Обложка
ищется

Обложка
ищется

XXXIII Сем. № 7

Вѣстникъ Опытной Физики
и
Элементарной Математики.

15 Апрѣля. № 391. 1905 г.

ВЕРТЯЩІЙСЯ ВОЛЧОКЪ.

Публичный докладъ, прочитанный въ засѣданіи „Британской Ассоціаціи" въ Лидсѣ.

Проф. Джона Перри.

*(Продолженіе *).*

Какъ примѣръ, разсмотримъ вращающійся снарядъ, изображенный на фиг. 17. Онъ стремится удержать свою ось всегда въ одномъ и томъ же направленіи. Однако, здѣсь явленіе происходитъ въ нѣсколько измѣненномъ видѣ, какъ Вы это легко поймете. Вы видите, что въ точкѣ A воздухъ долженъ оказывать давленіе на нижнюю поверхность AA; это давленіе дѣйствуетъ такимъ образомъ, что снарядъ стремится обратить свою широкую сторону навстрѣчу потоку воздуха; это именно мнѣ и предстоитъ Вамъ выяснить. Если лодка на рѣкѣ не можетъ свободно двигаться, а именно привязана въ средней части и ничѣмъ больше въ своихъ движеніяхъ не стѣснена, то она стремится повернуться широкой стороной противъ теченія. Посмотрите на этотъ картонный кругъ, который я наклонно бросаю въ воздухъ;

*) См № 390 „Вѣстника"

Вы видите, что онъ сейчасъ же оборачивается широкой стороной и медленно падаетъ внизъ. Точно такъ же нѣкоторые изъ Васъ бросали въ Аденѣ мелкую серебряную монету въ воду ныряющимъ мальчикамъ; но Вы можете быть увѣрены, что если бы монета, приходя въ колебательное движенiе, не погружалась медленно въ воду своей широкой стороной, то навѣрно ни одному изъ ныряющихъ мальчиковъ не удалось бы овладѣть ею. Все это въ скобкахъ. Давленiе воздуха стремится повернуть снарядъ широкой стороной, но такъ какъ онъ вращается вокругъ своей продольной оси, то послѣдняя не принимаетъ вертикальнаго положенiя, такъ же, какъ мнѣ не повинуется гиростатъ, если я пытаюсь направить его ось вертикально; ось вращенiя снаряда выходитъ изъ плоскости чертежа, а именно изъ такъ называемой плоскости верченiя; только артилеристы точно знаютъ, что происходитъ въ этомъ случаѣ съ осью; это отклоненiе снаряда причиняетъ имъ много хлопотъ.

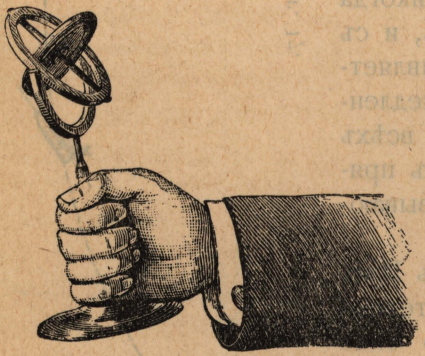
Вы можете замѣтить, что ребенокъ, наученный опытомъ, желая перемѣнить направленiе своего обруча, производитъ на него своею палкой давленiе, стремящееся его наклонить. Велосипедистъ мѣняетъ направленiе, наклоняясь такимъ образомъ, какъ будто онъ теряетъ равновѣсiе. Будетъ хорошо, если Вы при этомъ замѣтите, что движенiе велосипеда и велосипедиста не представляетъ собой вращенiя въ полномъ смыслѣ этого слова; оно не вполнѣ сходно поэтому съ движенiемъ волчка или гиростата. Объясненiе того обстоятельства, почему всадникъ отклоняется отъ прямого пути, если онъ наклоняетъ свое туловище, сводится въ концѣ концовъ къ тому же простому принципу, а именно ко второму закону Ньютона. По той же причинѣ, а именно, коротко говоря, вслѣдствiе дѣйствiя центростремительной силы, всадникъ можетъ, если только онъ не придаетъ значенiя своей фигурѣ во время ѣзды, значительно облегчить своей лошади крутой и быстрый поворотъ, наклоняя свое туловище въ сторону поворота; и чѣмъ больше лошадь задержитъ свой шагъ, тѣмъ большее дѣйствiе окажетъ такое наклоненiе всадника. Цирковые наѣздники, галопируя по кругу, много помогаютъ своимъ лошадямъ, придавая своему тѣлу надлежащее положенiе; и, вѣроятно, поэтому они при ѣздѣ принимаютъ такую посадку, которой не позволилъ бы подражать своимъ ученикамъ ни одинъ учитель верховой ѣзды; они дѣлаютъ это для того, чтобы предохранить себя отъ паденiя при помощи центробѣжной силы, и лучшiе наѣздники нашей страны охотно помогали бы такимъ образомъ своимъ лошадямъ при быстрыхъ поворотахъ, если бы имъ приходилось гоняться за пасущимся скотомъ, чтобы собрать его, какъ это приходится дѣлать американскимъ ковбоямъ.

Очень хорошiе примѣры измѣненiя, происходящаго въ направленiи катящагося тѣла, можно наблюдать при игрѣ въ кегли. Вы знаете, что шаръ, если бы внутри его не было небольшого груза, который стремится повернуть его ось вращенiя, катился бы по прямому направленiю по поверхности кегельнаго катка, и его скорость все время убывала бы, пока бы онъ наконецъ не остановился. Но Вамъ извѣстенъ вѣроятно, тотъ фактъ, что только вначалѣ, если шаръ движется быстро, путь его движенiя остается въ достаточной мѣрѣ прямымъ. Но такъ какъ шаръ имѣетъ внутри эксцентрично помѣщенный грузъ, то путь его никогда не бываетъ совершенно прямымъ, и съ уменьшенiемъ скорости онъ искривляется все больше и больше. Чѣмъ медленнѣе вращенiе, тѣмъ больше во всѣхъ нашихъ примѣрахъ отклоненiе отъ прямого пути вслѣдствiе силъ, вызывающихъ наклоненiе оси.

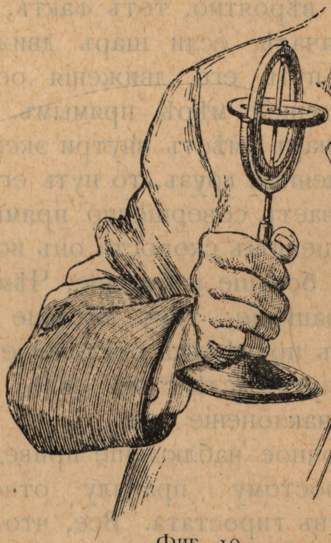
Фиг. 17.

Точное наблюденiе приведетъ Васъ къ простому правилу относительно свойствъ гиростата. Все, что до сихъ поръ казалось непонятнымъ или удивительнымъ, дѣляется сразу понятнымъ, если я стану нѣсколько иначе выражаться; именно, вмѣсто того, чтобы говорить, что гиростатъ движется вверхъ, внизъ, налѣво или направо, буду говорить о движенiи вокругъ различныхъ осей. Простому поступательному перемѣщенiю гиростатъ не оказываетъ никакого сопротивленiя. Если же я говорилъ о горизонтальномъ перемѣщенiи, то я долженъ былъ бы сказать, что гиростатъ поворачивается вокругъ вертикальной оси *AB* (фиг. 13). И то, что я обозначалъ, какъ движенiе вверхъ или внизъ, есть въ дѣйствительности лишь вращенiе въ вертикальной плоскости вокругъ горизонтальной оси *CD*. Если я впредь по-пытаюсь сообщить рамѣ F движенiе, то сообразите, вокругъ какой оси я стараюсь ее повернуть, и тогда Вы при помощи простыхъ соображенiй найдете причину упомянутыхъ выше явленiй.

Вотъ гиростатъ (фиг. 18), который тщательно подвѣшенъ на кольцахъ *) такимъ образомъ, что на него не могутъ дѣйствовать ни сила тяжести, ни силы тренiя на цапфахъ; и что бы я ни дѣлалъ съ этой рамой, которую держу въ рукѣ,—ничто не влiяетъ на направленiе оси. Вы видите, что я, какъ балетный танцоръ, поворачиваюсь на своихъ носкахъ, держа аппаратъ въ своей рукѣ. Я двигаю его всѣми возможными способами, но если онъ вначалѣ показывалъ на полярную звѣзду, то онъ всегда будетъ указывать на эту звѣзду; если же онъ вначалѣ показы-



Фиг. 18.



