№ 371.

ВѢСТНИКЪ

ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Привать-Доцента В. Ф. Кагана.

XXXI-го Семестра № 11-й.

ОДЕССА.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.
1904.

8-й годъ изданія.

ОТКРЫТА ПОДПИСКА НА 1904 ГОДЪ
НА
ЕЖЕМѢСЯЧНЫЙ ТЕХНИЧЕСКІЙ ЖУРНАЛЪ

ИЗВѢСТІЯ
ЮЖНО-РУССКАГО ОБЩЕСТВА ТЕХНОЛОГОВЪ,

ИЗДАВАЕМЫЙ ПО СЛѢДУЮЩЕЙ ПРОГРАММѢ:

1) Свѣдѣнія о дѣятельности Общества: протоколы общихъ собраній, адресы членовъ Общества, родъ ихъ службы и т. п. 2) Различныя статьи по вопросамъ техники и промышленности. Электротехника. 3) Фабричное и желѣзнодорожное дѣло. 4) Техническое образованіе и техническія учебныя заведенія въ Россіи и заграницей. 5) Политико-экономическія статьи по вопросамъ промышленности. Статистика. Управленіе фабриками и заводами. Фабрично-заводская гигіена. 6) Главнѣйшія правительственныя распоряженія и мѣропріятія относительно фабрикъ и заводовъ 7) Хроника. Обзоръ техническихъ журналовъ. Рецензіи. Библіографія и проч. 8) Полемика. Корреспонденція. Вопросы и отвѣты. 9) Смѣсь. Біографіи и некрологи. 10) Объявленія.

Подписная цѣна на журналъ съ доставкой и пересылкой:

Для членовъ Общества . . . 1 руб.
Для постороннихъ лицъ и учрежденій . . . . . . 5 „

Отдѣльный номеръ . . . . **45** коп.
За перемѣну адреса . . . . **25** коп.

Плата за объявленія.

Годовыя, начиная съ любого номера.

	1/1 стр.	1/2 стр.	1/4 стр.
На обложкѣ:			
Вторая страница	120 руб.	80 руб.	60 руб.
Третья страница	100 „	60 „	40 „
Четвертая страница	160 „	100 „	75 „
Впереди текста	100 „	75 „	50 „
Позади текста	80 „	60 „	40 „

Разовыя объявленія.

1/1 стр.	1/2 стр.	1/4 стр.
20 руб.	12 руб.	8 руб.

Мелкія объявленія: годовыя по 40 коп. за строку петита въ 4 столбца.
„ „ разовыя по 10 коп. „ „ „ „ „ „

За объявленія по особому заказу взимается повышенная плата по соглашенію.

Разсылка объявленій, не превышающихъ 1 лота, принимается по 1 руб. 50 коп. за 100 экземпляровъ.

Подписка принимается на журналъ и объявленія въ Харьковѣ, Петровскій переулокъ, д. № 18.

XXXI Сем. № 11.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

15 Іюня № 371. 1904 г.

О НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКѢ.

Профессора **K. Schwarzschild'a** (въ Гёттингенѣ).

(*Окончаніе* *).

Къ сожалѣнію, послѣ того какъ были изучены эти соотношенія движеній, непосредственное объясненіе пробѣловъ въ роѣ астероидовъ и въ кольцѣ Сатурна изъ теоріи возмущеній рушилось. На тѣхъ мѣстахъ, гдѣ могли бы быть орбиты съ либраціями, астероиды *отсутствуютъ;* слѣдовательно, они должны были отсутствовать съ самаго начала, такъ какъ возмущенія могутъ удалять тѣла изъ начальнаго положенія только временно, чтобы затѣмъ, черезъ нѣсколько сотъ лѣтъ, снова вернуть ихъ въ прежнее положеніе. Поэтому, для объясненія пробѣловъ необходимо вмѣстѣ съ Калландро (Callandreau) обратиться къ космогоническимъ представленіямъ. Можно думать, что сильное измѣненіе и смѣщенія орбитъ въ мѣстахъ соизмѣримости помѣшали процессу конденсаціи вещества.

Кромѣ упомянутаго уже случая спутниковъ Юпитера, намъ извѣстно еще всего три въ высшей степени замѣчательныхъ случая либраціонныхъ движеній у спутниковъ Сатурна, изъ которыхъ я приведу только либрацію между спутниками Сатурна, Мимасомъ и Фетидой, открытую Г. Струве. Здѣсь либрирующій уголъ есть

$$\zeta = 4l' - 2l + (\theta + \theta').$$

*) См. № 370 „Вѣстника".

Членъ $\Theta + \Theta'$ относится къ положенію узловъ плоскостей орбитъ и, по существу, дѣла не мѣняетъ; именно, маятникъ, колеблясь чрезвычайно медленно, нѣсколько переходитъ за горизонтальную линію. Въ то время какъ сами спутники обходятъ вокругъ Сатурна въ 22·6 и 45·3 часовъ, уголъ ζ въ теченіе 70·6 лѣтъ доходитъ до 97^0 въ обѣ стороны.

Послѣ того какъ были изучены формы движенія въ случаѣ вѣковыхъ возмущеній, какъ и въ случаѣ соизмѣримости, обѣ эти баррикады пали. На проложенномъ пути теорія возмущеній быстро поднялась до результата, который можно назвать кульминаціонной точкой поступательнаго развитія классической небесной механики. Ньюкомбъ (Newcomb), Тиссеранъ (Tisserand), Линдстедтъ (Lindstedt), Гюльденъ (Gyldén), Болинъ (Bohlin) оказали здѣсь особенныя услуги, Пуэнкаре (Poincaré) далъ ему послѣднюю полировку. Этотъ результатъ гласитъ, что координаты планетъ могутъ быть развернуты въ чисто тригонометрическіе ряды. Въ современной теоріи возмущеній не выступаетъ больше никакихъ членовъ, пропорціальныхъ времени: всѣ возмущенія, которыя, казалось, съ теченіемъ времени должны рости безконечно, исчезли изъ нашихъ формулъ. Мы, наконецъ, пришли совершенно къ методу эпицикловъ древнихъ. Согласно древнимъ, каждая планета движется по маленькому кругу, центръ котораго передвигается по большому кругу, а иногда и центръ этого большого круга долженъ двигаться по еще бо́льшему кругу. Наше тригонометрическое разложеніе есть не что иное, какъ наложеніе однихъ на другіе безконечнаго числа все меньшихъ и меньшихъ эпицикловъ. Я долженъ прибавить, что скорости обращеній этихъ эпицикловъ опредѣляются величинами, кратными $3n$—1 скоростей при n планетахъ, слѣдовательно, при нашихъ 8 планетахъ 23 скоростями.

Если разсматривать этотъ результатъ безъ предвзятой мысли то нельзя не придти къ тому многозначительному заключенію, что солнечная система устойчива, что планеты должны вѣчно двигаться по тѣмъ же областямъ неба, такъ какъ ихъ движеніе является суммой, очевидно, небольшихъ возмущеній, періодически колеблющихся между опредѣленными границами. Когда въ концѣ 80-хъ годовъ прошлаго вѣка былъ достигнутъ этотъ результатъ, установилось мнѣніе, что теперь полученъ удовлетворительный отвѣтъ и на теоретическій вопросъ, кромѣ практическаго вопроса, разрѣшеннаго въ существенномъ уже классической небесной механикѣ; иначе говоря, что задача многихъ тѣлъ рѣшена окончательно. Но шествующая впередъ наука въ третій разъ произнесла свой вердиктъ. Въ ту минуту, когда думали увѣнчать зданіе классической небесной механики этимъ блестящимъ шпилемъ, оказалась зіяющая трещина въ фундаментѣ. Въ 1890 году Пуэнкаре доказалъ, что ряды прежнихъ и нынѣшнихъ видовъ, съ которыми работаютъ астрономы, въ извѣстной степени лишены смысла, ибо это ряды расходящіеся, — эпицикловъ такъ много и они такъ велики, что сумма ихъ радіусовъ безконечна.

Послѣ этого предложенія Пуэнкаре, которое произвело настоящую революцію, подтвержденіе формулъ астрономовъ наблюденіемъ движеній свѣтилъ должно быть случайностью, доказательство устойчивости планетной системы совершенно рушилось. Можно сильнѣе отмѣтить эту разницу—согласно изслѣдованіямъ Пуэнкаре о природѣ задачи трехъ тѣлъ, представляется очень возможнымъ, нужно сказать, почти вѣроятнымъ, что планетная система въ теченіе очень продолжительнаго времени неустойчива въ высшей степени, что земля можетъ когда-нибудь помѣняться мѣстомъ съ Юпитеромъ, что наша луна можетъ начать двигаться вокругъ Марса, а мы можемъ захватить Сатурново кольцо.

Едва ли можно представить себѣ болѣе рѣзкую разницу, чѣмъ разница между тою мыслью, что планетная система такъ поразительно неустойчива, и вѣрою въ тѣ разложенія рядовъ, подтвержденіе которыхъ опирается на астрономическое наблюденіе. Заключеніе моей задачи и составитъ показать, какъ соединяются эти обѣ точки зрѣнія.

