Обложка
ищется

Обложка
пщется

XXII Сем. № 11.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 263.

Содержаніе: Изображеніе ходовъ шахматныхъ фигуръ при помощи мнимыхъ величинъ. *Х. Гохмана.* — О сложеніи силъ въ гиперболическомъ пространствѣ. (Окончаніе). *П. Юшкевича.* Новый феноменальный счетчикъ. — Научная хроника: Скорость движенія солнца въ пространствѣ. Переводъ показаній термометра Фаренгейта въ градусы Цельзія. Полученіе золотого серебра по способу Кэри Ли Сжиженіе фтора. — Разныя извѣстія. — Рецензіи: В. И. Васильевъ. I. Ариѳметика цѣлыхъ чиселъ. II. Ариѳметика дробныхъ чиселъ. III. Ариѳметика. Отношенія, пропорціи и правила: тройныя, процентовъ, учеты векселей и пр. *С. Житкова.*—Задачи №№ 499—504. — Рѣшенія задачъ 3-ей серіи №№ 415, 416, 423. — Обзоръ научныхъ журналовъ: Mathesis, 1897. № 4.—Journal de mathématiques élémentaires. 1896. № 2. *Д. Е.* — Присланныя въ редакцію книги и брошюры.—Полученныя рѣшенія задачъ.—Поправка.— Объявленія.

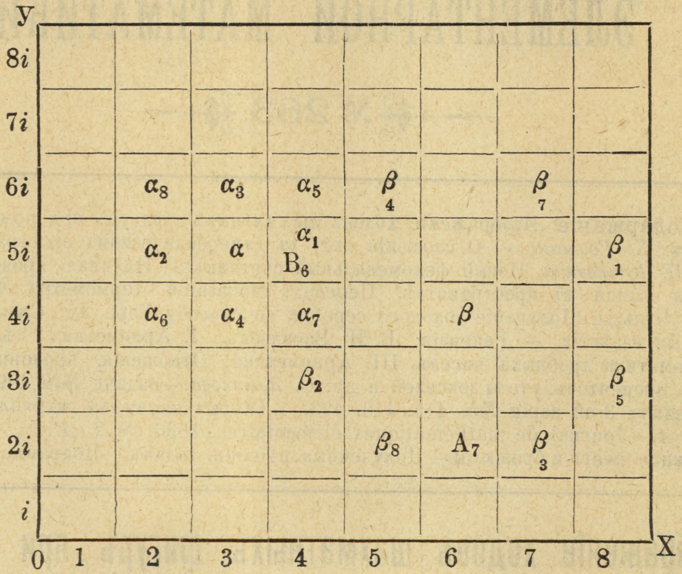
Изображеніе ходовъ шахматныхъ фигуръ при помощи мнимыхъ величинъ.

Извѣстно, что комплексная величина

$$a+bi, \text{ гдѣ } i=\sqrt{-1}$$

представляетъ точку B въ плоскости, положеніе которой относительно осей координатъ (X,У) опредѣляется абсциссой OA $=a$ и ординатой AB $=b$. Также извѣстно, что уравненіе m-ой степени имѣетъ m корней, дѣйствительныхъ или мнимыхъ, которые въ геометрическомъ смыслѣ даютъ намъ положеніе столькихъ же точекъ на плоскости. Благодаря этому можемъ при помощи *одного* уравненія дать положеніе сколькихъ угодно точекъ. Если эти точки не фиксированы, а движутся по плоскости, описывая различныя геометрическія мѣста (линіи, прямыя или кривыя), то коэффиціенты уравненія m-ой степени, долженствующаго представить намъ m различныхъ линій, должны быть перемѣнными величинами. Каждому корню, выраженному въ функціи отъ перемѣнныхъ коэффиціентовъ даннаго уравненія, соотвѣтствуетъ опредѣленная линія (прямая или кривая). Мы имѣемъ въ виду дать *уравненія ходовъ* всѣхъ фигуръ въ шахматной игрѣ.

Примемъ первую (нижнюю) горизонталь шахматной доски за ось вещественныхъ величинъ, а первую лѣвую вертикаль за ось мнимыхъ величинъ. Общій видъ формулы, дающей положеніе фигуры есть $A + Bi$, гдѣ A означаетъ № вертикали (столбца) а B — горизонтали (строки).



Такъ, положеніе фигуры (точки) α, находящейся въ третьемъ столбцѣ и пятой строкѣ, дается комплексной величиной $3 + 5i$ (тутъ $A = 3$, $B = 5$) и символически обозначается равенствомъ:

$$\alpha = 3 + 5i.$$

Означимъ черезъ Z выраженіе

$$\text{I)} \qquad Z = \frac{z - a - bi}{x}$$

гдѣ $a + bi$ означаетъ *данное* положеніе фигуры, x есть *перемѣнное* число (могущее принять значенія $1, 2, 3, 4, \ldots$) для тѣхъ фигуръ, которыя могутъ передвигаться на *нѣсколько* клѣтокъ за разъ,—для тѣхъ же, которыя могутъ передвигаться только на одну изъ клѣтокъ, $x = 1$. Z означаетъ ту клѣтку, куда можетъ передвинуться фигура, занимающая данное положеніе $a + bi$. Стало быть Z означаетъ *ходъ* фигуры, опредѣляя ту клѣтку, въ которую можетъ передвинуться фигура, начиная съ занимаемаго ею теперь мѣста $a + bi$.

1) *Ходъ короля*, для котораго $x = 1$, дается уравненіемъ

$$Z^8 + 3Z^4 - 4 = 0,$$

ибо *восемъ* корней этого уравненія даютъ всѣ восемь ходовъ короля. Именно, положивъ $Z^4 = y$, получаемъ квадратное уравненіе

$$y^2 + 3y - 4 = 0;$$

корни этого уравненія суть

$$y_1 = \frac{-3+5}{2} = 1, \quad y_2 = \frac{-3-5}{2} = -4.$$

Отсюда получаемъ *четыре* значенія для Z^2:

$$Z_1^{\,2} = +\sqrt{1} = +1, \quad Z_2^{\,2} = -\sqrt{1} = -1, \quad Z_3^{\,2} = +\sqrt{-4} = +2i,$$

$$Z_4^{\,2} = -\sqrt{-4} = -2i.$$

Остается теперь еще разъ извлечь квадратный корень изъ всѣхъ четырехъ значеній. Воспользовавшись для этого общей формулой для извлеченія квадратныхъ корней изъ комплексныхъ чиселъ вида $A \pm Bi$, именно,

II) $$\sqrt{A \pm Bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}} \pm i\sqrt{\frac{-A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}}\right]$$

при чемъ верхній знакъ $(+)$ при i берется, если дано $+Bi$, а нижній — при $-Bi$, получимъ:

$$Z_{1,2} = \pm 1, \; Z_{3,4} = \pm i, \; Z_{5,6,7,8} = \pm 1 \pm i.$$

Z_1 означаетъ передвиженіе на одну клѣтку вправо по горизонтали; Z_2—передвиженіе на одну клѣтку влѣво по горизонтали; Z_3—передвиженіе вверхъ на одну клѣтку; Z_4—передвиженіе внизъ на одну клѣтку; Z_5 означаетъ *одновременное* передвиженіе *вправо* и *вверхъ* на одну клѣтку, результатомъ чего является передвиженіе по *діагонали* направо вверхъ, Z_6 означаетъ передвиженіе по *діагонали* влѣво и внизъ; Z_7 означаетъ передвиженіе по діагонали вправо и внизъ и наконецъ Z_8 — противоположное передвиженіе по той же діагонали влѣво и вверхъ.