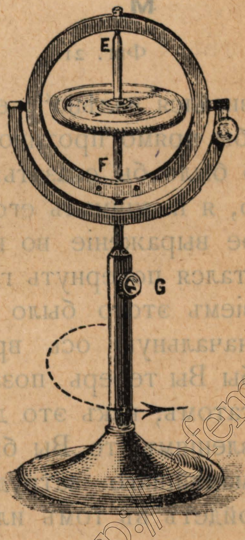
Фиг. 19.

валъ на луну, то онъ будетъ и дальше всегда показывать на луну. Отсюда надо заключить, что, за исключенiемъ тренiя на цапфахъ, нѣтъ почти никакихъ силъ, которыя стремятся повернуть ось гиростата, и потому я могу сообщать ей только поступательныя перемѣщенiя. Но теперь я зажму вертикальную ось винтомъ, и снова начну свой балетный танецъ. Теперь Вы замѣчаете, что мнѣ не нужно даже сдѣлать полнаго поворота — уже небольшой части полнаго оборота достаточна, чтобы подъ влiянiемъ его ось вращенiя гиростата (фиг. 19) установилась вертикально, т. е.

*) Здѣсь рѣчь идетъ о такъ называемомъ Кардановомъ или Боненбергерскомъ подвѣшиванiи, которое находитъ себѣ примѣненiе, главнымъ образомъ, въ пароходныхъ компасахъ.

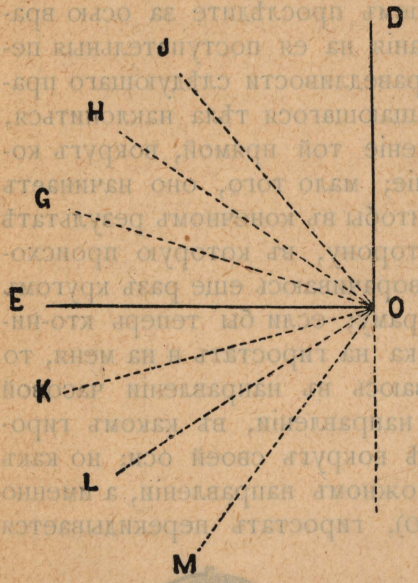
параллельно вертикальной оси, вокругъ которой я самъ вращаюсь. Теперь я поворачиваюсь въ противоположномъ направленіи, и вдругъ гиростатъ, сдѣлавъ салтомортале, совершенно переворачивается, и его ось вращенія опять становится вертикально; и если Вы съ большимъ стараніемъ прослѣдите за осью вращенія гиростата, не обращая вниманія на ея поступательныя перемѣщенія, то Вы убѣдитесь въ справедливости слѣдующаго правила: если мы заставляемъ ось вращающагося тѣла наклониться, то оно стремится принять направленіе той прямой, вокругъ которой происходитъ это наклоненіе; мало того, оно начинаетъ поворачиваться такимъ образомъ, чтобы въ конечномъ результатѣ вращеніе совершалось въ ту же сторону, въ которую происходитъ отклоняющее вращеніе. Я поворачиваюсь еще разъ кругомъ на носкахъ, держа въ рукахъ эту раму; если бы теперь кто-нибудь посмотрѣлъ внизъ съ потолка на гиростатъ и на меня, то онъ замѣтилъ бы, что я поворачиваюсь въ направленіи часовой стрѣлки, т. е. въ томъ же самомъ направленіи, въ какомъ гиростатъ вращается въ данномъ случаѣ вокругъ своей оси; но какъ только я повернусь въ противоположномъ направленіи, а именно противъ часовой стрѣлки (фиг. 20), гиростатъ перекидывается для того, чтобы опять имѣть возможность поворачиваться въ томъ же самомъ направленіи, въ которомъ я самъ поворачиваюсь.

Вотъ то простое правило, которое дастъ Вамъ возможность предсказать, какъ гиростатъ будетъ двигаться, если его стараются перемѣстить въ какое-нибудь особое положеніе. Вы должны лишь вспомнить, что если продолжать наши усилія достаточно долго, то ось вращенія тѣла установится параллельно новой оси вращенія, и направленіе первоначальнаго вращенія должно сдѣлаться такимъ же, какъ и направленіе новаго отклоняющаго вращенія.



Фиг. 20.

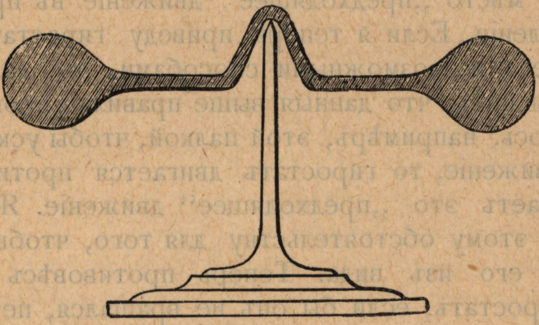
Примѣнимъ теперь это правило къ уравновѣшенному гиростату. Я его толкаю или сообщаю ему импульсъ по направленію внизъ; но хорошенько замѣтьте, что это собственно обозначаетъ вращеніе вокругъ горизонтальной оси *CD* (фиг. 13), и гиростатъ поворачиваетъ теперь свою ось такъ, какъ если бы она старалась направиться параллельно оси CD. Если смотрѣть сверху внизъ (какъ показываетъ фиг. 21), то OE было направленіе оси вращенія, OD была ось, вокругъ которой я старался повернуть гиростатъ, и мгновенное дѣйствіе этого поворота выразилось въ томъ, что OE перешло въ положеніе OG. Болѣе сильный импульсъ того же рода подѣйствовалъ бы такъ, что ось вращенія сейчасъ же перешла бы въ OH или въ OJ, между тѣмъ какъ прямо противоположный импульсъ, направленный вверхъ, заставилъ бы ось вращенія принять направленіе OK, OL или OM, смотря по величинѣ импульса и по скорости вращенія. Подмѣтивъ это явленіе въ первый разъ, можно было бы сказать: „я толкалъ гиростатъ внизъ, и онъ двигался направо, я толкалъ его вверхъ, и онъ двигался налѣво"; если же направленіе вращенія гиростата было бы прямо противоположно его теперешнему вращенію, то можно было бы сказать: „я толкалъ его внизъ, и онъ двигался налѣво, я поднималъ его вверхъ, и онъ двигался направо". Правильное выраженіе во всѣхъ этихъ случаяхъ должно гласить: „я пытался повернуть гиростатъ вокругъ новой оси вращенія, и сѣдствіемъ этого было то, что онъ старался повернуть свою первоначальную ось вращенія въ направленіи новой оси". И если бы Вы теперь позабавились съ этимъ уравновѣшеннымъ гиростатомъ, какъ это дѣлаю я, толкая его по всевозможнымъ направленіямъ, то Вы бы нашли, что это правило вѣрно и что безъ малѣйшаго затрудненія можно заранѣе предсказать, что произойдетъ въ томъ или иномъ случаѣ. А разъ это правило вѣрно, то и возникновеніе „предходящаго" движенія будетъ для насъ сейчасъ же ясно. Я вывожу этотъ гиростатъ (фиг. 13) изъ равновѣсія, и если бы онъ не находился въ состояніи быстраго вращенія, то перевернулся бы внизъ; но сила, дѣйствующая внизъ, на самомъ дѣлѣ производитъ иной эффектъ: гиростатъ двигается направо, и Вы видите такимъ образомъ, что



Фиг. 21.