Если мы оставимъ въ сторонѣ не лишенное возможности предположеніе, что эти тригонометрическіе ряды сходятся для нѣкоторыхъ начальныхъ значеній, образующихъ даже, быть можетъ, сгущенный комплексъ *), то Пуэнкаре, во всякомъ случаѣ, показалъ, что эти ряды имѣютъ характеръ такъ называемыхъ „полусходящихся" разложеній. Прежде всего, выражаясь абстрактнымъ математическимъ языкомъ, его предложеніе гласитъ: если остановиться на p-омъ членѣ этихъ рядовъ, то оставшаяся ошибка меньше, чѣмъ

$$\mu^p . A_p(t),$$

гдѣ μ есть величина порядка возмущающихъ массъ, а $A_p(t)$ для каждаго конечнаго указателя p и для каждаго конечнаго времени t есть величина конечная и независимая отъ μ. Нагляднѣе, эти ряды теоріи возмущеній аналогичны ряду

$$1 + \frac{3}{1000} + \frac{3^3}{(1000)^2} + \frac{3^{3^3}}{(1000)^3} + \ldots =$$

$$= 1 + 0 \cdot 003 + 0 \cdot 000\,027 + 7620 + \ldots,$$

въ которыхъ первые три члена быстро убываютъ, тогда какъ слѣдующіе ростутъ столь быстро, что уже пятый членъ представляетъ число съ билліонами цыфръ. При этомъ ряды такого рода обладаютъ тою особенностью, которою обусловливается ихъ практическое употребленіе, что точность, съ какою они представляютъ желаемый результатъ, зависитъ не отъ безконечно большихъ отброшенныхъ членовъ, но опредѣляется, по крайней мѣрѣ, въ отношеніи порядка величины, послѣднимъ принятымъ во вниманіе членомъ. Такимъ образомъ, астрономы поставлены

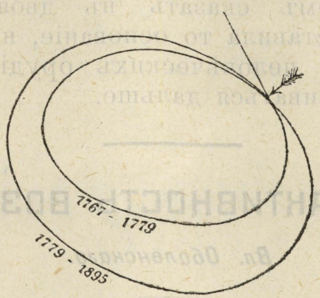
*) Это значитъ, въ каждомъ интервалѣ имѣется безконечное число значеній, для которыхъ рядъ сходится.

въ необходимость не продолжать безгранично своихъ рядовъ. Они это дѣлали и безъ того по практическимъ основаніямъ, и именно, въ своихъ разложеніяхъ они всегда останавливались на 3-емъ членѣ. То, что получается при этомъ, должно давать, согласно Пуэнкаре, для ограниченнаго времени хорошее приближеніе къ строгому рѣшенію задачи.

На основаніи простой оцѣнки остатка, которую я произвелъ для случая возмущенія земли Юпитеромъ, я могу выразить это предложеніе еще конкретнѣе. Можно показать, что тѣ формулы, которыя получаются изъ первыхъ трехъ членовъ этихъ рядовъ, въ теченіе тысячи лѣтъ будутъ имѣть, по меньшей мѣрѣ, точность до пятаго десятичнаго знака, и что, далѣе, Юпитеръ въ милліоны лѣтъ навѣрное измѣнитъ большую ось земной орбиты не болѣе, чѣмъ на $^1/_{100}$. Повидимому, едва ли можно сомнѣваться въ томъ, что, при болѣе тщательномъ изслѣдованіи по существующимъ методамъ, эту точность можно довести до седьмого знака, а указанное время до продолжительности 100 или 1000 милліоновъ лѣтъ.

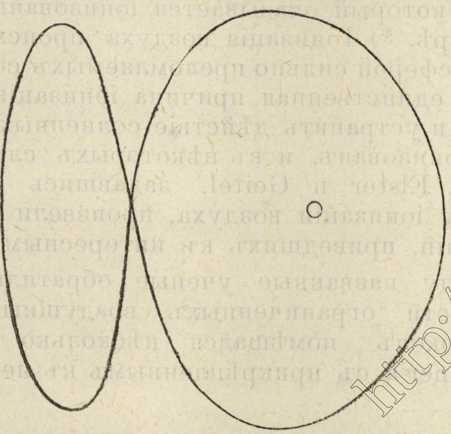
Этимъ упомянутый споръ разрѣшается. Обѣ стороны правы въ извѣстной мѣрѣ: формулы, которыми пользуются астрономы, пригодны, въ предѣлахъ точности наблюденій, для того періода времени, въ теченіе котораго вообще производятся астрономическія наблюденія; ихъ согласіе съ наблюденіями не случайно, если, конечно, имѣетъ мѣсто законъ Ньютона. Содержащееся въ нихъ утвержденіе объ устойчивости планетной системы правильно на милліоны лѣтъ въ томъ смыслѣ, что въ теченіе этого времени будутъ происходить только незначительныя измѣненія орбитъ; вѣроятно, это правильно еще и на 1000 милліоновъ лѣтъ. Только черезъ билліоны и трилліоны лѣтъ возмущенія могутъ накопиться до уничтоженія нынѣшняго порядка планетной системы.

Таковъ отвѣтъ, слѣдовательно, и на теоретическій вопросъ: онъ допускаетъ 100000-лѣтнее прошлое человѣческаго рода на устойчивой землѣ и даетъ мѣсто безграничной возможности его будущаго развитія въ теченіе ближайшаго милліона лѣтъ. Вопросъ, по меньшей мѣрѣ, подвинулся къ разрѣшенію въ такой мѣрѣ, что удовлетворитъ даже геолога, который для своихъ напластованій требуетъ 1000 милліоновъ лѣтъ. Только духъ чистаго математика, который хочетъ развязать всѣ узлы, даже и тѣ, которые завязалъ онъ самъ, не удовлетворенъ и логически спрашиваетъ дальше: отчего можетъ происходить, что эти многообѣщающіе тригонометрическіе ряды не сходятся? На это до извѣстной степени можно дать отвѣтъ: ибо по всему своему строенію, будь они сходящіеся, они, конечно, не могли бы представить всѣхъ формъ движеній, которыя появляются въ задачѣ многихъ тѣлъ. Что это за формы движеній,—о томъ должно будетъ дать заключеніе дальнѣйшее развитіе небесной механики; можно предполагать, что это движенія, то вращающагося, то качающагося маятника; можно себѣ представить, что между временами оборотовъ планетъ, между періодомъ колебаній маятника и временами обращеній должны встрѣчаться соизмѣримости, которыя могутъ обусловливать либраціонныя движенія высшаго порядка. Особенно важно будетъ найти переходъ между всѣми тѣми формами орбитъ, о которыхъ мы говорили до сихъ поръ и которыя возникаютъ при большихъ разстояніяхъ и малыхъ массахъ возмущающихъ тѣлъ, и между тѣми поразительными кривыми, которыя возникаютъ въ случаяхъ сильнаго сближенія тѣлъ или при большихъ, въ сравненіи съ главнымъ тѣломъ, массахъ. Я приведу два примѣра орбитъ послѣдняго рода. Первый взятъ изъ дѣйствительности. Комета Лекселля (Lexell) въ 1767 году (фиг. 2) близко подошла по пара-



Фиг. 2. Стрѣлкой указано положеніе Юпитера въ 1767 и 1779 гг.

болической орбитѣ къ Юпитеру; послѣднимъ орбита была измѣнена въ эллипсъ, который планета и обошла дважды, въ 5·6 лѣтъ каждый разъ, пока въ 1779 году она не подошла близко къ Юпитеру во второй разъ; ея орбита снова претерпѣла полное измѣненіе. Вѣроятно, съ тѣхъ поръ она проходитъ второй, указанный на рисункѣ эллипсъ, въ теченіе 7·2 лѣтъ, и въ 1895 году снова явилась къ намъ въ видѣ кометы Свифта (Swift). Вторымъ примѣромъ послужитъ полученная Дарвиномъ (G. H. Darwin) (фиг. 3), при помощи утомительной механической квадра-



Фиг. 3. Кружокъ въ срединѣ правой половины орбиты указываетъ положеніе земли; солнце должно находиться слѣва.

туры, возможная орбита нѣкоторой луны (спутника), которая въ теченіе одного оборота будетъ трижды находиться между землею и солнцемъ и въ теченіе мѣсяца представитъ три новолунія и только одно полнолуніе. Математикъ пойметъ, какія затрудненія должны возникнуть, чтобы дать такимъ формамъ орбитъ видъ, удобный для обработки.

Если мы бросимъ въ заключеніе еще разъ взглядъ на прежнюю исторію небесной механики въ ея связи съ разработкой механики вообще и припомнимъ въ то же время ея новыя завоеванія, ручающіяся за долгое сохраненіе нынѣшняго движенія земли, то мы можемъ сказать въ двоякомъ смыслѣ, что небесная механика доставила то основаніе, на которомъ механика человѣческаго тѣла и человѣческихъ орудій, земная механика, можетъ увѣренно развиваться дальше.

РАДІОАКТИВНОСТЬ ВОЗДУХА.

Вл. Оболенскаго.

