{4}{5+\ldots}}}}}$$

(Продолженіе слѣдуетъ).

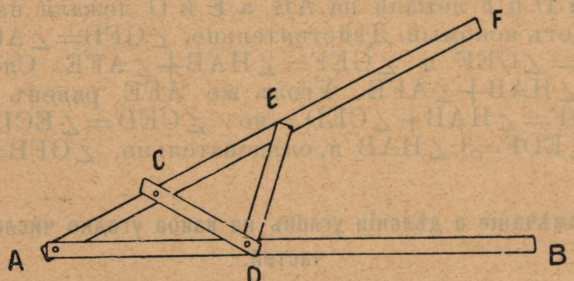
Механическій способъ дѣленія угловъ на какое угодно число равныхъ частей.

А. Турчанинова.

Предлагаемые мною приборы для дѣленія угловъ на равныя части состоятъ изъ линеекъ, скомбинированныхъ особеннымъ образомъ. Хотя помощью циркуля и линейки задача все же не рѣшается, но эти приборы вслѣдствіе своей несложности могутъ быть употребляемы въ спеціальныхъ случаяхъ.

Дѣленіе угла на 3 равныя части.

Приборъ для дѣленія угла на 3 равныя части состоитъ изъ двухъ основныхъ линеекъ AB и AF и двухъ равныхъ малыхъ CD и DE. Линейки AB и AF должны быть соединены шарниромъ. Къ линейкѣ AF посредствомъ шарнира прикрѣплена линейка CD, которая въ свою очередь соединена шарниромъ съ линейкой DE. Приборъ устраивается такимъ образомъ, чтобы $AC=CD=DE$. Желая раздѣлить на три равныя части уголъ, на-

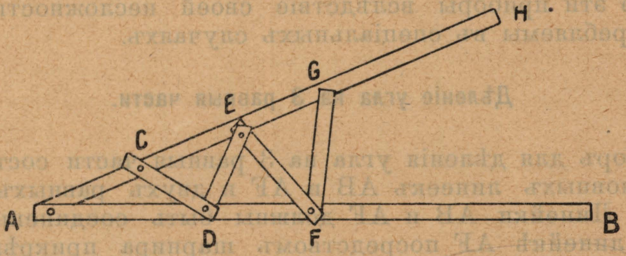


Приборъ для дѣленія угла на 3 равныя части.

черченный на бумагѣ, прикладываютъ къ нему приборъ такъ, чтобы точка D совпала съ вершиною угла и линейки ED и AB пошли по сторонамъ угла. Затѣмъ, передвигая линейки, стараются достигнуть того, чтобы D находилась на AB и E на AF. Тогда пересѣченіе линеекъ AB и AF опредѣляетъ требуемый уголъ. Въ самомъ дѣлѣ, $\angle EDB=\angle FAB+\angle AED$, такъ какъ $\angle EDB$ внѣшній по отношенію къ треугольнику AED. Такъ какъ $CD=DE$, то $\angle AED=\angle ECD$. Уголъ же ECD внѣшній по отношенію къ треугольнику ACD, и потому $\angle ECD=\angle CAD+\angle CDA$; но вслѣдствіе того, что $AC=CD$, заключаемъ, что $\angle ECD= =2.\angle FAB$. Стало быть, $\angle EDB=3.\angle FAB$.

Дѣленіе угловъ на 5 равныхъ частей.

Приборъ для дѣленія угловъ на 5 равныхъ частей состоитъ изъ двухъ основныхъ линеекъ AB и AH и четырехъ малыхъ CD, DE, EF и FG. Линейки AB и AH должны быть соединены шарниромъ. Линейки AH и CD, CD и DE, ED и GF, EF и FG соединены шарнирами. При устройствѣ прибора достигается, чтобы $AC = CD = DE = EF = FG$. Желая раздѣлить на 5 равныхъ частей уголъ, начерченный на бумагѣ, къ нему прикладываютъ приборъ



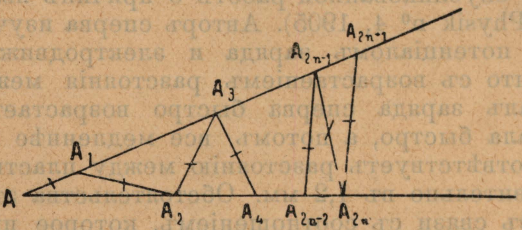
Приборъ для дѣленія угла на 5 равныхъ частей.