Изъ нашего положенія $Z = z - a - bi$, слѣдуетъ:

III) $$z = a + bi + Z.$$

Это значитъ, что король изъ клѣтки $a + bi$ можетъ перейти на клѣтку $a + bi + Z$, гдѣ Z имѣетъ одно изъ данныхъ выше 8-ми значеній.

2) *Ходъ королевы*. Уравненіе хода королевы то же, что и для короля, съ тою только разницей, что для нея x можетъ принимать зна-

ченія 1, 2, 3, ... до края доски. Общая формула есть

$$z = a + bi + xZ,$$

получающаяся изъ положенія (I). Такъ, для корня $z_7 = 1 - i$ при значеніи $x = 3$ и первоначальномъ положеніи a имѣемъ

$$z = 3 + 5i + 3(1 - i) = 6 + 2i,$$

т. е. изъ положенія $a = 3 + 5i$ королева можетъ перейти въ положеніе $A_7 = 6 + 2i$.

3) *Ходъ коня.* Для коня $x = 1$, формула его хода есть

$$z = a + bi + Z$$

гдѣ Z есть одинъ изъ восьми корней слѣдующаго уравненія его хода:

$$Z^8 + 14Z^4 + 625 = 0.$$

Рѣшивъ это уравненіе подобно предыдущему, найдемъ:

$$Z_{1,2,5,6} = \pm 2 \pm i, \quad Z_{3,4,7,8,} = \pm 1 \pm 2i.$$

3) *Ходъ башни* (туры). Уравненіе его:

$$Z^4 - 1 = 0 \quad \text{при } x = 1, 2, 3, 4, \ldots.$$

корни: $$Z_{1,2} = \pm 1, \quad Z_{3,4} = \pm i.$$

4) *Ходъ офицера* (слона). Уравненіе хода

$$Z^4 + 4 = 0 \quad \text{при } x = 1, 2, 3, 4, \ldots.$$

корни: $$Z_{1,2,3,4} = \pm 1 \pm i.$$

5) *Ходъ пѣшки.* Уравненіе его

$$Z - i = 0, \text{ при } x = \text{только } 1.$$

Корень: $$Z = i.$$

Пѣшка бьетъ по уравненію

$$Z - 1 - i = 0;$$

корень: $$Z = 1 + i.$$

Примѣчаніе. Извѣстно, что королева соединяетъ въ себѣ ходы башни и офицера. Изъ уравненій ходовъ этихъ фигуръ видно, что первая часть уравненія хода королевы есть произведеніе первыхъ частей уравненій ходовъ башни и офицера. Дѣйствительно,

$$Z^8 + 3Z^4 - 4 = (Z^4 - 1)(Z^4 + 4).$$

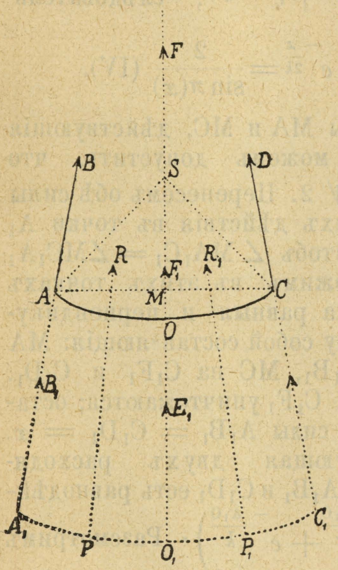
Приватъ-доцентъ *Х. Гохманъ.*

О сложенiи силъ въ гиперболическомъ пространствѣ.

(*Окончанiе* *)

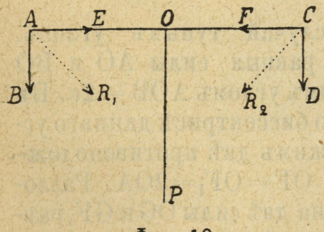
Лемма V. *Равнодѣйствующая двухъ равныхъ параллельныхъ силъ равна суммѣ ихъ, параллельна имъ и дѣлитъ дугу предѣльной линiи пополамъ.*

Докажемъ сперва вторую половину леммы. Возьмемъ (см. чер. 9) AB и CD двѣ равныя каждая единицѣ, параллельныя силы. Пусть AC будетъ предѣльная линiя, O середина дуги AOC. Приложимъ въ точкахъ A и C двѣ равныя и противоположныя силы AM и CM, взаимно уничтожающiяся. Сложимъ AB съ AM и CD съ CM. Обѣ равнодѣйствующiе пересѣкутся въ точкѣ S, находящейся на параллельной OS. Сложивши въ свою очередь эти двѣ силы при S, мы найдемъ, что, такъ какъ онѣ равны, то ихъ равнодѣйствующая пойдетъ по биссектрисѣ образуемаго ими угла, т. е. по параллельной OS, что и требовалось доказать. Для доказательства первой половины леммы возьмемъ въ O силу OF, пауаллельную AB и равную 2. Перенесемъ силу BA въ точку A_1, силу DC въ точкуC_1 такъ, чтобъ дуга предѣльной линiи $A_1C_1 = 2AC$. OF перенесемъ въ точку O_1, середину дуги A_1C_1. Силу O_1F_1 разложимъ на $O_1E_1 = E_1F_1 = 1$. Сложимъ O_1E_1 съ A_1B_1, E_1F_1 съ C_1D_1. Получимъ двѣ равнодѣйствующiя: $PR = P_1R_1$. Если мы назовемъ равнодѣйствующую силъ AB и CD черезъ x, то $PR = P_1R_1 = x$. Дуга $PP_1 =$ дугѣ AB. Слѣдовательно равнодѣйствующая силъ PR и P_1R_1 будетъ равна x. $x = x^2$. Но мы могли ее получить иначе: слагая AB съ CD и придавая OF. Поэтому $x^2 = x + 2$. Отбрасывая отрицательное значенiе -1, мы имѣемъ, что $x = 2$.



Фиг. 9.

Возьмемъ (см. чер. 10) двѣ равныя расходящiяся силы $AB = CD = 1$ на разстоянiи $AC = 2l$ такомъ, что $\angle \pi(l) = 45^0$ или что $\sin\pi(l) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Въ точкахъ A и C приложимъ двѣ равныя противоположныя силы $AE = CF = 1$. Сложимъ AB съ AE и CD съ CF. По леммѣ IV получимъ двѣ равныя силы $AR_1 = CR_2 = \sqrt{2}$; такъ какъ $\angle R_1AC = \angle R_2CA = 45^0$, то AR_1 и CR_2 будутъ силами параллельными; слѣдовательно ихъ равнодѣйствующая по леммѣ V равна $2\sqrt{2}$, т. е. $R2l = 2\sqrt{2}$; для даннаго

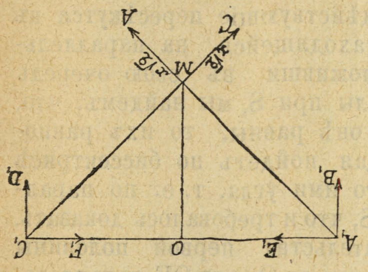


Фиг. 10.

*) См. „Вѣстн. Оп. Физики“ № 262.

