Обложка
ищется

Обложка
пщется

XXXIV Сем.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
Элементарной Математики.

№ 397.

ВЕРТЯЩІЙСЯ ВОЛЧОКЪ.

Публичный докладъ, прочитанный въ засѣданіи „Британской Ассоціаціи" въ Лидсѣ.

Проф. Джона Перри.

*(Продолженіе *).*

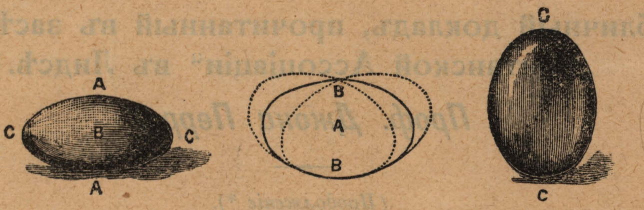
Вѣроятно, тотъ, кто интересуется работами Томсона, придетъ въ недоумѣніе, узнавши, что этотъ ученый со своимъ другомъ проводили каникулы на морскомъ берегу въ томъ, что заставляли вертѣться всевозможнаго рода круглые камни, которые они собирали на дюнахъ.

Теперь я покажу Вамъ удивительное явленіе, надъ которымъ въ это время ломалъ голову Томсонъ. Пусть этотъ эллипсоидъ (фиг. 33) представляетъ собою камень, отшлифованный водой. Онъ лежитъ на столѣ въ весьма устойчивомъ положеніи. Я привожу его въ быстрое вращательное движеніе. Вы видите, что въ теченіе одной или двухъ секундъ онъ обнаруживаетъ склонность вращаться вокругъ оси *AA*; но потомъ онъ начинаетъ

*) См. № 396 „Вѣстника".

сильно раскачиваться; когда эти качанія по истеченіи нѣкотораго времени прекращаются, какъ Вы видите, онъ начинаетъ спокойно вращаться вокругъ оси BB, принявшей теперь вертикальное положеніе; затѣмъ снова начинается рядъ быстро усиливающихся качаній; когда же они прекращаются, Вы замѣчаете, что эллипсоидъ окончательно приходитъ въ состояніе весьма устойчиваго вращенія, становясь вертикально на самую длинную изъ своихъ осей. Для всякаго, кто думаетъ, что это тѣло должно вращаться именно въ такомъ направленіи, въ какомъ я его завертѣлъ съ самаго начала, это явленіе покажется необыкновеннымъ. А между тѣмъ Вы легко убѣдитесь, что почти всякій закругленный камень, будучи приведенъ во вращеніе, выпрямляется такимъ образомъ вертикально вдоль самой длинной своей оси, если только вращеніе достаточно быстро; совершенно такимъ же образомъ и вертящійся волчокъ стремится какъ можно больше выпрямиться.

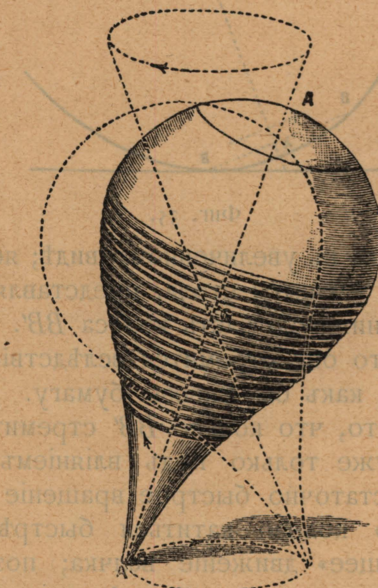
Я думаю, что найдется весьма немного математическихъ объясненій, которыхъ нельзя изложить совершенно обыкновеннымъ языкомъ и сдѣлать понятными людямъ, получившимъ обыкновенное общее образованіе. Въ большинствѣ слу-



Фиг. 33.

чаевъ объясненіе должно быть сначала найдено кѣмъ нибудь въ символической, алгебраической формѣ, а потомъ уже настаетъ время для обработки этого объясненія, для выраженія его языкомъ повседневной жизни. Въ этомъ и заключается основа новаго, такъ называемаго техническаго обученія, имѣющаго своей задачей возможно проще обучить рабочаго законамъ на которыхъ покоится его ремесло; съ этой цѣлью мы опираемся при нашихъ разъясненіяхъ на опыты, съ которыми данное лицо уже хорошо освоилось, не утруждая его четырехлѣтнимъ изученіемъ элементарныхъ предметовъ; послѣднее цѣлесообразно лишь по отношенію къ неопытнымъ дѣтямъ и къ юношамъ въ среднихъ школахъ и въ университетахъ.

На основаніи произведенныхъ нами опытовъ объясненіе выпрямленія волчка становится до смѣшного простымъ. Если Вы прочтете законъ № 2 нашей стѣнной таблицы и немного поразмыслите по этому поводу, то многіе изъ Васъ будутъ въ состояніи, не вдаваясь въ длинныя математическія соображенія, усмотрѣть простую причину этого явленія въ томъ, что Томсонъ говорилъ мнѣ 16 лѣтъ тому назадъ: „Если ускорить „предходящее“ движеніе, то тѣло приподнимается въ направленіи, противоположномъ дѣйствію силы тяжести“. Такъ какъ я не прикасаюсь къ волчку, а между тѣмъ это тѣло стремится приподняться, то мы постараемся найти, что ускоряетъ его „предходящее“ движеніе; поэтому мы, естественно, посмотримъ на тотъ путь, который описываетъ на столѣ нижнее остріе волчка, такъ какъ за исключеніемъ воздуха этотъ волчекъ не прикасается ни къ чему, кромѣ поверхности стола. Разсмотримъ же внимательно, какъ каждый изъ этихъ предметовъ совершаетъ „предходящее“ движеніе. Фиг. 34 указываетъ путь, по которому дви-



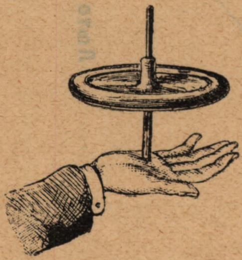
Фиг. 34.

жется „предходящимъ“ движеніемъ волчокъ. Если смотрѣть сверху, то волчокъ вращается въ направленіи часовой стрѣлки; мы знаемъ какъ на основаніи четвертаго правила стѣнной таблицы, такъ и просто на основаніи наблюденія, что «предходящее движеніе» онъ также совершаетъ въ направленіи часовой стрѣлки, т. е. что «предходящее» движеніе происходитъ такъ, какъ будто остріе волчка стремится прокатиться въ точкѣ B сквозь бумагу. Вѣдь Вы замѣчаете, что остріе описываетъ на столѣ кругообразный путь; точка G остается почти неподвижной, и ось AGA описываетъ приблизительно конусъ, вершина котораго находится въ G надъ столомъ. На фиг. 35 изображенъ нижній

Фиг. 35.

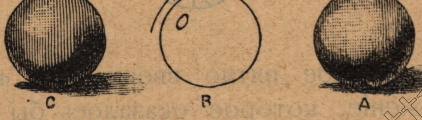
острый конецъ волчка въ увеличенномъ видѣ; ясно, что точка B, въ которой волчокъ касается стола, представляетъ, нѣкоторымъ образомъ, какъ бы нижнюю часть колеса BB'. А такъ какъ это колесо вращается, то оно стремится вслѣдствіе этого вращенія укатиться отъ насъ, какъ бы сквозь бумагу. Далѣе, обратите теперь вниманіе на то, что колесо BB' стремится катиться какъ бы сквозь бумагу уже только подъ вліяніемъ «предходящаго» движенія, и что достаточно быстрое вращеніе волчка вокругъ оси заставляетъ это колесо катиться быстрѣе, чѣмъ это допускаетъ «предходящее» движеніе волчка; поэтому «предходящее» движеніе волчка ускоряется, вслѣдствіе чего волчокъ приподнимается; пока вращеніе вокругъ оси достаточно быстро, оно все время ускоряетъ «предходящее» движеніе. Освѣжите свои воспоминанія о дняхъ Вашей юности, когда Вы запускали волчокъ на поверхности Вашей руки подобно тому, какъ я это дѣлаю сейчасъ съ моимъ волчкомъ (фиг. 36); когда вращеніе вокругъ оси становилось совсѣмъ медленнымъ, такъ что было невозможно удержать волчокъ въ вертикальномъ положеніи, Вы ловко помогали «предходящему» движенію волчка, сообщая своей рукѣ кругообразное движеніе; этимъ путемъ Вы повышали достоинство своего волчка, заставляя его кружиться нѣсколько дольше въ вертикальномъ положеніи.