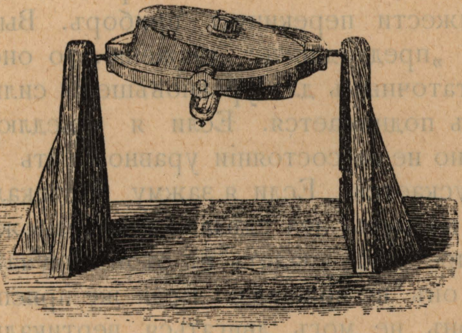
онъ постоянно подвигается въ этомъ направленіи, такъ какъ сила постоянно дѣйствуетъ внизъ, и ось вращенія постоянно приближается къ новой оси, именно къ той, вокругъ которой сила тяжести стремится его повернуть. Вы видите также, что если бы равновѣсіе было нарушено противоположнымъ образомъ, т. е. если бы сила тяжести стремилась поднять гиростатъ, то имѣло бы мѣсто „предходящее" движеніе въ противоположномъ направленіи. Если я теперь приведу гиростатъ въ движеніе, толкая его всевозможными способами, то дальнѣйшее наблюденіе выяснитъ, что данныя выше правила упрощаются. Если я воспользуюсь, напримѣръ, этой палкой, чтобы ускорить „предходящее" движеніе, то гиростатъ двигается противъ силы, которая вызываетъ это „предходящее" движеніе. Я придаю особое значеніе этому обстоятельству для того, чтобы Вы и послѣ не упускали его изъ вида. Теперь противовѣсъ установленъ такъ, что гиростатъ, если бы онъ не вращался, перекинулся бы и упалъ. Но такъ какъ онъ вращается, то онъ приходитъ въ „предходящее" движеніе. Если бы сила тяжести была больше, то „предходящее" движеніе гиростатата было бы быстрѣе, и становится яснымъ, что именно это „предходящее" движеніе мѣшаетъ силѣ тяжести перекинуть приборъ. Вы замѣчаете, что если ускорить „предходящее" движеніе, то оно становится болѣе, чѣмъ достаточнымъ для уравновѣшенія силы тяжести, а потому гиростатъ поднимается. Если я замедлю „предходящее" движеніе, то оно не въ состояніи уравновѣсить силу тяжести, и гиростатъ опускается. Если я зажму вертикальную ось, такъ что движеніе вокругъ нея сдѣлается невозможнымъ, то Вы замѣтите, что гиростатъ упадетъ въ этомъ случаѣ точно такъ же, какъ если бы онъ не вращался. Если же приспособлю приборъ такъ, чтобы онъ не могъ двигаться вертикально, то, наоборотъ, Вы видите, какъ легко я могу сдѣлать его подвижнымъ въ горизонтальномъ направленіи, и я могу ему сообщить горизонтальное вращеніе, какъ обыкновенному твердому тѣлу.

При примѣненіи нашего правила къ этому волчку, замѣтьте, что EF есть ось вращенія волчка (фиг. 12). Какъ это видно изъ чертежа, сила тяжести стремится повернуть волчокъ вокругъ оси FD, и его собственная ось вращенія описываетъ при „предходящемъ" движеніи конусъ, стремясь къ совпаденію съ осью FD. Этотъ гиростатъ, имѣющій приблизительно такой же вѣсъ, какъ и волчокъ, вращается и приходитъ въ „предходящее" движеніе такъ же, какъ и волчокъ, а именно: если Вы примѣните наше правило или же воспользуетесь Вашими собственными наблюденіями, то Вы найдете, что для наблюдателя, находящагося надъ поверхностью стола, какъ вращеніе, такъ и „предходящее“ движеніе происходятъ въ одномъ и томъ же направленіи, т. е. либо оба эти движенія происходятъ въ направленіи часовой стрѣлки, либо оба въ противоположномъ направленіи. Наоборотъ, у такого волчка, какъ вотъ этотъ рисунокъ (фиг. 22), подпертый въ



Фиг. 22.

центрѣ тяжести, или у такого, какъ изображенный на рисункѣ 23, который подобнымъ же образомъ подвѣшенъ въ центрѣ тяжести,



Фиг. 23.

или у всякаго другого гиростата, который подпертъ такимъ образомъ, что онъ, не вращаясь, находится въ устойчивомъ равновѣсіи,—во всѣхъ этихъ случаяхъ для наблюдателя, смотрящаго на столъ сверху внизъ, „предхожденіе“ происходитъ въ направленіи, противоположномъ вращенію.

Если волчку или гиростату дать толчокъ въ направленіи „предходящаго“ движенія, то онъ поднимается въ направленіи, противоположномъ дѣйствію силы тяжести, и вообще, если въ нѣкоторый моментъ скорость „предходящаго“ движенія сдѣлалась бы больше той, какою она должна быть, чтобы уравновѣсить противодѣйствіе силы тяжести, то волчокъ, или гиростатъ поднимется, а скорость „предходящаго движенія уменьшится. Если же скорость „предходящаго“ движенія слишкомъ мала, то волчокъ наклонится внизъ и во время этого наклоненія скорость „предходящаго“ движенія будетъ увеличиваться.

Я утверждаю, что всѣ эти явленія, которыя обнаружены исключительно путемъ наблюденій, согласуются съ моими правилами.

(Продолженіе слѣдуетъ).

ИСТОРИЧЕСКІЙ ОЧЕРКЪ
развитія ученія объ основаніяхъ геометріи.

Привать-доцента В. Кагана.

*(Продолженіе *).*

Въ исторіи науки извѣстно много случаевъ, когда работы, опубликованныя учеными, не пользовавшимися достаточной извѣстностью, оставались совершенно незамѣченными, а ихъ заслуги приписывались изслѣдователямъ, сдѣлавшимъ иногда меньше своихъ предшественниковъ, но пользовавшимся громкимъ именемъ. Такъ было и съ тѣми идеями, которыя играютъ роль переходной ступени отъ евклидовой къ неевклидовой геометріи. Идеи Валлиса, Саккери и Ламберта, замѣчательныя работы Тауринуса, Больэ и Лобачевскаго остались совершенно незамѣченными, тогда какъ работы Лежандра, представляющія собой лишь первые шаги въ этой области идей, получили широкое распространеніе.

Лежандръ, какъ и Гауссъ, всю жизнь интересовался основаніями геометріи и, въ частности, всю жизнь размышлялъ надъ теоріей параллельныхъ линій; но онъ далеко не обнаружилъ той глубины, которую проявилъ въ этомъ тонкомъ вопросѣ Гауссъ.

Въ 1794 году Лежандръ выпустилъ сочиненіе подъ заглавіемъ „Начала геометріи“ [1]). „Начала“ Лежандра представляютъ собой первое сочиненіе, въ которомъ основы геометріи изложены по плану, совершенно отличному отъ „Началъ“ Евклида,—по крайней мѣрѣ, первое сочиненіе такого рода, которое дѣйствительно имѣло успѣхъ и получило широкое распространеніе. Въ чемъ заключается система Лежандра,—на этомъ вопросѣ мы останавливаться не будемъ. Можно сказать, что всѣ мы знаемъ ее, всѣ мы учились по Лежандру, ибо всѣ послѣдующіе учебники элементарной геометріи воспроизводятъ систему Лежандра съ несущественными измѣненіями.

Въ смыслѣ обоснованія геометрической системы, Лежандръ рѣшительно ничего не прибавилъ къ „Началамъ“ Евклида, а въ

[1]) *A. M. Legendre.* „Elements de géometrie“. Paris, 1794.

*) См. № 387 „Вѣстника“.

нѣкоторыхъ отношеніяхъ сдѣлалъ даже шагъ назадъ. Такъ, у Лежандра мы находимъ тѣ же безсодержательныя опредѣленія, какъ, напр., „линія есть длина безъ ширины", „поверхность есть то, что имѣетъ длину и ширину, но не имѣетъ высоты или глубины и т. п." За опредѣленіями идутъ слѣдующія пять аксіомъ:

I. Двѣ величины, равныя порознь третьей, равны между собой.

II. Цѣлое больше своей части.

III. Цѣлое равно суммѣ своихъ частей.

IV. Черезъ двѣ точки можно провести только одну прямую.

V. Двѣ величины—линіи, поверхности или тѣла—равны, если онѣ при наложеніи совмѣщаются на всемъ протяженіи.

Врядъ ли послѣ того, что было изложено выше, нужно говорить о томъ, что этими пятью аксіомами, изъ которыхъ при томъ только двѣ носятъ геометрическій характеръ, система геометріи обоснована быть не можетъ. Прямая линія опредѣлена, какъ „кратчайшее разстояніе между двумя точками"; это, быть можетъ, самое неудачное изъ всѣхъ существующихъ опредѣленій прямой. Всѣ трудности въ теоріи отношеній Лежандръ обходитъ неявнымъ допущеніемъ, что каждымъ двумъ отрѣзкамъ, угламъ и т. п. отвѣчаетъ ариѳметическое число—ихъ отношеніе, обладающее всѣми свойствами частнаго отъ ариѳметическаго дѣленія. Между тѣмъ, обоснованіе этого утвержденія требуетъ продолжительныхъ разсужденій какъ ариѳметическаго, такъ и геометрическаго характера, и не можетъ быть выполнено безъ V постулата Архимеда, который Лежандръ совершенно игнорируетъ.

Но если книга Лежандра не внесла ничего новаго въ дѣло общаго обоснованія геометріи, то, съ точки зрѣнія дидактической, она сыграла очень важную роль. Геометрія Лежандра гораздо проще и доступнѣе, чѣмъ „Начала" Евклида, самая система менѣе искусственна, — и потому Лежандръ мало-по-малу вытѣснилъ Евклида изъ школы.