случая $\sin\pi(l)=\frac{\sqrt{2}}{2}$; слѣдовательно въ данномъ случаѣ $l\frac{e^{\frac{l}{k}}+e^{\frac{-l}{k}}}{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}$; откуда $e^{\frac{l}{k}}+e^{\frac{-l}{k}}=2\sqrt{2}=\mathrm{R}2l$. Итакъ $\mathrm{R}_{2l}=e^{\frac{l}{k}}+e^{\frac{-l}{k}}$. Но согласно найденной нами общей формулѣ $\mathrm{R}2l=e^{\frac{2lp}{k}}+e^{\frac{-2lp}{k}}$; слѣдовательно $p=\frac{1}{2}$. Отсюда выходитъ что $\mathrm{R}_x=e^{\frac{x}{2k}}+e^{\frac{-x}{2k}}=\frac{2}{\sin\pi(x)}$ (IV).

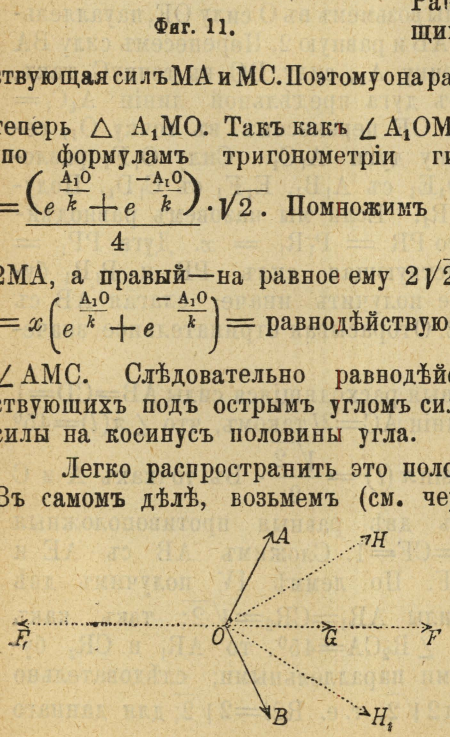
Возьмемъ (см. чер. 11) двѣ равныя силы MA и MC, дѣйствующія подъ какимъ нибудь острымъ угломъ. Мы можемъ допустить, что $MA=MC=x\sqrt{2}$. Перенесемъ обѣ силы по линіямъ ихъ дѣйствія въ точки A_1 и C_1 такія, чтобъ $\angle MA_1C_1=\angle MC_1A_1=45^0$. Разложимъ въ этихъ точкахъ наши силы на равныя и перпендикулярныя между собой составляющія: MA на A_1E_1 и A_1B_1, MC на C_1F_1 и C_1D_1. Силы A_1E_1 и C_1F_1 уничтожаются; останутся только силы $A_1B_1=C_1D_1=x$. Равнодѣйствующая двухъ расходящихся силъ A_1B_1 и C_1D_1 есть равнодѣйствующая силъ MA и MC. Поэтому она равна $x\left(e^{\frac{A_1O}{k}}+e^{\frac{-A_1O}{k}}\right)$. Разсмотримъ теперь $\triangle A_1MO$. Такъ какъ $\angle A_1OM=d$, а $\angle MA_1O=45^0$, то $\cos\angle A_1MO$ (по формуламъ тригонометріи гиперболическаго пространства) $=$



Фиг. 11.

$=\frac{\left(e^{\frac{A_1O}{k}}+e^{\frac{-A_1O}{k}}\right)\cdot\sqrt{2}}{4}$. Помножимъ лѣвый членъ этого равенства на 2MA, а правый—на равное ему $2\sqrt{2}\,x$. Тогда имѣемъ: $2MA\cos\angle A_1MO=x\left(e^{\frac{A_1O}{k}}+e^{\frac{-A_1O}{k}}\right)=$ равнодѣйствующей силъ MA и MC. Но $\angle AMO=\frac{1}{2}\angle AMC$. Слѣдовательно равнодѣйствующая двухъ равныхъ дѣйствующихъ подъ острымъ угломъ силъ равна двойному произведенію изъ силы на косинусъ половины угла.

Легко распространить это положеніе на случай тупыхъ угловъ. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ (см. чер. 12) двѣ равныя силы AO и BO подъ тупымъ угломъ $AOB=2\alpha$. Въ точкѣ O по биссектрисѣ даннаго угла приложимъ двѣ противоположныя силы $OF=OF_1=2OA$. Разложимъ OF на двѣ силы OG и GF, равныя между собой. Сложимъ AO съ OG и BO съ GF. Вычислить равнодѣйствующую мы умѣемъ, такъ какъ $\angle AOF=\angle BOF=\alpha$, гдѣ α —



Фиг. 12.

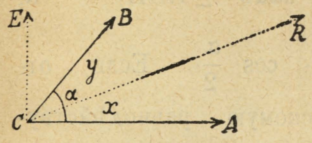
острый уголъ. Такимъ образомъ получимъ двѣ силы $OH = OH_1 = 2OA\cos\frac{\alpha}{2}$. Сложимъ OH и OH_1. Такъ какъ $\angle HOH_1 = \alpha$, то ихъ равнодѣйствующая равна $2OA\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$. Если отсюда вычтемъ $OF_1 = 2OA$, то получимъ искомую равнодѣйствующую силъ AO и BO, т. е. R. Итакъ $R = 2OA\,.\,2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 2OA = 2OA\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right) = 2OA\cos\angle\frac{AOB}{2}$. Итакъ положенiе наше оказывается вѣрнымъ и для тупыхъ угловъ.

Возьмемъ двѣ силы a и b, дѣйствующiя подъ прямымъ угломъ. Разложимъ силу a на двѣ равныя дѣйствующiя подъ угломъ x, а силу b на двѣ равныя, дѣйствующiя подъ угломъ $2d - x$. У насъ получаются четыре силы:

$$\frac{a}{\cos\frac{x}{2}},\ \frac{a}{2\cos\frac{x}{2}},\ \frac{b}{2\cos\frac{2d-x}{2}}\ \text{и}\ \frac{b}{2\cos\frac{2d-x}{2}}.$$

Очевидно, что первая и третья силы будутъ противоположно направлены и вычитаться, а вторая и четвертая одинаково направлены и складываться. Выберемъ уголъ x такъ, чтобъ $\frac{a}{2\cos\frac{x}{2}} = \frac{b}{2\cos\frac{2d-x}{2}}$, или же чтобъ $\frac{a}{Cs\frac{x}{2}} = \frac{b}{Sn\frac{x}{2}}$. Тогда первая и третья сила взаимно уничтожатся Останутся 2-я и 4-я силы, т. е. $\frac{a}{2\cos\frac{x}{2}} + \frac{b}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{a}{\cos\frac{x}{2}}$. Изъ равенства: $\frac{a}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{b}{\sin\frac{x}{2}}$ имѣемъ: $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{b}{a}$; отсюда $1 + \operatorname{tg}^2\frac{ax}{2} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{a^2+b^2}{a^2}$ Отсюда $\frac{a^2}{\cos^2\frac{x}{2}} = a^2 + b^2$. Лѣвая часть этого равенства есть квадратъ искомой равнодѣйствующей, которая, слѣдовательно, равна a^2+b^2; уголъ же α, образуемый равнодѣйствующей со стороны a, опредѣляется изъ уравннiя $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$.

Найдемъ теперь величину и направленiе равнодѣйствующей двухъ силъ a и b, дѣйствующихъ подъ какимъ нибудь угломъ α. Возьмемъ



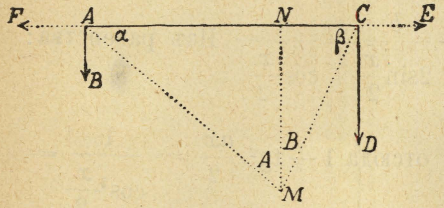
Фиг. 13.

