Обложка
ищется

Обложка
ищется

XXXIII Сем. № 12.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

30 Іюня. № 396. 1905 г.

ВЕРТЯЩІЙСЯ ВОЛЧОКЪ.

Публичный докладъ, прочитанный въ засѣданіи „Британской Ассоціаціи“ въ Лидсѣ.

Проф. Джона Перри.

(*Продолженіе* *).

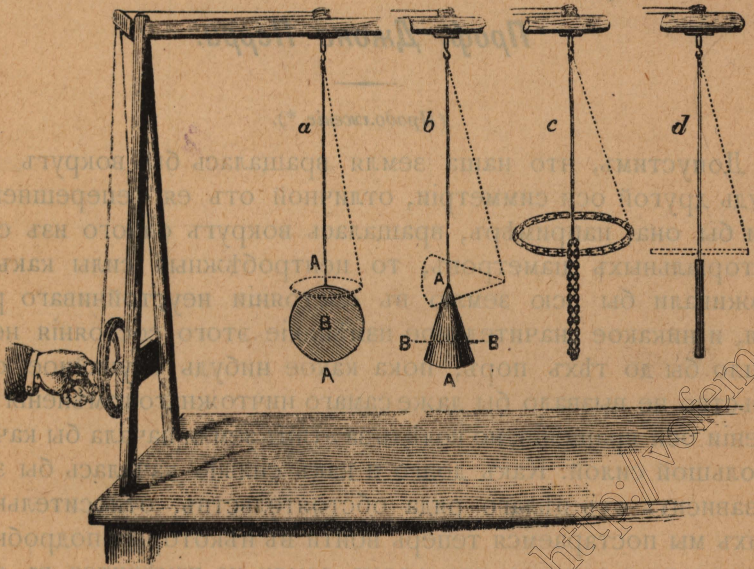
Допустимъ, что наша земля вращалась бы вокругъ какой нибудь другой оси симметріи, отличной отъ ея теперешней оси. Если бы она, напримѣръ, вращалась вокругъ одного изъ своихъ экваторіальныхъ діаметровъ, то центробѣжныя силы какъ разъ удерживали бы всю землю въ состояніи неустойчиваго равновѣсія, и никакое значительное измѣненіе этого состоянія не произошло бы до тѣхъ поръ, пока какое нибудь случайное обстоятельство не вызвало бы даже самаго ничтожнаго измѣненія въ положеніи оси вращенія; но вслѣдъ за этимъ земля начала бы качаться съ большой силой. Какъ долго и какъ сильно качалась бы земля, это зависитъ отъ цѣлаго ряда обстоятельствъ, относительно которыхъ мы постараемся теперь войти въ нѣкоторыя подробности. Если только я допущу, что форма земли не измѣнится въ значительной степени подъ вліяніемъ сильныхъ качаній, то я знаю, что

*) См. № 393 „Вѣстника“.

вслѣдствіе тренія, вызваннаго явленіемъ прилива и другими причинами, она навѣрно скоро опять возвратится къ спокойному вращенію вокругъ своей теперешней оси.

Итакъ, Вы видите, что у всякаго тѣла есть три оси, вокругъ которыхъ оно можетъ вращаться въ уравновѣшенномъ состояніи, не обнаруживая тенденціи раскачиваться въ разныя стороны; но въ двухъ изъ этихъ трехъ случаевъ это равновѣсіе центробѣжныхъ силъ все же неустойчиво, и есть только одна ось, вокругъ которой можетъ имѣть мѣсто совершенно устойчивое и уравновѣшенное вращеніе. Далѣе, Вы видите, что вращающееся тѣло, предоставленное самому себѣ, по истеченіи болѣе или менѣе продолжительнаго времени въ концѣ концовъ начинаетъ вращаться вокругъ этой оси, если только имѣется треніе, успокаивающее качанія тѣла.

Чтобы сдѣлать сказанное выше нагляднымъ, я имѣю возможность приводить тѣло во вращеніе такимъ способомъ, который способствуетъ вращающемуся тѣлу достичь его главной оси, вокругъ которой вращеніе оказывается наиболѣе устойчивымъ. Различныя тѣла могутъ быть подвѣшены на этой нити, и я могу сообщить вращеніе колесу, къ которому прикрѣплена эта нить. Вы видите, что кружокъ (фиг. 29 a) сначала вращается совер-



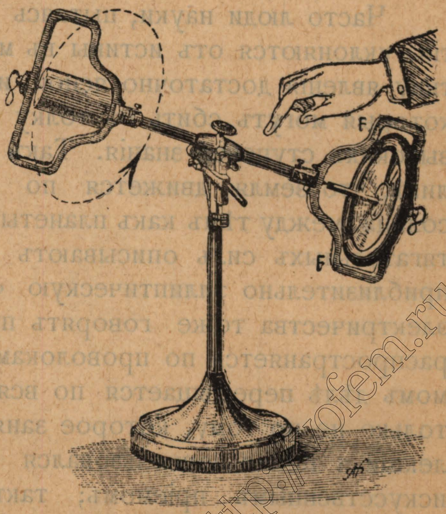
Фиг. 29.

шенно спокойно вокругъ оси *AA*; но вскорѣ Вы замѣчаете, какъ онъ начинаетъ понемногу раскачиваться. Теперь качанія усиливаются, и вотъ кружокъ вращается спокойно и устойчиво вокругъ оси BB, такъ какъ это есть важнѣйшая изъ главныхъ осей.

Этотъ конусъ (фиг. 29 b) тоже вращается сначала спокойно вокругъ оси AA; но вотъ начинается качанiе, которое становится все сильнѣе и сильнѣе и наконецъ конусъ точно также вращается спокойно вокругъ оси BB, которая есть важнѣйшая изъ трехъ главныхъ его осей.

Вотъ еще палка, привѣшенная на концѣ нити. Посмотрите также на это твердое кольцо; но, можетъ быть, Васъ больше заинтересуетъ эта отвисшая кольцеобразная цѣпь (фиг. 29 с). Вы видите, какъ она вначалѣ виситъ на нити вертикально и какъ ея качанiя и вибрацiи кончаются тѣмъ, что она превращается въ совершенно правильное кругообразное кольцо, лежащее цѣликомъ въ горизонтальной плоскости. Этотъ опытъ даетъ также наглядный примѣръ кажущейся твердости, которую сообщаетъ гибкому тѣлу быстрое движенiе.

Возвратимся теперь къ нашему уравновѣшенному гиростату (фиг. 13). Такъ какъ его движенiе не сопровождается „предхожденiемъ“, то Вы отсюда заключаете, что противовѣсъ W какъ разъ уравновѣшиваетъ вѣсъ гиростата F. Если я теперь отклоню гиростатъ F внизъ, причемъ вмѣсто того, чтобы оказывать на него постепенное давленiе, сообщу ему мгновенный толчокъ по направленiю книзу, а потомъ предоставлю приборъ самому себѣ, то Вы видите, что гиростатъ отклоняется по извѣстнымъ причинамъ вправо; но отклоняется слишкомъ сильно и далеко, совершенно такъ же, какъ и всякое другое колеблющееся тѣло. Основываясь на томъ, что я вамъ только что изложилъ, легко предсказать, что въ результатѣ получатся колебанiя то въ ту, то въ другую сторону или же качательное движенiе (фиг. 30); это движенiе будетъ продолжаться до тѣхъ поръ, пока тренiе не остановитъ его. Новое устойчивое положенiе гиростатъ F принимаетъ только по истеченiи нѣкотораго промежутка времени.



Фиг. 30.

Вы видите, что я могу сообщить гиростату это качательное или же колебательное движенiе независимо отъ того, будетъ ли это движенiе сопровождаться „предхожденiемъ“ (прецессiей) или нѣтъ. Вотъ онъ качается и между тѣмъ въ то же время движется „предходящимъ“ движенiемъ по кругу, т. е. одновременно съ „предхожденiемъ“ онъ то опускается, то опять подымается.