Теорія параллельныхъ линій особенно занимала Лежандра. Въ первомъ же изданіи своихъ „Началъ" онъ приводитъ теорію параллельныхъ линій въ связь съ вопросомъ о суммѣ угловъ треугольника. Разсужденія Лежандра сводятся къ слѣдующему. Треугольникъ вполнѣ опредѣляется стороной b и двумя прилежащими къ ней углами A и C. Поэтому третій уголъ C представляетъ собой функцію отъ A, C и b; $B=\varphi(A, C, b)$. Если бы функція φ зависѣла отъ b, то отсюда можно было бы получить, что $b=\psi(A, B, C)$, т. е. каждая сторона треугольника опредѣлялась бы его углами. Лежандръ считаетъ это невозможнымъ съ двухъ точекъ зрѣнія. Во первыхъ, углы выражаются отвлеченными числами, а слѣдовательно, длина b выражалась бы отвлеченнымъ числомъ. Во вторыхъ, этотъ выводъ приводитъ къ тому, что невозможно допустить существованіе подобныхъ фигуръ. Вслѣдствіе этого, Лежандръ считаетъ доказаннымъ, что функція φ не зависитъ отъ стороны b, т. е. что каждый уголъ треугольника вполнѣ опредѣляется двумя другими углами. Отсюда, рядомъ безупречныхъ разсужденій, Лежандръ выводитъ, что сумма угловъ треугольника равна $2d$. Первое соображеніе Лежандра есть одна изъ формъ, въ которой выражается такъ называемое начало однородности. Соотношеніе $B = \varphi(A, C, b)$ предполагаетъ, что какъ углы, такъ и отрѣзки выражены числами въ опредѣленныхъ единицахъ. Самый видъ функціи φ можетъ зависѣть отъ выбора единицъ, и, при этихъ условіяхъ, равенство $b = \psi(A, B, C)$ будетъ выражать, что число, измѣряющее въ опредѣленныхъ единицахъ сторону треугольника, представляетъ собой нѣкоторую функцію отъ чиселъ, измѣряющихъ также въ опредѣленныхъ единицахъ углы треугольника. Трудно даже понять, въ чемъ тутъ можно усмотрѣть противорѣчіе. Что касается второй мотивировки, то тутъ содержится явное допущеніе существованія подобныхъ фигуръ. Какъ было изложено выше, уже Валлисъ показалъ, что этого допущенія достаточно для доказательства постулата Евклида. То же самое говоритъ и Гауссъ въ письмѣ къ Герлингу отъ 11-го апрѣля 1816 г., разбирая доказательства Лежандра.

Однако, эти разсужденія, повидимому, и Лежандра не вполнѣ удовлетворяли, и въ третьемъ изданіи онъ далъ другое геометрическое доказательство, которое сохранено въ послѣдующихъ изданіяхъ вплоть до 8-го. Вотъ какъ излагаетъ сущность этого доказательства самъ Лежандръ въ примѣчаніи къ 14-ому изданію началъ.

„Мы сначала доказали, что сумма угловъ треугольника не можетъ быть больше двухъ прямыхъ; это предложеніе сразу существенно отдѣляетъ прямолинейные треугольники отъ сферическихъ. Когда эта часть была установлена, оставалось доказать, что сумма угловъ треугольника не можетъ быть меньше двухъ прямыхъ. Однако, какъ въ сферическихъ треугольникахъ избытокъ суммы угловъ надъ двумя прямыми пропорціоналенъ площади, такъ и недостатокъ до двухъ прямыхъ, если бы таковой существовалъ въ прямолинейномъ треугольникѣ, былъ бы пропорціоналенъ его площади. Легко видѣть поэтому, что, если бы всегда можно было построить треугольникъ, площадь котораго въ m разъ больше, нежели площадь даннаго треугольника, то его „угловой недостатокъ“ (déficit) также былъ бы въ m разъ больше, чѣмъ въ данномъ треугольникѣ; этимъ путемъ можно было бы произвольно уменьшить сумму угловъ въ треугольникѣ, доводя ее до нуля и даже до отрицательнаго количества. Въ виду абсурдности этого вывода, мы можемъ считать доказаннымъ, что сумма угловъ треугольника равна $2d$.

Руководясь для доказательства этимъ принципомъ, по существу совершенно безупречнымъ, мы показали, что вся трудность его сводится къ тому, чтобы построить треугольникъ, имѣющій вдвое большую площадь, чѣмъ данный. Предложенное нами рѣшеніе этой задачи по существу очень просто; однако, въ немъ содержится допущеніе, что чрезъ точку, лежащую внутри угла, меньшаго $\frac{2}{3}d$, всегда можно провести прямую, встрѣчающую обѣ стороны угла.

Мы такимъ образомъ значительно приблизились къ нашей цѣли, но мы не достигли ея вполнѣ, такъ какъ наше доказательство зависѣло отъ постулата, отъ котораго мы никакъ не могли освободиться. Эти именно соображенія заставили насъ въ 7-омъ изданіи возвратиться къ обычному изложенію Евклида, отводя доказательствамъ мѣсто въ примѣчаніи".

Однако, въ 12-омъ изданіи Лежандръ вновь даетъ доказательства постулата, которыя переходятъ въ послѣдующія изданія.

Въ 1832-омъ году Лежандръ опубликовалъ мемуаръ, въ которомъ привелъ въ систему всѣ свои разсужденія, относящіяся къ теоріи параллельныхъ линій [1]).

Въ этомъ мемуарѣ изложены какъ тѣ доказательства, которыя помѣщены въ различныхъ изданіяхъ „Началъ", такъ и дополнительныя разсужденія. Здѣсь мы находимъ точныя доказательства того, что сумма угловъ треугольника не можетъ превышать $2d$, что она равняется $2d$ во всякомъ треугольникѣ, если только есть одинъ треугольникъ, въ которомъ сумма угловъ равна $2d$. Чтобы исчерпать вопросъ, нужно такимъ образомъ доказать, что существуетъ одинъ треугольникъ, въ которомъ сумма угловъ равна $2d$. И здѣсь Лежандръ впадаетъ въ разсужденія, легкомыслію которыхъ нельзя не удивляться. Онъ предлагаетъ, напримѣръ (14.8), построить квадратъ и раздѣлить его діагональю пополамъ; но вѣдь для этого нужно предварительно доказать, что существуетъ квадратъ, что возможенъ четыреугольникъ съ четырьмя прямыми углами, — а это задача не менѣе трудная, чѣмъ та, которую Лежандръ старается съ ея помощью разрѣшить.

Чувствуя слабыя стороны этого разсужденія, Лежандръ вновь возвращается къ теоремѣ о томъ, что сумма угловъ треугольника не можетъ быть меньше $2d$; его доказательства, основанныя на безконечно малыхъ, столь же ошибочны, какъ и разсужденія Саккери.

Итакъ, сами по себѣ работы Лежандра по основаніямъ геометріи несравненно менѣе цѣнны, чѣмъ работы его предшественниковъ и современниковъ. Но, благодаря громкому имени, которымъ онъ пользовался, его изслѣдованія получили широкое распространеніе; связь между вопросомъ о суммѣ угловъ треугольника и теоріей параллельныхъ линій сдѣлалась извѣстной почти всѣмъ математикамъ. Какъ мы имѣли уже случай указать, работы Лежандра имѣли несомнѣнное вліяніе и на развитіе идей Лобачевскаго.

(Продолженіе слѣдуетъ).

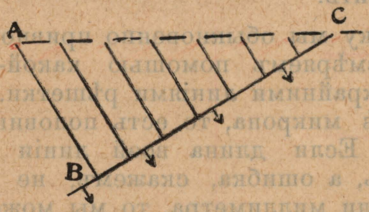
[1]) *M. Legendre.* „Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle". Mémoires de l'Acad. R. de France. T. XII. 1833.

Свѣтовая волна, какъ мѣра длины.

A. Michelson'a.

Извѣстно, что въ нѣкоторыхъ случаяхъ мы можемъ наблюдать интерференціонныя полосы при очень большой разности оптическихъ путей интерферирующихъ лучей,—разности, превышающей длину 500000 волнъ. Отсюда мы дѣлаемъ выводъ, что на протяженіи 500000 волнъ варіаціи всѣхъ волнъ, вмѣстѣ взятыя, не превышаютъ по своимъ размѣрамъ длины одной волны, т. е. длина свѣтовой волны есть величина постоянная съ точностью до 1/500000 (т. е. по своей длинѣ свѣтовыя волны могутъ отличаться другъ отъ друга лишь на одну пятисоттысячную долю).