(см. чер. 13) AC и CB подъ угломъ $ACB=\alpha$: пусть $AC=b$, $CB=a$. Разложимъ силу a на двѣ: одну по направленію CA, другую $\perp$ CA. Первая по предыдущему будетъ равна $a\cos\alpha$, вторая же будетъ равна $a\sin\alpha$. У насъ теперь будутъ двѣ перпендикулярныя между собой силы: по направленію CA — сила, равная $b+a\cos\alpha$, и по CE—сила, равная $a\sin\alpha$. Квадратъ равнодѣйствующей ихъ будетъ: $a^2\sin^2\alpha + b^2 + a^2\cos^2\alpha + 2ab\cos\alpha = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$. Уголъ x, образуемый равнодѣйствующей съ AC, по предыдущему опредѣляется изъ уравненія: $\sin x = \frac{a\sin\alpha}{R}$, гдѣ R—равнодѣйствующая. Уголъ y, образуемый равнодѣйствующей съ BC равенъ $\alpha - x$. Слѣдовательно, $\sin y = \sin\alpha\cos x - \cos\alpha\sin x$ $= \sin\alpha\left(\frac{b + a\sin\alpha}{R}\right) - \cos\alpha\frac{a\sin\alpha}{R} = \frac{b\sin\alpha}{R}$. Слѣдовательно $\sin x : \sin y = \frac{a\sin\alpha}{R} : \frac{b\sin\alpha}{R} = a : b$.

Изъ всего вышеизложеннаго вытекаетъ, что сложеніе силъ, дѣйствующихъ въ точкѣ подъ угломъ, въ гиперболическомъ пространствѣ тожественно съ сложеніемъ таковыхъ же силъ въ эвклидовскомъ пространствѣ.

Иначе обстоитъ дѣло съ расходящимися силами. Мы уже видѣли, что для двухъ равныхъ силъ $R_{2p} = \frac{2}{\sin\pi(p)}$, т. е. больше 2. Если предположить, что $\angle\pi(p) = \text{Const.} = d$, т. е. принять систему Эвклида, то получимъ $R_{2p} = 2$.

Вычислимъ теперь равнодѣйствующую двухъ неравныхъ расходящихся силъ a и b на разстояніи $2p$.



Фиг. 14.

Возьмемъ (см. чер. 14) двѣ неравныя расходящіяся силы: $AB=a$ и $CD=b$ на разстояніи $AC=2p$. Въ точкахъ A и C приложимъ равныя и противоположныя силы $AE=CF=x$. Выберемъ ихъ столь большими, чтобъ равнодѣйствующія силъ AB съ AE и силъ CD съ CF пересѣклись въ какой нибудь точкѣ M. Равнодѣйствующая силъ AB и AE равна $\sqrt{a^2+x^2}$; равнодѣйствующая силъ CD и CF равна $\sqrt{b^2+x^2}$. Перенесемъ эти силы въ точку M. Назовемъ $\angle AMC$ черезъ γ, $\angle MAC$ черезъ α, $\angle MCA$ черезъ β. Квадратъ равнодѣйствующей силъ при M или же искомой равнодѣйствующей равенъ $a^2+x^2+b^2+x^2+2\sqrt{(a^2+x^2)(b^2+x^2)}\cos\gamma$. Найдемъ теперь $\cos\gamma$. Изъ $\triangle$ AMC по тригонометріи гиперболическаго пространства имѣемъ:

$$\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma =$$

$$= \frac{e^{\frac{2p}{k}} + e^{\frac{-2p}{k}}}{2}\sin\alpha\sin\beta.$$

Но $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$; $\sin\beta = \frac{b}{\sqrt{b^2+x^2}}$; $\cos\beta = \frac{x}{\sqrt{b^2+x^2}}$.

Слѣдов. имѣемъ: $\frac{x^2}{\sqrt{(a^2+x^2)(b^2+x^2)}} + \cos\gamma = \frac{e^{\frac{2p}{k}} + e^{-\frac{2p}{k}}}{2} \cdot \frac{ab}{\sqrt{(a^2+x^2)(b^2+x^2)}}$.

Отсюда $\cos\gamma \sqrt{(a^2+x^2)(b^2+x^2)} = \frac{\left(e^{\frac{2p}{k}} + e^{-\frac{2p}{k}}\right)}{2} ab - x^2$. Подставляя это выраженіе въ предыдущую формулу имѣемъ, что квадратъ равнодѣйствующей

равенъ: $a^2+b^2+2x^2+2\left[\frac{\left(e^{\frac{2p}{k}} + e^{-\frac{2p}{k}}\right)}{2} ab - x^2\right] = a^2+b^2+\frac{2ab}{\sin\pi(p)}$.

Отсюда равнодѣйствующая равна $\sqrt{a^2+b^2+\frac{2ab}{\sin\pi(2p)}}$ (VII). Если $\angle\pi(2p) = \text{Const} = d$, то имѣемъ, что $R = a+b$, эвклидовскую формулу.

Очевидно, что равнодѣйствующая будетъ перпендикулярна къ AC. Въ самомъ дѣлѣ, мы можемъ слагать a и b слѣд. образомъ: разложимъ бо́льшую силу b на a и $b-a$. Сложимъ a съ a. Вмѣсто a и b получимъ двѣ новыя расходящіяся силы: $b-a$ и какую то C; съ этими поступимъ точно также, какъ съ предыдущими и т. д. При такомъ способѣ сложенія силы непрерывно сближаются, оставаясь $\perp$ AC; слѣдовательно и равнодѣйствующая будетъ $\perp$ AC. Теперь найдемъ точку N, мѣсто приложенія равнодѣйствующей.

Назовемъ (см. чер. 14) AN черезъ x, NM черезъ h, NC черезъ y, $\angle$AMN черезъ A, $\angle$CMN черезъ B. Изъ $\triangle$овъ ANM и CNM имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}}{e^{\frac{h}{k}} - e^{-\frac{h}{k}}} &= \frac{\sin A}{\sin\alpha} \\ \frac{e^{\frac{h}{k}} - e^{-\frac{h}{k}}}{e^{\frac{y}{k}} - e^{-\frac{y}{k}}} &= \frac{\sin\beta}{\sin B} \end{aligned}\right\}$$

перемножая получимъ:

$$\frac{e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}}{e^{\frac{y}{k}} - e^{-\frac{y}{k}}} = \frac{\sin A}{\sin B} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \quad (\alpha).$$

$$\text{Но } \sin\beta = \frac{b}{\sqrt{b^2+x^2}}$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Изъ параллелограмма силъ при M, составляющія котораго суть $\sqrt{a^2+x^2}$ и $\sqrt{b^2+x^2}$, имѣемъ: $\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{b^2+x^2}} = \frac{\sin B}{\sin A}$. Подставляя въ (α)

эти выраженія имѣемъ:

$$\frac{e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}}{e^{\frac{y}{k}}+e^{-\frac{y}{k}}}=\frac{\operatorname{ctg}\pi(x)}{\operatorname{ctg}\pi(y)}=\frac{b}{a}$$ (VIII). При $K=\infty$ имѣемъ

эвклидовское соотношеніе: $\frac{x}{y}=\frac{b}{a}$.