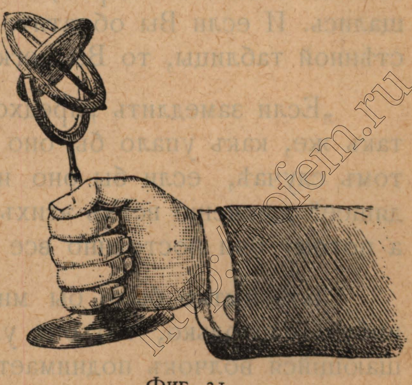
Можетъ быть, хорошо будетъ еще нѣсколько больше разъяснить этотъ предметъ. Вы замѣчаете подобное же явленiе на этомъ волчкѣ. Если „предходящее“ движенiе происходитъ по сравненiю съ дѣйствiемъ силы тяжести слишкомъ быстро, то волчокъ поднимается, и, слѣдовательно, происходитъ замедленiе „предходящаго“ движенiя; теперь „предходящее“ движенiе слишкомъ медленно, чтобы уравновѣсить силу тяжести,—волчокъ нѣсколько наклоняется, и „предходящее“ движенiе ускоряется. Такого рода качанiе около нѣкотораго средняго положенiя происходитъ совершенно такъ, какъ качанiе маятника, и продолжается до тѣхъ поръ, пока тренiе не прекращаетъ его и пока волчокъ не приходитъ снова въ равномѣрное „предходящее“ движенiе въ нѣкоторомъ среднемъ положенiи. Въ гиростатѣ, уравновѣшенномъ почти горизонтально, это качанiе обнаруживается болѣе замѣтно, чѣмъ у волчка, такъ какъ у такого гиростата вращательное дѣйствiе тяжести убываетъ уже при незначительномъ поднятiи.

Часто люди науки, пытаясь популяризировать свои открытiя, уклоняются отъ истины въ мелочахъ, съ цѣлью сдѣлать картину явленiя достаточно ясной, и опираются на такiя положенiя, которыя могутъ сбить съ толку учениковъ, достигшихъ болѣе высокихъ ступеней знанiя. Такъ астрономы разсказываютъ публикѣ, что земля движется по эллиптическому пути вокругъ солнца, между тѣмъ какъ планеты подъ дѣйствiемъ взаимныхъ притягательныхъ силъ описываютъ пути, которые имѣютъ лишь приблизительно эллиптическую форму; специалисты въ области электричества тоже говорятъ публикѣ, что электрическая сила распространяется по проволокамъ, между тѣмъ какъ она на самомъ дѣлѣ перемѣщается по всякому другому пространству, но только не по тому, которое занято проволокой. Во время этой лекцiи я также воспользовался до нѣкоторой степени такимъ искусственнымъ прiемомъ; такъ, напримѣръ, вспомните, что сначала я оставилъ безъ вниманiя колебанiя или же качанiя, которыя возникаютъ въ гиростатѣ или въ волчкѣ вслѣдствiе толчка; затѣмъ я обошелъ молчанiемъ то обстоятельство, что мгновенная ось вращенiя совпадаетъ лишь приблизительно съ геометрической осью движущагося „предходящимъ“ движенiемъ гиростата или волчка. Но вообще Вы можете быть увѣрены, что если бы всѣ наши утвержденія приходилось выражать совершенно точно, то было бы необходимо употреблять сотни техническихъ выраженій и вводить цѣлый рядъ пояснительныхъ предложеній или же вводныхъ словъ, какъ въ полицейскомъ протоколѣ; и даже ученый былъ бы не въ состояніи выслушать много такихъ разсужденій. Вы, конечно, врядъ ли найдете возможнымъ, что даже такой великій ученый, какъ покойный профессоръ Ранкинъ (Rankine) въ моментъ, поэтическаго вдохновенія, могъ заблуждаться и заблуждаться даже больше, чѣмъ популярный лекторъ, приспособляя основную мысль своего произведенія къ требованіямъ стихотворнаго размѣра и подвергая ее необходимымъ упрощеніямъ. Въ его стихотвореніи: „Влюбленный математикъ“ заключаются слѣдующія строки:

Женщина любитъ танцы; она безъ труда
Находитъ уравненіе для вальса и польки.
Но вотъ она, набравшись смѣлости, начинаетъ кружиться
вокругъ своей оси,
При чемъ ея центръ тажести оказывается внѣ ея,
И она падаетъ вслѣдствіе силы земного притяженія.

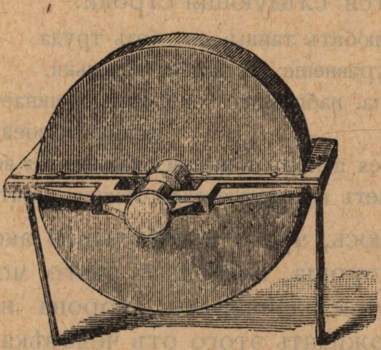
Я не сомнѣваюсь, что эта небольшая экскурсія въ область поэзіи настолько хороша, насколько этого можно ожидать отъ человѣка науки; но и научная ея сторона настолько хороша, насколько можно ожидать этого отъ человѣка, который выдаетъ себя за поэта. Въ обоихъ случаяхъ мы имѣемъ доказательство несовмѣстимости науки и стихотворнаго искусства.

Однако, движеніе этого гиростата можно сдѣлать еще болѣе сложнымъ, присоединяя къ нему нутацію (колебаніе, качаніе) или же прецессію („предхожденіе“), но при этомъ не происходитъ ничего такого, чего нельзя было бы объяснить при помощи простыхъ правилъ, которыя я привелъ выше. Разсмотримъ, напримѣръ, этотъ хорошо уравновѣшенный гиростатъ (фиг. 31). Если я ударю какимъ бы то ни было способомъ по внутреннему кольцу, то Вы видите, что гиростатъ начинаетъ дрожать, подобно куску студня; его быстрыя колебанія останавливаются точно такъ же, какъ и быстрыя колебаніи какого бы



Фиг. 31.

то ни было другого гибкаго, эластичнаго тѣла. Эта удивительная эластичность представляетъ величайшій интересъ, если мы разсмотримъ ее въ связи съ молекулярными свойствами матеріи. А вотъ (фиг. 32) еще одинъ примѣръ, который покажется, можетъ быть, еще интереснѣе. Я поставилъ гиростатъ, помѣщенный внутри барабана, который изображенъ на фиг. 5 и 6, но пару палочекъ, и Вы можете наблюдать, что онъ движется совершенно устойчиво; но это движеніе сопровождается въ высшей степени удивительными пошатываніями и вибраціями. Однако, въ этомъ движеніи, какъ оно ни своеобразно, нѣтъ ничего такого, что не можетъ быть легко разъяснено, если вы да сихъ поръ слѣдили за мной. Нѣкоторые изъ Васъ, которые внимательнѣе другихъ, замѣтятъ, что всѣ гиростаты, движеніе ко-



Фиг. 32.

торыхъ сопровождается „предхожденіемъ“, мало по малу все больше и больше наклоняются, совершенно такъ же, какъ это,— только нѣсколько скорѣе,—случилось бы, если бы они не вращались. И если Вы обратите вниманіе на третье правило нашей стѣнной таблицы, то Вы легко поймете, почему это такъ.

„Если замедлить „предходящее“ движеніе, то тѣло падаетъ такъ же, какъ упало бы оно подъ вліяніемъ силы тяжести въ томъ случаѣ, если бы оно не вращалось“. Но вѣдь „предходящее“ движеніе всѣхъ этихъ гиростатовъ замедляется треніемъ, а потому они постоянно все больше и больше наклоняются.

Любопытно было бы мнѣ знать, слѣдилъ ли за мной кто нибудь настолько, что онъ уже теперь понимаетъ, почему вращающійся волчокъ поднимается. Можетъ быть Вы еще не имѣли времени подумать надъ этимъ, но я уже нѣсколько разъ подчеркивалъ тѣ особенныя причины, которыя разъясняютъ это явленіе.