Естественно является вопросъ, нельзя ли утилизировать неизмѣнность длины свѣтовой волны, примѣняя послѣднюю въ качествѣ мѣры длины. Насколько мнѣ извѣстно, мысль эту впервые высказалъ д-ръ Gould приблизительно лѣтъ двадцать пять тому назадъ. Методъ, который онъ предложилъ, состоитъ въ томъ, что помощью диффракціонной рѣшетки измѣряютъ такъ называемый уголъ диффракціи, соотвѣтствующій опредѣленнаго рода лучамъ, напримѣръ, лучамъ, которые испускаетъ пламя натрія. Изображеніе такой рѣшетки въ чрезвычайно увеличенномъ видѣ представлено на фигурѣ 1.



Фиг. 1.

Лучи опредѣленной природы, скажемъ пламени натрія, проходящіе черезъ какое-либо отверстіе рѣшетки, напримѣръ, по направленію AB, имѣютъ сравнительно съ лучами, проходящими черезъ ближайшее сосѣднее отверстіе, постоянную разность хода; поэтому, какъ бы ни было велико число отверстій, волны, выходящія изъ всѣхъ этихъ отверстій по направленію AB, имѣютъ одну и ту же фазу. Наблюдая спектръ перваго порядка, находимъ, что на протяженіи AB вмѣщается столько же волнъ, сколько въ промежуткѣ AC имѣется отверстій *). Чтобы получить диффракціон-

*) Это слѣдуетъ изъ того, что спектръ перваго порядка получается тогда, когда на линіи BC лучъ AB отличается отъ луча, идущаго изъ сосѣдняго отверстія на цѣлую волну. Слѣдовательно отъ луча, приходящаго въ C, лучъ, приходящій въ B, отличается на столько волнъ, сколько имѣется отверстій. Всѣ эти лишнія волны помѣщаются на отрѣзкѣ AB. *Прим. Ред.*

ную рѣшетку, по металлической или стеклянной поверхности вычерчиваютъ алмазомъ большое множество тончайшихъ линій; при этомъ вычерчивающій приборъ самъ записываетъ число вычерчиваемыхъ линій, такъ что въ опредѣленіи этого послѣдняго числа ошибка произойти не можетъ. Число линій обыкновенно бываетъ очень велико—отъ 50000 до 100000 Зная точно число линій, мы тѣмъ самымъ знаемъ и число промежутковъ между линіями на всемъ протяженіи АС.

Длину АС мы можемъ измѣрить, сравнивая разстояніе между двумя крайними линіями съ какой-нибудь промежуточной мѣрой, длина которой въ метрахъ или ярдахъ намъ заранѣе извѣстна, съ наибольшей степенью точности, какая только возможна въ физическихъ измѣреніяхъ. Если кромѣ того намъ извѣстна величина угла АСВ, то мы можемъ вычислить и длину АВ. Зная число волнъ, которыя вмѣщаются на этомъ протяженіи (ихъ ровно столько, сколько отверстій въ АС), мы имѣемъ возможность измѣрить длину одной волны. Замѣтимъ, что при такомъ опредѣленіи длины волны, точность измѣренія всецѣло зависитъ отъ того, совершенно ли равны другъ другу промежутки между линіями рѣшетки: разстояніе между каждыми двумя сосѣдними линіями опредѣляется послѣдовательнымъ вращеніемъ винта на одинъ и тотъ же малый уголъ.

Если же промежутки между линіями не вполнѣ равны, то это обстоятельство служитъ источникомъ ошибки, которую почти невозможно исправить.

Вторую ошибку мы обыкновенно привносимъ въ измѣреніе тогда, когда мы измѣряемъ помошью какой-либо мѣры длины разстояніе между крайними линіями рѣшетки. Ошибка эта равна примѣрно половинѣ микрона, то есть половинѣ одной тысячной доли миллиметра. Если длина всей линіи содержитъ пятьдесятъ миллиметровъ, а ошибка, скажемъ, не превышаетъ одной десятитысячной доли миллиметра, то мы можемъ измѣрить длину волны съ точностью до одной пятисоттысячной. Таковъ предѣлъ погрѣшности, если мы будемъ считать нашу мѣру длины абсолютно вѣрной. Но длину употребленной нами мѣры, напримѣръ дециметра, мы должны еще, въ свою очередь, точно опредѣлить помощью микроскопическаго измѣренія; температура, съ которой при этомъ нельзя не считаться, со своей стороны является источникомъ новой погрѣшности. Если принять во вниманіе всѣ погрѣшности, то окажется, что наивысшая доступная намъ точность выражается дробью $^1/_{100000}$. Но намъ еще приходится измѣрить уголъ АСВ, а измѣреніе угловъ несравненно труднѣе измѣренія длинъ. Новая ошибка, проистекающая отъ измѣренія угла, присоединяется къ указаннымъ уже погрѣшностямъ, обусловленнымъ не совсѣмъ правильнымъ распредѣленіемъ линій рѣшетки и не совсѣмъ вѣрнымъ опредѣленіемъ длины АС и длины употребляемой нами промежуточной мѣры: въ результатѣ всѣхъ этихъ ошибокъ доступная намъ степень приближенія сведется всего къ одной двадцати- или тридцатитысячной. Однако, другіе два способа, которые были предложены для установленія абсолютной мѣры длины, даютъ еще меньшую точность.

Изъ этихъ двухъ предложенныхъ мѣръ первая представляетъ собою длину секунднаго маятника въ Парижѣ. Чтобы устроить такой маятникъ, подвѣшиваютъ на ребрѣ стального ножа стальной прутъ, къ которому прикрѣпляютъ большую чечевицеобразную подвѣску. Вблизи нижняго конца стального прута къ нему придѣлано ребро другого ножа: такимъ образомъ маятникъ можно перевернуть и подвѣсить нижнимъ концомъ. Перемѣщая чечевицеобразную подвѣску вдоль длины прута, мы легко можемъ достигнуть того, чтобы нашъ маятникъ имѣлъ одинъ и тотъ же періодъ колебанія независимо отъ того, какимъ концомъ мы подвѣсимъ его. Если притомъ періодъ колебанія въ обоихъ положеніяхъ маятника равенъ секундѣ, то разстояніе между ребрами обоихъ ножей представитъ собою длину простого секунднаго маятника

Можно устроить простой маятникъ еще и другимъ способомъ: къ концу легкой и тонкой проволоки подвѣшиваемъ металлическій шарикъ. При этомъ необходимо измѣрить періодъ колебанія маятника, а также разстояніе между точкой подвѣса и центромъ тяжести шарика. Разстояніе это можно измѣрить съ достаточной степенью точности. Къ несчастію, результаты, полученные различными изслѣдователями, отличаются другъ отъ друга настолько, что приходится отдать предпочтеніе методу диффракціи, несмотря на сопряженныя съ нимъ погрѣшности.

Вторая изъ мѣръ длины, упомянутыхъ выше,—это длина меридіана земного шара: предполагалось, что длина эта есть величина постоянная. Однакоже мы знаемъ, что земля, охлаждаясь, сокращается, и такимъ образомъ не подлежитъ сомнѣнію, что длина земного меридіана не остается постоянной. Возможно также, что не столько сама по себѣ варіація эта является источникомъ погрѣшности, сколько нѣкоторыя затрудненія, сопряженныя съ самимъ методомъ измѣренія меридіана. Предположимъ, напримѣръ, что мы измѣрили разность географическихъ широтъ двухъ пунктовъ, одного въ 45° сѣверной широты, другого въ 45° южной широты: измѣреніе это можно выполнить съ астрономической точностью. Разстояніе между двумя такими пунктами (лежащими на одномъ меридіанѣ) составляетъ одну четверть длины всего меридіана. Разстояніе это измѣряется помощью тріангуляціи; эта послѣдняя сопряжена съ большими расходами и требуетъ много времени и труда, и при всемъ томъ результаты различныхъ измѣреній еще менѣе согласны другъ съ другомъ, нежели наблюденія надъ колебаніями маятника. Такимъ образомъ ни одинъ изъ трехъ описанныхъ методовъ не въ состояніи дать намъ абсолютную мѣру длины.

Итакъ, теперь уже не утверждаютъ, что метръ это одна сорокамилліонная часть земного меридіана; такъ какъ длина послѣдняго подвержена колебаніямъ, то метромъ теперь принято называть условно установленное разстояніе между двумя линіями, вычерченными на стержнѣ, который сдѣланъ изъ сплава платины и иридія.

На эти два металла выборъ палъ, благодаря ихъ твердости и прочности. Чтобы сдѣлать невозможными измѣненія въ состояніи образцоваго метра, матеріалъ, изъ котораго онъ дѣлается, подвергаютъ всевозможнымъ способамъ обработки; стержень отливаютъ и переливаютъ много разъ, а затѣмъ его охлаждаютъ въ теченіе нѣсколькихъ мѣсяцевъ.

Обработавъ такимъ образомъ нашъ метръ, мы вправѣ полагать, что длина стержня остается неизмѣнной, или во всякомъ случаѣ, что измѣненія ея очень малы.