Если заряженный электричествомъ проводникъ находится въ соприкосновеніи съ воздухомъ, то онъ постепенно теряетъ свой зарядъ и въ такой степени, что потеря эта не можетъ быть объяснена несовершенствомъ изоляціи подставокъ. На это явленіе въ послѣдніе годы было обращено большое вниманіе физиковъ. Изслѣдованія показали, что постепенное разряженіе проводниковъ въ воздухѣ нисколько не зависитъ отъ присутствія въ атмосферѣ пыли, а также и не зависитъ отъ влажности воздуха; эти примѣси, какъ оказалось, даже препятствуютъ разряженію проводниковъ. Причиной разряженія проводниковъ служитъ проводимость самого воздуха, который оказывается іонизованнымъ въ большей или меньшей мѣрѣ. *) Іонизація воздуха происходитъ вслѣдствіе поглощенія атмосферой сильно преломляемыхъ солнечныхъ лучей. Однако, это—не единственная причина іонизаціи воздуха; оказывается, что, если и устранить дѣйствіе солнечныхъ лучей, воздухъ все же будетъ іонизованъ, и въ нѣкоторыхъ случаяхъ въ значительной степени. Elster и Geitel, задавшись цѣлью отыскать главную причину іонизаціи воздуха, произвели много очень важныхъ изслѣдованій, приведшихъ къ интереснымъ выводамъ.

Въ 1900 году названные ученые обратились къ изслѣдованію проводимости ограниченныхъ воздушныхъ массъ. Подъ стеклянный колоколъ помѣщался нѣсколько видоизмѣненный электроскопъ Exner'а съ прикрѣпленнымъ къ нему сверху метал-

*) Іонизація воздуха состоитъ въ томъ, что молекулы его распадаются на атомы, а атомы на положительно и отрицательно заряженные іоны. Разряженіе же проводника происходитъ вслѣдствіе того, что имъ притягиваются іоны, заряженные противоположнымъ электричествомъ, и такимъ образомъ постепенно нейтрализуютъ его.

лическимъ цилиндромъ, потеря заряда котораго и опредѣлялась электроскопомъ. Подъ колоколъ впускался свѣжій воздухъ и опредѣлялась потеря заряда, по величинѣ которой можно судить о проводимости воздуха. Оказалось, что потеря заряда, равнявшаяся непосредственно послѣ впуска воздуха 0,4% въ минуту, поднялась ко 2-му дню до 1,0%, а на 5-ый день дошла до 2%, т. е. увеличилась въ 5 разъ. Постепенное увеличеніе скорости разряженія не можетъ быть объяснено постепеннымъ осажденіемъ пыли, затрудняющей, какъ было сказано выше, разряженіе проводника; въ самомъ дѣлѣ, увеличеніе потери заряда наблюдается и въ томъ случаѣ, когда подъ колоколъ поступаетъ воздухъ, очищенный отъ пыли предварительнымъ пропусканіемъ черезъ ватный фильтръ. Изслѣдованія эти прямо показываютъ, что проводимость ограниченныхъ массъ воздуха увеличивается сама собою; о внѣшнемъ источникѣ іонизаціи воздуха, вродѣ ультрафіолетовыхъ солнечныхъ лучей, здѣсь не можетъ быть и рѣчи.

Elster'омъ и Geitel'емъ, а также, по ихъ почину, и другими былъ изслѣдованъ также воздухъ въ подвалахъ и погребахъ, долгое время не провѣтриваемыхъ. Скорость потери электричества при этомъ оказалась очень значительной: она превосходила въ 10 разъ скорость потери въ обыкновенномъ воздухѣ. Такимъ образомъ, въ подвалахъ и погребахъ застоявшійся воздухъ оказывается сильно проводящимъ и, слѣдовательно, въ значительной мѣрѣ іонизованнымъ. Та же повышенная проводимость воздуха наблюдалась и въ пещерахъ, плохо вентилирующихся; въ нѣкоторыхъ случаяхъ проводимость превосходила проводимость нормальнаго воздуха разъ въ 20.

Для объясненія повышенной проводимости воздуха припомнимъ, что радіоактивныя вещества (радій, торій и др.) испускаютъ изъ себя Becquerel'евы лучи, которые сильно іонизуютъ поглощающій ихъ воздухъ. Въ виду этого, можно было бы допустить, что въ этихъ явленіяхъ главную роль играетъ присутствіе, хотя и въ ничтожныхъ количествахъ, радіоактивныхъ веществъ или въ самомъ воздухѣ, или же въ ограничивающихъ воздухъ стѣнкахъ. Второе предположеніе мало вѣроятно, такъ какъ опыты показали, что матеріалъ стѣнокъ колокола не оказываетъ вліянія на эти явленія; трудно допустить присутствіе радіоактивныхъ веществъ почти во всѣхъ матеріалахъ. Къ тому же, и химическій анализъ стѣнокъ сосудовъ не обнаружилъ ни малѣйшихъ слѣдовъ радіоактивныхъ веществъ.

Первое же предположеніе о присутствіи радіоактивнаго вещества въ самомъ воздухѣ нисколько не противорѣчитъ современному состоянію нашихъ знаній о свойствахъ радіоактивныхъ веществъ. Опытами супруговъ Curie и Rutherford'а установлено, что радіоактивныя вещества выдѣляютъ изъ себя въ окружающее пространство, кромѣ лучей, летучее радіоактивное вещество, названное „эманаціей". Вещество это проникаетъ въ воздухъ и осѣдаетъ на окружающихъ тѣлахъ, независимо отъ ихъ химическаго состава (бумага, слюда, стекло, парафинъ, металлы и пр.), и сообщаетъ имъ временную радіоактивность, называемую индуктивированной. Было также обнаружено, что въ присутствіи отрицательно заряженнаго тѣла эманація осѣдаетъ, главнымъ образомъ, на этомъ тѣлѣ, являясь какъ бы носителемъ положительнаго заряда. Если же заряженныхъ тѣлъ нѣтъ, то эманація диффундируетъ черезъ воздухъ и осѣдаетъ на всѣхъ вообще окружающихъ тѣлахъ. Для объясненія этихъ явленій Rutherford допускаетъ, что на поверхности положительнаго іона конденсируется эманація подобно тому, какъ на отрицательномъ іонѣ конденсируются частички водяного пара, и потому каждый положительный іонъ несетъ на своей поверхности слѣды радіоактивнаго вещества. J. J. Thomson предлагаетъ другое объясненіе: молекулы эманаціи испускаютъ изъ себя отрицательно заряженные корпускулы, или электроны, подобно молекуламъ твердаго радія; въ виду этого, оставшаяся часть молекулы становится положительно заряженной и притягивается къ отрицательно заряженному тѣлу.

Если мы допустимъ въ атмосферномъ воздухѣ присутствіе радіоактивной эманаціи, то описанныя только что явленія повышенной проводимости воздуха въ замкнутыхъ помѣщеніяхъ станутъ вполнѣ понятными. Какъ только подъ колоколъ впускается воздухъ, обладающій эманаціей, тотчасъ же эманація начнетъ осѣдать на стѣнкахъ колокола; эти стѣнки станутъ активными и будутъ испускать Becquerel'евы лучи, дѣлающіе воздухъ проводящимъ. Проводимость воздуха будетъ постепенно увеличиваться, такъ какъ, по мѣрѣ осѣданія эманаціи, увеличивается интенсивность Becquerel'евыхъ лучей. Тотъ же процессъ происходитъ, повидимому, и въ погребахъ, долго не провѣтриваемыхъ.

Только что приведенное предположеніе подтверждается слѣдующими опытами, также первоначально предпринятыми Elster'омъ и Geitel'емъ и приведшимъ къ удивительнымъ результатамъ. Первоначальные ихъ опыты состояли въ томъ, что они окружали вышеупомянутый электроскопъ, находившійся подъ колоколомъ, сѣткой и опредѣляли скорость потери заряда; затѣмъ сѣтка вынималась и стояла въ продолженіе двухъ часовъ на воздухѣ, отрицательно заряженная; послѣ нейтрализаціи она вносилась подъ колоколъ и оказывалось, что скорость разряженія значительно увеличивалась, но затѣмъ постепенно уменьшалась и черезъ нѣсколько часовъ доходила до первоначальной величины. Пробовали сѣтку заряжать положительнымъ зарядомъ, но въ этомъ случаѣ замѣчалось даже нѣкоторое пониженіе скорости разряженія. Для опытовъ брали сѣтки изъ желѣза, мѣди, цинка, испытывали сѣтки, покрытыя листьями растеній, шерстяной матеріей, бумагой,—результатъ получался одинъ и тотъ же. Эти опыты показываютъ, что отрицательно заряженныя сѣтки собирали эманацію изъ воздуха и, по внесеніи подъ колоколъ, способствовали іонизаціи воздуха и, слѣдовательно, его проводимости.

Въ дальнѣйшихъ своихъ работахъ Elster и Geitel доказали, что на сѣткѣ дѣйствительно собирается эманація. Вмѣсто сѣтки они брали мѣдную проволоку въ 20 метровъ длины и протягивали ее въ саду. Въ теченіе трехъ часовъ проволока была заряжена отрицательно до 5,000—10,000 вольтъ. Такъ какъ осѣвшая эманація въ этомъ случаѣ занимаетъ слишкомъ большую поверхность, то, чтобы сконцентрировать ее, названные ученые натирали проволоку бумагой или шерстью; при этомъ эманація переходила на бумагу и шерсть, которыя оказывались активными. Еще лучше отдѣлять отъ проволоки эманацію химическимъ путемъ, для чего мѣдная проволока натиралась кожей, смоченной амміакомъ и сѣрной кислотой. Внѣшній тончайшій слой проволоки переходилъ на кожу вмѣстѣ съ эманаціей, при чемъ кожа дѣлалась активной; активность не исчезала даже и при сжиганіи кожи: зола отъ нея была активна. Такимъ образомъ удалось получить довольно сильный радіоактивный препаратъ непосредственно изъ воздуха. Препаратъ этотъ давалъ даже отпечатки на фотографической пластинкѣ черезъ аллюминіевый листочекъ. Если активированную кожу положить непосредственно на пластинку, завернутую въ черную бумагу, то на пластинкѣ получалось изображеніе слѣдовъ, оставленныхъ на кожѣ проволокой послѣ натиранія. Тѣ же опыты въ подвалѣ, долго непровѣтриваемомъ, привели къ еще болѣе интереснымъ результатамъ: проволока находилась въ подвалѣ 8 часовъ, все это время на ней поддерживался отрицательный зарядъ, и активность кожи послѣ натиранія оказалась настолько сильной, что удалось получить свѣченіе экрана изъ платиносинеродистаго барія.