Перейдемъ теперь къ вопросу о сложеніи двухъ расходящихся разнонаправленныхъ силъ. Поступая по обычному въ этомъ случаѣ пріему, мы предварительно рѣшимъ слѣдующую задачу: разложить силу a на двѣ расходящіяся силы, изъ которыхъ одна $=b$ и находится отъ a на разстояніи l. Предположимъ, что другая составляющая будетъ x на разстояніи y отъ силы a. Мы можемъ разсматривать a, какъ равнодѣйствующую силъ b и x на разстояніи $l+y$. Изъ формулы (VII)

имѣемъ: $a^2=b^2+x^2+bx\left(e^{\frac{l}{k}}\cdot e^{\frac{y}{k}}+e^{-\frac{l}{k}}\cdot e^{-\frac{y}{k}}\right)$ (β).

Изъ формулы (VIII): $\frac{e^{\frac{l}{k}}-e^{-\frac{l}{k}}}{e^{\frac{y}{k}}-e^{-\frac{y}{k}}}=\frac{x}{b}$. Назовемъ теперь:

$$e^{\frac{l}{k}}=M$$

$$e^{-\frac{l}{k}}=N=\frac{1}{M}$$

$$b\left(e^{\frac{l}{k}}-e^{-\frac{l}{k}}\right)=B=b\left(M-\frac{1}{M}\right)$$

$$e^{\frac{y}{k}}=z$$

$$a^2-b^2=A^2.$$

Тогда имѣемъ:
$$x=\frac{B}{z-\frac{1}{z}}.$$

Уравненіе (β) можно представить въ видѣ:

$$a^2-b^2=x\left[x+b\left(e^{\frac{l}{k}}\cdot e^{\frac{y}{k}}+e^{-\frac{l}{k}}\cdot e^{-\frac{y}{k}}\right)\right]$$ или же

$$A^2=x\left[x+b\left(Mz+\frac{N}{z}\right)\right]=\frac{B}{z-\frac{1}{z}}\left[\frac{B}{z-\frac{1}{z}}+b\left(Mz+\frac{N}{z}\right)\right]=$$

$$=\frac{B}{z-\frac{1}{z}}\left[\frac{Bz^2+b(z^2-1)(Mz^2+N)}{z(z^2-1)}\right]=\frac{B}{(z^2-1)^2}\left(Bz^2+lMz^4+bNz^2-\right.$$

$$\left.-bMz^2-bN\right)=\frac{B}{(z^2-1)^2}\left[bMz^4-bN+Bz^2-bz^2(M-N)\right].$$ Но $b(M-N=B$.

Слѣдовательно $A^2 = \frac{B}{(z^2-1)^2}(bMz^4 - bN)$. Раскрывая скобки, приводя къ одному знаменателю и перенося всѣ члены налѣво, имѣемъ слѣдующее биквадратное уравненiе:

$$z^4(A^2 - bBM) - 2A^2z + (A^2 + bBN) = 0.$$

Отсюда:

$$z = \pm\sqrt{\frac{A^2 \pm \sqrt{A^4 - (A^2+bBN)(A^2-bBM)}}{A^2 - bBM}}.$$

Упростимъ это выраженiе:

Раскрывая скобки, мы представимъ выраженiе подъ вторымъ радикаломъ въ видѣ: $A^4 - A^4 + A^2bBM - A^2bBN + b^2B^2MN = A^2Bb(M-N) + b^2B^2 =$
$= A^2B^2 + b^2B^2 = B^2(A^2+b^2) = a^2B^2$.

Слѣдовательно $$z = \pm\sqrt{\frac{A^2 \pm Ba}{A^2 - bBM}}.$$

Но $A^2 \pm Ba = a^2 - b^2 \pm ab\left(M - \frac{1}{M}\right) = \frac{a^2M - b^2M \pm abM^2 \pm ab}{M} =$

$$= \frac{(a \pm bM)(aM \pm b)}{M} \text{ и}$$

$$A^2 - bBM = a^2 - b^2 - b^2M\left(M - \frac{1}{M}\right) = a^2 - b^2 - b^2M^2 + b^2 = a^2 - b^2M^2 =$$

$$= (a+bM)\ (a-bM).$$

Слѣдовательно

$$z = \pm\sqrt{\frac{(a \pm bM)(aM \mp b)}{M(a+bM)(a-bB)}},$$

или, разбивая на четыре рѣшенiя, имѣемъ:

$$z_1 = -\sqrt{\frac{aM - b}{M(a-bM)}}$$

$$z_2 = -\sqrt{\frac{aM + b}{M(a+bM)}}$$

$$z_3 = +\sqrt{\frac{aM + b}{M(a+bM)}}$$

$$z_4 = +\sqrt{\frac{aM - b}{M(a-bM)}}$$

Но z_1 и z_2, какъ числа отрицательныя, даютъ мнимыя значенiя для y $\left(\text{ибо } z = e^{\frac{y}{k}}\right)$.

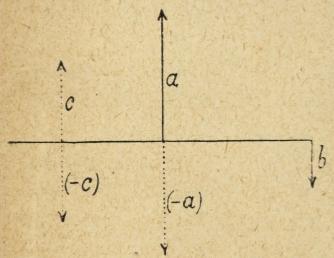
Что касается z_3 то, такъ какъ $aM+b < aM+bM^2\left(\text{ибо } M=e^{\frac{l}{k}}>1\right)$, то $z_3<1$. Въ этомъ случаѣ y будетъ отрицательно, а съ нимъ и x, опредѣляемое изъ формулы: $x=\dfrac{B}{z-\dfrac{1}{z}}$.

Если мы откинемъ, какъ неудовлетворительныя, отрицательныя и мнимыя рѣшенія, то у насъ останется одно только послѣднее — z_4. Разсмотримъ этотъ случай. Такъ какъ $a>b$ и $M>1$, то $\dfrac{aM-b}{M}>0$.

Но $a-bM$ можетъ быть больше нуля, меньше его и равно ему. Въ первомъ случаѣ выраженіе подъ радикаломъ положительное; слѣдов. z положительно, а съ нимъ x и y. Во второмъ случаѣ выраженіе подъ радикаломъ отрицательное; z — мнимое, а съ нимъ x и y и, слѣдов., разложеніе невозможно. Въ третьемъ случаѣ $z=\infty$; тогда $y=\infty$, а $x=0$, т. е. мы имѣемъ силу равную нулю на безконечномъ разстояніи. Слѣдоват. разложеніе возможно только при $a-bM\geqq 0$, т. е. при $a-b\cdot e^{\frac{l}{k}}\geqq 0$.

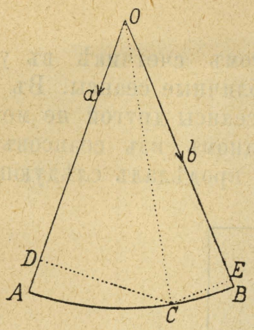
Все вышесказанное можно примѣнить къ сложенію двухъ разнонаправленныхъ расходящихся силъ a и b. Разложимъ бóльшую изъ нихъ a на двѣ расходящіяся, изъ которыхъ одна равна b и приложена въ точкѣ приложенія этой послѣдней: эти двѣ силы между собой уничтожаются. Что же касается другой изъ разложенныхъ силъ, которая и будетъ составлять равнодѣйствующую, то существованіе ея зависитъ отъ того, имѣетъ ли мѣсто формула $a-bM\geqq 0$. Въ первомъ случаѣ мы имѣемъ настояще сложеніе силъ, во второмъ — пару въ системѣ Лобачевскаго. Если же $a-bM<0$, то сложеніе невозможно, ибо невозможно разложеніе силы a. Докажемъ это.