Опредѣлить эти измѣненія практически невозможно: дѣйствительно, хотя имѣется много копій образцоваго метра, но всѣ эти копіи сдѣланы изъ того же матеріала, что и оригиналъ, такъ что, если бы съ теченіемъ времени длина оригинала и измѣнилась, то надо полагать, что настолько же измѣнится и длина всѣхъ копій, и такимъ образомъ обнаружить это измѣненіе окажется невозможнымъ. Есть основаніе думать, что максимальная величина варіаціи метра не превышаетъ одной тысячной части миллиметра, (или даже, что она еще менѣе).

Теперь умѣстно спросить: коль скоро мы располагаемъ уже столь точной мѣрой длины, зачѣмъ же намъ еще другая мѣра?

Въ отвѣтъ на это замѣтимъ, что требованія, которыя мы предъявляемъ къ научнымъ измѣреніямъ, съ каждымъ годомъ все болѣе и болѣе возрастаютъ. Лѣтъ сто тому назадъ измѣреніе съ точностью до одной тысячной дюйма считалось чуть ли не феноменальнымъ. Такую точность нынче мы въ правѣ требовать отъ чисто работающей машины, а въ научныхъ измѣреніяхъ мы уже рѣдко довольствуемся точностью даже до одной десятичной дюйма. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ мы достигли точности до одной милліонной части дюйма, а иногда возможно обнаружить разности величиною въ одну пятимилліонную долю дюйма. Историческій опытъ показываетъ, что, изыскивая способы измѣренія столь малыхъ величинъ, мы лишь предвосхищаемъ потребности недалекаго будущаго. Съ другой стороны, весьма важно имѣть возможность сравнивать и сличать результаты научныхъ трудовъ, которые уже выполнены или теперь выполняются, съ тѣми работами, которыя будутъ произведены въ будущемъ: для этого необходимо, чтобы мѣры и единицы, которыми пользуемся мы и которыми будутъ пользоваться наши преемники, имѣли одни и тѣ же значенія, чтобы возможно было воспроизвести эти мѣры съ большей доступной намъ степенью точности. Послѣдняя должна быть приблизительно того же порядка, что и точность, съ которой можно сравнить двѣ мѣры; точность эта, по мнѣнію нѣкоторыхъ, выражается тремя десятыми микрона; круглымъ числомъ она равна половинѣ микрона. Такой точности мы не достигнемъ ни однимъ изъ трехъ вышеписанныхъ методовъ воспроизведенія образцовой мѣры. Мы уже знаемъ, что результаты, которые мы получаемъ, пользуясь этими методами, отличаются другъ отъ друга въ предѣлахъ отъ одной пятидесятитысячной до одной двадцатитысячной доли. Такъ какъ метръ содержитъ милліонъ микроновъ, а точность, которой мы можемъ достигнуть помощью микроскопа, доходитъ до половины микрона, то такая точность выразится дробью $^1/_{2000000}$, тогда какъ точность, которую намъ даютъ три описанные метода, гораздо ниже.

Обратимся къ методу интерференціи. У насъ есть нѣкоторыя основанія надѣяться, что помощью этого метода мы добьемся успѣха. Въ самомъ дѣлѣ, мы уже обратили вниманіе на то обстоятельство, что длина свѣтовой волны есть величина постоянная, по крайней мѣрѣ съ точностью до одной пятисоттысячной доли; это многообѣщающее обстоятельство даетъ намъ основаніе надѣяться, что въ свѣтовой волнѣ, если только надлежащимъ образомъ использовать ее, мы найдемъ мѣру длины, удовлетворяющую современнымъ требованіямъ: нужно изыскать способъ умножить, такъ сказать, волну, не увеличивая, однако, ошибки, такъ, чтобы получить длину, видимую глазомъ. Другими словами, нужно изъ достаточнаго числа волнъ составить нѣкоторую длину, которую мы могли бы воспроизводить настолько точно, чтобы микроскопъ не обнаруживалъ разницы между новой мѣрой и другой какой-нибудь изъ тѣхъ мѣръ, которыми мы пользуемся теперь и которую мы пожелали бы сравнить съ новой мѣрой.

Выполненіе этой задачи въ принципѣ чрезвычайно легко: нужно сосчитать число волнъ въ данномъ промежуткѣ. Но когда имѣешь дѣло съ такими огромными числами—съ сотнями тысячъ —трудно избѣжать погрѣшности: я говорю не объ ошибкѣ въ научномъ смыслѣ слова, а о простомъ недосмотрѣ. Повторнымъ вычисленіемъ такую ошибку можно раньше или позже исправить.

Конкректное осуществленіе намѣченной мысли заключаетъ въ себѣ нѣсколько интересныхъ пунктовъ: для того, чтобы добиться полнаго успѣха, необходимо предварительно рѣшить нѣсколько оригинальныхъ задачъ по конструкціи прибора.

Для того, чтобы легче понять конструкцію и изготовленіе прибора, скажемъ нѣсколько словъ о томъ, какія мы должны выполнить условія. Для примѣра предположимъ, что мы желаемъ узнать разстояніе между двумя верстовыми столбами желѣзнодорожнаго пути. Такое разстояніе удобнѣе всего измѣряется помощью стофутовой стальной ленты, которую вытягиваютъ и прикладываютъ къ рельсамъ. О рельсахъ мы упоминаемъ для того лишь, чтобы замѣтить, что при этомъ измѣреніи не происходитъ изгибанія ленты, которое могло бы повлечь за собою ошибку. Мы отмѣчаемъ какимъ-либо знакомъ то мѣсто рельса, которому соотвѣтствуетъ нулевое дѣленіе ленты, и которое послужитъ намъ исходнымъ пунктомъ; слѣдующую мѣтку мы наносимъ на то мѣсто рельса, которое совпадаетъ съ послѣднимъ дѣленіемъ нашей ленты. Затѣмъ мы прикладываемъ къ этому мѣсту начало ленты, а третью мѣтку ставимъ на томъ мѣстѣ рельсовъ, гдѣ теперь окажется конецъ ленты, и такъ далѣе. Такова первая стадія измѣренія, въ результатѣ которой мы узнаемъ, сколько въ измѣряемомъ нами промежуткѣ содержится цѣлыхъ сотенъ футовъ. Затѣмъ мы измѣряемъ количество дробныхъ частей.

Вторая операція состоитъ въ провѣркѣ длины нашей стальной ленты помощью образцоваго ярда или фута: здѣсь мы также примѣняемъ только что описанный методъ послѣдовательнаго наложенія.

По существу къ этому же методу сводится и измѣреніе метра посредствомъ длины волны: метръ теперь играетъ ту же роль, которую въ предыдущемъ примѣрѣ игралъ участокъ желѣзнодорожнаго пути, а стофутовой лентѣ соотвѣтствуетъ здѣсь значительно меньшая длина. Послѣдняя представляетъ собою то, что я раньше назвалъ „промежуточной мѣрой". Теперь мы вдобавокъ должны разсмотрѣть еще и прибавочную третью операцію: опредѣленіе числа свѣтовыхъ волнъ, содержащихся въ промежуточной мѣрѣ. Такимъ образомъ вся процедура сведется къ тремъ различнымъ операціямъ.

Возвращаясь къ первой операціи, мы замѣтимъ слѣдующее: послѣдовательно перемѣщая ленту съ одного мѣста на другое, мы неминуемо совершаемъ при этомъ погрѣшность, которая въ общей сложности тѣмъ меньше, чѣмъ меньшее число разъ мы будемъ производить эти перемѣщенія. Отсюда мы заключаемъ, что возможно большій размѣръ нашей небольшой мѣры является однимъ изъ существенныхъ условій, которымъ долженъ удовлетворять нашъ приборъ.

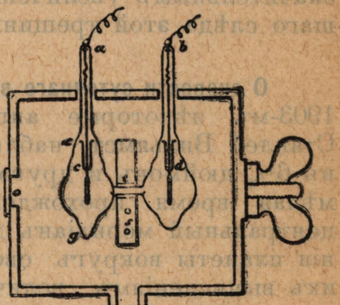
Длина промежуточной мѣры находится въ зависимости отъ разстоянія между двумя источниками интерферирующихъ лучей, при которомъ мы еще можемъ наблюдать интерференціонныя полосы.

Мы уже имѣли случай замѣтить, что предѣльная величина этого разстоянія равна длинѣ примѣрно нѣсколькихъ сотъ тысячъ волнъ. При такомъ разстояніи интерференціонныя полосы нѣсколько ослаблены; поэтому предпочитаютъ, по возможности, не пользоваться максимальнымъ разстояніемъ; удобнѣе брать меньшія разстоянія, чтобы не пострадала отчетливость полосъ. Какъ оказывается, въ качествѣ промежуточной мѣры всего удобнѣе выбрать дециметръ.