Теперь я постараюсь Вамъ разъяснить, основываясь либо на наблюденіи, либо на только что изложенномъ законѣ ту борьбу, которую ведетъ круглый вращающійся на столѣ камень, чтобы стать вертикально вдоль самой своей длинной



Фиг. 36.

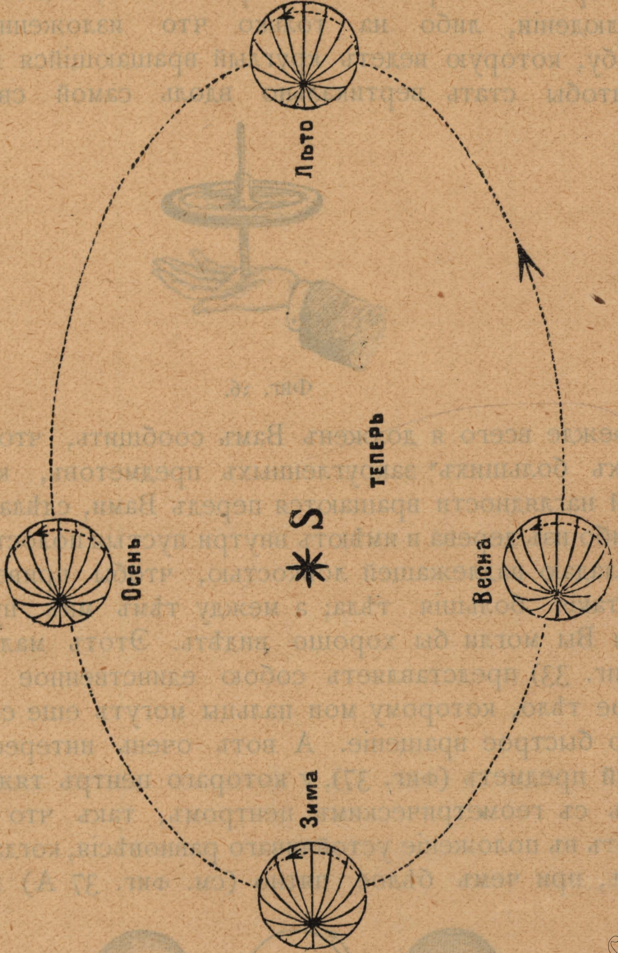
оси. Прежде всего я долженъ Вамъ сообщить, что нѣкоторые изъ этихъ большихъ закругленныхъ предметовъ, которые для большей наглядности вращаются передъ Вами, сдѣланы либо изъ цинка либо изъ дерева и имѣютъ внутри пустыя полости, такъ какъ я не обладаю надлежащей ловкостью, чтобы привести во вращеніе такія большія тѣла; а между тѣмъ мнѣ нужны тѣла, которыя Вы могли бы хорошо видѣть. Этотъ маленькій предметъ (фиг. 33) представляетъ собою единственное совершенно сплошное тѣло, которому мои пальцы могутъ еще сообщить достаточно быстрое вращеніе. А вотъ очень интересный шарообразный предметъ (фиг. 37), у котораго центръ тяжести не совпадаетъ съ геометрическимъ центромъ, такъ что онъ всегда приходитъ въ положеніе устойчиваго равновѣсія, когда я кладу его на столъ, при чемъ бѣлое пятно (см. фиг. 37 А) касается по-



Фиг. 37.

верхности стола. Нѣкоторые изъ Васъ навѣрное знаютъ, что этотъ шаръ двигается весьма своеобразно, если его подбросить въ воздухѣ; обыкновенно забываютъ, что простой путь, описываетъ только центръ тяжести тѣла, а въ данномъ случаѣ наружная поверхность расположена эксцентрично по отношенію къ центру тяжести. Точно такъ же покажется своеобразнымъ движеніе этого шара, если его покатить по туго натянутому платку.

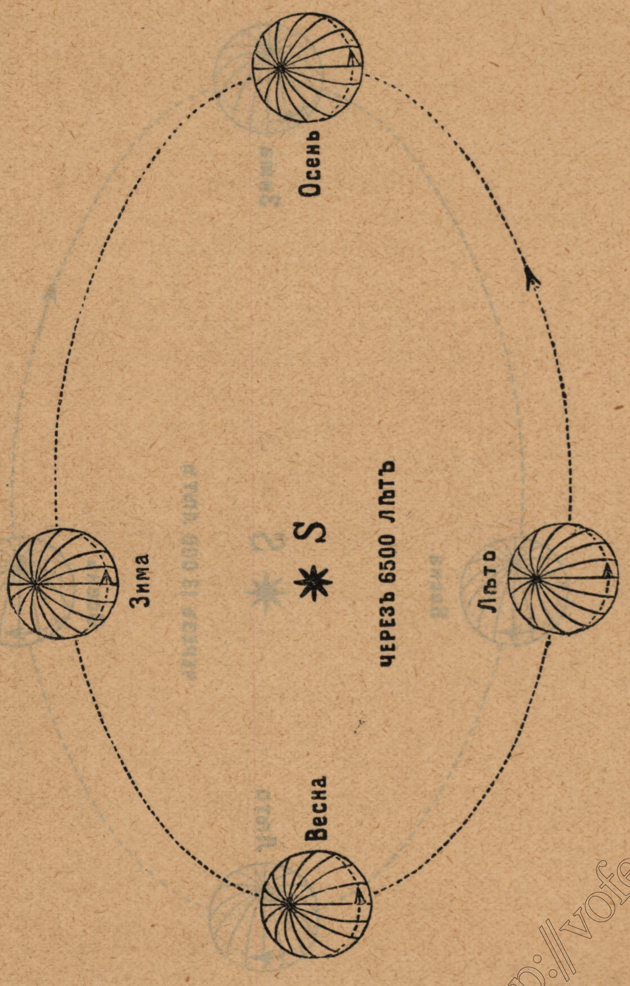
Если привести этотъ шаръ во вращеніе, то онъ все время



Фиг. 38.

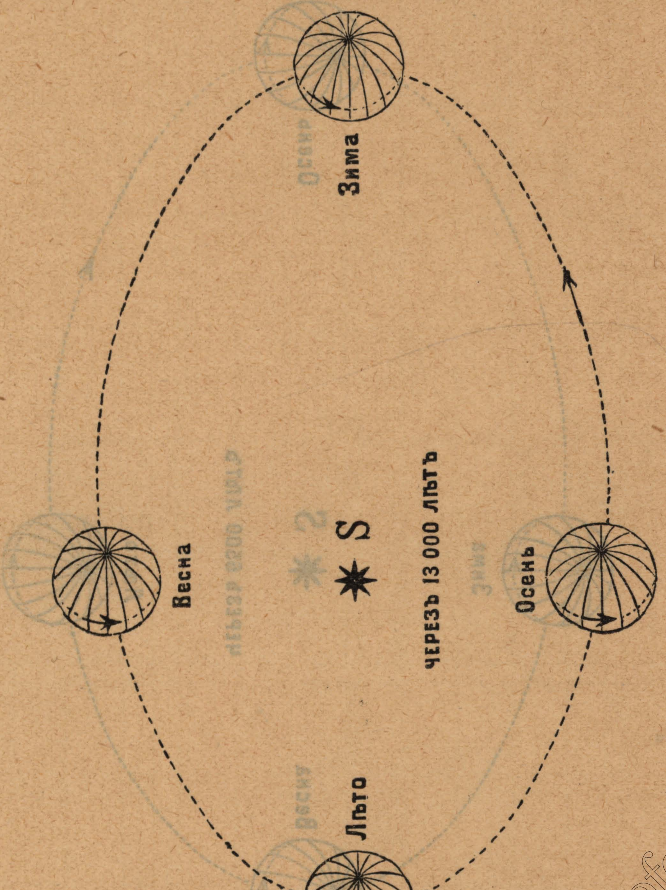
стремится обратить бѣлое пятно вверхъ (см. фиг. 35 С), т. е. занять такое положеніе, которое оказалось бы неустойчивымъ, если бы онъ не вращался; это происходитъ по той же причинѣ, которую я выше выяснилъ.

«Предходящее» движеніе волчка или гиростата направляетъ наши мысли сейчасъ же къ «предхожденію» (прецессіи) большого вращающагося тѣла, на которомъ мы живемъ. Вы знаете, что земля за промежутокъ времени, немногимъ большій 24 часовъ, оборачивается одинъ разъ вокругъ своей оси точно такъ же, какъ этотъ померанецъ, и что въ теченіе года она одинъ разъ обѣгаетъ вокругъ солнца точно такъ, какъ померанецъ на модели движется кругомъ воображаемаго солнца, или, какъ это показано на фиг. 38. Направленіе оси вращенія опредѣляется зна-



Фиг. 39.