Допустимъ (см. чер. 15), что даны двѣ силы a и b на разстояніи l такомъ, что $a-b\cdot e^{\frac{l}{k}}<0$. Разложеніе силы a вышеуказаннымъ путемъ, какъ мы заемъ, невозможно. Но допустимъ, что силы a и b можно все таки сложить и что ихъ равнодѣйствующая $=C$. Если C есть равнодѣйствующая силъ a и b, то система силъ a, b и $(-C)$ уравновѣшивается. Сложимъ силы b и $(-C)$. Ихъ равнодѣйствующая должна быть равна силѣ $(-a)$, приложенной въ точкѣ приложенія силы a. Если $(-a)$ есть равнодѣйствующая силъ b и $(-C)$, то ее, значитъ, можно разложить на эти силы; но тогда такое разложеніе возможно продѣлать и съ силой a, что по условію невозможно.



Фиг. 15.

Чтобы закончить нашу задачу, намъ остается еще вывести сложеніе какихъ нибудь параллельныхъ силъ a и b. Мы для этого воспользуемся теоріей силъ, дѣйствующихъ подъ угломъ. Двѣ параллельныя силы a и b можно разсматривать, какъ силы, пересѣкающіяся подъ угломъ, равнымъ нулю, въ безконечности. Квадратъ равнодѣйствующей равенъ тогда $a^2 + b^2 + 2ab\cos 0 = a^2 + b^2 + 2ab$. Слѣдовательно равнодѣйствующая равна $a + b$. Возьмемъ (см. чер. 16) линіи $OA = OB$ и соединимъ A съ B дугой окружности. По OA въ точкѣ O приложимъ силу a, по OB силу b и проведемъ равнодѣйствующую ихъ до пересѣченія въ точкѣ C съ окружностью. Опустимъ изъ C перпендикуляры CD и CE на OA и OB. Мы знаемъ, что



Фиг. 16.

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin BOC}{\sin AOC}.$$

Изъ прямоугольнаго $\triangle$ CDO имѣемъ:

$$\operatorname{ctg}\pi(CD) = \operatorname{ctg}\pi(OC)\,.\,\sin AOC.$$

Изъ $\triangle$ CEO

$$\operatorname{ctg}\pi(CE) = \operatorname{ctg}\pi(OC)\,.\,\sin BOC.$$

Дѣля второе уравненіе на первое, имѣемъ:

$$\frac{\sin BOC}{\sin AOC} = \frac{\operatorname{ctg}\pi(CE)}{\operatorname{ctg}\pi(CD)};\ \text{слѣдоват.}\ \frac{a}{b} = \frac{\operatorname{ctg}\pi(CE)}{\operatorname{ctg}\pi(CD)}.$$

Если точка O будетъ удаляться, то въ предѣлѣ OA и OB станутъ параллельны, а дуга AB обратится въ дугу предѣльной линіи.

Мы знаемъ, что

$$\frac{\sigma}{\sigma^1} = \frac{\operatorname{ctg}\pi\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\pi\left(\frac{\lambda_1}{2}\right)},$$ гдѣ σ и σ_1 — предѣльныя дуги, а λ и λ_1 — соотвѣтствующія имъ хорды.

Слѣдовательно

$$\frac{\operatorname{ctg}\pi(CE)}{\operatorname{ctg}\pi(CD)} = \frac{\text{предѣльной дугѣ CB}}{\text{предѣльную дугу CA}} = \frac{a}{b}.$$

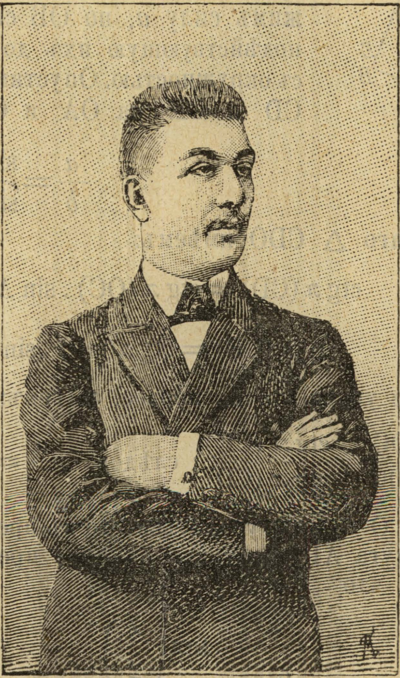
Слѣдовательно равнодѣйствующая двухъ параллельныхъ силъ дѣлитъ дугу предѣльнаго круга на части, обратно пропорціональныя составляющимъ силамъ.

Слѣдовательно параллельныя силы въ системѣ Лобачевскаго соотвѣтствуютъ параллельнымъ силамъ въ системѣ Эвклида, но съ замѣной прямой линіи, соединяющей точки приложенія силъ, дугой предѣльнаго круга. Ясно, что это имѣетъ мѣсто и въ противоположно направленныхъ силахъ.

П. Юшкевичъ (Кишиневъ).

НОВЫЙ ФЕНОМЕНАЛЬНЫЙ СЧЕТЧИКЪ.

Вѣроятно всѣ еще помнятъ о знаменитомъ счетчикѣ въ умѣ, Иноди, который недавно давалъ въ Парижѣ публичные сеансы. Въ настоящее время въ томъ же Парижѣ даетъ свои сеансы другой не менѣе чудесный счетчикъ, *Діаманди* (Diamandi). На одномъ изъ сеансовъ въ Hôtel des Sociétés savantes онъ между прочимъ продѣлалъ слѣдующее:



Діаманди.

Однимъ изъ присутствовавшихъ была написана на доскѣ слѣдующая таблица:

7	9	8	4	6
2	1	9	7	7
3	2	5	4	9
1	6	8	9	7
5	4	9	6	8

Всмотрѣвшись въ эту таблицу, Діаманди отвернулся отъ доски и прочелъ на память каждый вертикальный столбецъ по порядку, затѣмъ всю таблицу по спирали. Не задумываясь ни на минуту, онъ точно указывалъ цифру, когда ему опредѣляли ея мѣсто въ таблицѣ.

На вопросъ, сколько секундъ въ 87 вѣкахъ, считая и високосные годы, онъ почти тотчасъ же далъ точный отвѣтъ: 274551120000.

Онъ извлекъ въ умѣ квадратный корень изъ 542380 и кубичный изъ 493989.

Въ 4 мин. 30 сек. онъ произвелъ въ умѣ слѣдующія дѣйствія, которыя были ему заданы одновременно:

$$4875328540 - 3097160781$$

$$28 \times 28 \times 28$$

$$986 \times 986$$

$$227 \times 8$$

$$28493 : 976.$$

На доскѣ были написаны 133 цифры. Діаманди повторилъ ихъ по порядку и затѣмъ произносилъ, не задумываясь, каждую цифру, лишь только ему указывали ея мѣсто.