При этомъ разность оптическихъ путей, которая, въ виду отраженія свѣта, въ два раза превосходитъ разстояніе между источниками лучей, содержитъ отъ трехъ до четырехъ сотъ тысячъ волнъ. Если мы подберемъ подходящій источникъ свѣта, то при указанной разности путей интерференціонныя полосы будутъ достаточно отчетливы.

Въ предыдущей лекціи я показалъ Вамъ, что лучи, испускаемые цѣлымъ рядомъ разсмотрѣнныхъ нами веществъ имѣютъ болѣе или менѣе сложный составъ. Въ этомъ отношенiи красные лучи паровъ кадмiя представляютъ замѣчательное исключенiе. Опытъ показываетъ, что лучи эти отличаются идеальной однородностью, т. е. что они представляютъ собою рядъ простыхъ гармоническихъ колебанiй. Поэтому весьма удобно примѣнить эти лучи для рѣшенiя задачи; длину волны этихъ лучей мы и выберемъ въ качествѣ образцовой мѣры.

Большинство химическихъ тѣлъ даетъ болѣе или менѣе сложный спектръ, заключающiй въ себѣ множество линiй. Пары кадмiя испускаютъ троякаго рода лучи, но эти послѣднiе обладаютъ столь совершенной однородностью, что любые изъ нихъ одинаково годятся для нашей цѣли: ниже мы увидимъ, что въ этомъ случаѣ сложность спектра имѣетъ даже свою выгодную сторону. Чтобы получить лучи кадмiя, мы помѣщаемъ кусокъ этого металла въ стеклянную трубку, содержащую два аллюминiевыхъ электрода. Трубка эта сообщается съ воздушнымъ насосомъ, посредствомъ котораго изъ трубки выкачивается воздухъ. Затѣмъ мы нагрѣваемъ трубку, чтобы удалить изъ нея всѣ оставшiеся еще тамъ пары и газы; послѣ этого трубку герметически закрываютъ, и мы можемъ пустить ее въ дѣло. Такъ какъ кадмiй не очень летучъ, то, пропуская электрическiй разрядъ при обыкновенной температурѣ, мы врядъ ли увидимъ кадмiевы лучи. Поэтому мы кладемъ трубку въ металлическiй ящикъ (фиг. 2), который снабженъ термометромъ и окошкомъ изъ слюды. Помощью бунзеновой горѣлки ящикъ нагрѣваютъ приблизительно до 300°C; тогда вся трубка наполняется парами кадмiя, которые при пропусканiи электрической искры становятся видимыми.



Фиг. 2.

(Продолженiе слѣдуетъ).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

О трещинѣ, образовавшейся въ послѣднее время на лунѣ. Въ № отъ 16 октября „Bulletin de la Société astr. de France" прошлаго года помѣщена статья Г-на Перрина о новой трещинѣ, замѣченной имъ на лунѣ. „Въ ночь на 23-го апрѣля 1904 г.," пишетъ Г-нъ Перринъ: „я замѣтилъ новую трещину, образовавшуюся въ нѣсколькихъ мѣстахъ на лунѣ въ альпiйской долинѣ".

„Обстоятельства не были благопріятны для производства надлежащихъ наблюденій, хотя трещина простиралась тогда по всей длинѣ долины. Я наблюдалъ эту трещину 23 апрѣля, 6-го, 22 и 23 мая, 4-го іюня, 2-го іюля и 30-го августа вечеромъ при различныхъ освѣщеніяхъ съ помощью телескопа (Кросслея) въ 36 дюймовъ. Трещина разстилается по всей длинѣ долины съ перерывами въ трехъ мѣстахъ, но я убѣжденъ, что, при внимательномъ изслѣдованіи и при благопріятныхъ условіяхъ, можно было бы удостовѣриться, что она распространяется безпрерывно по всей длинѣ долины. Вслѣдствіе ея незначительной ширины, достигающей въ нѣкоторыхъ мѣстахъ еле 300 футовъ и нигдѣ не превышающей шестисотъ футовъ, трещина эта можетъ быть видна только въ большой телескопъ и при очень хорошихъ атмосферныхъ условіяхъ.

Я тщательно разсмотрѣлъ нѣсколько негативовъ этой части луны, снятыхъ раньше при помощи рефрактора въ 36 дюймовъ съ значительнымъ увеличеніемъ, но не замѣтилъ на нихъ ни малѣйшаго слѣда этой трещины".

О скорости суточнаго вращенія Юпитера. Въ прошломъ году и въ 1903-мъ нѣкоторые англійскіе астрономы и, между прочимъ, Станлей Вильямсъ наблюдали тщательно съ помощью телескопа въ $6^1/_2$ дюймовъ и другого аппарата красное пятно Юпитера. Замѣчая время прохожденія краевъ или центра пятна черезъ центральный меридіанъ диска планеты, они нашли время вращенія планеты вокругъ своей оси равнымъ 9 ч. 55 м. Такова, по ихъ вычисленіямъ, величина для 485 вращеній. Продолжительность вращенія оказалась значительнѣе, чѣмъ въ 1902 году.

Въ нижеслѣдующей таблицѣ опредѣлены періоды вращенія планеты въ теченіе послѣднихъ пяти лѣтъ.

Противостояніе годы	Вращеніе	Число оборотовъ.
1899	9 ч. 55 м. 42 с. 65	229
1900	9 ч. 55 м. 42 с. 30	287
1901	9 ч. 55 м. 40 с. 92	229
1902	9 ч. 55 м. 39 с. 66	275
1903	9 ч. 55 м. 41 с. 52	485.

Г. Деннингъ наблюдалъ это пятно въ теченіе послѣднихъ семи мѣсяцевъ и нашелъ время вращенія планеты равнымъ 9 часамъ 55 м. 38 с. 6. Это самое короткое время вращенія, которое замѣчено было, начиная съ 1883 года, когда оно было найдено равнымъ 9 ч. 55 минутамъ и 38 с. 2.

Перемѣна въ скорости вращенія этого пятна, замѣченная въ теченіе послѣднихъ лѣтъ, одно изъ интереснѣйшихъ и самыхъ удивительныхъ явленій въ области астрономіи, а потому было бы въ высшей степени полезно и интересно прослѣдить за нимъ въ теченіе нѣсколькихъ наступающихъ мѣсяцевъ настоящаго 1905 года.

Пятно это было впервые замѣчено во второй половинѣ XIX столѣтія. Причина появленія его, равно какъ и существо самаго пятна, не выяснены еще надлежащимъ образомъ. По мнѣнію Бредихина, Фламмаріона и многихъ другихъ астрономовъ, Юпитеръ находится еще въ жидкомъ состояніи, а пятно это, по всему вѣроятію, выступившій на поверхность воды континентъ, равный по величинѣ Австраліи.

К. Лысаковскій.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 611 (4 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$3xy - 5y + 9x - 57 = 0.$$

Н. Готлибъ (Митава).

№ 612 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$yz - x\sqrt{yz} = a,$$

$$zx - y\sqrt{zx} = b,$$

$$xy - z\sqrt{xy} = c.$$

Н. Агрономовъ (Вологда).

№ 613 (4 сер.). Доказать, что при всякомъ цѣломъ значеніи x число

$$(2x^2 + 7)^{x^8 - 2x^6 + x^4} - (3x^2 + 13)^{8x^2 - 8x}$$

кратно 17.

Н. С. (Одесса).

№ 614 (4 сер). Опредѣлить истинное значеніе выраженія

$$z = \frac{\pi y + \operatorname{tg}\pi y}{y + \sin y}$$

при $y = 0$.

В. Тюнинъ (Симскій заводъ).

№ 615 (4 сер.) Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$2^x + 2^{y+1} = 3z.$$

Д. Колянковскій (Брацлавъ).

№ 616 (4 сер.). На одну сторону поршня въ насосѣ дѣйствуетъ атмосферное давленіе, а на другую водяной паръ при температурѣ 200° и при давленіи въ 11 атмосферъ. Каждое качаніе поршня производитъ работу въ 10000 килограммовъ. Опредѣлить объемъ цилиндра и массу пара, расходуемаго при каждомъ качаніи поршня. Удѣльный вѣсъ воздуха при нормальныхъ условіяхъ a=0,00013; коэффиціентъ расширенія газа $d = \frac{1}{273}$; плотность водяного пара по отношенію къ водѣ d=0,622. Плотность ртути D=13,6.