такъ, чтобы F совпала съ вершиною угла и FG и FB пошли по сторонамъ угла. Затѣмъ, двигая линейками, стараются достигнуть того, чтобы D и F лежали на AB, а E и G лежали на AH. Тогда $\angle HAB$ будетъ искомый. Дѣйствительно, $\angle GFB = \angle AGF + \angle HAB$. Но $\angle AGF = \angle GEF$ и $\angle GEF = \angle HAB + \angle AFE$. Слѣдовательно, $\angle GFB = 2 . \angle HAB + \angle AFE$. Уголъ же AFE равенъ углу EDF. Уголъ $EDF = \angle HAB + \angle CED$, но $\angle CED = \angle ECD = 2 . \angle HAB$. Поэтому $\angle EDF = 3 . \angle HAB$ и, слѣдовательно, $\angle GFB = 5 . \angle HAB$.

Общее замѣчаніе о дѣленіи угловъ на какое угодно число равныхъ частей.

При описаніи приборовъ для дѣленія угловъ на 3 и на 5 равныхъ частей, мы замѣтили, что приборъ для дѣленія угловъ на 3 равныя части состоялъ изъ двухъ основныхъ линеекъ и двухъ малыхъ, приборъ же для дѣленія угловъ на 5 равныхъ частей состоялъ изъ двухъ основныхъ линеекъ и четырехъ малыхъ. И вообще, *приборъ для дѣленія угловъ на $2n+1$ равныхъ частей долженъ состоять изъ двухъ основныхъ линеекъ и $2n$ малыхъ. Большія линейки должны быть соединены шарниромъ. Малыя линейки должны быть равны и попарно соединены шарнирами. Первая малая линейка должна быть прикрѣплена посредствомъ шарнира къ одной изъ большихъ линеекъ такъ, чтобы остающаяся часть большой линейки равнялась длинѣ малой*. Употребленіе этимъ прибора основано на слѣдующей общей теоремѣ, которая была нами доказана лишь для нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ. Если при углѣ BAC отложить $2n+1$ равныхъ прямыхъ: AA_1, A_1A_2, A_nA, A_3A_4, $A_4A_5, \ldots$, $A_{2n}A_{2n+1}$, то $\angle BAC = \frac{1}{2n+1} \angle A_{2n+1}A_{2n}C$. Какъ при этомъ откладываются $2n+1$ прямыхъ, показано на прилагаемомъ чертежѣ.

Доказательство. Предположимъ, что $\angle A_{2(n-1)+1}A_{2(n-1)}C = [2(n-1)+1] . \angle BAC$. Такъ какъ $\angle A_{2n+1}A_{2n}C = \angle BAC + \angle AA_{2n+1}A_{2n}$ и $AA_{2n+1}A_{2n} = \angle BA_{2(n-1)+1}A_{2n} = \angle BAC + \angle A_{2(n-1)+1}A_{2(n-1)}C$, то $\angle A_{2n+1}A_{2n}C = 2 . \angle BAC + \angle A_{2(n-1)+1}A_{2(n-1)}C$,



и, принимая во вниманіе сдѣланное предположеніе, найдемъ: $\angle A_{2n+1}A_{2n}C = 2 . \angle BAC + [2.(n-1)+1] . \angle BAC = (2n+1) . \angle BAC$.