Опыты эти доказываютъ присутствіе въ воздухѣ эманаціи. Прежде чѣмъ говорить объ источникахъ образованія эманаціи въ воздухѣ, мы должны познакомиться съ дальнѣйшими работами въ томъ же направленіи. Въ виду того, что застоявшійся воздухъ погребовъ и пещеръ, окруженныхъ земляными стѣнами, обладаетъ значительной проводимостью, то такой же, если не большей, проводимостью долженъ обладать почвенный воздухъ, находящійся въ капилярныхъ скважинахъ и порахъ земли. Съ этой цѣлью, Elster'омъ и Geitel'емъ, а также Ebert'омъ и Ewers'омъ и другими были произведены изслѣдованія надъ почвеннымъ воздухомъ. Въ своихъ опытахъ названные ученые извлекали почвенный воздухъ слѣдующимъ образомъ: желѣзнымъ прутомъ продѣлывали въ мягкой почвѣ узкій каналъ въ $1^1/_2$ метра глубиною, въ это отверстіе вставляли такой же ширины и глубины стеклянную трубку, немного не доходившую до дна канала; землю вокругъ выступающаго наружу конца трубки утрамбовывали и, для лучшаго соприкосновенія трубки съ землей, поливали прилегающую землю водою. Трубка соединялась каучукомъ съ колоколомъ, въ который, помощью насоса, всасывался почвенный воздухъ. Потеря электричества происходила весьма быстро, и подсчетъ показалъ, что проводимость почвеннаго воздуха была почти въ 30 разъ больше проводимости обыкновеннаго атмосфернаго воздуха. Когда же почвенный воздухъ былъ замѣненъ обыкновеннымъ воздухомъ, то проводимость послѣдняго была нѣкоторое время повышенной, такъ такъ на стѣнкахъ сосуда осѣла эманація изъ почвеннаго воздуха. Опыты показали также, что отрицательно заряженная проволока въ почвенномъ воздухѣ пріобрѣтала весьма значительную индуктивированную радіоактивность. Насколько велика радіоактивность почвеннаго воздуха, можно судить по слѣдующему опыту, продѣланному Elster'омъ и Geitel'емъ: картонный цилиндръ покрывался „Сидотовой" блендою и сохранялся нѣсколько дней въ темнотѣ; затѣмъ въ темную ночь былъ перенесенъ подъ колоколъ въ $1^1/_4$ куб. метра емкостью, наполненный почвеннымъ воздухомъ; въ теченіе нѣсколькихъ часовъ цилиндръ поддерживался отрицательно заряженнымъ до 2000—3000 вольтъ. Когда цилиндръ вынули изъ-подъ колокола, то онъ испускалъ, хотя и слабое, но все же замѣтное свѣченіе. При болѣе тщательномъ, разсматриваніи оказалось, что свѣченіе цилиндра было искристое на блендѣ появлялись и исчезали мелкія искорки. По мнѣнію Elster'а и Geitel'я, эти свѣтящіяся искорки соотвѣтствуютъ тѣмъ точкамъ, изъ которыхъ осѣвшая эманація высылаетъ электроны. *)

Такимъ образомъ, наиболѣе богатымъ эманаціей является почвенный воздухъ. Однако, послѣдующія изслѣдованія обнаружили, что почвенный воздухъ не всюду является въ одинаковой мѣрѣ активнымъ; активность его зависитъ отъ состава почвы, изъ которой его извлекаютъ. Оказалось, что воздухъ тѣмъ активнѣе, чѣмъ богаче глиной содержащая его почва. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ, когда въ почвѣ не было глины, почвенный воздухъ не обнаруживалъ никакой активности. Результаты этихъ работъ приводятъ насъ къ заключенію, что источникъ радіоактивности воздуха надо искать въ почвѣ. Почвенный воздухъ заряжается эманаціей, вслѣдствіе своего соприкосновенія съ землей; проникая черезъ земныя скважины и капилляры въ подземныя пещеры, подвалы и погреба, онъ надѣляетъ эманаціей воздухъ, содержащійся въ послѣднихъ; кромѣ того, почвенный воздухъ диффундируетъ и наружу, снабжая также и свободный атмосферный воздухъ эманаціей.

Такъ какъ источникомъ радіоактивной эманаціи почвеннаго воздуха является почва, то изслѣдованію на радіоактивность были

---

*) Crookes наблюдалъ подобное же искристое свѣченіе, приближая препаратъ радія къ экрану, покрытому Сидотовой блендой. Объяснялъ онъ это явленіе тѣмъ, что исходящіе изъ радія электроны, ударяясь объ экранъ, вызываютъ въ этихъ мѣстахъ свѣченіе. Не трудно видѣть, что Crookes'ово объясненіе непримѣнимо для только что описаннаго явленія, тогда какъ гипотеза Elster'а и Geitel'я пригодна для обоихъ случаевъ.

подвергнуты различныя пробы почвы. Съ этой цѣлью, изслѣдуемыя пробы помѣщали подъ колоколъ. Для глинистыхъ сортовъ почвы оказалось, что проводимость воздуха постепенно увеличивалась и черезъ 2—3 дня достигала maximum'a (въ 3 раза больше проводимости нормальнаго воздуха); при этомъ результаты были одинаковы и для сухой и влажной глины. Пріобрѣтенная такимъ образомъ проводимость воздуха нисколько не уменьшалась въ теченіе долгаго времени. Что же касается другихъ сортовъ почвы (кварцеваго песка, известняка и пр.), то они нисколько не повышали проводимости воздуха. Интересно замѣтить, что чистая продажная глина оказалась неактивной.

Пробовали изслѣдовать на радіоактивность золу растеній изъ активной почвы: результаты получились отрицательные. Зато, какъ показалъ Crookes, обыкновенный кирпичъ испускаетъ изъ себя Becquerel'евы лучи, а въ него, какъ извѣстно, входитъ въ значительномъ количествѣ глина.

Кромѣ различныхъ сортовъ почвы, была изслѣдована углекислота, выходящая съ большой глубины изъ вулкана. Эта углекислота была перевезена къ мѣсту изслѣдованія въ жидкомъ видѣ. Не смотря на пятидневную перевозку, углекислота оказалась очень активной; однако, черезъ 16 дней активность совершенно исчезла.

Попытки выдѣлить изъ глинистой почвы болѣе радіоактивное вещество пока не удавались. Въ виду этого, возникаетъ сомнѣніе: быть можетъ, радіоактивность глины—только индуктивированная, вслѣдствіе соприкосновенія съ нею почвеннаго воздуха, богатаго эманаціей. Съ этой цѣлью были предприняты опыты, показавшіе, что активность глины отличается большимъ постоянствомъ, тогда какъ индуктивированная активность исчезаетъ довольно быстро. Такъ, напр., Elster и Geitel помѣщали въ холщевые мѣшочки чистую продажную глину и различные неактивные сорта почвы и закапывали ихъ въ глинистую почву на 50 см. глубины: черезъ 4 недѣли активной оказалась только глина. Хотя въ глинѣ и находится радіоактивное вещество, однако, благодаря дѣйствію почвеннаго воздуха, въ ней имѣетъ мѣсто также и индуктивированная радіоактивность.

Въ настоящее время изслѣдованія надъ проводимостью воздуха въ различныхъ мѣстностяхъ, а также въ разныя времена года обнаружили, что въ направленіи отъ Сѣвернаго моря къ континенту проводимость воздуха постепенно увеличивается, достигая въ области Альпъ значительной величины, и что зимою проводимость вообще меньше, особенно, при наступленіи холодовъ и снѣжнаго покрова (условія, затрудняющія диффундированіе почвеннаго воздуха).

Въ самое недавнее время Elster'y и Geitel'ю посчастливилось найти болѣе активное вещество „фанго", которое они собрали въ видѣ тонкой губчатой массы изъ горячаго источника близъ Battaglia (въ сѣверной Италіи). Первоначальная активность его была въ 4 раза больше, чѣмъ у самой активной глины. Когда же фанго былъ растворенъ въ кипящей соляной кислотѣ, то затѣмъ, по прибавленіи малаго количества барія, выдѣлился осадокъ, который, послѣ отмыванія и высушиванія, оказался болѣе, чѣмъ въ 100 разъ активнѣе первоначальнаго вещества. Активность его превосходила въ $1\frac{1}{2}$ раза активность сѣрнокислой уранокаліевой соли. Замѣтимъ, что неактивная вода при долгомъ соприкосновеніи съ фанго становится активной: если около 2 кило фанго завернуть въ пергаментную бумагу и продержать въ 1—2 литрахъ воды въ теченіе мѣсяца, то вода становится активной—воздухъ, пропущенный черезъ эту воду, становится сильно проводящимъ.