(Заимств.) *М. Г.*

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ

№ 514 (4 сер.). *Рѣшить систему уравненій*

$$x^2 - xy = 1,$$

$$y^2 - yz = 2,$$

$$z^2 - zx = 3.$$

Опредѣляя y изъ перваго уравненія, находимъ:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x} \quad (1).$$

Подставляя это значеніе y во второе изъ данныхъ уравненій, получимъ:

$$\frac{(x^2 - 1)^2}{x^4} - \frac{(x^2 - 1)}{x} z = 2,$$

откуда

$$z = \frac{x^4 - 4x^2 + 1}{x^3 - x} \quad (2).$$

Подставивъ это значеніе z въ третье уравненіе, имѣемъ:

$$\frac{(x^4 - 4'x + 1)}{(x^3 - x^2)^2} - \frac{x^4 - 4x^2 + 1}{x} = 3,$$

или, послѣ освобожденія отъ знаменателей и другихъ обычныхъ преобразованій,

$$6x^6 - 19x^4 + 10x^2 - 1 = 0 \qquad (3).$$

Разлагая лѣвую часть уравненія (3) на множителей $\left(\text{при чемъ полезно имѣть въ виду, что уравненіе (3) удовлетворяется, полагая } x^2 = \frac{1}{2}\right)$, находимъ:

$$(2x^2 - 1)(3x^4 - 8x^2 + 1) = 0,$$

откуда $$2x^2 - 1 = 0 \quad \text{или} \quad 3x^4 - 8x^2 + 1 = 0.$$

Изъ этихъ уравненій находимъ шесть рѣшеній:

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}, \quad x = \pm\sqrt{\frac{4 \pm \sqrt{13}}{3}}.$$

Подставляя полученныя значенія x въ равенства (1) и (2), получимъ соотвѣтствующія значенія y и z.

Г. Оганянцъ (Москва); *Н. С.* (Одесса).

№ 515 (4 сер.). *Даны точки* a, b, c, *взятыя соотвѣтственно на сторонахъ* BC, CA, AB *неизвѣстнаго треугольника такъ, что*

$$Ac = \frac{1}{n} AB, \quad Ba = \frac{1}{n} BC, \quad Cb = \frac{1}{n} AC.$$

Если $n = 1$, то точки a, b, c суть вершины искомаго треугольника; если $n=2$, то для построенія треугольника ABC достаточно черезъ точки c, a, b провести до ихъ взаимнаго пересѣченія прямыя, соотвѣтственно параллельныя прямымъ ab, bc, ca. Если $n>2$, то, предполагая задачу рѣшенной, проведемъ черезъ точку b прямую, параллельную AB, до встрѣчи съ BC въ точкѣ M. Тогда $\frac{MC}{BC}=\frac{bC}{AC}=\frac{1}{n}$, такъ что

$$MC=\frac{1}{n}BC \quad (1),$$

а потому (см. (1)) $aM=BC-Ba-MC-BC-\frac{1}{n}BC-\frac{1}{n}BC=\frac{n-2}{n}BC$ (2).

Поэтому прямая AB, будучи параллельна bM, встрѣчаетъ продолженіе ab въ такой точкѣ c', что (см. (2))

$$\frac{ac'}{ab}=\frac{aB}{aM}=\frac{\frac{1}{n}BC}{\frac{n-2}{n}BC}=\frac{1}{n-2}, \text{ откуда } ac'=\frac{ab}{n-2} \quad (3).$$

Отсюда вытекаетъ построеніе: построивъ отрѣзки $\frac{ab}{n-2}$, $\frac{bc}{n-2}$, $\frac{ca}{n-2}$, откладываемъ соотвѣтственно на продолженіи сторонъ ab, bc и ca отрѣзки $ac'=\frac{ab}{n-2}$, $ba'=\frac{bc}{n-2}$, $cb'=\frac{ca}{n-2}$. Прямыя aa', bb' и cc', пересѣкаясь взаимно, даютъ вершины искомаго треугольника. Подобнымъже образомъ задача рѣшается (см. (3)) и въ болѣе общемъ случаѣ, если n не есть цѣлое положительное число, но вообще отношеніе двухъ данныхъ или построяемыхъ помощью циркуля и линейки отрѣзковъ.

В. Гейманъ (Θодосія); *С. Конюховъ* (Никитовка).

№ 516 (4 сер.). *Доказать, что сумма квадратовъ двухъ цѣлыхъ чиселъ* a *и* b *дѣлится на* 7 *только тогда, если каждое изъ нихъ дѣлится на* 7.

(Заимств. изъ *Journal de Mathématiques élémentaires*).

Обозначая наименьшіе по абсолютной величинѣ положительные или отрицательные остатки отъ дѣленія чиселъ a и b на 7 соотвѣтственно черезъ x и y, имѣемъ:

$$a=7m+x,\quad b=7n+y,$$

гдѣ m и n суть числа цѣлыя. Слѣдовательно,

$$a^2+b^2=(7m+x)^2+(7n+y)^2=7(7m^2+7n^2+2mx+2ny)+x^2+y^2,$$

откуда видно, что a^2+b^2 дѣлится или не дѣлится на 7, смотря по тому, дѣлится ли или не дѣлится на 7 число x^2+y^2. Но, такъ какъ каждое изъ чиселъ x^2 и y^2 можетъ имѣть лишь одно изъ значеній 0, 1^2, 2^2, 3^2, то x^2+y^2 можетъ принимать лишь ограниченное число значеній, а именно, x^2+y^2 равно одному изъ чиселъ

$$0^2+0^2=0,\quad 1^2+1^2=2,\quad 2^2+2^2=8,\quad 3^2+3^2=18.$$

$$0^2+1^2=1,\quad 0^2+2^2=4,\quad 0+3^2=9,$$

$$1^2+2^2=5,\quad 1^2+3^2=10,$$

$$2^2+3^2=13.$$

Изъ всѣхъ этихъ чиселъ лишь первое кратно 7, а потому a^2+b^2 кратно 7 лишь при $x=y=0$, т. е., когда каждое изъ чиселъ a и b цѣлится на 7.

В. Гейманъ (Θеодосія); *Д. Коляnковскій* (Брацлавъ); *Н. Агрономовъ* (Вологда); *Н. Готлибъ* (Юрьевъ); *Н. Доброгаевъ* (Немировъ); *Н. Живовъ* (Кременчугъ).

№ 517 (4 сер.). *Даны такія числа* a, b, c, d, e, *что* a, b, c *есть ариөметическая,* b, c, d — *геометрическая и* c, d, e — *гармоническая прогрессія. Доказать, что числа* a, c, e *составляютъ геометрическую прогрессію.*

Заимств. изъ *Journal de Mathématiques élémentaires.*

По условію,

$$a+c=2b \ (1), \quad c^2=bd \ (2), \quad \frac{1}{c}+\frac{1}{e}=\frac{2}{d} \quad (3).$$

Дѣля равенство (1) на равенство (2) и принимая во вниманіе равенство (3), находимъ:

$$\frac{a+c}{c^2}=\frac{2}{d}=\frac{1}{c}+\frac{1}{e}, \text{ или } \frac{a}{c^2}+\frac{1}{c}=\frac{1}{c}+\frac{1}{e},$$

откуда

$$\frac{a}{c^2}=\frac{1}{e}, \text{ т. е. } a:c=c:e.$$

В. Гейманъ (Өеодосія); *В. Винокуровъ* (Калязинъ); *Н. Готлибъ* (Юрьевъ); *Н. Доброгаевъ* (Немировъ); *Г. Оганянцъ* (Москва); *Н. Живовъ* (Кременчугъ).

ПОПРАВКИ.

№ 510 (4 сер.). въ № 374 „Вѣстника“.

Условіе слѣдуетъ читать такъ:

Построить треугольникъ ABC по 1) $p+m_a=s$ (гдѣ p — полупериметръ, m_a — медіана, проведенная къ сторонѣ a) *или* 2) по разности двухъ другихъ сторонъ $b-c$, если извѣстны углы α и β, образуемые соотвѣтственно медіаной m_a со сторонами b и c *).

№ 552 (4 сер.) въ № 381 „Вѣстника“.

Условіе слѣдуетъ читать такъ:

Построить трапецію по площади, *діагоналямъ* и боковой сторонѣ.

№ 565 (4 сер.) въ № 383 „Вѣстника“.

Условіе слѣдуетъ читать такъ:

Рѣшить уравненіе

$$\sqrt[7]{78097+2x}-\sqrt[7]{100+2x}=3.$$

---

*) Такимъ образомъ задача эта распадается на двѣ отдѣльныхъ задачи.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Дозволено цензурою, Одесса 17-го Мая 1905 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера. ул. Новосельскаго, д. № 66

Обложка
пщется

Обложка
ищется