Итакъ, если $\angle A_{2(n-1)+1}A_{2(n-1)}C = [2(n-1)+1] . \angle BAC$, то $\angle A_{2n+1}A_{2n}C = (2n+1) . \angle BAC$. Нами было уже доказано, что $\angle A_3A_2C = 3 . \angle BAC$ и что $\angle A_5A_4C = 5 . \angle BAC$. Слѣдовательно, теорема совершенно доказана.

Полезно замѣтить, что при пользованіи указаннымъ мною приборомъ сравнительно большіе углы удобнѣе дѣлить по частямъ.

Только что былъ указанъ общій способъ дѣленія угловъ на нечетное число равныхъ частей. Въ случаѣ четнаго числа равныхъ частей надо это число разложить на первоначальные множители, общій видъ этого числа будетъ тогда $2^n . m$, гдѣ m число нечетное. Значитъ, въ этомъ случаѣ придется сначала раздѣлить уголъ на 2^n равныхъ частей и потомъ каждую часть еще на нечетное число m равныхъ частей.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

О причинѣ явленія Вольта. Если какимъ-либо образомъ заставимъ газъ, отдѣляющій двѣ пластинки изъ различныхъ металловъ, проводить электричество, то пластинки пріобрѣтутъ нѣкоторую разность потенціаловъ аналогично тому, какъ это имѣетъ мѣсто на полюсахъ гальваническаго элемента. Чтобы достигнуть этой электропроводности прибѣгаютъ къ различнымъ средствамъ, вродѣ ультрафіолетовыхъ лучей, пламени, рентгеновскихъ лучей и т. п. Лучше всего въ этихъ случаяхъ дѣйствуютъ радіоактивныя тѣла, напр., ураній, радій, полоній и т. д.

Именно этимъ методомъ и пользуется A. Greinacher въ своей недавно опубликованной работѣ о причинѣ явленія Вольта (Annalen der Physik nº 4, 1905). Авторъ сперва изучаетъ соотношеніе между потенціаломъ заряда и электродвижущей силой. Оказывается, что съ возрастаеніемъ разстоянія между пластинками потенціалъ заряда сперва быстро возрастаетъ, а затѣмъ падаетъ: сначала быстро, а потомъ все медленнѣе и медленнѣе: максимумъ соотвѣтствуетъ разстоянію между пластинками величиною приблизительно въ 1,2 мм. Обстоятельства эти находятся, повидимому, въ связи съ соотношеніемъ, которое имѣетъ мѣсто между внутреннимъ сопротивленіемъ элемента и разстояніемъ пластинокъ.

Далѣе авторъ доказываетъ, что при наименьшемъ сопротивленіи элемента потенціалъ заряда весьма мало отличается отъ электродвижущей силы. Что касается причины появленія электродвижущей силы газоваго элемента, то, повидимому, газъ, сдѣлавшись проводникомъ, играетъ такую же роль какъ электролитъ въ гальваническихъ элементахъ. Легко окисляемые металлы, поглощая воду изъ окружающаго воздуха, покрываются тонкимъ слоемъ окисловъ: именно эта жидкая пленка, покрывающая металлическія пластинки, играетъ главную роль въ появленіи электродвижущей силы. Чтобы повѣрить эту гипотезу, авторъ пробовалъ мѣшать образованію упомянутой пленки: электродвижущая сила способныхъ къ окисленію металловъ почти совершенно исчезла. Однако, серебро и платина въ этомъ отношеніи не даютъ удовлетворительныхъ результатовъ, такъ какъ въ опытахъ надъ ними электродвижущая сила почти не уменьшалась; зато при нагрѣваніи убыль ея оказывается весьма интенсивной.

Rev. Gen.

РЕЦЕНЗІИ.

Н. С. Дрентельнъ. *Начальная физика.* 178+40 стр. Ц. 80 коп. Спб. 1905 г.