чительно точно по такъ называемой полярной звѣздѣ, которая находится почти въ безконечномъ отдаленіи. На фигурѣ, какъ и на модели, я значительно преувеличилъ эксцентрицитетъ земного пути, какъ это обыкновенно дѣлается, хотя это можетъ нѣсколько ввести въ заблужденіе, такъ какъ земная орбита по своей формѣ гораздо больше приближается къ кругу, чѣмъ это обыкновенно себѣ представляютъ. При всемъ томъ несомнѣнно, что зимой солнце на 3 милліона миль ближе къ землѣ, чѣмъ лѣтомъ. Сначала это обстоятельство кажется парадоксальнымъ; но оно становится понятнымъ, если принять во вниманіе, что мы, въ сѣверномъ полушаріи, вслѣдствіе наклоненія земной оси къ эклиптикѣ, получаемъ зимой менѣе прямые лучи солнца и имѣемъ



Фиг. 40.

болѣе короткій день; такимъ образомъ на каждый квадратный футъ нашей части земной поверхности приходится въ теченіе дня гораздо меньше тепла; именно поэтому у насъ холоднѣе. Но черезъ 13000 лѣтъ земля, вслѣдствіе «предходящаго» движенія, повернется какъ разъ на полъ оборота (см. фиг. 40); тогда ось земли въ то время, когда она будетъ ближе всего къ солнцу, не будетъ уже отклонена отъ него, но будетъ къ нему обращена; поэтому у насъ будетъ тогда лѣтомъ гораздо теплѣе, а зимой гораздо холоднѣе, чѣмъ теперь. Навѣрное намъ будетъ тогда много хуже, чѣмъ теперь обитателямъ южнаго полушарія, такъ какъ ихъ окружаетъ въ изобиліи морская вода, которая смягчаетъ ихъ климатъ. Характеръ этой перемѣны легко разобрать на фиг. 38, 39 и 40 или же на модели, если я обведу померанецъ на его вязальной спицѣ, символически изображающей ось, вокругъ солнца. Вообразите себѣ наблюдателя, который находится надъ этой моделью, т. е. далеко надъ сѣвернымъ полюсомъ земли. Этотъ наблюдатель видитъ, что земля вращается въ направленіи, обратномъ часовой стрѣлки, и замѣчаетъ, что «предходящее» движеніе происходитъ по часовой стрѣлкѣ, такъ что вращеніе и «предхожденіе» (прецессія) имѣютъ противоположныя направленія. Отсюда и происходитъ слово «предхожденіе» («прецессія»), которое мы теперь примѣняемъ также къ движенію волчка, хотя «предходящее» движеніе волчка совершается въ томъ же направленіи, какъ и вращеніе.

(Продолженіе слѣдуетъ).

О разложеніи функцій въ непрерывныя дроби.

П. Свѣшникова.

*(Продолженіе *).*

12. Извѣстно, что если модуль $x < 1$, то

$$\operatorname{arctg} x = x\left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \frac{x^8}{9} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} + \dots\right)$$

Полагая, что $\operatorname{arctg} x = x : f(x)$, находимъ, что $f(x)$ есть частное отъ дѣленія 1 на

$$\varphi(x) = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \frac{x^8}{9} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} + \dots$$

$f(x) - 1$ есть частное отъ дѣленія

$$\psi(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{5} + \frac{x^6}{7} - \frac{x^8}{9} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n+1)} +$$

$$+ (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+3)} + \dots \text{ на } \varphi(x).$$

*) См. № 396 „Вѣстника“.

Полагая $f(x) = 1 + \dfrac{\frac{x^2}{1.3}}{f_1(x)}$, находимъ, что $f_1(x)$ есть частное отъ дѣленія $\varphi(x)$ на

$$\psi_1(x) = \frac{3}{3} - \frac{3x^2}{5} + \frac{3x^4}{7} - \frac{3x^6}{9} + \frac{3x^8}{11} - \dots + (-1)^n \frac{3x^{2n}}{2n+3} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{2n+5} + \dots$$

$f_1(x) - 1$ есть частное отъ дѣленія

$$\varphi_1(x) = \frac{4x^2}{3.5} - \frac{8x^4}{5.7} + \frac{12x^6}{7.9} - \frac{16x^8}{9.11} + \dots + (-1)^n \frac{4(n+1)x^{2n+2}}{(2n+3)(2n+5)} + \dots$$

на $\psi_1(x)$. Полагая $f(x) = 1 + \dfrac{\frac{4x^2}{3.5}}{f_2(x)}$, находимъ, что $f_2(x)$ есть частное отъ дѣленія $\dfrac{\psi_1(x)}{3}$ на

$$\psi_2(x) = \frac{1.5}{3.5} - \frac{2.5x^2}{5.7} + \frac{3.5x^4}{7.9} - \frac{4.5x^6}{9.11} + \dots + \frac{(-1)^n(n+1)5x^{2n}}{(2n+3)(2n+5)} + \dots$$

$f_2(x) - 1$ есть частное отъ дѣленія

$$\varphi_2(x) = \frac{1.3x^2}{5.7} - \frac{2.3x^4}{7.9} + \frac{3.3x^6}{9.11} - \frac{4.3x^8}{11.13} + \dots + \frac{(-1)^n(n+1)3x^{2n+2}}{(2n+5)(2n+7)} + \dots$$

на $\psi_2(x)$. Полагая $f_2(x) = 1 + \dfrac{\frac{9x^2}{5.7}}{f_3(x)}$, находимъ, что $f_3(x)$ есть частное отъ дѣленія $\dfrac{3}{5}\,\psi_2(x)$ на

$$\psi_3(x) = \frac{1.7}{5.7} - \frac{2.7x^2}{7.9} + \frac{3.7x^4}{9.11} - \frac{4.7x^6}{11.13} + \dots + \frac{(-1)^n.(n+1)7x^{2n}}{(2n+5)(2n+7)} + \dots$$

$f_3(x) - 1$ есть частное отъ дѣленія $\varphi_3(x) = \dfrac{16.1x^2}{5.7.9} - \dfrac{16.3x^4}{7.9.11} +$

$$+ \frac{16.6x^6}{9.11.13} - \frac{16.10x^8}{11.13.15} + \dots + \frac{(-1)^n 16(n+1)(n+2)x^{2n+2}}{2(2n+5)(2n+7)(2n+9)} +$$

на $\psi_3(x)$. Полагая $f_3(x) = 1 + \dfrac{\frac{16x^2}{7.9}}{f_4(x)}$, находимъ, что $f_4(x)$ есть частное отъ дѣленія $\dfrac{\psi_3(x)}{7}$ на $\psi_4(x) = \dfrac{9.1}{5.7.9} - \dfrac{9.3x^2}{7.9.11} + \dfrac{9.6x^4}{9.11.13} -$

$$- \frac{9.10x^6}{11.13.15} + \dots + \frac{(-1)^n.9(n+1)(n+2)x^{2n}}{2(2n+5)(2n+7)(2n+9)} + \dots$$

Замѣтивъ правило для составленія функцій $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$,

$f_3(x)$, $f_4(x)$, полагаемъ, что $f_{2k-1}(x)$ есть частное отъ дѣленія дѣлимаго $\frac{2k-1}{4k-3}\psi_{2k-2}'(x) = \frac{(2k-1).1}{(2k-1)(2k+1)\ldots(4k-3)} -$

$$-\frac{(2k-1)kx^2}{1(2k+1)(2k+3)\ldots(4k-1)} + \frac{(2k-1)k(k+1)x^4}{1.2.(2k+3)(2k+5)\ldots(4k+1)} - \ldots +$$

$$+\frac{(-1)^n(2k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)\ldots(n+k-1)x^{2n}}{1.2.3\ldots(n-1)n(2n+2k-1)(2n+2k+1)\ldots(2n+4k-3)} + \ldots$$

на дѣлителя $\psi_{2k-1}(x) =$

$$= \frac{(4k-1).1}{(2k+1)(2k+3)\ldots(4k-1)} - \frac{(4k-1)kx^2}{1.(2k+3)(2k+5)\ldots(4k+1)} +$$

$$+\frac{(4k-1)k(k+1)x^4}{1.2.(2k+5)(2k+7)\ldots(4k+3)} - \ldots +$$

$$+\frac{(-1)^n(4k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)\ldots(n+k-1)x^{2n}}{1.2.3\ldots(n-1)n(2n+2k+1)(2n+2k+3)\ldots(2n+4k-1)} + \ldots$$