Діаманди былъ изслѣдованъ директоромъ лабораторіи экспериментальной психологіи въ Сорбоннѣ, г-мъ Binet. Оказалось между прочимъ, что у Діаманди сильно развита зрительная память: онъ запоминаетъ цифры лишь всмотрѣвшись въ нихъ, и потому всегда проситъ написать на доскѣ всѣ данныя, надъ которыми онъ производитъ дѣйствія въ умѣ. У Иноди, напротивъ, сильно развита слуховая память: чтобы запомнить рядъ цифръ, онъ долженъ выслушать ихъ. Когда Діаманди долженъ запомнить рядъ цифръ, онъ всматривается въ нихъ, затѣмъ зажмуриваетъ глаза и вѣроятно старается воспроизвесть въ умѣ видѣнное, наконецъ снова обращается къ написаннымъ цифрамъ, какъ бы провѣряя себя. Послѣ этого цифры закрѣпляются въ его памяти и онъ, не глядя на написанное, громко прочитываетъ или пишетъ ихъ. Время, которое ему нужно для запоминанія извѣстнаго числа цифръ, вообще измѣняется въ зависимости отъ нервнаго состоянія, отъ окружающаго его покоя и т. п. Въ среднемъ для запоминанія 10 цифръ ему нужно 17 секундъ, для 15—1 мин. 15 сек., для 20—2 м. 15 с., для 25—3 мин., для 30—4 м. 20 с., для 50—7 м., для 100—25 м., для 200—2 ч. 15 м. Нечего и говорить, что, запомнивъ 200 цифръ, Діаманди чувствуетъ себя сильно утомленнымъ. Цифры, написанныя въ видѣ квадрата, ему легче запоминать, чѣмъ написанныя въ строку. Послѣднія цифры длинной строки онъ хуже запоминаетъ, чѣмъ первыя, и чаще ошибается, повторяя ихъ, хотя вообще онъ очень рѣдко дѣлаетъ ошибки. Время, необходимое ему для перемноженія двухъ чиселъ, очень коротко: въ 6 секундъ онъ умножаетъ въ умѣ двузначное число на однозначное, въ 17—двузначное на двузначное, въ 56—трехзначное на трехзначное, въ 3 м. 10 с.—пятизначное на пятизначное. Интересенъ способъ, которымъ пользуется Діаманди для умноженія многозначныхъ чиселъ, и который нѣсколько сокращаетъ работу памяти. Предположимъ, что ему надо найти произведеніе

$$46173 \times 729.$$

Онъ поступаетъ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{r} 46273 \\ 729 \\ \hline 416457 \\ 92546 \\ 323911 \\ \hline 33733017. \end{array}$$

Онъ множитъ 9 на 3 и запоминаетъ, что послѣдняя цифра искомаго произведенія — 7; затѣмъ онъ умножаетъ 9 на 7, прибавляетъ 2 къ найденному произведенію 63 и вслѣдъ за тѣмъ находитъ произведеніе второй цифры множителя на послѣднюю цифру множимаго: $2 \times 3 = 6$; онъ прибавляетъ 6 къ найденному раньше числу 65, получаетъ 71 и запоминаетъ, что вторая отъ конца цифра произведенія равна 1, и т. д.; словомъ, вмѣсто того, чтобы найти и запомнить всѣ три частныхъ произведенія, онъ находитъ лишь цифры ихъ, стоящія въ одномъ вертикальномъ столбцѣ, благодаря чему онъ долженъ запоминать лишь цифры окончательнаго произведенія и нѣсколько цифръ частныхъ произведеній, причемъ эти послѣднія онъ можетъ забывать по мѣрѣ того какъ находитъ цифры окончательнаго произведенія.

Діаманди родился въ 1868 году въ Пиларосѣ (одинъ изъ Іоническихъ острововъ) и еще въ школѣ любилъ заниматься математикой, хотя не выдѣлялся своими способностями. Свою память по отношенію къ числамъ онъ замѣтилъ совершенно случайно, когда ему нужно было перемножить два многозначныхъ числа, а подъ руками не было бумаги. Онъ нашелъ произведеніе въ умѣ и самъ поразился, какъ легко вычислять въ умѣ. Съ тѣхъ поръ онъ сталъ развивать свою память и достигъ поразительныхъ результатовъ. (La Nature).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Скорость движенія солнца въ пространствѣ. — Дублинскій астрономъ Monck, сравнивая движеніе солнца съ движеніями 2000 звѣздъ каталога Porter'а, нашелъ, что скорость солнца должна заключаться между 16 и 24 километрами въ секунду.

Цифра эта гораздо выше цифры, указанной Struve. Послѣдній принялъ скорость солнца ла 7,6 километровъ въ секунду. Такимъ образомъ, солнце увлекаетъ за собой всю солнечную систему по направленію къ созвѣздію Геркулеса со скоростью приблизительно въ 20 километровъ въ секунду. (Revue Scient.).

Переводъ показаній термометра Фаренгейта въ градусы Цельзія. — Hellmann сообщаетъ въ Meteorologische Zeitung объ очень простомъ и остроумномъ способѣ производить переводъ градусовъ F на градусы C, переводъ, который такъ часто приходится дѣлать при чтеніи англійскихъ книгъ и журналовъ.

Извѣстно, что, для того чтобы перевести показанія градусника Фаренгейта на градусы Цельзія, нужно изъ числа градусовъ F вычесть 32 и остатокъ помножить на $^5/_9$. Hellmann замѣчаетъ, что

$$^5/_9=0,555\ldots.=\frac{1,111}{2}=\frac{1}{2}+\frac{0,1}{2}+\frac{0,01}{2}+\ldots.$$

и производитъ вычисленіе слѣдующимъ образомъ:

Предположимъ, напримѣръ, что намъ надо узнать, сколькимъ градусамъ Цельзія равняются 88^0 F. Для этого вычтемъ изъ 88 32 и остатокъ — 56 раздѣлимъ на 2; получается 28. Затѣмъ производимъ слѣдующее сложеніе:

$$\begin{array}{r} 28 \\ 2,8 \\ 0,28 \\ \hline 31,08 \end{array}$$

31,08 и есть искомое число градусовъ Цельзія съ точностью до 0,01. Вычисленіе это очень просто и производится очень быстро.

Полученіе золотого серебра по способу Кэри Ли. — Въ дополненіе къ сообщеннымъ въ № „Вѣстн. Оп. Физ." свѣдѣніямъ объ argentaurum'ѣ приводимъ рецептъ для полученія золотого серебра Кэри Ли.

A	10% раств. ляписа	200 к. с.	B	30% раств. желѣзн. купороса	107 к. с.
	20% раств. сегнетовой соли	200 к. с.		20% раств. сегнетовой соли	200 к. с.
	дистиллированной воды	800 к. с.		дистиллрованной воды	800 к. с.

При смѣшеніи растворовъ A и B осаждается порошокъ, который при промываніи на фильтрѣ принимаетъ золотистый видъ. Высыхаетъ онъ въ кускахъ, напоминающихъ хорошо полированное золото.

Сжиженіе фтора. — Moissan и Dewar сообщили результаты своихъ опытовъ надъ обращеніемъ фтора въ жидкое состояніе.

Фторъ обращается въ жидкость довольно легко при температурѣ кипѣнія воздуха ($-191^0,4$). Температура кипѣнія жидкаго фтора $= -187^0$. Онъ во всѣхъ пропорціяхъ растворяется въ жидкомъ кислородѣ и воздухѣ. При -210^0 онъ не могъ быть обращенъ въ твердое состояніе. Плотность жидкаго фтора $= 1,14$. Капиллярность его меньше, чѣмъ капиллярность жидкаго кислорода; онъ не имѣетъ спектра поглощенія и совсѣмъ не обладаетъ магнитными свойствами. Наконецъ, при -210^0 онъ не оказываетъ никакого дѣйствія на сухой кислородъ, воду и ртуть, но съ выдѣленіемъ теплоты соединяется съ водородомъ и съ терпентиномъ.