Треніе причиняетъ паденіе гиростата; что же заставляетъ волчокъ подниматься? Быстрый переходъ въ вертикальное положеніе, которымъ волчокъ предохраняетъ себя отъ паденія, есть несомнѣнный признакъ его быстраго вращенія; и я вспоминаю по этому поводу, какъ мы нѣкогда говорили: „онъ спитъ", когда онъ становился совершенно вертикально. Это былъ полный поэзіи оборотъ рѣчи, которымъ юный экспериментаторъ выражалъ свои мысли по поводу нѣжныхъ вибрацій волчка.

Хотя стремленіе волчка принять вертикальное положеніе стало хорошо извѣстно съ тѣхъ поръ, какъ его запустили въ первый разъ, однако я все-таки спрашиваю всѣхъ присутствующихъ въ этой залѣ, знаютъ ли они объясненіе этого явленія; сомнительно, чтобы было много людей, которымъ оно извѣстно. Всякій математикъ скажетъ Вамъ, что объясненіе навѣрно можно найти напечатаннымъ у Routh'а или что онъ знаетъ въ Кембриджѣ людей, которымъ, безъ сомнѣнія, извѣстно это объясненіе; можетъ быть, онъ думаетъ также, что онъ самъ его когда то зналъ, но что теперь онъ позабылъ тѣ трудныя математическія доказательства, на которыхъ онъ прежде изощрялъ свой умъ. Я думаю, что всѣ эти заявленія ошибочны, хотя я въ этомъ не вполнѣ увѣренъ *). Теорію этого явленія далъ отчасти г. Archibald Smith много лѣтъ тому назадъ въ кембриджскомъ математическомъ журналѣ, но задача эта была дѣйствительно разрѣшена сэромъ William'омъ Tomson'омъ и профессоромъ Biackburn'омъ, когда они провели цѣлый годъ на морскомъ побережьѣ, приготовляясь къ большому Кембриджскому математическому экзамену.

(*Продолженіе слѣдуетъ*).

---

*) Когда этотъ докладъ съ вышеупомянутымъ утвержденіемъ какъ разъ находился въ печати, проф. Фицжеральдъ указалъ мнѣ на „Разсужденіе о теоріи тренія" покойнаго проф. Jellet, изданное въ 1872 г., и тамъ я нашелъ на страницѣ 18 математическое разъясненіе выпрямленія волчка.

ИСТОРИЧЕСКІЙ ОЧЕРКЪ
развитія ученія объ основаніяхъ геометріи.

Привать-доцента В. Кагана.

*(Продолженіе *).*

Первой работой, въ которой этотъ вопросъ опредѣленно поставленъ и разрѣшенъ, является мемуаръ Миндинга въ XIX томѣ журнала Крелля [1]). Аналитически задача сводится къ слѣдующему: Двѣ поверхности отнесены—первая къ перемѣннымъ u, v, вторая къ перемѣннымъ u_1, v_1, и заданы своими линейными элементами:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \text{ и } ds_1{}^2 = E_1du^2{}_1 + 2F_1du_1dv_1 + G_1dv_1{}^2.$$

Спрашивается, могутъ ли перемѣнныя u_1, v_1 быть выражены въ функціяхъ отъ u и v такимъ образомъ, чтобы дифференціалъ ds_1 по преобразованіи къ перемѣннымъ u, v, совпалъ съ дифференціаломъ ds. Или еще иначе: существуютъ ли такія функціи $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, чтобы уравненіе

$$E_1du_1{}^2 + 2F_1du_1dv_1 + G_1dv_1{}^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \qquad (10)$$

было слѣдствіемъ уравненій

$$u_1 = \varphi(u, v), \quad v = \psi(u, v). \qquad (11)$$

Согласно теоремѣ Гаусса, равенство

$$K_1 = K, \qquad (12)$$

гдѣ K_1, и K означаютъ мѣру кривизны соотвѣтствующей поверхности въ точкахъ u, v и u_1, v_1, выражаетъ необходимое условіе, чтобы одна поверхность могла быть наложена на другую. Чтобы рѣшить вопросъ о томъ, достаточно ли этого условія, нужно различать два случая: a) когда равенство (12) представляетъ собой тождество и b), когда оно представляетъ собой уравненіе, связывающее координаты соотвѣтствующихъ точекъ.

Первый случай имѣетъ мѣсто при томъ и только при томъ условіи, когда K и K_1 имѣютъ постоянныя значенія (ибо K_1 зависитъ только отъ перемѣнныхъ u_1 и v_1, K—только отъ перемѣнныхъ u и v), т. е. когда обѣ поверхности имѣютъ постоянную и одинаковую мѣру кривизны.

Если эта постоянная кривизна равна нулю, то мы имѣемъ дѣло съ поверхностями, развертывающимися на плоскость; такія

[1]) *F. Minding.* „Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmasse". Journal f. reine und angew. Mathem. B. XIX. 1839.

*) См. № 395 „Вѣстника".

поверхности всегда могутъ быть развернуты другъ на друга и при томъ такъ, чтобы произвольная точка O одной поверхности совпала съ произвольной точкой O' другой поверхности и чтобы любая геодезическая линія, проходящая черезъ точку O на первой поверхности, совпала съ любой геодезической линіей, проходящей черезъ точку O' на другой поверхности; — это было хорошо извѣстно задолго до появленія мемуара, о которомъ идетъ рѣчь. Но Миндингъ обнаружилъ, что то же самое справедливо также для всѣхъ поверхностей, имѣющихъ постоянную кривизну, хотя бы и отличную отъ нуля. Именно, интегрируя уравненіе (9) въ предположеніи, что K есть постоянное количество, Миндингъ обнаруживаетъ, что на поверхности, имѣющей постоянную положительную кривизну K, квадратъ элемента длины всегда можетъ быть приведенъ къ виду

$$dr^2 + \frac{1}{K} \operatorname{Sin}^2 [r \sqrt{K}] d\varphi^2. \tag{13}$$

Элементъ длины, такимъ образомъ, въ этомъ случаѣ вполнѣ опредѣляется мѣрой кривизны. Если на другой поверхности, имѣющей ту же постоянную мѣру кривизны, примемъ за полюсъ произвольную точку O' и произвольную геодезическую линію, черезъ нее проходящую, за полярную ось, то квадратъ элемента длины на поверхности приметъ форму

$$dr_1^2 + \frac{1}{K} \operatorname{Sin}^2 [r_1 \sqrt{K}] d\varphi_1^2. \tag{14}$$

Если мы положимъ теперь

$$r_1 = r \text{ и } \varphi_1 = \varphi + \omega,$$

гдѣ ω есть произвольная постоянная, то выраженіе (14), по преобразованіи перемѣнныхъ, совпадетъ съ выраженіемъ (13). Отсюда вытекаетъ, что поверхности могутъ быть наложены одна на другую и при томъ такъ, чтобы любая точка O $(r=0)$ первой поверхности совпала съ любой точкой O' $(r_1=0)$ другой поверхности и чтобы любая геодезическая линія первой поверхности совпала съ любой геодезической линіей второй поверхности. Иными словами, наложеніе можетъ въ этомъ случаѣ сопровождаться перемѣщеніемъ поверхности одной по другой съ тремя степенями свободы, аналогично передвиженію плоской фигуры въ своей плоскости.

Такимъ же образомъ на поверхностяхъ, имѣющихъ постоянную отрицательную кривизну K, элементъ длины всегда можетъ быть приведенъ къ виду

$$\sqrt{dr^2 - \frac{1}{K} \operatorname{Sinh}^2 [r \sqrt{-K}] d\varphi^2}, \tag{15}$$

гдѣ $\operatorname{Sinh} \alpha$ означаетъ гиперболическій синусъ отъ α.