Книга написана съ любовью и съ тѣмъ знаніемъ дѣла, которое отличаетъ автора „Начальнаго учебника химіи“, вышедшаго лѣтъ 20 тому назадъ—учебника, могущаго и понынѣ служить образцомъ общедоступнаго изложенія научныхъ основъ химіи.

Ясный, точный языкъ, обиліе простыхъ, подчасъ оригинальныхъ опытовъ, отличающихся къ тому же простотою сборки и иллюстрируемыхъ прозрачными схемами — рисунками дѣлаютъ чтеніе книги весьма пріятнымъ.

„Начальная физика" назначена не для дѣтей, а для юношей или взрослыхъ, обладающихъ слабою подготовкой. Этимъ, вѣроятно, объясняется то, что авторъ широко пользуется гипотезами для „объясненія" фактовъ. Оставляя въ сторонѣ вопросъ о томъ, насколько вообще умѣстны гипотезы при изложеніи элементовъ экспериментальной дисциплины, необходимо все же признать нѣкоторыя удобства за такого рода изложеніемъ. Прежде всего потому, что читатели подобныхъ книгъ по большей части мыслятъ образами, и гипотеза даетъ имъ возможность охватить сразу кругъ явленій легче, чѣмъ это допускаетъ сдѣлать рядъ уравненій, зачастую даже непонятныхъ безъ достаточной математической подготовки. Но едва ли можно одобрить преобладаніе гипотезы надъ экспериментомъ. Такъ напр., въ § 213 мы находимъ объясненіе измѣненій аггрегатнаго состоянія тѣлъ въ духѣ механической теоріи; между тѣмъ фактическая сторона дѣла представлена слишкомъ блѣдно въ § 141. Мнѣніе, что „при очень низкихъ температурахъ мы имѣли бы, вѣроятно, только твердыя тѣла", не можетъ быть принято безъ дальнѣйшихъ оговорокъ. Говоря о низкихъ температурахъ, авторъ обѣщаетъ (§ 141) вернуться къ методу искусственнаго ихъ полученія, но обѣщанія не выполняетъ. А между тѣмъ для взрослаго читатели явленія охлажденія при испареніи и раствореніи представляютъ громадный интересъ какъ практическій, такъ и теоретическій, благо механическая гипотеза теплоты развита въ книгѣ достаточно подробно для того, чтобы и эти явленія могли себѣ найти изящное толкованіе.

Содержаніе § 76 можно бы использовать для вывода нижней границы температуръ, что дало бы возможность автору вести изложеніе § 213 еще красивѣе. Не настаивая, впрочемъ, на послѣднемъ, мы не понимаемъ небрежности, съ какой авторъ отнесся къ вопросу о теплоемкости, о которой лишь вскользь упоминаетъ въ *выноскѣ* къ § 145. Правда, онъ обѣщаетъ вернуться къ этому вопросу въ дальнѣйшнмъ изложеніи, но опять таки обѣщанія не сдерживаетъ, упустивъ такимъ образомъ (помимо важности въ другихъ отношеніяхъ) возможность развить поучительную параллель: температура—давленіе газа, количество теплоты—масса газа. О теплотѣ плавленія даже не упоминается. Зато въ §§ 212 – 213 находимъ даже изложеніе кинетической теоріи газовъ: бомбардировка газовыми частицами и проч. Въ этомъ слыслѣ мы и говорили о нѣкоторомъ несоотвѣтствіи между фактическимъ матеріаломъ и гипотезой (стр. 26, стр. 92, §§ 118, § 135, § 212, § 213 и проч.). Говоря о кипѣніи (§ 138), слѣдовало бы указать на роль растворенннаго въ жидкости воздуха и изъ явленія выдѣленія пузырей наружу заключить объ упругости паровъ кипящей жидкости. Лишь тогда понятно было бы измѣненіе температуры кипѣнія въ зависимости отъ измѣненія внѣшняго давленія (§ 138), тѣмъ болѣе, что измѣненіе упругости газа при измѣненіи температуры, хотя и вскользь, но разобрано въ § 76.