На основаніи существующихъ пока изслѣдованій, наиболѣе вѣроятное объясненіе радіоактивности воздуха слѣдующее: твердая земная кора является источникомъ радіоактивной эманаціи; эманаціей она надѣляетъ прилегающій къ ней слой воздуха, а также и воздухъ, содержащійся въ земныхъ капиллярахъ. Надѣленный этой эманаціей воздухъ диффундируетъ и смѣшивается съ свободнымъ атмосфернымъ воздухомъ, особенно, при пониженномъ давленіи. Эманація попадаетъ также въ воду источниковъ и колодцевъ; воздухъ, пропущенный черезъ такую воду, становится активнымъ. Источникомъ же этихъ эманацій является радіоактивное вещество, содержащееся въ земной корѣ, особенно, въ ея глинистыхъ частяхъ. Въ виду того, что наиболѣе богаты эманаціей теплые источники, а также выдѣляющійся изъ значительныхъ глубинъ углекислый газъ, надо предположить, что содержаніе радія повышается съ глубиной и, быть можетъ, вулканическіе продукты особенно богаты имъ.

Въ заключеніе замѣтимъ, что радіоактивность не ограничивается одними только радіоактивными веществами, въ родѣ радія, торія, но находится также въ воздухѣ и во многихъ очень распространенныхъ почвахъ земного шара; и здѣсь радіоактивность выражается испусканіемъ Becquerel'евыхъ лучей, іонизаціей воздуха, фосфоресценціей экрановъ, полученіемъ фотографическихъ отпечатковъ—такимъ образомъ, мы имѣемъ постоянный источникъ для іонизаціи атмосфернаго воздуха. Практическое же значеніе описанныхъ здѣсь работъ состоитъ въ томъ, что мы можемъ получать радіоактивныя вещества изъ воздуха и изъ почвы, а не изъ очень рѣдкихъ рудъ, какъ это дѣлалось пока.

Къ вопросу о нахожденіи суммъ одинаковыхъ степеней членовъ ариѳметической прогрессіи.

Г. Флоринскаго (Кіевъ).

§ 1. Дана ариѳметическая прогрессія

$$\div\ a,\ b,\ c,\ \ldots,\ k,\ l,$$

разность которой d и число членовъ n. Если x есть r-й членъ ея, то $x=a+d(r-1)$.

По возвышеніи обѣихъ частей этого равенства въ степень m, получимъ:

$$x^m=a^m+mC_1a^{m-1}d(r-1)+mC_2a^{m-2}d^2(r-1)^2+\ldots$$

$$+\,mC_1ad^{m-1}(r-1)^{m-1}+d^m(r-1)^m.$$

Полагая послѣдовательно въ этомъ равенствѣ $r=1, 2, 3, \ldots, n$, и складывая соотвѣтствующія части полученныхъ такимъ образомъ равенствъ, имѣемъ:

$$S_m=na^m+mC_1a^{m-1}d(1+2+\ldots+(n-1))+mC_2(1+2^2+\ldots+(n-1)^2)$$

$$+\ldots+mC_1ad^{m-1}(1+2^{m-1}+\ldots(n-1)^{m-1})+d^m(1+2^m+\ldots+(n-1)^m),$$

гдѣ S_m означаетъ сумму m-хъ степеней членовъ прогрессіи. Въ частныхъ случаяхъ имѣемъ:

$$S_2=na^2+2ad(1+2+\ldots+(n-1))+d^2(1+2^2+\ldots+(n-1)^2),$$

$$S_3=na^3+3a^2d(1+2+\ldots+(n-1))+3ad^2(1+2^2+\ldots+(n-1)^2)+$$

$$+\,d^3(1+2^3+\ldots+(n-1)^3).$$

Итакъ, нахожденіе суммъ одинаковыхъ степеней членовъ ариѳметической прогрессіи зависитъ отъ нахожденія суммъ одинаковыхъ степеней $1+2^p+3^p+\ldots+(n-1)^p$ чиселъ натуральнаго ряда. Эти послѣднія суммы можно найти при помощи предыдущей общей формулы, которая для натуральнаго ряда ($a=1$, $d=1$, $l=n$) принимаетъ слѣдующій видъ:

$$S_m=n+mC_1(S_1-n)+mC_2(S_2-n^2)+\ldots+mC_2(S_{m-2}-n^{m-2})+$$

$$+\,mC_1(S_{m-1}-n^{m-1})+S_m-n^m,$$

или

$$n^m - n = mC_1(S_{m-1} - n^{m-1}) + mC_2(S_{m-2} - n^{m-2}) + \ldots$$

$$+ mC_2(S_2 - n^2) + mC_1(S_1 - n).$$

Полагая въ этомъ выраженіи $m=2, 3, 4, 5, 6$, получимъ:

$$n^2 - n = 2(S_1 - n), \quad n^3 - n = 3(S_2 - n^2) + 3(S_1 - n),$$

$$n^4 - n = 4(S_3 - n^3) + 6(S_2 - n^2) + 4(S_1 - n), \text{ и т. д.}$$

Отсюда находимъ

$$S_1 = \frac{1}{2} n(n+1), \quad S_2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1), \quad S_3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2,$$

$$S_4 = \frac{1}{30} n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1), \quad S_5 = \frac{1}{12} n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1).$$

Зная суммы одинаковыхъ степеней членовъ натуральнаго ряда, легко выразить суммы одинаковыхъ степеней членовъ ариѳметической прогрессіи въ зависимости отъ a, d и n.

Такъ, напримѣръ:

$$S_2 = na^2 + adn(n-1) + \frac{1}{6} d^2(n-1)n(2n-1),$$

$$S_3 = na^3 + {}^3/_2\, a^2d(n-1)n + \frac{1}{2} ad^2(n-1)n(2n-1) + \frac{1}{4} d^3(n-1)^2n^2.$$

Послѣднее выраженіе можно представить въ видѣ

$$S_3 = \left[a^2 + ad(n-1) + \frac{1}{2} d^2n(n-1)\right]\left[an + \frac{1}{2} dn(n-1)\right], \text{ или}$$

$$S_3 = \left[a^2 + ad(n-1) + \frac{1}{2} d^2n(n-1)\right] \cdot S_1,$$

откуда слѣдуетъ, что *сумма третьихъ степеней членовъ ариѳметической прогрессіи всегда дѣлится на сумму тѣхъ же членовъ.*

Эта теорема не имѣетъ мѣста для всякихъ вообще нечетныхъ степеней. Такъ, напримѣръ, сумма $2^5 + 3^5 + 4^5 = 1299$ пятыхъ степеней прогрессіи $\div$ 2, 3, 4 не дѣлится на 9. Но для натуральнаго ряда теорема справедлива въ общемъ видѣ: *сумма одинаковыхъ нечетныхъ степеней членовъ натуральнаго ряда всегда дѣлится на сумму членовъ ряда.*

Для доказательства замѣтимъ, что для нечетныхъ степеней справедливы слѣдующія равенства, числомъ n:

$$\frac{a^m+l^m}{a+l}=\alpha,\quad \frac{b^m+k^m}{b+k}=\beta,\quad \frac{c^m+g^m}{c+g}=\gamma,\ \ldots,\quad \frac{l^m+a^m}{l+a}=\alpha,$$

гдѣ α, β, γ .... суть цѣлые относительно a и d многочлены или же цѣлыя числа, если члены прогрессіи суть числа цѣлыя. Но такъ какъ, по свойству ариѳметической прогрессіи,

$$a+l=b+k=\ldots\ldots=k+b=l+a,$$

то изъ предыдущихъ равенствъ имѣемъ:

$$2S_m=(a+l)(\alpha+\beta+\ldots+\beta+\alpha),\text{ или}$$

$$S_m:\frac{(a+l)n}{2}=\frac{1}{n}(\alpha+\beta+\ldots+\beta+\alpha),$$

откуда слѣдуетъ, что частное отъ дѣленія S_m на S_1, при m нечетномъ, есть всегда цѣлый многочленъ относительно a и d. Коэффиціенты частнаго будутъ или числа цѣлыя, или дроби, знаменатели которыхъ равны n или одному изъ первоначальныхъ множителей числа n. Равенство

$$2S_m=(a+l)(\alpha+\beta+\ldots+\beta+\alpha)$$

для натуральнаго ряда 1, 2, ..., n принимаетъ видъ

$$2S_m=(1+n)A,$$

гдѣ A есть цѣлое число. То же равенство для натуральнаго ряда 1, 2, ..., $(n-1)$ выразится

$$2(S_m-n^m)=nB,$$

гдѣ B есть также цѣлое число. Изъ двухъ послѣднихъ равенствъ имѣемъ: $(1+n)A-2n^m=nB$, откуда $A=\frac{n}{1+n}(B+2n^{m-1})$. Но такъ какъ n и $1+n$ суть числа взаимно-простыя, то, слѣдовательно, число $B+2n^{m-1}$ *дѣлится* на $1+n$. Означивъ частное черезъ t, получимъ

$$A=nt,\quad\text{откуда}\quad 2S_m=(1+n)nt\quad\text{и}\quad S_m=S_1\,.\,t,$$

чѣмъ и доказывается теорема.

§ 2. Нахожденіе суммъ одинаковыхъ степеней членовъ натуральнаго ряда можно поставить въ связь съ рѣшеніемъ одной общей задачи на суммованіе рядовъ. Эту задачу здѣсь, для большей простоты изложенія, разсмотримъ лишь въ частномъ случаѣ, который нетрудно обобщить на основаніи изложеннаго рѣшенія.