Исчерпавъ такимъ образомъ тотъ случай, когда равенство

(12) представляетъ собой тождество, Миндингъ обращается ко второму случаю, когда оно представляетъ собой уравненіе. Въ этомъ случаѣ мы имѣемъ одно уравненіе, связывающее координаты точекъ, которыя приходятъ въ совмѣщеніе, если наложеніе возможно. Миндингъ ставитъ себѣ задачей найти второе уравненіе и дѣйствительно, при помощи сравнительно простыхъ преобразованій, находитъ его въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{E_1\left(\frac{\partial K_1}{\partial v_1}\right)^2 - 2F_1\left(\frac{\partial K_1}{\partial u_1}\right)\left(\frac{\partial K_1}{\partial v_1}\right) + G_1\left(\frac{\partial K_1}{\partial u_1}\right)^2}{E_1G_1 - F_1{}^2} =$$

$$= \frac{E\left(\frac{\partial K}{\partial v}\right)^2 - 2F\left(\frac{\partial K}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial K}{\partial v}\right) + G\left(\frac{\partial K}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2}. \tag{16}$$

Итакъ, сверхъ уравненія (12), въ случаѣ, когда поверхности не имѣютъ постоянной кривизны, мы имѣемъ еще одно условіе, необходимое для того, чтобы наложеніе было возможно. Если уравненія (16) и (12) независимы другъ отъ друга, то они устанавливаютъ тѣ соотношенія, которыя должны существовать между координатами соотвѣтствующихъ точекъ, когда наложеніе возможно; а возможно оно въ томъ случаѣ, если опредѣляемыя ими функціи u_1 и v_1 удовлетворяютъ уравненію (10), т. е. если уравненіе (10) представляетъ собой слѣдствіе уравненій (12) и (16). При этихъ условіяхъ наложеніе можетъ быть выполнено однимъ или нѣсколькими способами, но во всякомъ случаѣ возможенъ лишь дискретный рядъ наложеній.

Если же уравненіе (16) эквивалентно уравненію (12), то они устанавливаютъ только одну зависимость между перемѣнными u_1, v_1 и u, v. Чтобы найти въ этомъ случаѣ вторую зависимость, нужно исключить одну изъ перемѣнныхъ u_1 или v_1 (скажемъ v_1) изъ уравненій (10) и (16). Тогда мы получимъ уравненіе въ полныхъ дифференціалахъ, между тремя перемѣнными u_1, u и v, которое должно опредѣлить функцію u_1 въ зависимости отъ u и v; для этого нужно только, чтобы это дифференціальное уравненіе принадлежало къ числу интегрируемыхъ; Миндингъ устанавливаетъ необходимыя и достаточныя для этого условія. Если это дифференціальное уравненіе интегрируется, то оно, какъ уже сказано выше, опредѣляетъ u_1 въ зависимости отъ u и v; но эта зависимость содержитъ произвольную постоянную. Изъ уравненія (12) или (16) мы получаемъ затѣмъ v_1 въ функціи u и v. Здѣсь возможно, слѣдовательно, безчисленное множество наложеній; одна поверхность можетъ передвигаться по другой, непрерывно деформируясь при одной степени свободы.

Геометрически это можно представить слѣдующимъ образомъ. Если кривизна поверхности не постоянная, то черезъ каждую точку проходитъ кривая, вдоль по которой кривизна поверхности имѣетъ одно и то же значеніе. При наложеніи поверхностей линіи постоянной кривизны съ одинаковымъ ея значеніемъ совмѣщаются.

Если мы назовемъ, для наглядности, выраженіе

$$\frac{E\left(\frac{\partial K}{\partial v}\right)^2 - 2E\left(\frac{\partial K}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial K}{\partial v}\right) + G\left(\frac{\partial K}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2} \tag{17}$$

второй кривизной поверхности [1]) въ точкѣ (u, v), то уравненіе (16) выражаетъ, что и вторая кривизна сохраняетъ свое значеніе при изгибаніи поверхности. Поэтому линіи постоянной второй кривизны при наложеніи поверхностей должны совмѣщаться также соотвѣтствующими линіями на другой поверхности. Если одна поверхность можетъ быть наложена на другую, и въ каждой точкѣ первой поверхности пересѣкаются кривая постоянной первой кривизны и кривая постоянной второй кривизны, то каждая точка можетъ совмѣститься только съ такой точкой второй поверхности, въ которой пересѣкаются соотвѣтствующія кривыя. Но если кривыя постоянной первой кривизны совпадаютъ съ кривыми постоянной второй кривизны, то наложеніе можетъ сопровождаться скольженіемъ вдоль по этимъ кривымъ.

Такимъ образомъ задача объ условіяхъ, необходимыхъ и достаточныхъ для того, чтобы наложеніе одной поверхности на другую было возможно, разрѣшена Миндингомъ. По существу, не только ближайшіе изслѣдователи ничего къ этому рѣшенію не прибавили, но даже О. Бонне, въ своемъ мемуарѣ, который служитъ отвѣтомъ на тему, заданную на премію въ 1860 г. Парижской Академіей [2]), возвращаясь къ этому вопросу, излагаетъ рѣшеніе Миндинга съ несущественными измѣненіями. Но съ точки зрѣнія методологическаго изслѣдованія эти получили совершенно другое освѣщеніе, благодаря работамъ Казорати и Бельтрами. Такъ какъ именно эти работы послужили руководящей нитью для дальнѣйшихъ обобщеній, то намъ необходимо съ ними познакомиться.

Въ 1860 г. Казорати [3]) опубликовалъ мемуаръ: „Основное изслѣдованіе, касающееся нѣкотораго класса свойствъ кривыхъ поверхностей". Въ этомъ мемуарѣ авторъ устанавливаетъ слѣдующую точку зрѣнія на изучаемый нами вопросъ.

Квадратъ линейнаго элемента на поверхности, отнесенной къ перемѣннымъ u_1, v_1, представляетъ собой квадратичную форму относительно дифференціаловъ du_1 и dv_1. Форма эта можетъ имѣть только положительныя значенія. Предположимъ, что мы пре-

---

[1]) Терминъ нашъ.

[2]) *O. Bonnet.* „Sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée". Journ. de l'école Politechnique. Cahier 41. 1861.

[3]) *F. Casorati.* „Ricerca fondamentale per lo studio di una certa classe di proprieta delle superficie curve". Annali di Matematica. T. III. 1860.

образовываемъ дифференціальную форму

$$E_1 du_1^2 + 2F_1 du_1 dv_1 + G_1 dv_1^2$$

къ новымъ перемѣннымъ u, v, благодаря чему она получаетъ видъ:

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Существуютъ такія функціи коэффиціентовъ E_1, F_1, G_1 и ихъ производныхъ различныхъ порядковъ по перемѣннымъ u_1, v_1, которыя послѣ преобразованія перемѣнныхъ переходятъ въ совершенно такія же функціи коэффиціентовъ E, F и G преобразованной формы. Это значитъ, если

$$\Phi\left(E_1, F_1, G_1, \frac{\partial E_1}{\partial u_1}, \frac{\partial E_1}{\partial v_1} \cdots \frac{\partial G_1}{\partial v_1}, \frac{\partial^2 E_1}{\partial u_1^2} \cdots \frac{\partial^2 G_1}{\partial v_1^2} \cdots\right)$$

есть такая функція, то равенство

$$E_1 du_1^2 + 2F_1 du_1 dv_1 + G_1 dv_1 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

влечетъ за собой равенство

$$\Phi\left(E_1, F_1, G_1, \frac{\partial E_1}{\partial u_1}, \frac{\partial E_1}{\partial v_1} \cdots \frac{\partial G_1}{\partial v_1}, \frac{\partial^2 E_1}{\partial u_1^2} \cdots \frac{\partial^2 G_1}{\partial v_1^2} \cdots\right) =$$

$$= \Phi\left(E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \frac{\partial E}{\partial v} \cdots \frac{\partial G}{\partial v}, \frac{\partial^2 E}{\partial u^2} \cdots \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} \cdots\right).$$

Такого рода функціи Казорати называетъ, по аналогіи съ инваріантами алгебраическихъ формъ, *неизмѣняемыми функціями* дифференціальныхъ формъ (funzione inalterabile); изъ различныхъ названій, которыя присваивались этимъ функціямъ позже другими авторами, утвердился терминъ *дифференціальный инваріантъ*, принадлежащій, если мы не ошибаемся, Софусу Ли. Порядокъ наивысшей производной отъ функцій E, F, G, входящей въ составъ дифференціальнаго инваріанта, Казорати называетъ *порядкомъ дифференціальнаго инваріанта*. Казорати указываетъ также пріемъ для разысканія дифференціальныхъ инваріантовъ и съ помощью этого пріема, безъ всякихъ геометрическихъ соображеній, доказываетъ, что квадратичная бинарная дифференціальная форма имѣетъ дифференціальный инваріантъ 2-го порядка, совпадающій съ выраженіемъ K изъ уравненія (5). Это даетъ новое освѣщеніе и новое доказательство теоремы Гаусса. Вмѣстѣ съ тѣмъ при помощи пріема, мало отличающагося отъ вычисленій Миндинга, Казорати обнаруживаетъ, что та же форма имѣетъ также дифференціальный инваріантъ 3-го порядка, выражаемый формулой (17).