Конецъ § 54—слѣдовало бы формулировать, что давленіе жидкости на дно не зависитъ отъ формы сосуда—иначе голословенъ конецъ § 57. Параграфъ же 55 недостаточно оттѣняетъ суть дѣла: непослѣдовательно въ одномъ случаѣ „разжевывать" вещи, достаточно ясныя, въ другомъ возлагать большія надежды на способность къ дедукціи у новичковъ—читателей подобныхъ книжекъ. Въ этомъ же смыслѣ находимъ недостаточнымъ опредѣленіе равномѣрнаго движенія безъ дальнѣйшихъ поясненій: „если тѣло въ равные произвольно выбранные промежутки времени и проч." (§ 95). Не мѣшало бы рис. 47-й замѣнить рисункомъ, подобнымъ рис. 44-му, пояснить конецъ § 41-го рисункомъ, исправить опечатку § 87: ссылка на рис. 22-й; слѣдуетъ: рис. 21-й. Въ концѣ § 113 полезно бы вернуться къ заключительнымъ словамъ § 94-го и дать обычную формулировку: „если болѣе массивное тѣло и притягивается землею съ бо́льшею силой въ сравненіи съ тѣломъ, менѣе массивнымъ, то во столько же разъ оно представляетъ бо́льшее сопротивленіе: отсюда одинаковая скорость паденія для тѣлъ различныхъ массъ".

Вмѣсто термина „упругость" авторъ употребляетъ терминъ „давленіе газа". Это мѣстами придаетъ ясность изложенію, но все же слѣдовало бы указать на то, что эти термины—синонимы: терминъ „упругость" завоевалъ права гражданства въ тѣхъ книгахъ, съ которыми несомнѣнно прійдется имѣть дѣло читателю „Начальной физики". Связью между упругостью газа и давленіемъ, подъ которымъ онъ находится, можно было бы воспользоваться, какъ обычной иллюстраціей при изложеніи § 214 (законъ Ньютона).

Къ § 73. Если ужъ упоминать объ анероидѣ, то слѣдовало бы объяснить вкратцѣ принципъ его устройства и градуировки тѣмъ болѣе, что этимъ было бы выяснено устройство и манометра Бурдона.

Это боязнь лишняго слова, тѣмъ болѣе непонятная, что авторъ находитъ возможнымъ удѣлять стр. 168—169 свойству тѣлъ „сопротивляться" проникновенію другого тѣла въ пространство, занятое первымъ. Намъ кажется, что свойству непроницаемости не должно быть мѣста въ „начальномъ" курсѣ, разъ невозможно отмѣтить апріорный характеръ этого понятія.

Вышеуказанные недочеты отнюдь не умаляютъ крупныхъ достоинствъ разбираемой книги: мы смѣло рекомендуемъ „Начальную физику", какъ весьма полезное руководство для начинающихъ. Вотъ оглавленіе книги: „О твердыхъ, жидкихъ и газообразныхъ тѣлахъ. Явленія тяжести. Измѣненіе тѣлъ отъ нагрѣванія и охлажденія. Растворенie и химическія измѣненія". Издана книга тщательно.

И.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги: 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“ и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 653 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій:

$$\sqrt{xyz}\,(xy\sqrt{y}+yz\sqrt{z})=a,$$

$$\sqrt{xyz}\,(yz\sqrt{z}+zx\sqrt{x})=b,$$

$$\sqrt{xyz}\,(zx\sqrt{x}+xy\sqrt{y})=c.$$

П. Агрономовъ (Вологда).

№ 654 (4 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$y^2-yx-5x+2y+1=0.$$

И. Коровинъ (Екатеринбургъ).