Пусть дана ариѳметическая прогрессія

$$\div \ldots . a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots ., a_n,\ a_{n+1}, \ldots .$$

и пусть требуется найти выраженіе для суммы S такого ряда

$$S = a_1 a_2 a_3 + a_2 a_3 a_4 + \ldots . + a_n a_{n+1} a_{n+2},$$

или

$$S = u_1 + u_2 + \ldots . + u_n,$$

если

$$u_k = a_k \,.\, a_{k+1} \,.\, a_{k+2}.$$

Для рѣшенія этой задачи возьмемъ другой рядъ, члены котораго суть

$$v_1 = a_0 a_1 a_2 a_3,\quad v_2 = a_1 a_2 a_3 a_4, \ldots ., \ v_{n+1} = a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3},$$

и пусть

$$v_1 + v_2 + \ldots . + v_n = A.$$

Легко видѣть, что

$$v_2 - v_1 = u_1 (a_4 - a_0) = 4du_1,$$

если d есть разность прогрессіи.

Точно такъ же

$$v_3 - v_2 = u_2 (a_5 - a_1) = 4du_2,\quad v_4 - v_3 = 4du_3, \ldots ., v_{n+1} - v_n = 4du_n.$$

Складывая эти равенства, получимъ

$$A - v_0 - (A - v_{n+1}) = 4d(u_1 + u_2 + \ldots . + u_n),$$

откуда

$$S = \frac{v_{n+1} - v_0}{4d}. \text{ *)}$$

Напримѣръ, если

$$S = 1.2.3 + 2.3.4 + \ldots . + n(n+1)(n+2),$$

то

$$v_{n+1} = n(n+1)(n+2)(n+3),\quad v_0 = 0.1.2.3 = 0,$$

и

$$S = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3).$$

---

*) Рѣшеніе изложенной задачи въ общемъ видѣ и выводъ, съ помощью ея, суммъ одинаковыхъ степеней членовъ натуральнаго ряда даны въ книгѣ: „A treatise on Algebra by *Charles Smith*. London 1900“, § 318 и § 321.

Подобнымъ способомъ найдемъ:

$$1.2+2.3+\ldots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$1.2.3.4+\ldots+n(n+1)(n+2)(n+3)=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$$

Пользуясь этими выраженіями, легко можно найти суммы S_2, S_3 и т. д. для натуральнаго ряда. Такъ, напримѣръ,

$$1.2+2.3+\ldots+n(n+1)=1(1+1)+2(2+1)+\ldots+n(n+1)=S_2+S_1,$$

слѣдовательно,

$$S_2=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}n(n+1).$$

Точно такъ же

$$1.2.3+\ldots+n(n+1)(n+2)=S_3+2S_1,$$

слѣдовательно,

$$S_3=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-n(n+1).$$

Изъ этихъ выраженій окончательныя формулы для S_2 и S_3 получаются путемъ весьма простыхъ выкладокъ.

ТРИСЕКЦІЯ УГЛА.

(Рѣшеніе при помощи особой кривой). *)

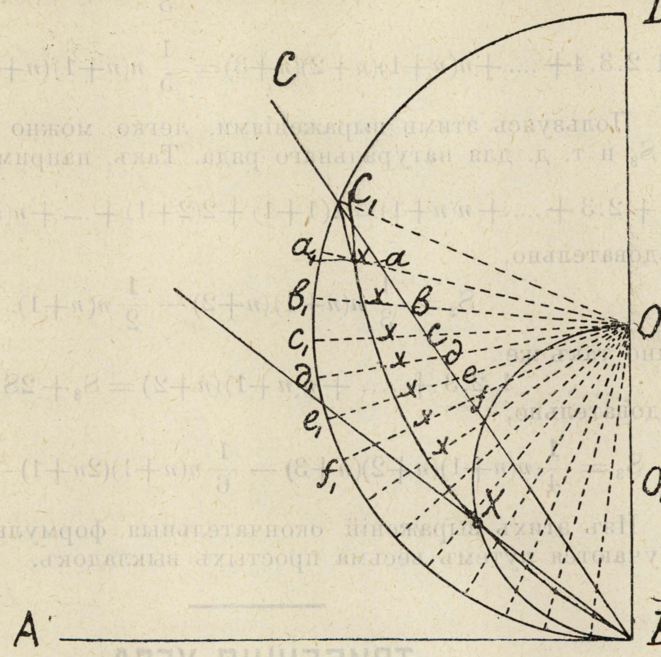
М. Ѳедотова (Кронштадтъ).

Данъ уголъ ABC (фиг. 1) и требуется раздѣлить его на три равныя части. Для этого поступаемъ такъ. Изъ точки B къ прямой AB возставляемъ перпендикуляръ, на которомъ, какъ на діаметрѣ, строимъ двѣ полуокружности такимъ образомъ, чтобы линія AB была къ нимъ касательна въ точкѣ B. Діаметры—BD и OB—этихъ полуокружностей находятся въ отношеніи 2 : 1. Затѣмъ проводится произвольное число радіусовъ: OC_1, Oa_1, Ob_1, Oc_1, Od_1, ... OB и отрѣзки радіусовъ: aa_1, bb_1, cc_1, dd_1, ... (и такъ далѣе до вершины B) дѣлятся пополамъ. Черезъ точки дѣленія, т. е. черезъ середины отрѣзковъ, чертится кривая C_1, x, x, x, x, ... B. Пересѣченіе этой кривой съ меньшей полуокружностью даетъ точку X. Если теперь черезъ точку X и вершину B про-

*) Какъ извѣстно, существуетъ немало кривыхъ, при помощи которыхъ задача о трисекціи угла можетъ быть рѣшена; авторъ даетъ двѣ такія кривыя.

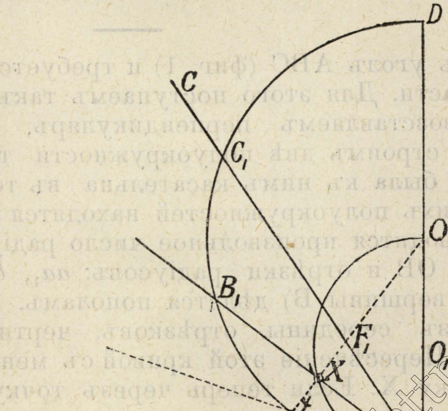
Прим. Ред.

вести прямую линію XB, то получится уголъ XBC, который въ три раза меньше даннаго угла ABC.



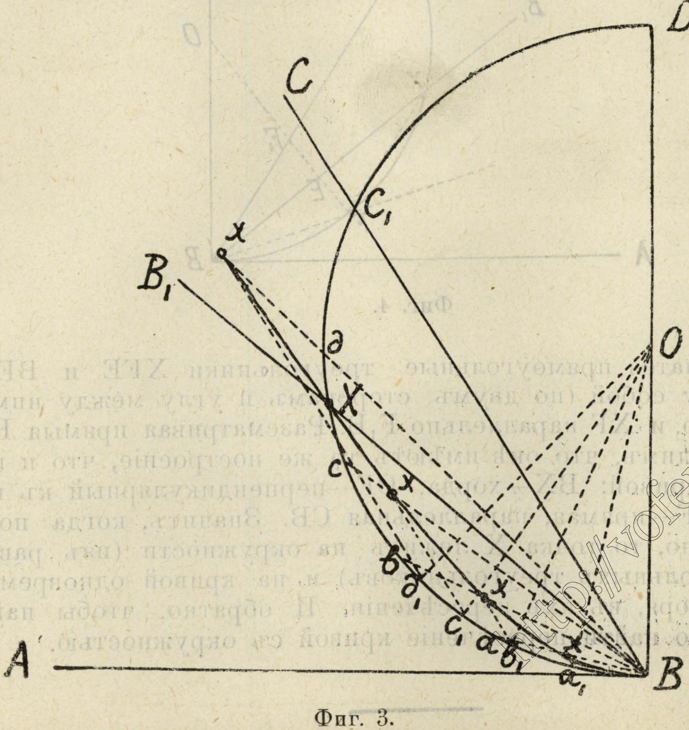
Фиг. 1.

Для доказательства правильности такого рѣшенія разсуждаемъ такъ. Предположимъ, что уголъ ABC уже раздѣленъ на три части и что положеніе линіи XB (фиг. 2) дано. Тогда,



Фиг. 2.

если черезъ данную точку X провести радіусъ OF, то точка F лежитъ на линіи FB, дѣлящей уголъ ABX пополамъ. Въ самомъ дѣлѣ, полуокружности BD и BO расположены такъ, что линіи BF, BB_1, BC_1 малой полуокружностью дѣлятся пополамъ (каждая хорда бо́льшаго полукруга въ 2 раза больше сходственной ей хорды малаго полукруга). На этомъ основаніи, $B_1X=XB$, а радіусъ FO, проходящій черезъ середину хорды B_1B, перпендикуляренъ къ хордѣ и дѣлитъ дугу B_1FB на двѣ равныя части, т. е. даетъ точку F, опредѣляющую положеніе биссектрисы FB угла ABX. (Уголъ, составленный касательной и хордой, измѣряется половиной дуги, заключающейся между этими линіями). Итакъ, когда XB дано, то и $FX=XF_1$ (изъ равенства прямоугольныхъ треугольниковъ FBX и XBF_1). Зная теперь, что точка X обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что лежитъ одновременно на малой полуокружности и на серединѣ одного изъ безчисленнаго множества отрѣзковъ, можно сказать, что она лежитъ въ пересѣченіи малой окружности съ кривой, проходящей черезъ середины отрѣзковъ. Проведя эту кривую и получивъ точку X, находимъ и требуемый уголъ $XBC = {}^1/_3$ всего угла ABC. Этотъ способъ примѣнимъ только для дѣленія остраго угла; если требуется раздѣлить на три части тупой уголъ, дѣлимъ его сначала пополамъ, а половину на три части; получивъ такимъ образомъ шестую часть угла, удваиваемъ ее.