Итакъ, Гауссу принадлежитъ идея изученія поверхности, какъ говорятъ, „самой въ себѣ", т. е. тѣхъ свойствъ поверхности, которыя не зависятъ отъ случайной формы ея, а сохраняются при изгибаніи. Аналитически такое изученіе поверхности сводится къ разысканію тѣхъ величинъ и образовъ, которые вполнѣ опредѣляются элементомъ длины на этой поверхности. Съ точки зрѣнія Казорати такое изслѣдованіе поверхности сводится къ изученію дифференціальныхъ инваріантовъ формы, выражающей квадратъ элемента длины. Но чтобы такая точка зрѣнія была правильна, необходимо расширить понятіе о дифференціальномъ инваріантѣ, какъ это сдѣлано Бельтрами въ мемуарѣ: „Изслѣдодованія въ области приложеній анализа къ геометріи“, опубликованномъ въ 1864 г. [1]). Вотъ какъ Бельтрами обобщаетъ понятіе о дифференціальномъ инваріантѣ.

Положимъ, что форма

$$E_1 du_1^2 + 2F_1 du_1 dv_1 + G_1 dv_1^2$$

зависитъ отъ перемѣнныхъ u_1, v_1. Пусть φ_1, ψ_1, χ_1 будутъ нѣкоторыя функціи тѣхъ же перемѣнныхъ; допустимъ далѣе, что при преобразованіи перемѣнныхъ онѣ обращаются въ функціи φ, ψ, χ отъ новыхъ перемѣнныхъ u, v. Положимъ теперь, что нѣкоторая функція Φ отъ коэффиціентовъ дифференціальной формы E_1, F_1, G_1 и ихъ производныхъ по перемѣннымъ u_1 и v_1, а также отъ функцій φ_1, ψ_1, $\chi_1 \ldots$ и ихъ производныхъ по тѣмъ же перемѣннымъ при переходѣ къ новымъ перемѣннымъ u, v обращается въ такую же функцію Φ отъ коэффиціентовъ преобразованной формы, отъ преобразованныхъ функцій φ, ψ, χ, и отъ ихъ производныхъ по перемѣннымъ u, v, такъ что имѣетъ мѣсто равенство

$$\Phi\left\{E_1, F_1, G_1, \frac{\partial E_1}{\partial u_1}, \ldots \frac{\partial G_1}{\partial v_1}, \frac{\partial^2 E_1}{\partial u_1^2} \ldots \varphi_1, \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial v_1} \ldots, \psi_1, \frac{\partial \psi_1}{\partial u_1}, \frac{\partial \psi_1}{\partial v_1} \ldots, \chi_1, \frac{\partial \chi_1}{\partial u_1}, \frac{\partial \chi_1}{\partial v_1} \ldots\right\} =$$

$$= \Phi\left\{E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u} \ldots \frac{\partial G}{\partial v}, \frac{\partial^2 E}{\partial u^2} \ldots \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \ldots \psi, \frac{\partial \psi}{\partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial v} \ldots \chi, \frac{\partial \chi}{\partial u}, \frac{\partial \chi}{\partial v} \ldots\right\}.$$

Такимъ функціямъ Бельтрами также присваиваетъ названіе *инваріантовъ* формы, въ отличіе отъ которыхъ онъ называетъ инваріанты, свободные отъ добавочныхъ функцій $\varphi, \psi, \chi, \ldots$, *абсолютными инваріантами*. Одинъ изъ простѣйшихъ инваріантовъ этого вида выраженія функцій:

$$\frac{E\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\dfrac{\partial \psi}{\partial v} - F\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\dfrac{\partial \psi}{\partial v} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\dfrac{\partial \psi}{\partial u}\right) + G\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\dfrac{\partial \psi}{\partial u}}{EG - F^2},$$

въ чемъ можно безъ труда убѣдиться преобразованіемъ перемѣнныхъ. Бельтрами обозначаетъ его символомъ $\Delta \varphi \psi$.

Если въ этой функціи положить $\varphi = \psi$, то получимъ диффе-

[1]) *E. Beltrami.* „Ricerche di analisi applicata alla geometria“. Giornale di Matematiche. Vol. II. 1864.

ренціальный инваріантъ, содержащій только одну добавочную функцію

$$\frac{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2}.$$

Этотъ дифференціальный инваріантъ Бельтрами называетъ *дифференціальнымъ параметромъ перваго порядка функціи* φ *по отношенію къ квадратичной формѣ* и обозначаетъ его символомъ $\triangle\varphi$.

Если K есть мѣра кривизны поверхности, то инваріантъ (17) есть не что иное, какъ $\triangle K$.

На слѣдующемъ примѣрѣ выясняется значеніе этихъ инваріантовъ. На поверхности, отнесенной къ перемѣннымъ (u, v), черезъ точку (u, v) проходятъ двѣ кривыя $\varphi(u, v) = 0$ и $\psi(u, v) = 0$. Уголъ ω между кривыми въ общей точкѣ опредѣляется формулой

$$\text{Cos}\omega = \frac{\triangle\varphi\psi}{\sqrt{\triangle\varphi\triangle\psi}}. \qquad (18)$$

Поэтому равенство

$$\frac{\triangle\varphi_1\psi_1}{\sqrt{\triangle\varphi_1\triangle\psi_1}} = \frac{\triangle\varphi\psi}{\sqrt{\triangle\varphi\triangle\psi}}$$

выражаетъ, что уголъ между двумя кривыми на поверхности не мѣняется при ея изгибаніи.

Если понимать дифференціальный инваріантъ въ этомъ смыслѣ слова, то дѣйствительно изслѣдованіе поверхности въ самой себѣ, какъ это понимаетъ Гауссъ, сводится къ изученію дифференціальныхъ инваріантовъ элемента длины.

Вопросъ о наложеніи поверхностей имѣетъ очень обширную дальнѣйшую литературу; но она посвящена, главнымъ образомъ, другому вопросу: нахожденію всѣхъ поверхностей, развертывающихся на данную поверхность. Но эта задача разрѣшена лишь въ весьма немногихъ простѣйшихъ случаяхъ.

(Продолженіе слѣдуетъ).

О разложенiи функцiй въ непрерывныя дроби.

П. Свѣшникова.

(Продолженiе *).

9. Полагаемъ въ предыдущихъ формулахъ $a=\frac{x^2}{4}$, $b=\frac{1}{2}$. Тогда получимъ:

$$f\left(\frac{x^2}{4},\frac{1}{2}\right)=1+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\ldots+\frac{x^{2n}}{1.2.3.4\ldots 2n}+\ldots=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

$$f\left(\frac{x^2}{4},\frac{3}{2}\right)=1+\frac{x^2}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4.5}+\ldots+\frac{x^{2n}}{1.2.3\ldots(2n+1)}+\ldots=$$

$$=\frac{e^x-e^{-x}}{2x}.$$

$$\frac{\frac{x^2}{4}\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{2x}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}}=\cfrac{\frac{x^2}{4}}{\frac{1}{2}+\cfrac{\frac{x^2}{4}}{\frac{3}{2}+\cfrac{\frac{x^2}{4}}{\frac{5}{2}+\cfrac{\frac{x^2}{4}}{\frac{7}{2}+\ldots}}}},\quad\text{или}\quad \frac{x(e^x-e^{-x})}{e^x+e^{-x}}=\cfrac{x^2}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{x^2}{5+\cfrac{x^2}{7+\ldots}}}},$$

или

$$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\cfrac{1}{x^{-1}+\cfrac{1}{3x^{-1}+\cfrac{1}{5x^{-1}+\cfrac{1}{7x^{-1}+\ldots}}}}.$$

Полагая $x=\frac{y}{2}$, находимъ:

$$\frac{y\left(e^{\frac{y}{2}}-e^{-\frac{y}{2}}\right)}{2\left(e^{\frac{y}{2}}+e^{-\frac{y}{2}}\right)}=\cfrac{y^2}{4.1+\cfrac{y^2}{3+\cfrac{y^2}{4.5+\cfrac{y^2}{7+\ldots}}}}.$$

*) См. № 395 „Вѣстника“.