№ 655 (4 сер.). Одному изъ моихъ сыновей сейчасъ 10 лѣтъ; я высчиталъ, что его возрастъ представляетъ сейчасъ и будетъ представлять впредь $\frac{1}{5}$ суммы лѣтъ всѣхъ моихъ сыновей, пока всѣ они живы. Сколько лѣтъ сейчасъ каждому изъ моихъ сыновей, если извѣстно, что старшему изъ нихъ 13 лѣтъ и что лѣта всѣхъ сыновей, кромѣ десятилѣтняго, будучи расположены по старшинству, представляютъ ариѳметическую прогрессію?

П. С. (Одесса).

№ 656 (4 сер.). Рѣшить неравенство

$$\frac{11-7x+11x^2-x^4}{x^2-7x+12}<1.$$

(Заимств.).

№ 657 (4 сер.). Доказать, что

$$A'B'.B'C'.A'C'=\frac{2r^2s}{R},$$

гдѣ A', B', C' суть точки касанія сторонъ треугольника ABC къ кругу, вписанному въ него, а r, R, s суть соотвѣтственно радіусъ круга вписаннаго, радіусъ круга описаннаго и площадь треугольника ABC.

(Заимств.).

№ 658 (4 сер.). Вѣсовой термометръ наполненъ ртутью при 0°. Его помѣщаютъ послѣдовательно въ двухъ средахъ, въ первой изъ которыхъ онъ теряетъ p, а во второй p' граммовъ ртути. Зная коэффиціентъ k видимаго расширенія ртути въ стеклѣ, изъ котораго приготовленъ вѣсовой термометръ, найти температуру второй среды.

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 545 (4 сер.). *Рѣшить систему уравненій*

$$y(y+x)^2-z(z+x)^2=a,$$
$$z(z+y)^2-x(x+y)^2=b,$$
$$x(x+z)^2+y(y+z)^2=c$$

Разсмотримъ отдѣльно случай, когда $a=b=c=0$. Сложивъ въ этомъ случаѣ данныя уравненія, раскрывъ въ лѣвой части скобки и сдѣлавъ приведеніе, имѣемъ:

$$xy^2-yx^2+yz^2-zy^2+zx^2-xz^2=0,$$

или

$$(x-y)(y-z)(z-x)=0,$$

откуда либо $x=y$, либо $y=z$, либо $z=x$. Пусть $x=y$ (1). Тогда первое изъ данныхъ уравненій, которое можно также представить въ видѣ $(y-z)(y^2+yz+z^2+2xy+2xz-x^2)=0$, обращается на основаніи равенства (1) въ $(x-z)(z^2+3xz+2x^2)=(x-z)(x+z)(2x+z)=0$, такъ что или $z=x$, или $z=-x$, или $z=-2x$. Итакъ, получаются такія системы рѣшеній: $y=x$, $z=x$; $y=x$, $z=-x$; $y=x$, $z=-2x$, гдѣ x—произвольное число. Полагая $y=z$ или $z=x$, находимъ еще шесть аналогичныхъ системъ рѣшеній. Пусть теперь одно изъ чиселъ a, b, c, напримѣръ c, не равно нулю. Помноживъ въ этомъ случаѣ данныя уравненія соотвѣтственно на x, y, z и затѣмъ сложивъ ихъ, получимъ:

$$ax+by+cz=0 \qquad (2).$$

Подобнымъ же образомъ, помноживъ данныя уравненія соотвѣтственно на $(y+z)^2$, $(z+x)^2$, $(x+y)^2$ и затѣмъ сложивъ ихъ, находимъ:

$$a(y+z)^2+b(z+x)^2+c(x+y)^2=0 \qquad ( ).$$

Опредѣливъ z изъ уравненія (2), имѣемъ:

$$z=-\frac{ax+by}{c} \qquad (4).$$

Подставивъ это значеніе z въ равенство (3), находимъ послѣ обычныхъ преобразованій:

$$[a^3+b(c-a)^2+c^3]x^2-2[a^2(c-b)+b^2(c-a)-c^3]xy+[a(c-b)^2+b^3+c^3]y^2=0 \qquad (5).$$