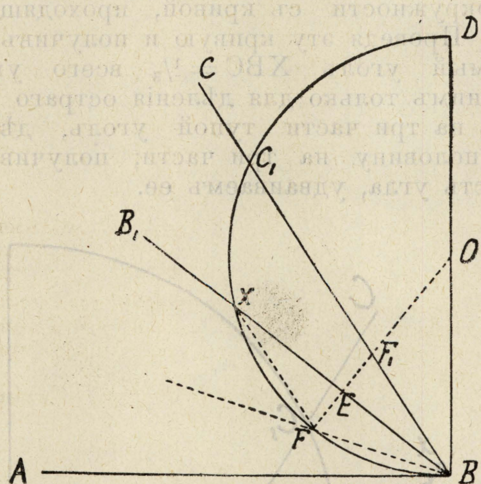


Фиг. 3.

Для дѣленія угла на три равныя части можно примѣнить еще другой способъ. Положимъ данъ (фиг. 3) уголъ ABC. Тогда изъ вершины B проводимъ произвольное число хордъ: Ba, Bb, Bc, Bd . . . ., а изъ центра круга столько же радiусовъ: Oa_1, Ob_1, Oc_1, Od_1, ..., перпендикулярныхъ къ хордамъ. Затѣмъ изъ точекъ a_1, b_1, c_1, d_1, ... (концовъ радiусовъ) проводимъ линiи параллельно сторонѣ CB, до встрѣчи съ перпендикулярными радiусамъ хордами.

Проведя непрерывную линiю по точкамъ пересѣченiя x, x, x, x . . . ., получимъ такую кривую, которая въ пересѣченiи съ окружностью даетъ точку X. Если черезъ полученную точку и вершину угла провести прямую XB, то уголъ XBC въ три раза меньше угла ABC.

Для доказательства предположимъ, что положенiе линiи XB (фиг. 4) дано. Если провести радiусъ OF перпендикулярно къ



Фиг. 4.

XB, то получатся прямоугольные треугольники XFE и BEF$_1$, равные между собой (по двумъ сторонамъ и углу между ними), слѣдовательно, и XF параллельно F$_1$B. Разсматривая прямыя BX, OF и FX, видимъ, что онѣ имѣютъ то же построенiе, что и при нахожденiи кривой: BX—хорда, OF—перпендикулярный къ ней радiусъ, а XF—прямая, параллельная CB. Значитъ, когда положенiе XB дано, то точка X лежитъ на окружности (изъ равенства прямоугольныхъ треугольниковъ) и на кривой одновременно, иначе говоря, въ ихъ пересѣченiи. И обратно, чтобы найти точку X, надо найти пересѣченiе кривой съ окружностью.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 490 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій:

$$\frac{xy}{x+z}=a,$$

$$\frac{yz}{x+y}=b,$$

$$\frac{y+z}{yz}+\frac{(y+z)^2}{xyz}-\frac{2}{x}=c.$$

Н. Сагателовъ (**Шуша**).

№ 491 (4 сер). Показать, что при всякомъ цѣломъ и не отрицательномъ n число

$$11^{n+2}+12^{2n+1}$$

дѣлится на 133.

(Заимств.).

№ 492 (4 сер.). Прямая, параллельная основанію BC треугольника ABC, отсѣкаетъ отъ него треугольникъ ADE; на основаніи BC взята точка M. Показать, что площадь четыреугольника $ADME$ есть средняя пропорціональная между площадями треугольниковъ ADE и ABC.

(Заимств.).

№ 493 (4 сер.). Вычислить стороны и площадь равнобочной трапеціи, въ которую можно вписать кругъ, зная радіусы r вписаннаго въ нее и R описаннаго около нея круга.

А. Колегаевъ (Короча).

№ 494 (4 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$4x^2y(x^2y-x+1)=15x^3+2x-1.$$

Л. Гальперинъ (Бердичевъ).

№ 495 (4 сер.). Деревянный шаръ погружается на $\frac{5}{3}$ своего радіуса въ чистую воду. Вычислить удѣльный вѣсъ дерева, изъ котораго сдѣланъ шаръ.

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 369 (4 сер.). *Зная длину* l *желѣзнаго стержня при* 0° *и коэффиціентъ* k *кубическаго расширенія желѣза, найти длину этого стержня при той температурѣ, при которой температуры Фаренгейта и Реомюра показываютъ одно и то же число градусовъ.*

(Заимств. изъ *L'Éducation Mathématique*).

Пусть искомая температура соотвѣтствуетъ x градусамъ Реомюра. Переводя эту температуру на шкалу Фаренгейта, найдемъ $\frac{9}{4}x+32$, и, по условію,

$$x=\frac{9}{4}x+32,$$

откуда $x=-\frac{128}{5}$ по Реомюру. Полагая, что коэффиціентъ k, по обыкновенію, отвѣчаетъ шкалѣ Цельзія, переводимъ найденное число градусовъ на эту шкалу, для чего множимъ $\left(-\frac{128}{5}\right)$ на $\frac{5}{4}$. Итакъ, искомая температура есть по шкалѣ Цельзія $-\frac{128}{5}\cdot\frac{5}{4}=-32$. Коэффиціентъ линейнаго расширенія стержня, согласно съ условіемъ, есть $\frac{k}{3}$, а потому искомая длина равна $\dfrac{l}{1+\frac{32k}{3}}$ или, приближенно, $l\left(1-\frac{32k}{3}\right)$. Можно также сразу принять за неизвѣстное число градусовъ y шкалы Цельзія, отвѣчающее искомой температурѣ. Переводя число y на шкалы Реомюра и Фаренгейта, получимъ соотвѣтственно $\frac{4}{5}y$ и $\frac{9}{5}y+32$; тогда, по условію, $\frac{4}{5}y=\frac{9}{5}y+32$, откуда $y=-32$.

Л. Ямпольскій (Braunschweig); *С. Андреевъ.*

№ 394 (4 сер.). *На плоскости лежатъ вокругъ точки* A *этой плоскости* n *равныхъ прямыхъ круглыхъ конусовъ такъ, что каждая изъ вершинъ находится въ точкѣ* A *и каждый изъ конусовъ касается двухъ сосѣднихъ конусовъ. Опредѣлить уголъ при вершинѣ осевого сѣченія каждаго изъ конусовъ.*

Пусть O—центръ основанія одного изъ конусовъ. Проведемъ черезъ нѣкоторую точку M окружности основанія касательную къ ней MT. Плоскость AMT касается поверхности конуса въ точкѣ M; образующая AM есть прямая прикосновенія поверхности конуса и плоскости AMT. Такъ какъ MT лежитъ въ плоскости окружности основанія и перпендикулярна къ проекціи OM на эту плоскость наклонной AM, то MT перпендикулярна къ прямой AM, а слѣдовательно, и къ плоскости OAM; поэтому плоскости AMT и OAM взаимно перпендикулярны, т. е. (называя плоскость AMT черезъ α): a) если плоскость α касается поверхности конуса, то она перпендикулярна къ плоскости, проходящей черезъ ось AO конуса и прямую касанія AM поверхности конуса и плоскости α. Пусть теперь разсматриваемый конусъ касается равнаго конуса, имѣющаго общую съ нимъ вершину въ A, вдоль образующей AM. Назовемъ черезъ O' окружность основанія второго конуса и проведемъ касательную MT' къ этой окружности въ точкѣ M; тогда плоскость AMT' касается поверхности второго конуса въ точкѣ M. Вслѣдствіе касанія поверхностей конусовъ, плоскости AMT и AMT' совпадаютъ, и такъ какъ $\angle AMT=\frac{\pi}{2}=\angle AMT'$, то и прямыя MT и MT' совпадаютъ. Разсуждая по предыдущему, найдемъ, что плоскости OAM и $O'AM$ соотвѣтственно перпендикулярны къ прямымъ MT и MT', или, что одно и то же,— обѣ перпендикулярны къ прямой MT и потому совпадаютъ. Слѣдовательно, прямыя AO, AM и AO' лежатъ въ одной плоскости, такъ что $\angle OAO' = 2\angle AOM$, или $\angle OAO'$ равенъ углу осевого сѣченія каждаго изъ равныхъ конусовъ. Итакъ, b) уголъ между осями двухъ равныхъ касающихся и имѣющихъ общую вершину конусовъ равенъ углу осевого сѣченія каждаго изъ конусовъ.