Если $y = \frac{\alpha}{\beta}$, то написанная непрерывная дробь можетъ быть представлена въ видѣ:

$$\cfrac{\alpha^2}{4.1\beta^2+\cfrac{\alpha^2}{3+\cfrac{\alpha^2}{4.5\beta^2+\cfrac{\alpha^2}{7+\dots}}}}.$$

По доказанному ранѣе заключаемъ, что при соизмѣримомъ значеніи y функція $\frac{y\left(e^{\frac{y}{2}}-e^{-\frac{y}{2}}\right)}{2\left(e^{\frac{y}{2}}+e^{-\frac{y}{2}}\right)}$ есть число несоизмѣримое. Но эта функція равна $\frac{y}{2}\cdot\frac{e^y-1}{e^y+1}=\frac{y}{2}\left(1-\frac{2}{e^y+1}\right)\cdot$ Отсюда видимъ, что при соизмѣримомъ значеніи y выраженіе e^y есть число несоизмѣримое. Изъ равенства $e^y = N$ заключаемъ, что при основаніи e логариѳмы соизмѣримыхъ чиселъ будутъ несоизмѣримы.

Полагая $y=1$, находимъ: $1-\frac{2}{e+1}=\cfrac{2}{4.1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4.5+\cfrac{1}{7+\dots}}}}$,

откуда

$$1+e=\cfrac{2}{1-\cfrac{2}{4.1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4.5+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{4.9+\dots}}}}}}.$$

Послѣдовательныя подходящія дроби будутъ $\frac{2}{1}$, $\frac{8}{2}$, $\frac{8.3+2}{2.3+1}=\frac{26}{7}$, $\frac{26.20+8}{7.20+2}=\frac{528}{142}$, $\frac{528.7+26}{142.7+7}=\frac{3722}{1001}\cdot$ Такимъ образомъ $1+e=\frac{3722}{1001}$ до $\frac{4}{1001.(1001.36+142)}$, $e=\frac{2721}{1001}$ до $\frac{2}{18107089}$ или $e = 2{,}718281$ до $0{,}000001$.

10. Полагаемъ въ предыдущихъ формулахъ $a = -\frac{x^2}{4}$, $b = \frac{1}{2}\cdot$ Тогда получимъ:

$$f\left(-\frac{x^2}{4},\ \frac{1}{2}\right)=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{1.2.3\ldots 2n}+\ldots=\operatorname{Cos}x;$$

$$f\left(-\frac{x^2}{4},\ \frac{3}{2}\right)=1-\frac{x^2}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4.5}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{1.2.3\ldots(2n+1)}+\ldots=\frac{\operatorname{Sin}x}{x};$$

$$\frac{-\frac{x^2}{4}\,\frac{\operatorname{Sin}x}{x}}{\frac{1}{2}\operatorname{Cos}x}=\cfrac{-\frac{x^2}{4}}{\frac{1}{2}-\cfrac{\frac{x^2}{4}}{\frac{3}{2}-\cfrac{\frac{x^2}{4}}{\frac{5}{2}-\cfrac{\frac{x^2}{4}}{\frac{7}{2}-\ldots}}}},\quad x\operatorname{tg}x=\cfrac{x^2}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\ldots}}}}.$$

Положимъ, что $x=\frac{\alpha}{\beta}$, гдѣ α и β цѣлыя числа. Тогда получимъ:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{\beta}=\cfrac{\alpha}{\beta-\cfrac{\alpha^2}{3\beta-\cfrac{\alpha^2}{5\beta-\cfrac{\alpha^2}{7\beta-\ldots}}}}$$

Отсюда видно, что при соизмѣримомъ значенiи x величина $\operatorname{tg}x$ есть число несоизмѣримое. Изъ равенствъ $\operatorname{tg}x=z$ и $x=\operatorname{arctg}z$ заключаемъ, что $\operatorname{arctg}z$ при соизмѣримомъ значенiи z представляетъ несоизмѣримое число. Но $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$. Поэтому $\frac{\pi}{4}$ и π суть несоизмѣримыя числа.

Такъ какъ $f\left(-\frac{\pi^2}{4},\frac{3}{2}\right)=\frac{\sin\pi}{\pi}=0$, то $-\frac{3}{2}=\cfrac{-\frac{\pi^2}{4}}{\frac{5}{2}-\cfrac{\frac{\pi^2}{4}}{\frac{7}{2}-\cfrac{\frac{\pi^2}{4}}{\frac{9}{2}-\ldots}}}$

откуда $3=\cfrac{\pi^2}{5-\cfrac{\pi^2}{7-\cfrac{\pi^2}{9-\ldots}}}$.

Если допустимъ, что π^2 равно соизмѣримой дроби $\frac{\alpha}{\beta}$, то получимъ: $3 = \cfrac{\alpha}{5\beta - \cfrac{\alpha}{7 - \cfrac{\alpha}{9\beta - \cfrac{\alpha}{11 - \ldots}}}}$,

что невозможно, ибо правая часть послѣдняго равенства есть число, несоизмѣримое при цѣлыхъ значеніяхъ α и β. Такимъ образомъ π^2 есть число несоизмѣримое.

11. Преобразуя безконечный рядъ

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots$$

въ непрерывную дробь, получимъ:

$$e^x = 1 + \cfrac{x}{1 - \cfrac{x}{2 + \cfrac{x}{3 - \cfrac{x}{2 + \cfrac{x}{5 - \ldots}}}}}, \quad \text{откуда} \quad e = 1 + \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 - \ldots}}}}}.$$

Для вычисленія e составляемъ подходящія дроби:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{2.2-1}{1.2-1} = \frac{3}{1}, \frac{3.3+2}{1.3+1} = \frac{11}{4}, \frac{11.2-3}{4.2-1} = \frac{19}{7}, \frac{19.5+11}{7.5+4} = \frac{106}{39},$$

$$\frac{106.2-19}{39.2-7} = \frac{193}{71}, \frac{193.7+106}{71.7+39} = \frac{1457}{536}, \frac{1457.2-193}{536.2-71} = \frac{2721}{1001} = \frac{p_8}{q_8},$$

$$\frac{2721.9+1457}{1001.9+536} = \frac{25946}{9545} = \frac{p_9}{q_9};\; e - \frac{p_9}{q_9} > 0;\; e - \frac{p_{10}}{q_{10}} < 0,\; \frac{p_{10}}{q_{10}} - \frac{p_9}{q_9} = \frac{1}{q_9 q_{10}}$$

$= \frac{1}{9545.18089} = \frac{1}{172659505}$. Значитъ $e = \frac{25946}{9545} = 2{,}71828182$ съ недостаткомъ менѣе 0,00000001.

(Продолженіе слѣдуетъ).

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ" и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 641 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій:

$$y^n+z^n=\frac{a}{xyz},$$

$$z^n+x^n=\frac{b}{xyz},$$

$$x^n+y^n=\frac{c}{xyz}.$$

Н. Агрономовъ (Вологда).

№ 642 (4 сер.). Построить треугольникъ ABC по сторонѣ $AC=b$ и отрѣзкамъ $A\gamma=m$ и $C\alpha=n$ между вершинами угловъ A и C и основаніями γ и α биссектрисъ $A\alpha$ и $C\gamma$ этихъ угловъ.

В. Тюнинъ (Симскій заводъ)

№ 643 (4 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$y^4-x^3-x^2y=0.$$

П. Грицынъ (ст. Цымлянская).