Тогда $f_{2k-1}(x) - 1$ есть частное отъ дѣленія дѣлимаго

$$\varphi_{2k-1}(x) = \frac{4k^2x^2}{1.(2k+1)(2k+3)\ldots(4k+1)} - \frac{8k^2(k+1)x^4}{1.2(2k+3)(2k+5)\ldots(4k+3)} + \ldots +$$

$$+\frac{12k^2(k+1)(k+2)x^6}{1.2.3(2k+5)(2k+7)\ldots(4k+5)} - \ldots +$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}4k^2n(k+1)(k+2)\ldots(n+k-1)x^{2n}}{1.2.3\ldots(n-1)n(2n+2k-1)(2n+2k+1)\ldots(2n+4k-1)} + \ldots$$

на того же дѣлителя $\psi_{2k-1}(x)$. Можно положить $f_{2k-1}(x) = 1 +$

$+\dfrac{\frac{4k^2x^2}{(4k-1)(4k+1)}}{f_{2k}(x)}$. Тогда $f_k(x)$ будетъ частное отъ дѣленія дѣлимаго $\frac{\psi_{2k-1}(x)}{4k-1}$ на дѣлителя $\psi_{2k}(x) = \frac{(4k+1).1}{(2k+1)(2k+3)\ldots(4k+1)} -$

$$-\frac{(4k+1)(k+1)x^2}{1.(2k+3)(2k+5)\ldots(4k+3)} + \frac{(4k+1)(k+1)(k+2)x^4}{1.2.(2k+5)(2k+7)\ldots(4k+5)} - \ldots +$$

$$+\frac{(-1)^n(4k+1)(k+1)(k+2)(k+3)\ldots(k+n)x^{2n}}{1.2.3\ldots n(2k+2n+1)(2k+2n+3)\ldots(4k+2n+1)} + \ldots$$

Такимъ образомъ $f_{2k}(x) - 1$ есть частное отъ дѣленія

$$\varphi_{2k}(x) = \frac{(2k+1).1x^2}{(2k+3)(2k+5)\ldots(4k+3)} - \frac{(2k+1)(k+1)x^4}{1.(2k+5)(2k+7)\ldots(4k+5)} +$$

$$+\frac{(2k+1)(k+1)(k+2)x^6}{1.2(2k+7)(2k+9)\ldots(4k+7)} -$$

$$-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(2k+1)n(k+1)(k+2)(k+3)\ldots(k+n-1)x^{2n}}{1.2.3\ldots(n-1)n(2k+2n+1)(2k+2n+3)\ldots(4k+2n+1)}+\ldots$$

на того же дѣлителя $\psi_{2k}(x)$. Можно положить $f_{2k}(x)=1+$

$$+\frac{\frac{(2k+1)^2x^2}{(4k+1)(4k+3)}}{f_{2k+1}(x)}.$$ Тогда $f_{2k+1}(x)$ будетъ частнымъ отъ дѣленія

дѣлимаго $$\frac{(2k+1)\psi_{2k}(x)}{4k+1}=\frac{(2k+1).1}{(2k+1)(2k+3)\ldots(4k+1)}-$$

$$-\frac{(2k+1)(k+1)x^2}{1.(2k+3)(2k+5)\ldots(4k+3)}+\frac{(2k+1)(k+1)(k+2)x^4}{1.2.(2k+5)(2k+7)\ldots(4k+5)}-\ldots+$$

$$+\frac{(-1)^n(2k+1)(k+1)(k+2)(k+3)\ldots(k+n)x^{2n}}{1.2.3\ldots n(2k+2n+1)(2k+2n+3)\ldots(4k+2n+1)}+\ldots$$ на дѣли-

теля $$\psi_{2k+1}(x)=\frac{(4k+3).1}{(2k+3)(2k+5)\ldots(4k+3)}-$$

$$-\frac{(4k+3)(k+1)x^2}{1.(2k+5)(2k+7)\ldots(4k+5)}+\frac{(4k+3)(k+1)(k+2)x^4}{1.2.(2k+7)(2k+9)\ldots(4k+7)}-\ldots+$$

$$+\frac{(-1)^n(4k+3)(k+1)(k+2)(k+3)\ldots(k+n)x^{2n}}{1.2.3\ldots n(2k+2n+3)(2k+2n+5)\ldots(4k+2n+3)}+\ldots$$

Слѣдовательно, сдѣланныя предположенія относительно вида функцій $f_{2k-1}(x)$ и $f_{2k}(x)$ можно считать доказанными. А потому

$$\operatorname{arctg}x=\cfrac{x}{1+\cfrac{\frac{x^2}{1.3}}{1+\cfrac{\frac{4x^2}{3.5}}{1+\cfrac{\frac{9x^2}{5.7}}{1+\cfrac{\frac{16x^2}{7.9}}{1+\ldots}}}}}$$ или $$\operatorname{arctg}x=\cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{4x^2}{5+\cfrac{9x^2}{7+\ldots\cfrac{k^2x^2}{2k+1+\ldots}}}}}.$$

Въ послѣдней непрерывной дроби отношеніе $\frac{a_k a_{k+1}}{b_{k+1}}=$

$=\frac{(2k-1)(2k+1)}{k^2x^2}$ при неограниченномъ увеличеніи k стремится къ предѣлу $\frac{4}{x^2}\cdot$ Полагая $x=\frac{1}{y}$, получимъ:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{y}=\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{3y+\cfrac{4}{5y+\cfrac{9}{7y+\cfrac{16}{9y+\ldots}}}}}$$

$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ есть предѣлъ ряда подходящихъ дробей $\frac{1}{2}$, $\frac{6}{13}$,

$$\frac{6.10+1.4}{13.10+2.4}=\frac{64}{138},\quad \frac{64.14+6.9}{138.14+13.9}=\frac{950}{2049},\quad \frac{950.18+64.16}{2049.18+138.16}=\frac{18124}{39090}$$

$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=\frac{18124}{39090}$ до $\frac{4.9.16.25}{39090(39090.22+2049.25)}=\frac{800}{1978833525}$,

$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=0{,}4636479$ съ ошибкой менѣе $0{,}000001$;

$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$ есть предѣлъ ряда подходящихъ дробей $\frac{1}{3}$, $\frac{9}{28}$,

$$\frac{9.15+1.4}{28.15+3.4}=\frac{139}{432},\quad \frac{139.21+9.9}{432.21+28.9}=\frac{3000}{9324};$$

$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\frac{3000}{9324}$ до $\frac{4.9.16}{9324(9324.27+432.16)}=\frac{4}{16748235}$,

$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=0{,}3217503$ до $0{,}000001$; но $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=$

$=\operatorname{arctg}\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2.3}}=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$; значитъ $\frac{\pi}{4}=0{,}7853982$ до $0{,}000002$

$\pi=3{,}14159$ съ ошибкой менѣе $0{,}00001$.

(Продолженіе слѣдуетъ).

О нѣкоторыхъ свойствахъ логариѳмовъ.

Студ. Харьк. унив. И. Чернушенко.

Въ виду неудобства принятаго для обозначенія логариѳмированія знака, въ виду его несоотвѣтствія со знаками прочихъ дѣйствій, а также въ виду того, что логариѳмы по своимъ свойствамъ близко подходятъ къ дробямъ, я въ своей замѣткѣ замѣнилъ общепринятый знакъ log волнистой чертой $\sim$ и степень ставлю надъ чертой, а основаніе подъ чертой,—такъ что логариѳмъ числа a по основанію b я обозначаю $\underset{b}{\overset{a}{\sim}}$ вмѣсто прежняго обозначенія $\log_b a$. Переходя къ свойствамъ логариѳмовъ, долженъ замѣтить, что о свойствахъ, выражаемыхъ теоремами первой и третьей и слѣдствіями первымъ, вторымъ и третьимъ, мнѣ нигдѣ не встрѣчалось даже упоминанія, тѣмъ болѣе я не встрѣчалъ ихъ въ совмѣстномъ изложеніи.

Теорема 1. Величина логариѳма не измѣнится отъ возвышешенія обоихъ его членовъ въ одну и ту же степень.

Доказательство. Положимъ $\underset{b}{\overset{a}{\sim}} = x$, тогда получимъ $a = b^x$; возвышая обѣ части равенства въ m-ую степень, получимъ: $a^m = b^{mx}$; логариѳмируя теперь по b^m, получимъ $\underset{b^m}{\overset{a^m}{\sim}} = x = \underset{b}{\overset{a}{\sim}}$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Если въ данномъ логариѳмѣ степень и основаніе переставимъ одно на мѣсто другого, то новый логариѳмъ будетъ равенъ единицѣ, дѣленной на старый.