Назовемъ теперь черезъ β плоскость, на которой лежатъ конусы, разсматриваемые въ задачѣ. Пусть прямыя касанія конусовъ съ плоскостью β въ круговомъ порядкѣ ихъ расположенія AB_1, AB_2, ..., AB_n, а центры основаній конусовъ соотвѣтственно O_1, O_2, ..., O_n. Опустимъ изъ центровъ O_1, O_2, ..., O_n перпендикуляры O_1P_1, O_2P_2, ..., O_nP_n соотвѣтственно на прямыя AB_1, AB_2, AB_3, ..., AB_n. Называя черезъ $2x$ уголъ осевого сѣченія каждаго изъ равныхъ конусовъ, имѣемъ:

$$\angle O_1AB_1 = \angle O_2AB_2 = ... = \angle O_nAB_n = x \qquad (1)$$

и (см. b)):

$$\angle O_1AO_2 = \angle O_2AO_3 = ... = \angle O_nAO_1 = 2x \qquad (2).$$

Изъ равенства конусовъ слѣдуетъ равенство треугольниковъ AO_1B_1, AO_2B_2, ..., AO_nB_n, а также и треугольниковъ AO_1P_1, AO_2P_2, ..., AO_nP_n, такъ что:

$$AP_1 = AP_2 = ... = AP_n \quad (3), \qquad O_1P_1 = O_2P_2 = ... = O_nP_n \quad (4),$$

$$AO_1 = AO_2 = ... = AO_n = h \qquad (5),$$

гдѣ h—высота каждаго изъ конусовъ. Треугольники O_1AO_2, O_2AO_3, ..., O_nAO_1 (см. (5), (2)) также равны между собой. Слѣдовательно,

$$O_1O_2 = O_2O_3 = ... = O_nO_1 \qquad (6).$$

Плоскости AO_1B_1, AO_2B_2, ..., AO_nB_n (см. a)) перпендикулярны къ плоскости β, а потому и прямыя O_1P_1, O_2P_2, ..., O_nP_n къ ней перпендикулярны, такъ что всѣ эти прямыя равны (см. (4)) и параллельны. Поэтому

$$O_1O_2 = P_1P_2,\ O_2O_3 = P_2P_3, ..., O_nO_1 = P_nP_1 \text{ и (см. (6))}$$

$$P_1P_2 = P_2P_3 = ... = P_nP_1 \qquad (7).$$

Слѣдовательно, ((3), (7)) треугольники P_1AP_2, P_2AP_3, ..., P_nAP_1 равны, а потому $\angle P_1AP_2 = \angle P_2AP_3 = ... = \angle P_nAP_1$ и, такъ какъ сумма всѣхъ этихъ угловъ равна 2π, то $\angle P_1AP_2 = \frac{2\pi}{n}$ (8). Проведя высоты въ равнобедренныхъ треугольникахъ O_1AO_2 и P_1AP_2, имѣемъ (см. (2), (8), (5), (1)):

$$O_1O_2 = 2h\sin x,\ P_1P_2 = 2AP_1\sin\frac{\pi}{n} = 2h\cos x\sin\frac{\pi}{n},$$

откуда (см. (6))

$$2h\sin x = 2h\cos x\sin\frac{\pi}{n}.$$

Дѣля послѣднее равенство на $2h\cos x$, находимъ:

$$\operatorname{tg} x = \sin\frac{\pi}{n},$$

такъ что искомый уголъ $2x$ равенъ наименьшему положительному значенію выраженія $2\operatorname{arctg}\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)$.

Примѣчаніе. Возставивъ перпендикуляръ AN изъ точки A къ плоскости β, можно также воспользоваться сферическимъ треугольникомъ, стороны котораго суть: $\angle O_1AO_2 = 2x$, $\angle O_1AN = \frac{\pi}{2} - x$, $\angle O_2AN = \frac{\pi}{2} - x$. Уголъ этого треугольника, противолежащій $\angle O_1AO_2$, есть $\angle B_1AB_2 = \frac{2\pi}{n}$. Основная формула сферической тригонометріи даетъ:

$$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos\frac{2\pi}{n},$$

или

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x = \sin^2 x + \cos^2 x . \cos\frac{2\pi}{n},$$

$$1 - \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2 x + \cos\frac{2\pi}{n},$$

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos\frac{2\pi}{n}}{2} = \sin^2\frac{\pi}{n},$$

или, такъ какъ $\operatorname{tg} x > 0$ и $\sin\frac{\pi}{n} > 0\ (n \geqslant 3)$:

$$\operatorname{tg} x = \sin\frac{\pi}{n}.$$

Я. Дубновъ (Вильна).

№ 404 (4 сер.). *Показать, что при всякомъ цѣломъ нечетномъ значеніи* a *число* $a^4 + 7(7 + 2a^2)$ *дѣлится на* 64.

(Заимств. изъ *Journal de Mathématiques élémentaires*).

Пусть $a = 2k + 1$, гдѣ k число цѣлое. Тогда

$$a^4 + 7(7 + 2a^2) = a^4 + 2.7a^2 + 7^2 = (a^2 + 7)^2 =$$

$$= [(2k + 1)^2 + 7]^2 = (4k^2 + 4k + 8)^2 = [4k(k + 1) + 8]^2.$$

Такъ $k(k + 1)$, какъ произведеніе двухъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ, дѣлится на 2, то $4k(k + 1)$, а вмѣстѣ съ тѣмъ и $4k(k + 1) + 8$ дѣлится на 8, такъ что число $[4k(k + 1) + 8]^2$ дѣлится на 64..

Я. Тамаркинъ (Спб.); *Л. Ямпольскій* (Braunschweig); *А. Чесскій* (Слуцкъ); *Н. Готлибъ* (Митава); *В. Веррontz* (Москва); *А. Колегаевъ* (Короча); *Н. Пѣтуховъ* (Екатеринбургъ).

Поправка опечатки. Въ задачѣ № 377 (4 сер.) № 352 „Вѣстника“, вмѣсто члена $y^2(y^2 - 2x - 3)$ слѣдуетъ читать $y^2(y^2 - 2x + 3)$.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 10-го Іюля 1904 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66

трическаго тока, и Наставленія для поданія первой помощи въ несчастныхъ случаяхъ, происшедшихъ отъ дѣйствія электрическаго тока (до прихода врача). Рекомендованы Вторымъ Всероссійскимъ Электротехническимъ Съѣздомъ 1902 г. въ Москвѣ. Цѣна 25 коп.

Какъ построить динамомашину въ одну лошадиную силу. Ватсона, перев. А. Гершуна. Цѣна 1 руб.

Краткія свѣдѣнія по электротехникѣ въ ея современномъ развитіи. 1892 г. Ц. 75 к.

Адресъ редакціи: С.-Петербургъ. Екатерининскій каналъ, д. 134, кв. 4.

Продолжается подписка на **1904 г.** (II годъ изданія)

НА ЕЖЕНЕДѢЛЬНЫЙ ИЗЯЩНО-ИЛЛЮСТРИРОВАННЫЙ ЖУРНАЛЪ

ПРИРОДА и ЖИЗНЬ

журналъ художеств.-литературный, обществ.-историч. и популярно-научный.

Романы, повѣсти, разсказы. Общественная жизнь. Искусство. Гуманитарныя науки. Естествознаніе. Путешествія. Отвѣты на юридическіе вопросы. Полезные совѣты. И проч.

12 **иллюстрированныхъ книгъ въ годъ и** 52 **№№ иллюстрированнаго журнала.**

Редакція поставила себѣ задачей дать, при самой минимальной подписной платѣ (**1** р. въ годъ—за 12 книгъ и **3** р. въ годъ—за 12 книгъ и 52 №№), вполнѣ литературный, богатый содержаніемъ и изящный журналъ. Съ участіемъ извѣстныхъ писателей и ученыхъ.

Естественно-научный отдѣлъ—подъ редакціей проф. А. М. Никольскаго.

Вопросы САМООБРАЗОВАНІЯ.

Правда научная и правда жизненная, любовь къ природѣ, родинѣ, человѣку и всякому живому существу — основы журнала.

ВЪ 1904 ГОДУ БУДУТЪ НАПЕЧАТАНЫ:

Новыя беллетристическія произведенія М. Н. Альбова, К. С. Баранцевича, А. Н. Будищева, А. А. Измайлова, А. И. Куприна, Д. Н. Мамина-Сибиряка, Д. Л. Мордовцева, свящ. Г. С. Петрова, Н. И. Познякова, И. Н. Потапенко и мн. др Литерат.-критич. очеркъ С. П. Григорьева: **Графъ Л. Н. Толстой.**

Новое сочиненіе Камилла Фламаріона: „Общедоступная астрономія“.

Изслѣдованія, статьи и очерки: проф. В. М. Арнольди, проф. А. Н. Краснова, проф. В. К. Залѣсскаго, проф Д. А. Коропчевскаго, проф. А. А. Кулябко, проф. А. М. Никольскаго, проф. П. Ф. Лесгафта, проф. И. Г. Оршанскаго, проф. Н. В. Покровскаго, проф. П. П. Пятницкаго и мн. др.

Названія произведеній указанныхъ писателей и ученыхъ напечатаны въ подробной программѣ, высылаемой по первому требованію. Выдающіяся общественныя, политическія, литературныя, научныя, художественныя и театральныя

ЗЛОБЫ ДНЯ.

1 р. въ годъ за 12 книгъ съ пересылкой.	3 р. въ годъ за 12 книгъ и 52 №№ съ перес. Разсрочка по 1 руб.

Редакція: С.-Петербургъ, Преображенская ул., д. 42.

Редакторъ-издатель **Н. П. Дучинскій.**