№ 644 (4 сер.). Доказать, что число

$$(a-b)\sqrt{ab}$$

дѣлится на 24, если ab есть точный квадратъ и если a и b суть цѣлыя числа одинаковой четности *).

И. Коровинъ (Екатеринбургъ).

---

*) Т. е. или оба четныя, или оба нечетныя.

№ 645 (4 сер.). Данъ полукругъ діаметра $AB=2R$. Изъ точки M дуги полукруга опускаютъ перпендикуляръ MP, проводятъ хорды AM и BM и затѣмъ вращаютъ всю фигуру вокругъ оси AB. Полагая $AP=x$, вычислить въ функціи R и x выраженіе

$$y=\frac{\text{об. сегм. } AM+4 \text{ об. сегм. } BM}{\text{об. } \triangle\, AMB},$$

гдѣ об. сегм. AM, об. сегм. BM и об. $\triangle\, AMB$ суть объемы тѣлъ, получаемыхъ соотвѣтственно отъ вращенія вокругъ оси AB сегментовъ, отсѣкаемыхъ отъ полукруга хордами AM и BM, и треугольника AMB. Изслѣдовать, какъ измѣняется y съ измѣненіемъ x и найти *minimum* y.

(Заимств.).

№ 646 (4 сер.). Вертикальный цилиндръ, открытый въ верхней части и закрытый дномъ внизу, находится въ атмосферномъ воздухѣ. Въ отверстіе цилиндра помѣщаютъ плотно входящій сплошной желѣзный поршень толщиной въ 10 сантиметровъ; поршень этотъ, подъ вліяніемъ притягательной силы земли и давленія атмосферы, опускается и останавливается на высотѣ 936 миллиметровъ отъ дна цилиндра. Вычислить барометрическое давленіе въ моментъ опыта, пренебрегая треніемъ поршня о стѣнки цилиндра. Плотности ртути и желѣза равны соотвѣтственно 13,6 и 7,2.

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 536 (4 сер.). *Рѣшить систему уравненій*

$$x^3+y^3-z^3+3xyz=a,$$

$$x+y-z=b,$$

$$x^2+y^2-xy+xz+yz=c.$$

Прибавивъ къ первому уравненію $3x^2y+3xy^2$ и отнявъ то же выраженіе, найдемъ:

$$x^3+y^3+3x^2y+3xy^2-z^3-3x^2y-3xy^2+3xyz=a,$$

или

$$(x+y)^3-z^3-3xy(x+y-z)=a,$$

$$(x+y-z)[(x+y)^2+(x+y)z+z^2-3xy]=(x+y-z)(x^2+y^2+z^2-xy+xz+yz)=a \quad (1).$$

На основаніи второго и третьяго изъ данныхъ уравненій—уравненіе (1) можно представить въ видѣ $b(c+z^2)=a$, откуда

$$z=\pm\sqrt{\frac{a}{b}-c}. \quad (2)$$

Назвавъ одно изъ значеній z черезъ m (см. (2)), записываемъ второе и третье изъ данныхъ уравненій въ видѣ:

$$x+y=b+m \quad (2),$$

$$x^2+y^2+2xy-3xy+m(x+y)=c, \text{ или } (x+y)^2-3xy+a(x+y)=c. \quad (3)$$

Подставивъ вмѣсто $x+y$ изъ уравненія (2) въ уравненіе (3) $b+m$, получимъ:

$$(b+m)^2-3xy+m(b+m)=c,$$

откуда

$$xy = \frac{(b+m)^2+m(b+m)-c}{3} = \frac{2m^2+3bm+b^2-c}{3}. \qquad (4)$$

Изъ равенствъ (2) и (4) видно, что x и y суть корни квадратнаго уравненія:

$$t^2-(b+m)t+\frac{2m^2+3bm+b^2-c}{3}=0,$$

такъ что каждому изъ двухъ значеній z (см. (2)) отвѣчаютъ два значенія x и y, которыми они, кромѣ того, могутъ обмѣниваться.

Н. Готлибъ (Митава); *В. Гейманъ* (Θеодосія); *Г. Оганянцъ* (Москва); *М. Сейдель* (Ростовъ н/Д).

№ 538 (4 сер.). *Рѣшить систему уравненій*

$$\frac{y^2}{y-x}+\frac{z^2}{z-x}=a^2,$$

$$\frac{z^2}{z-y}+\frac{x^2}{x-y}=(a+b)^2,$$

$$\frac{x^2}{x-z}+\frac{y^2}{y-z}=b^2.$$

Нельзя предположить, чтобы одно изъ количествъ $y-x$, $z-x$, $z-y$ было равно нулю, такъ какъ тогда потеряла бы смыслъ лѣвая часть одного изъ предложенныхъ уравненій. Нельзя также предположить $x=0$, такъ какъ въ этомъ предположеніи система принимаетъ видъ $y+z=a^2$, $\frac{z^2}{z-y}=(a+b)^2$, $\frac{y^2}{y-z}=b^2$. Сумма двухъ послѣднихъ уравненій даетъ: $y+z=a^2+2b(a+b)$, а такъ какъ $y+z=a^2$, то $2b(a+b)=0$, и либо b, либо $a+b$ равно нулю. Если $b=0$, то $\frac{y^2}{y-z}=b^2=0$, откуда $y=0$, а потому и $x-y=0$, что невозможно; если $a+b=0$, то $\frac{z^2}{z-y}=(a+b)^2$, то $z=0$, а потому $x-z=0$, что невозможно. Итакъ, $x\neq 0$. Складывая данныя уравненія, получимъ:

$$\frac{y^2-x^2}{y-x}+\frac{x^2-z^2}{x-z}+\frac{z^2-y^2}{z-y}=y+x+x+z+z+y=2(x+y+z)=2(a^2+ab+b^2),$$

откуда

$$x+y+z=a^2+ab+b^2. \qquad (1)$$

Умножая данныя уравненія соотвѣтственно на x^2, y^2, z^2 и затѣмъ складывая ихъ, находимъ:

$$a^2x^2+(a+b)^2y^2+b^2z^2=0. \qquad (2)$$

Умножая же данныя уравненія соотвѣтственно на $\frac{1}{y-z}$, $\frac{1}{z-x}$, $\frac{1}{x-y}$ и затѣмъ, складывая ихъ, имѣемъ:

$$\frac{a^2}{y-z}+\frac{(a+b)^2}{z-x}+\frac{b^2}{x-y}=0,$$

или послѣ освобожденія отъ знаменателей и приведенія:

$$2[b(a+b)yz-abzx+a(a+b)xy]-[a^2x^2+(a+b)^2y^2+b^2z^2]=0,$$

откуда (см. (2))

$$b(a+b)yz-abzx+a(a+b)xy=0. \qquad (3)$$

Исключая $(a+b)y$ между уравненіями (2) и (3), получимъ:

$$a^2x^2+\frac{a^2b^2x^2z^2}{(ax+bz)^2}+b^2z^2=0, \qquad (4)$$

$$(a^2x^2+b^2z^2)(ax+bz)^2+a^2b^2x^2z^2=0, \quad (a^2x^2+b^2z^2)\left[(a^2x^2+b^2z^2)+2abxz\right]+a^2b^2x^2z^2=0,$$

$$(a^2x^2+b^2z^2)^2+2abxz(a^2x^2+b^2z^2)+a^2b^2x^2z^2=0,$$

$$(a^2x^2+b^2z^2+abxz)^2=0,$$

откуда

$$a^2x^2+abxz+b^2z^2=0. \qquad (5)$$

Дѣля уравненіе (5) на x^2, находимъ:

$$b^2\left(\frac{z}{x}\right)^2+ab\cdot\frac{z}{x}+a^2=0,$$

откуда

$$\frac{z}{x}=\frac{a}{b}\cdot\frac{-1\pm\sqrt{-1}}{2}=\frac{a\alpha}{b}, \qquad (6)$$

гдѣ α—одинъ изъ мнимыхъ корней третьей степени изъ единицы.