Доказательство. Полагая $\underset{b}{\overset{a}{\sim}} = x$, получимъ $a = b^x$; $a^{\frac{1}{x}} = b$;

$\underset{a}{\overset{b}{\sim}} = \underset{x}{\overset{1}{\sim}} = \dfrac{1}{\left(\underset{b}{\overset{a}{\sim}}\right)}$, что и т. д.

Теорема 3. Произведеніе двухъ логариѳмовъ не измѣнится отъ перестановки ихъ степеней или основаній.

Доказательство. Возьмемъ два логариѳма: $\underset{b}{\overset{a}{\sim}} = x$ и $\underset{d}{\overset{c}{\sim}} = y$; тогда получимъ $a = b^x$ и $c = d^y$; логариѳмируя первое равенство по d, а второе по b, получимъ $\underset{d}{\overset{a}{\sim}} = x \cdot \underset{d}{\overset{b}{\sim}}$ и $\underset{b}{\overset{c}{\sim}} = y \cdot \underset{b}{\overset{d}{\sim}}$; перемножая полученныя равенства почленно, имѣемъ $\underset{d}{\overset{a}{\sim}} \cdot \underset{b}{\overset{c}{\sim}} = xy \cdot \underset{d}{\overset{b}{\sim}} \cdot \underset{b}{\overset{d}{\sim}}$;

но по теоремѣ второй $\overset{b}{\underset{d}{\sim}}\cdot\overset{d}{\underset{b}{\sim}}=1$, слѣдовательно, $\overset{a}{\underset{d}{\sim}}\cdot\overset{c}{\underset{b}{\sim}}=\overset{a}{\underset{b}{\sim}}\cdot\overset{c}{\underset{d}{\sim}}$, что и доказываетъ теорему.

Слѣдствіе 1. Если степень одного логариѳма равна основанію другого, то произведеніе этихъ логариѳмовъ равно логариѳму со степенью второго и основаніемъ перваго логариѳма.

Доказательство. Возьмемъ произведеніе двухъ логариѳмовъ $\overset{a}{\underset{b}{\sim}}\cdot\overset{c}{\underset{a}{\sim}}$; по доказанному имѣемъ: $\overset{a}{\underset{b}{\sim}}\cdot\overset{c}{\underset{a}{\sim}}=\overset{c}{\underset{b}{\sim}}\cdot\overset{a}{\underset{a}{\sim}}=\overset{c}{\underset{b}{\sim}}$, что и т. д.

Слѣдствіе 2. Если показателемъ служитъ логариѳмъ, то основаніе степени и степень логариѳма можно переставить одно на мѣсто другого.

Доказательство. Возьмемъ логариѳмы $\overset{a}{\underset{c}{\sim}}$ и $\overset{b}{\underset{d}{\sim}}$; по теоремѣ 3, $\overset{a}{\underset{c}{\sim}}\cdot\overset{b}{\underset{d}{\sim}}=\overset{a}{\underset{d}{\sim}}\cdot\overset{b}{\underset{c}{\sim}}$; отсюда имѣемъ: $\overset{b^{\overset{a}{\underset{c}{\sim}}}}{\underset{d}{\sim}}=\overset{a^{\overset{b}{\underset{c}{\sim}}}}{\underset{d}{\sim}}$; возвышая d въ обѣ части послѣдняго равенства, получимъ $b^{\overset{a}{\underset{c}{\sim}}}=a^{\overset{b}{\underset{c}{\sim}}}$, что и доказываетъ наше слѣдствіе.

Слѣдствіе 3. На основаніи доказанныхъ теоремъ можно доказать справедливость слѣдующаго равенства:

$$a^{\sqrt[n]{\left(\overset{b}{\underset{a}{\sim}}\right)^{n-k}}}=b^{\sqrt[n]{\left(\overset{a}{\underset{b}{\sim}}\right)^{k}}}.$$

Доказательство. Логариѳмируя обѣ части по b, получимъ:

$\overset{a}{\underset{b}{\sim}}\cdot\sqrt[n]{\left(\overset{b}{\underset{a}{\sim}}\right)^{n-k}}=\sqrt[n]{\left(\overset{a}{\underset{b}{\sim}}\right)^{k}}$; дѣля на $\sqrt[n]{\left(\overset{b}{\underset{a}{\sim}}\right)^{n-k}}$, имѣемъ $\overset{a}{\underset{b}{\sim}}=\sqrt[n]{\left(\overset{a}{\underset{b}{\sim}}\right)^{k}:\left(\overset{b}{\underset{a}{\sim}}\right)^{n-k}}$, $\overset{a}{\underset{b}{\sim}}=\sqrt[n]{\left(\overset{a}{\underset{b}{\sim}}\right)^{n}}$; $\overset{a}{\underset{b}{\sim}}=\overset{a}{\underset{b}{\sim}}$; такъ какъ мы получили тождество, то предположенное равенство вѣрно.

Въ частномъ случаѣ, когда $n=2$; $k=1$, имѣемъ $a^{\sqrt{\overset{b}{\underset{a}{\sim}}}}=b^{\sqrt{\overset{a}{\underset{b}{\sim}}}}$.

О пропорціяхъ и прогрессіяхъ.

Въ математикѣ обыкновенно разсматриваются разностная и кратная пропорція и прогрессія, а между тѣмъ въ предѣлахъ первыхъ семи дѣйствій можно построить еще двѣ пропорціи и двѣ прогрессіи. Какъ построить эти новыя пропорціи и прогрессіи, я и намѣренъ показать въ настоящей замѣткѣ.

Радикальная пропорція.

Если мы назовемъ корень b-ой степени изъ a радикальнымъ отношеніемъ числа a къ числу b, то радикальную пропорцію можно будетъ опредѣлить слѣдующимъ образомъ.

Опредѣленіе. Радикальной пропорціей называется равенство двухъ радикальныхъ отношеній. Напримѣръ, $\sqrt[b]{a}=\sqrt[d]{c}$ есть радикальная пропорція.

Числа a, b, c, d мы назовемъ членами пропорціи и оставимъ за ними тѣ же названія, какія они имѣютъ, когда составляютъ разностную или кратную пропорцію.

Теорема 1. Въ радикальной пропорціи степень, основаніемъ которой служитъ первый крайній, а показателемъ второй, равна степени, основаніемъ которой служитъ второй средній, а показателемъ первый.

Доказательство. Возьмемъ пропорцію $\sqrt[b]{a}=\sqrt[d]{c}$; возвышая обѣ части равенства въ bd-ую степень, получимъ:

$$a^d=c^b, \text{ что и т. д.} \tag{1}$$

Если изъ обѣихъ частей (1) извлечемъ корень bd-ой степени, то снова придемъ къ данной пропорціи, что даетъ:

Обратная теорема. Если четыре величины удовлетворяютъ (1), то изъ нихъ можно составить радикальную пропорцію.

Изъ равенства (1) мы по тремъ извѣстнымъ можемъ опредѣлить четвертый неизвѣстный членъ:

$$a=\sqrt[d]{c^b},\ \ c=\sqrt[b]{a^d}, \tag{2}$$

$$b=\overset{a^d}{\underset{c}{\sim}},\ d=\overset{c^b}{\underset{a}{\sim}}. \tag{3}$$

Перестановка членовъ. Извѣстно, что разностная и кратная пропорціи допускаютъ перестановки членовъ и могутъ быть представлены каждая въ 8 фигурахъ. Радикальная пропорція, вслѣдствіе несимметричности степени относительно своихъ элементовъ, можетъ быть представлена только въ 6 фигурахъ:

$$1)\ \sqrt[b]{a}=\sqrt[d]{c}$$

$$2)\ \sqrt[d]{c}=\sqrt[b]{a}.$$

Изъ соотношенія (3) мы имѣемъ $b=d\cdot\overset{a}{\underset{c}{\sim}}$, а отсюда:

$$3)\ \frac{b}{d}=\overset{a}{\underset{c}{\sim}}$$

$$4)\ \overset{a}{\underset{c}{\sim}} = \frac{b}{d}$$

$$5)\ \frac{d}{b} = \overset{c}{\underset{a}{\sim}}$$

$$6)\ \overset{c}{\underset{a}{\sim}} = \frac{d}{b}.$$

Непрерывная пропорція. Если въ радикальной пропорціи два средніе или два крайніе члена равны, то пропорція называется непрерывной.

Для опредѣленія неизвѣстнаго члена непрерывной радикальной пропорціи $\sqrt[x]{a} = \sqrt[b]{x}$ мы можемъ воспользоваться равенствомъ (1); получимъ $a^b = x^x$; $x^{\overline{2}} = a^b$; $x = \sqrt[\overline{2}]{a^b}$. *) (4)

(Eisenstein разложилъ $\sqrt[\overline{2}]{y}$ въ рядъ $x = \sqrt[\overline{2}]{y} = 1 + \frac{\log y}{1!} - \frac{(\log y)^2}{2!} + 2^2\frac{(\log y)^3}{3!} - 3^3\frac{(\log y)^4}{4!} + 4^4\frac{(\log y)^5}{5!} - \ldots$ См. журналъ Крелля т. 28 стр. 49).