При $x=0$ данная система обращается въ $y^3-z^3=a$, $z^3=b$, $-y(y+z)^2=c$, откуда $z=\sqrt[3]{b}$, $y=\sqrt[3]{a+b}$, при условіи $-\sqrt[3]{a+b}\left(\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{b}\right)^2=c$ (6). Итакъ, если можно выбрать значенія радикаловъ $z=\sqrt[3]{b}$ и $y=\sqrt[3]{a+b}$, чтобы выполнялось условіе (6), то система допускаетъ рѣшеніе $x=0$, $y=\sqrt[3]{a+b}$, $z=\sqrt[3]{b}$. Будемъ теперь отыскивать тѣ рѣшенія, при которыхъ $x\neq 0$. Уравненіе (5) можно представить въ видѣ

$$[a(c-b)^2+b^3+c^3]\left(\frac{y}{x}\right)^2-2[a^2(c-b)+b^2(c-a)-c^3]\frac{y}{x}+[a^3+b(c-a)^2+c^3]=0,$$

откуда, если не всѣ коэффиціенты равенства (5) равны нулю, находимъ вообще два значенія для отношенія $\frac{y}{x}$. Называя одно изъ этихъ значеній через m, находимъ (см. (4)):

$$\frac{y}{x}=m,\quad \frac{z}{x}=-\frac{a+b\dfrac{y}{x}}{c}=-\frac{a+bm}{c},\ \text{откуда}$$

$$y=mx,\quad z=-\frac{(a+bm)x}{c}\qquad (7).$$

Подставивъ значенія y и z изъ равенствъ (7) въ третье изъ данныхъ уравненій, находимъ:

$$x^3.\left[\left(1-\frac{a+bm}{c}\right)^2-m\left(m-\frac{a+bm}{c}\right)^2\right]=c,$$

или

$$x^3[(c-a-bm)^2-m(mc-a-bm)^2]=c^3.\qquad (8)$$

Называя коэффиціентъ при x^3 въ лѣвой части равенства (8) черезъ p, получимъ (см. (8), (7))

$$x=\frac{c}{\sqrt[3]{p}},\quad y=\frac{mc}{\sqrt[3]{p}},\quad z=-\frac{(a+bm)}{\sqrt[3]{p}}.\qquad (9)$$

Если всѣ коэффиціенты уравненія (5) равны нулю, то это значитъ, что равенство (3) есть слѣдствіе равенства (2); въ этомъ случаѣ рѣшенія данной системы выражаются тоже формулами (9), но m въ нихъ произвольно. Если $a\neq 0$ или $b\neq 0$, система рѣшается и изслѣдуется способомъ, аналогичнымъ съ изложеннымъ для случая $c\neq 0$.

Г. Оганянцъ (Москва); *Н. С.* (Одесса).

№ 546 (4 сер.). *Доказать, что при всякомъ цѣломъ и положительномъ* n *число*

$$n^n-n^2+n-1$$

кратно числа $(n-1)^2$.

Полагая

$$n-1=m\qquad (1),$$

получимъ (см. (1)):

$$n^n-n^2+n-1=(1+m)^{1+m}-(1+m)^2+m=$$

$$=1+(1+m)m+\frac{(1+m).m}{2!}\cdot m^2+\frac{(1+m)m(m-1)}{3!}\cdot m^3+\ldots+m^{1+m}-$$

$$-1-2m-m^2+m=(1+m+m^2-1-2m-m^2+m)+$$

$$+m^2\left[\frac{(1+m)m}{2!}+\frac{(1+m)m(m-1)}{3!}m+\ldots+m^{m-1}\right]=$$

$$=m^2\left[\frac{(1+m)m}{2!}+\frac{(1+m)m(m-1)}{3!}m+\ldots+m^{m-1}\right]=$$

$$=(n-1)^2\left[\frac{n(n-1)}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(n-1)+\ldots+(n-1)^{n-2}\right].$$

Итакъ:

$$n^n-n^2+n-1=(n-1)^2\left[\frac{n(n-1)}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(n-1)+\ldots+(n-1)^{n-2}\right].\qquad (2)$$

Множитель, стоящій въ правой части равенства (2) внутри квадратныхъ скобокъ, есть число цѣлое при всякомъ цѣломъ значеніи n. Значитъ $n^n - n^2 + n - 1$ дѣлится на $(n-1)^2$.