Дѣля на x^2 обѣ части уравненія (3), имѣемъ:

$$b(a+b)\cdot\frac{y}{x}\cdot\frac{z}{x}-ab\cdot\frac{z}{x}+a(a+b)\frac{y}{x}=0,$$

откуда (см. (6)):

$$\frac{y}{x}=\frac{ab\cdot\frac{z}{x}}{(a+b)\left(b\cdot\frac{z}{x}+a\right)}=\frac{a^2\alpha}{a(a+b)(1+\alpha)}. \qquad (7)$$

По свойству мнимаго корня третьей степени изъ единицы, удовлетворяющаго каждому изъ уравненій $t^3-1=0$ и $\frac{t^3-1}{t-1}=t^2+t+1=0$, имѣемъ: $1+\alpha=-\alpha^2$, $\alpha^3=1$; поэтому (см. (7)):

$$\frac{y}{x}=-\frac{a^2\alpha}{a(a+b)\alpha^2}=-\frac{a^2\alpha^2}{a(a+b)\alpha^3}=-\frac{a\alpha^2}{a+b}=\frac{a(1+\alpha)}{a+b}. \qquad (8)$$

Представивъ уравненіе (1) въ видѣ

$$x\left(1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}\right)=a^2+ab+b^2,$$

или (см. (6), (8))

$$x\left(1+\frac{a\alpha}{b}+\frac{a(1+\alpha)}{a+b}\right)=a^2+ab+b^2,$$

откуда

$$x=\frac{(a^2+ab+b^2)b(a+b)}{b(2a+b)+a(a+2b)\alpha},$$

(см. (6), (8))

$$y=-\frac{(a^2+ab+b^2)ab\alpha}{b(2a+b)+a(a+2b)\alpha},$$

$$z=\frac{(a^2+ab+b^2)a(a+b)\alpha}{b(2a+b)+a(a+2b)\alpha}.$$

Освобождая уравненіе (4) отъ знаменателя, мы полагали, что $ax+bz \neq 0$, такъ какъ въ противномъ случаѣ (см. (3)) $abzx=0$, откуда, такъ какъ $x \neq 0$, либо $a=0$, либо $b=0$, либо $z=0$. Но, рѣшивъ данную систему въ одномъ изъ этихъ предположеній, приходимъ къ тому, что $x=0$, что невозможно.

Г. Оганянцъ (Москва); *Н. С.* (Одесса).

№ 539 (4 сер.). *Дано положеніе точекъ* α, β *и* M, *въ которыхъ встрѣчаютъ соотвѣтственно окружность, описанную около треугольника* ABC, *биссектриса угла* A, *линія, дѣлящая уголъ* A *на три части, и медіана, проведенная изъ вершины* A. *Построить треугольникъ* ABC.

Предположимъ, что задача рѣшена. Пусть O—центръ описанной около треугольника окружности, K—средина BC. Такъ какъ, по условію, $\angle BA\alpha = \angle \alpha AC$, то $\smile B\alpha = \smile \alpha C$, а потому радіусъ $O\alpha$ перпендикуляренъ къ хордѣ BC; слѣдовательно, онъ проходитъ черезъ точку K. Пусть, для большей опредѣленности, обозначенія вершинъ B и C выбраны такъ, что $\angle \beta AC = \frac{1}{3}\angle BAC$. Тогда $\angle \alpha A\beta = \angle \alpha AC - \angle \beta AC = \frac{1}{2}\angle BAC - \frac{1}{3}\angle BAC = \frac{1}{6}\angle BAC$. Такъ какъ вписанные углы пропорціональны дугамъ, на которыя они опираются, то

$$\frac{\smile \alpha C}{\smile \alpha\beta} = \frac{\angle \alpha AC}{\angle \alpha A\beta} = \frac{\frac{1}{2}\angle BAC}{\frac{1}{6}\angle BAC} = 3, \text{ откуда } \smile \alpha C = \smile B\alpha = 3(\smile \alpha\beta). \qquad (1)$$

Изъ сказаннаго выше вытекаетъ построеніе: строимъ окружность, проходящую черезъ точки α, β, M, Откладываемъ по обѣ стороны отъ точки α дуги $\alpha B = \alpha C = 3\smile\alpha\beta$ и изъ центра O построенной окружности проводимъ радіусъ $O\alpha$, который пересѣчетъ BC въ нѣкоторой точкѣ K. Затѣмъ проводимъ MK до встрѣчи въ точкѣ A съ окружностью. Треугольникъ ABC есть искомый.

Г. Оганянцъ (Москва); *В. Гейманъ* (Ѳеодосія); *С. Конюховъ* (Никитовка); *В. С.* (Вологда).

№ 540 (4 сер.). *Найти maximum, котораго можетъ достигнуть въ треугольникѣ отношеніе между радіусами круговъ вписаннаго и описаннаго.*

Обозначая черезъ r, R, S, p, a, b, c соотвѣтственно радіусы круговъ вписаннаго и описаннаго, площадь, полупериметръ и стороны треугольника, имѣемъ:

$$r = \frac{S}{p},\ R = \frac{abc}{4S},\ \frac{r}{R} = \frac{4S^2}{pabc} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc} = \frac{4(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}. \qquad (1)$$

Полагая $p-a=x$, $p-b=y$, $p-c=z$ (2), получимъ изъ этихъ равенствъ:

$$a=y+z,\quad b=z+x,\quad c=x+y. \qquad (3)$$

Поэтому (см. (1), (2), (3))

$$\frac{r}{R} = \frac{4xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{4xyz}{2xyz+y^2x+x^2y+z^2y+y^2z+x^2z+zx^2} =$$

$$= \frac{4}{2+\frac{y}{z}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}}. \qquad (4)$$

Maximum отношенія $\frac{r}{R}$ будетъ достигнутъ (см. (4)) при minimum'ѣ суммы шести положительныхъ величинъ ($x>0$, $y>0$, $z>0$, такъ какъ во всякомъ треугольникѣ $p-a>0$, $p-b>0$, $p-c>0$; $\frac{y}{z}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}$, произведеніе которыхъ $\frac{y}{z}\cdot\frac{x}{z}\cdot\frac{y}{x}\cdot\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{z}{y}=1$ есть величина постоянная. Слѣдовательно, minimum этой суммы и вмѣстѣ съ тѣмъ maximum отношенія $\frac{r}{R}$ будетъ достигнутъ при $\frac{y}{z}=\frac{x}{z}=\frac{y}{x}=\frac{z}{x}=\frac{x}{y}=\frac{z}{y}$. (5) Равенства (5) выполняются только при $x=y=z$ (6), т. е. (см. (3), (2)), когда $a=b=c$. Итакъ, отношеніе $\frac{r}{R}$ достигаетъ maximum'а въ правильномъ треугольникѣ, въ которомъ оно равно (см. (4), (6)) $\frac{4}{2+6}=\frac{1}{2}$.

Г. Оганянцъ (Москва); *Н. Агрономовъ* (Вологда).

№ 541 (4 сер.). *Рѣшить систему уравненій*

$$(1+x^2)y^2+2(x-y)(1+xy)=a,$$

$$xy-y=b.$$

Представляя первое уравненіе въ видѣ

$$y^2(1+x^2)+2x-2y+2x^2y-2y^2x=a,$$

или

$$y^2(1-2x+x^2)+2y(x^2-1)+2x=a,$$

$$y^2(x-1)^2+2y(x-1)(x+1)+2x=a \qquad (1)$$

и замѣчая, что по условію $xy-y=y(x-1)=b$, мы можемъ записать равенство (1) такъ:

$$b^2+2b(x+1)+2x=a,$$

откуда

$$x=\frac{a-2b-b^2}{2(b+1)} \qquad (2).$$

Тогда, согласно второму изъ данныхъ уравненій, (см. (2))

$$y=\frac{b}{x-1}=\frac{2b(b+1)}{a-b^2-4b-2}.$$

Н. Готлибъ (Юрьевъ); *В. Гейманъ* (Ѳеодосія); *С. Конюховъ* (Никитовка); *Г. Оганянцъ* (Москва); *М. Сейдель* (Ростовъ н/Д); *Я. Виленкинъ* (Елатьма).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 11-го Августа 1905 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера. ул. Новосельскаго. д. № 66.

Обложка
пщется

Обложка
пщется