Подобно тому, какъ это дѣлается въ разностной и кратной пропорціяхъ, мы могли бы назвать средній членъ непрерывной радикальной пропорціи среднимъ радикальнымъ чиселъ a и b, но это неудобно въ виду того, что $a^b \neq b^a$. Тѣмъ болѣе трудно распространить понятіе о среднемъ радикальномъ на тотъ случай, когда мы имѣемъ n элементовъ.

Теорема 2. Если въ двухъ радикальныхъ пропорціяхъ предыдущіе логариѳмически пропорціональны, то послѣдующіе кратнопропорціональны, и наоборотъ.

Доказательство. Возьмемъ двѣ пропорціи $\sqrt[b]{a} = \sqrt[d]{c}$ и $\sqrt[b']{a^m} = \sqrt[d']{c^m}$, въ которыхъ предыдущіе логариѳмически пропорціональны $\left(\overset{a}{\underset{a^m}{\sim}} = \overset{c}{\underset{c^m}{\sim}}\right)$; по (1) имѣемъ $a^d = c^b$ и $a^{md'} = c^{mb'}$; изъ этихъ двухъ равенствъ легко получимъ: $\frac{d}{d'} = \frac{b}{b'}$, что и т. д.

Если, наоборотъ, дано, что въ пропорціяхъ послѣдующіе кратно пропорціональны, напримѣръ, даны пропорціи $\sqrt[b]{a} = \sqrt[d]{c}$, $\sqrt[mb]{a'} = \sqrt[md]{c'}$, то по (1) имѣемъ $a^d = c^b$ и $a'^{md} = c'^{mb}$; логариѳмируя

---

*) Подъ символомъ $x^{\overline{2}}$ въ нѣкоторыхъ сочиненіяхъ объ итераціи разумѣютъ x^x. Подъ символомъ $x = \sqrt[\overline{2}]{y}$ разумѣютъ функцію, удовлетворяющую уравненію $x^{\overline{2}} = y$. *Прим. Ред.*

первое равенство и принимая во вниманіе второе, получимъ:

$$\frac{d}{md} \cdot \frac{a}{a'} = \frac{b}{mb} \cdot \frac{c}{c'}, \text{ откуда } \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}, \text{ что и т. д.}$$

Производныя пропорціи. Чтобы получить производныя пропорціи для радикальной пропорціи $\sqrt[b]{a} = \sqrt[d]{c}$, напишемъ ее въ четвертой формѣ $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$; прибавимъ къ обѣимъ частямъ ± 1, $\frac{a}{c} \pm 1 = \frac{b}{d} \pm 1$; приводимъ единицу: $\frac{a}{c} \pm \frac{c}{c} = \frac{b}{d} \pm \frac{d}{d}$ или $\frac{a \cdot : c}{c} = \frac{b \pm d}{d}$, откуда:

$$\sqrt[b \pm d]{a \cdot : c} = \sqrt[b]{a} = \sqrt[d]{c}. \tag{5}$$

Равенство (5) представляетъ собою двѣ пропорціи:

$$\sqrt[b+d]{ac} = \sqrt[b]{a} \text{ и } \sqrt[b-d]{a:c} = \sqrt[b]{a},$$

откуда:

$$\sqrt[b+d]{ac} = \sqrt[b-d]{a:c}.$$

Теорема 3. Если мы имѣемъ рядъ равныхъ радикальныхъ отношеній, то произведеніе всѣхъ предыдущихъ такъ относится къ суммѣ всѣхъ послѣдующихъ, какъ каждый предыдущій къ своему послѣдующему.

Доказательство. Возьмемъ рядъ равныхъ радикальныхъ отношеній, каждое изъ которыхъ равно q: $\sqrt[b_1]{a_1} = \sqrt[b_2]{a_2} = \ldots = \sqrt[bn]{a_n} = q$; отсюда получаемъ: $a_1 = q^{b_1}$, $a_2 = q^{b_2}, \ldots a_n = q^{bn}$; перемножая эти равенства почленно, имѣемъ: $a_1 a_2 \ldots a_n = q^{b_1 + b_2 + \cdots + bn}$; наконецъ, извлекая корень $(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$-ой степени, получимъ:

$$\sqrt[b_1 + b_2 + \ldots + bn]{a_1 a_2 \ldots a_n} = q = \sqrt[bk]{a_k}. \tag{7}$$

Такъ какъ каждое отношеніе $\sqrt[bk]{a_k}$ мы можемъ замѣнить равнымъ ему отношеніемъ $\sqrt[bk\lambda k]{a_k^{\lambda k}}$, то равенство (7) замѣнится болѣе общимъ равенствомъ:

$$\sqrt[b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + \ldots + bn\lambda n]{a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda n}} = \sqrt[bk]{a_k}. \tag{8}$$

Заканчивая отдѣлъ радикальной пропорціи, найдемъ условія, при которыхъ мы, перемноживъ или раздѣливъ почленно предыдущіе и сложивъ или вычтя послѣдующіе члены двухъ радикальныхъ пропорцій, получимъ новую радикальную же пропорцію; иначе говоря, опредѣлимъ условія, при которыхъ изъ пропорцій $\sqrt[b]{a}=\sqrt[d]{c}$ и $\sqrt[b']{a'}=\sqrt[d']{c'}$ мы можемъ получить пропорцію

$$\sqrt[b\pm b']{a\,.\!:\,a'}=\sqrt[d\pm d']{c\,.\!:\,c'}.$$

Изъ этой послѣдней мы по (1) получаемъ:
$a^d.a^{\pm d'}\,.\!:\,a'^d\,.\!:\,a'^{\pm d'}=c^b.c^{\pm b'}\,.\!:\,c'^b\,.\!:\,c'^{\pm b'}$; но по условію $a^d=c^b$ и $a'^{d'}=c'^{b'}$, поэтому $a^{\pm d'}\,.\!:\,a'^d=c^{\pm b'}\,.\!:\,c'^b$; подставляемъ вмѣсто d и d' ихъ величины изъ данныхъ пропорцій: $a^{\pm b'\cdot\overset{c'}{\underset{a'}{\sim}}}\,.\!:\,a'^{b\cdot\overset{c}{\underset{a}{\sim}}}=$ $=c^{\pm b'}\,.\!:\,c'^b$; по слѣд. 2 теоремы 3 моей замѣтки: „О нѣкоторыхъ свойствахъ логариѳмовъ", будетъ: $c'^{\pm b'\cdot\overset{a}{\underset{a'}{\sim}}}\,.\!:\,c^{b\cdot\overset{a'}{\underset{a}{\sim}}}=c^{\pm b'}\,.\!:\,c'^{b}$; далѣе $c'^{\pm b'\cdot\overset{a}{\underset{a'}{\sim}}\mp b}=c^{\pm b'\mp b\cdot\overset{a'}{\underset{a}{\sim}}}$; извлекаемъ изъ обѣихъ частей корень $\pm b'$-ой степени: $c'^{\overset{a}{\underset{a'}{\sim}}-\frac{b}{b'}}=c^{1-\overset{a'}{\underset{a}{\sim}}\cdot\frac{b}{b'}}$; по свойству перестановки членовъ, получаемъ: $\overset{c'}{\underset{c}{\sim}}=\dfrac{1-\overset{a'}{\underset{a}{\sim}}\cdot\frac{b}{b'}}{\overset{a}{\underset{a'}{\sim}}-\frac{b}{b'}}$; уничтожаемъ знаменателя и переносимъ всѣ члены въ лѣвую часть: $\overset{c'}{\underset{c}{\sim}}\,\overset{a}{\underset{a'}{\sim}}-$ $-\overset{c'}{\underset{c}{\sim}}\cdot\frac{b}{b'}-1+\overset{a'}{\underset{a}{\sim}}\cdot\frac{b}{b'}=0$; вынося въ первыхъ двухъ членовъ множитель $\overset{c'}{\underset{c}{\sim}}$, а въ послѣднихъ $-\overset{a'}{\underset{a}{\sim}}$ получимъ: $\overset{c'}{\underset{c}{\sim}}\left(\overset{a}{\underset{a'}{\sim}}-\frac{b}{b'}\right)-$ $-\overset{a'}{\underset{a}{\sim}}\left(\overset{a}{\underset{a'}{\sim}}-\frac{b}{b'}\right)=0$, откуда: $\left(\overset{a}{\underset{a'}{\sim}}-\frac{b}{b'}\right)\left(\overset{c'}{\underset{c}{\sim}}-\overset{a'}{\underset{a}{\sim}}\right)=0$; но произведеніе можетъ равняться нулю, когда одинъ изъ множителей равенъ нулю; слѣдствіе 1) $\overset{c'}{\underset{c}{\sim}}=\overset{a'}{\underset{a}{\sim}}$ или 2) $\overset{a}{\underset{a'}{\sim}}=\frac{b}{b'}$, т. е. $\sqrt[b]{a}=\sqrt[b']{a'}$.