Г. Оганянцъ (Москва); *Н. Готлибъ* (Юрьевъ); *М. Сейдель* (Ростовъ н/Д); *А. Брюхановъ* (Иркутскъ).

№ 549 (4 сер.). *Сплошной желѣзный конусъ плаваетъ въ ртути такъ, что вершина его находится внутри этой жидкости. Найти отношеніе высоты погруженной части конуса ко всей высотѣ конуса. Плотности желѣза и ртути равны соотвѣтственно* 7,8 и 13,6.

Пусть v—объемъ конуса, H—высота конуса, h—высота его погруженной части. Такъ какъ объемы подобныхъ конусовъ относятся, какъ кубы высотъ, то объемъ погруженной части равенъ $v \cdot \frac{h^3}{H^3} = v\left(\frac{h}{H}\right)^3$. Поэтому, согласно съ закономъ Архимеда

$$v\left(\frac{h}{H}\right)^3 \cdot 13{,}6 = v \,.\, 7{,}8$$

откуда

$$\frac{h}{H} = \sqrt[3]{\frac{7{,}8}{13{,}6}} = \sqrt[3]{\frac{39}{68}} = 0{,}827$$ (съ точностью до 0,0005 съ недостаткомъ).

Н. Оганянцъ (Москва). *В. Гейманъ* (Ѳеодосія); *С. Конюховъ* (Никитовка); *А. Варенцовъ* (Ростовъ н/Д).

№ 552 (4 сер.). *Построить трапецію по площади, діагоналямъ и боковой сторонѣ.*

Пусть $ABCD$—искомая трапеція, $AB = \alpha$ — данная боковая сторона, $AC = d$ и $BD = d'$—данныя діагонали трапеціи, q^2—данная площадь трапеціи. Черезъ точку B проведемъ прямую, параллельную AC, до встрѣчи съ прямой AD въ точкѣ E и опустимъ изъ точки D перпендикуляръ $DK = h$ на прямую BE. Площади треугольниковъ DCB и ABE равны, такъ какъ основанія ихъ CB и AE равны, какъ противоположныя стороны параллелограмма, а высоты ихъ, соотвѣтствующія этимъ основаніямъ, равны высотѣ трапеціи. Прибавивъ къ равнымъ площадямъ DCB и ABE по площади треугольника ABD, мы видимъ, что трапеція и треугольникъ DBE равновелики. Поэтому

$$q^2 = \frac{BE.DK}{2} = \frac{CA.DK}{2} = \frac{dh}{2}, \text{ откуда } h = \frac{2q^2}{d}, \text{ или } \frac{h}{q} = \frac{2q}{d}. \quad (1)$$

Отсюда вытекаетъ построеніе. Строимъ отрѣзокъ h, какъ четвертую пропорціональную къ q, $2q$, d (см. (1); отложимъ на произвольной прямой отрѣзокъ $BE = d$, проводимъ прямую L, параллельную BE и отстоящую отъ этой прямой на разстояніи h, и дѣлаемъ изъ точки B радіусомъ d' засѣчку D на прямой L и радіусомъ α, засѣчку A на прямой DE. Затѣмъ изъ точекъ B и A проводимъ прямыя, соотвѣтственно параллельныя AE и BE до встрѣчи въ точкѣ C. Трапеція $ABCD$ есть искомая.

С. Конюховъ (Никитовка).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 13-го Октября 1905 г.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66

Обложка
пщется

Обложка
ищется