Если бы мы вмѣсто d и d' исключили c и c', то въ результатѣ получили бы: 1) $\frac{b}{b'}=\frac{d}{d'}$ или 2) $\sqrt[b]{a}=\sqrt[b']{a'}$.

Слѣдовательно, новую пропорцію мы можемъ получить, когда: 1) радикальныя отношенія въ обѣихъ пропорціяхъ равны, 2) предыдущіе логариѳмически пропорціональны (послѣдующіе кратно пропорціональны).

(*Продолженіе слѣдуетъ*).

РЕЦЕНЗІИ.

Очеркъ основныхъ законовъ установившагося и неустановившагося электрическаго тока и сопутствующихъ ему магнитныхъ возмущеній. Начала электромагнитной теоріи свѣта. (Введеніе въ теорію электрическихъ и магнитныхъ возмущеній). Составилъ проф. **Г. К. Мерчинъ.** Изданіе Института Инженеровъ Путей Сообщенія Императора Александра I. Спб. 1905.

Недавно вышла интересная книга, содержаніе которой указано въ ея длинномъ заглавіи. То, что въ ней излагается, составляетъ какъ разъ продолженіе того, на чемъ заканчиваются обыкновенно общіе курсы по электричеству. Изложеніе вообще ясное и послѣдовательное. Книга проф. Мерчина можетъ служить хорошимъ руководствомъ или пособіемъ при изученіи подробныхъ спеціальныхъ курсовъ и мемуаровъ по теоріи электричества: въ ней многое разъяснено изъ того, что въ другихъ сочиненіяхъ часто разсматривается только съ чисто формальной, математической стороны безъ указанія физическаго значенія формулъ и коэффиціентовъ въ нихъ. „Вездѣ, гдѣ это было возможно, общіе выводы иллюстрированы числовыми примѣрами, такъ какъ физикъ долженъ думать не только одними символами, но и конкретными величинами". Заканчиваетъ свое сочиненіе авторъ дополнительной главой „О нѣкоторыхъ основаніяхъ электронной теоріи электричества", которая въ послѣднее время стала играть очень видную роль въ наукѣ.

Н. Гезехусъ.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги: 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ" и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 647 (4 сер.) Рѣшить систему уравненій:

$$x(y-z)+y(y+z)=a,$$
$$y(z-x)+z(z+x)=b,$$
$$z(x-y)+x(x+y)=c.$$

Н. Агрономовъ (Вологда).

№ 648 (4 сер.). Построить трапецію по одному изъ основаній, по одной изъ непараллельныхъ сторонъ, по отрѣзку, отсѣкаемому непараллельными сторонами на прямой, проходящей параллельно основаніямъ черезъ точку пересѣченія діагоналей, и по прямой, соединяющей средины параллельныхъ сторонъ.

И. Коровинъ (Екатеринбургъ).

№ 649 (4 сер.). На сторонахъ $BC=a$, $AC=b$ и $AB=c$ треугольника ABC взяты соотвѣтственно точки M_a, M_b, M_c такъ, что

$$CM_a = ma, \quad AM_b = mb, \quad BM_c = mc,$$

гдѣ m — нѣкоторое положительное число. Доказать, что

$$4m(\mu_a^2+\mu_b^2+\mu_c^2)-2(\mu_a'^2+\mu_b'^2+\mu_c'^2)+(2-5m+2m^2)(a^2+b^2+c^2)=0,$$

гдѣ μ_a, μ_b, μ_c — длины медіанъ треугольника, а μ'_a, μ'_b, μ'_c суть соотвѣтственно длины отрѣзковъ AM_a, BM_b, CM_c.

В. Тюнинъ (Симскій заводъ).

№ 650 (4 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$2^{4x}+2^{y+1}\cdot 3^{2y+2}=17z.$$

Д. Колянковскій (с. Степановка);

№ 651 (4 сер.). Дано, что пять цѣлыхъ чиселъ a, b, α, β, m, n удовлетворяютъ равенству

$$a^2[1-2\alpha m+m^2(\alpha^2+\beta^2)]+b^2[1-2\beta n+n^2(\alpha^2+\beta^2)]-2ab[m\beta+n\alpha-mn(\alpha^2+\beta^2)]=0.$$

Вычислить числовую величину выраженія

$$m^2\alpha^2+2mn\alpha\beta+n^2\beta^2.$$

Н. С. (Одесса).

№ 652 (4 сер.). Черезъ блокъ проходитъ нить незначительной массы, на концахъ которой подвѣшены: 1) мѣдный цилиндръ плотности 8,8, длиною въ 20 сантиметровъ; 2) желѣзный цилиндръ плотности 7,8, длиною въ 15 сантиметровъ. Мѣдный цилиндръ совершенно погруженъ въ воду, а желѣзный цилиндръ совершенно погруженъ въ алкоголь, плотность котораго равна 0,8. При этихъ условіяхъ приборъ находится въ равновѣсіи. Пренебрегая массой нити и потерей вѣса тѣлъ въ воздухѣ, а также принимая плотность воды равной 1, найти, до какой высоты погрузится въ воду мѣдный цилиндръ, когда будетъ удаленъ сосудъ съ алкоголемъ и когда снова наступитъ равновѣсіе.

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 542 (4 сер.). *Доказать, что число*

$$a(a^2-1)(a^2-2)(a^2-4)$$

при a *цѣломъ кратно* 840. *При какихъ цѣлыхъ значеніяхъ* a *это число кратно* 1680;

Число

$$a(a^2-1)(a^2-4)=a(a-1)(a+1)(a-2)(a+2)=(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2),$$

какъ произведеніе пяти послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ, дѣлится на

..2.3.4.5=120, а потому и данное число $a(a^2-1)(a^2-2)(a^2-4)$, кратное числа $a(a^2-1)(a^2-4)$, дѣлится на 120. Раскрывая скобки, получимъ

$$a(a^2-1)(a^2-2)(a^2-4)=a(a^6-7a^4+14a^2-8)=a[a^6-1-7(a^4-2a^2+1)]. \quad (1)$$

Если a кратно 7, то и данное число кратно 7; если же a не кратно 7, то, по теоремѣ Fermat'a, a^6-1 кратно 7, а потому (см. (1)) и все разсматриваемое число кратно 7, такъ что данное число всегда кратно 7. Будучи кратно двухъ взаимно простыхъ чиселъ 7 и 120, данное число кратно ихъ произведенія 840. Если a четно, т. е. $a=2m$, гдѣ m—число цѣлое, то

$$a(a^2-1)(a^2-2)(a^2-4)=2m(4m^2-1)(4m^2-2)(4m^2-4)=$$

$$=16m(4m^2-1)(2m^2-1)(m^2-1),$$

откуда видно, что при a четномъ данное число кратно 16; но оно кратно также и 840, а потому оно кратно наименьшаго кратнаго чиселъ 840 и 16, т. е. числа 1680. Если же a нечетно, то его можно представить въ одномъ изъ четырехъ видовъ $8k\pm1$, $8k\pm3$, гдѣ k—число цѣлое.

Если $a=8k\pm1$, то

$$a^2-1=(8k\pm1)^2-1=64k^2\pm16k,$$

а потому a^2-1 кратно 16; слѣдовательно, и данное число кратно 16, а потому кратно и 1680. Если же $a=8k\pm3$, то

$$a(a^2-1)(a^2-2)(a^2-4)=a(a^2-2)(a^2-4)[(8k\pm3)^2-1]=$$

$$=8a(a^2-2)(a^2-4)(8k^2\pm6k+1). \quad (2)$$

Въ формулѣ (2) множители a, a^2-2, a^2-4 и $8k^2\pm6k+1$ нечетны, такъ что при $a=8k\pm3$ данное число (см. (2)) не кратно 16, а потому некратно и кратнаго 16 числа 1680.

Изъ всего сказаннаго видно, что число $a(a^2-1)(a^2-2)(a^2-4)$ дѣлится на 1680 только при a четномъ или при $a=8k\pm1$, гдѣ k—число цѣлое.

Н. Готлибъ (Юрьевъ); *В. Гейманъ* (Ѳеодосія); *Г. Оганянцъ* (Москва).

№ 543 (4 сер.). *Сосудъ наполненъ до высоты* h *сантиметровъ жидкостью плотности* D. *Съ какой наименьшей высоты надъ уровнемъ жидкости въ этомъ сосудѣ надо бросить въ нее (безъ начальной скорости) тѣло плотности* d, *меньшей* D, *для того, чтобы оно погрузилось до дна сосуда? Черезъ сколько времени тѣло, брошенное съ искомой высоты, всплываетъ на поверхность жидкости (явленіе удара о дно не принимается въ разсчетъ)?*

При рѣшеніи этой задачи мы условимся пренебрегать треніемъ тѣла о воздухъ и о жидкость, а также будемъ считать, принимая тѣло за матеріальную точку, что погруженіе въ жидкость происходитъ мгновенно. Пусть тѣло брошено въ жидкость съ нѣкоторой высоты x. Назовемъ ускореніе силы тяжести въ мѣстѣ опыта, объемъ тѣла, скорость тѣла въ моментъ погруженія при паденіи съ высоты x и время, за которое тѣло падаетъ съ этой высоты до поверхности жидкости, соотвѣтственно черезъ g, w, c, θ. Тогда

$$c=g\theta \quad (1), \qquad x=\frac{g\theta^2}{2}, \text{ откуда } c^2=2gx \qquad (2).$$

Погрузившись въ жидкость, тѣло находится подъ дѣйствіемъ силы wdg, дѣйствующей сверху внизъ, и силы wDg, дѣйствующей снизу вверхъ. Такъ какъ $D>d$ по условію, то окончательно на тѣло дѣйствуетъ внутри жидкости снизу вверхъ постоянная сила $wg(D-d)$, сообщающая тѣлу ускореніе a, которое легко найти по формулѣ

$$a=\frac{wg(D-d)}{wd}=\frac{g(D-d)}{d}. \qquad (3)$$

Называя черезъ s пространство, пройденное тѣломъ (до удара о дно если только онъ произойдетъ) внутри жидкости за время t, получимъ:

$$s = ct - \frac{at^2}{2} \quad (4), \text{ или } s = \frac{c^2}{2a} - \frac{a}{2}\left(t - \frac{c}{a}\right)^2 \quad (5).$$

Изъ равенства (5) видно, что наибольшее значенiе, достигаемое s $\left(\text{при } t - \frac{c}{a} = 0\right)$, равно $\frac{c^2}{2a}$. Слѣдовательно, для того, чтобы тѣло погрузилось до дна необходимо и достаточно соблюденiе условiя:

$$\frac{c^2}{2a} \geqslant h, \text{ или (см. (2)) } \frac{2gx}{2a} \geqslant h,$$

откуда, называя искомое наименьшее значенiе x, черезъ x', имѣемъ:

$$x' = \frac{ah}{g} \quad (6).$$

При паденiи съ высоты x', скорость тѣла c' въ моментъ погруженiя равна (см. (2), (6), (3)):

$$c' = \sqrt{2gx'} = \sqrt{2ah} = \sqrt{\frac{2g(D-d)h}{d}}, \quad (7)$$

а время θ', за которое тѣло падаетъ съ высоты x' до момента погруженiя въ жидкость, есть (см. (1))

$$\theta' = \frac{c'}{g}. \quad (8)$$

Упавъ въ жидкость съ высоты x', тѣло движется внутри жидкости согласно формулѣ (см. (4)) $s = c't - \frac{at^2}{2}$; желая узнать промежутокъ времени отъ момента погруженiя тѣла въ жидкость до момента вторичнаго появленiя на поверхности жидкости, положимъ $s=0$; тогда получимъ:

$$c't - \frac{at^2}{2} = 0, \quad \text{откуда } t' = \frac{2c'}{a} \quad (9),\ t'' = 0.$$

Первый корень t' даетъ искомый промежутокъ времени, такъ что все время T отъ начала паденiя до момента, когда тѣло всплываетъ на поверхность жидкости, равно (см. (8), (9), (3), (7))

$$T = \frac{c'}{g} + \frac{2c'}{a} = \left(\frac{1}{g} + \frac{2}{a}\right)c' = \left(\frac{1}{g} + \frac{2d}{g(D-d)}\right)c' =$$

$$= \frac{D+d}{g(D-d)}\sqrt{\frac{2g(D-d)h}{d}}.$$

А. Варенцовъ (Ростовъ н/Д).

№ 544 (4 сер.). *Въ окружности дана хорда* AB. *Провести хорду* CD, *встрѣчающую* AB *въ* E *такъ, чтобы уголъ* AEC *и отношенiе* AE:CD *имѣли данныя значенiя.*

Предположимъ, что задача рѣшена. Назовемъ данный уголъ черезъ α и данное отношенiе $AE:CD$ черезъ $m:n$ (гдѣ m и n, въ самомъ общемъ случаѣ, суть данные отрѣзки); пусть O центръ даннаго круга. Проведемъ діаметръ OK, перпендикулярный къ CD, и опустимъ перпендикуляры AF и AP соотвѣтственно на CD и OK. Тогда имѣемъ:

$$PM = AF = AE\sin\alpha \quad (1), \qquad CM = \frac{CD}{2} \quad (2), \qquad AE : CD = \frac{m}{n}. \quad (3)$$

Поэтому, называя уголъ PCM черезъ x, имѣемъ (см. (1), (2), (3)):

$$\operatorname{tg} x = \frac{PM}{CM} = \frac{2AE\sin\alpha}{CD} = \frac{2m\sin\alpha}{n}. \quad (4)$$

Отсюда вытекаетъ построеніе: проводимъ какую нибудь прямую, образующую съ AB уголъ α и строимъ діаметръ OK, перпендикулярный къ этой прямой; затѣмъ строимъ (см. (4)) отрѣзокъ $2m\sin\alpha$ и откладываемъ на OK прямую $PM'=2m\sin\alpha$ (въ ту или другую сторону отъ точки P) и, возставивъ изъ точки M' перпендикуляръ $M'C' = n$ къ PM'. Черезъ точку встрѣчи C полупрямой PC' съ окружностью проводимъ перпендикулярно къ OK хорду CD, которая и есть искомая.

А. Андрющенко (Н.-Новгородъ); *Н. С.* (Одесса).

№ 554 (4 сер.). *Доказать, что при всякомъ цѣломъ и положительномъ* n *число*

$$n^{n+2} + 4n^{n+1} + n^n - n^5 - 3n^2 - n - 1$$

дѣлится на число $(n-1)^4$.

Полагая $n=1+m$ (1), приводимъ данное выраженіе съ помощью формулы бинома къ виду

$$(1+m)^{m+3} + 4(1+m)^{m+2} + (1+m)^{1+m} - (1+m)^5 - 3(1+m)^2 - m - 2 =$$

$$= 1 + (m+3)m + \frac{(m+3)(m+2)}{2}\cdot m^2 + \frac{(m+3)(m+2)(m+1)}{6} m^3 + Am^4 + 4 + 4(m+2)m +$$

$$+ \frac{4(m+2)(m+1)}{2}\cdot m^2 + \frac{4(m+2)(m+1)m^2}{6}\cdot m^3 + Bm^4 + 1 + (m+1)m +$$

$$+ \frac{(m+1)m}{2}\cdot m^2 + \frac{(m+1)m(m+1)}{6}\cdot m^3 +$$

$$+ Cm^4 - 1 - 5m - 10m^2 - 10m^3 - Dm^4 - 3 - 6m - 3m^2 - m - 2, \quad (1)$$

гдѣ A, B, C, D суть нѣкоторые цѣлые относительно m съ цѣлыми коэффиціентами многочлены. Раскрывъ скобки въ правой части равенства (1) и сдѣлавъ приведеніе, получимъ:

$$n^{n+2} + 4n^{n+1} + n^n - n^5 - 3n^2 - n - 1 = m^6 + 3m^5 + 6m^4 + Am^4 + Bm^4 + Cm^4 - Dm^4 =$$

$$= m^4(m^2 + 3m + 6 + A + B + C - D) = (n-1)^4 . (m^2 + 3m + 6 + A + B + C - D). \quad (2)$$

Такъ какъ многочлены A, B, C, D при цѣлыхъ и положительныхъ значеніяхъ n имѣютъ цѣлыя численные значенія [при n цѣломъ (см. (1)) m тоже цѣлое], то (см. (2)) разсматриваемое число дѣлится на $(n-1)^4$.

Г. Оганянцъ (Москва).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 30-го Сентября 1905 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера. ул. Новосельскаго, д. № 66.

Обложка
ищется

Обложка
ищется