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Волжскій Вѣстникъ сообщаетъ, что профессоръ Казанскаго Университета Загоскинъ нашелъ рукопись „Геометріи" знаменитаго математика Н. И. Лобачевскаго, считавшуюся утраченною. Рукопись найдена при разборѣ архива Казанскаго Учебнаго Округа, вмѣстѣ съ относящеюся къ ней перепискою. Изъ послѣдней видно, что академикъ Фуксъ не одобрилъ этой геометріи, причемъ особенно возмущался тѣмъ, что Лобачевскій принимаетъ французскій метръ за единицу при измѣреніи прямыхъ линій и сотую часть четверти круга—за единицу при измѣреніи дугъ круга. „Извѣстно, пишетъ Фуксъ, что сіе раздѣленіе выдумано было во время французской революціи, когда бѣшенство націи уничтожить все прежде бывшее распространилось даже до календаря и дѣленія круга; но сія новизна нигдѣ принята не была и въ самой Франціи давно уже оставлена по причинѣ очевидныхъ неудобствъ". (Недѣля).

По случаю исполнившагося недавно столѣтія со дня рожденія Огюста Конта 7-го марта въ актовомъ залѣ С.-Петербургскаго университета состоялось посвященное чествованію его памяти публичное засѣданіе недавно учрежденнаго при Университетѣ философскаго общества. Послѣ рѣчи В. С. Соловьева, посвященной общимъ идеямъ Конта, С. Е. Савичъ прочелъ рѣчь о математическихъ трудахъ Конта, а проф. О. Д. Хвольсонъ прочелъ рѣчь, посвященную позитивной философіи и физикѣ Конта (Недѣля).

Близъ Парижа находится небольшой городокъ Etampes; недавно тамошняя городская управа постановила замѣнить секретаря, составлявшаго протоколы засѣданій, фонографомъ. (Технологъ).

Въ Берлинскомъ Университетѣ числятся въ настоящее время 188 студентокъ. Изъ нихъ 43—уроженки Берлина, 64—изъ Германіи, 5—изъ Австро-Венгріи, 37—изъ Россіи, 26 американокъ, 7 англичанокъ, 2 француженки, 1 швейцарка, 1 голландка, 1 болгарка, 1 финляндка.

Въ Конго въ песчанныхъ мѣстностяхъ провинціи Stanley-Pool встрѣчается въ изобиліи растеніе, повидимому близкое къ ліанамъ рода *Sandolphia*, растущимъ на западномъ берегу Африки. Подземные стебли этого растенія, стелющіеся на глубинѣ нѣсколькихъ сантиметровъ подъ поверхностью почвы и выпускающіе то тамъ то сямъ воздушные побѣги высотою въ 20—60 сант., содержатъ въ изобиліи млечный сокъ, изъ котораго туземцы готовятъ каучукъ довольно хорошаго качества. (La Nature).

Новый математическій журналъ выходитъ на Галицкой Руси, начиная съ прошлаго года. Журналъ этотъ называется: „*Збірникъ Секціи Математично-природописно-лікарскої Науковаго Товариства Імени Шевченка*". До настоящаго времени вышли два номера этого журнала. (Изв. Физ.-мат. Общ. при Казанск. Унив.).

Профессоръ Лоріа въ Генуѣ предпринялъ изданіе новаго историко-библіографическаго журнала: *Bolletino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche*, который будетъ выходить четыре раза въ годъ. Въ первомъ выпускѣ помѣщена статья редактора: „Къ исторіи нѣкоторыхъ плоскихъ кривыхъ", рядъ рецензій, некрологъ проф. Шеринга и мелкія извѣстія. (Изв. Физ.-мат. Общ. при Казанск. Унив.).

4/16 марта скончался въ Лондонѣ 85-и лѣтъ отъ роду изобрѣтатель особаго способа приготовленія стали (бессемерованіе) сэръ *Henry Bessemer*. Кромѣ металлургіи онъ занимался усовершенствованіемъ способовъ раффинированія сахара, различными системами пароходовъ, телескопіей, живописью на золотѣ. Въ 1875 году онъ построилъ особый пароходъ съ приспособленіями противъ качки, но это изобрѣтеніе оказалось неудачнымъ, и только его стальные заводы спасли его отъ разоренія.

2 декабря прошлаго года (н. с.) скончался въ Боннѣ бывшій профессоръ астрономіи въ Страсбургскомъ Университетѣ, д-ръ *Aug. Winnecke* на 63-мъ году отъ рожденія.

РЕЦЕНЗІИ.

В. И. Васильевъ. **I. Ариѳметика цѣлыхъ чиселъ. М. 1895, ц. 25 к., стр. 66. II. Ариѳметика дробныхъ чиселъ. М. 1896, ц. 25 к., стр. 67. III. Ариѳметика. Отношенія, пропорціи и способы рѣшенія задачъ на правила: тройныя, процентовъ, учета векселей и пр. М. 1897, ц. 25 к., стр. 78.**

I. Первая изъ разсматриваемыхъ книжекъ представляетъ собою краткое систематическое изложеніе *правилъ* производства дѣйствій.

Предпославъ изложенію *правила* производства каждаго изъ дѣйствій определеніе его, причемъ вычитаніе и дѣленіе опредѣляются какъ дѣйствія обратныя, авторъ въ дальнѣйшемъ очень мало заботится объ установленіи логической связи между излагаемымъ правиломъ производства дѣйствія и его опредѣленіемъ, такъ что все изложеніе правила пріобрѣтаетъ указаніе чисто механическаго пріема вычисленія. Такой же характеръ изложенія носятъ и остальные отдѣлы первой книжки: провѣрка дѣйствій, измѣненіе результатовъ дѣйствій и дѣйствія надъ составными именованными числами.

II. Не столь механическій характеръ носитъ изложеніе статей, составляющихъ содержаніе второй книжки: дѣлимость чиселъ, дѣйствія надъ обыкновенными и десятичными дробями и обращеніе простыхъ дробей въ десятичныя и обратно.

Статья о дѣлимости чиселъ изложена очень кратко, но простымъ языкомъ и достаточно послѣдовательно, хотя въ каждомъ изъ признаковъ дѣлимости указана лишь его достаточность и не разсмотрѣна необходимость его, а для перехода къ вопросу объ отысканіи общаго наибольшаго дѣлителя авторъ позволилъ себѣ (§ 18) безъ достаточнаго основанія утверждать, что путемъ всевозможныхъ сочетаній въ произведенія простыхъ множителей даннаго числа мы получимъ *всѣхъ* дѣлителей его. Отсюда онъ дѣлаетъ (§ 19) совершенно правильный выводъ о составѣ дѣлителя даннаго числа изъ простыхъ множителей, но не достаточно ярко освѣщаетъ эту основную теорему дѣлимости чиселъ въ смыслѣ указанія необходимыхъ и достаточныхъ условій для того, чтобы одно число дѣлилось на другое. Этотъ пробѣлъ не даетъ ему возможности логически обосновать условія обращенія обыкновенной дроби въ десятичную безконечную (§ 149), заставляя его ограничиться лишь ссылкою на соотвѣтствующій примѣръ.

Разсматривая вопросъ объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ и наименьшемъ кратномъ, авторъ кромѣ способа составленія ихъ изъ простыхъ множителей указываетъ и способъ послѣдовательнаго дѣленія, причемъ доказываетъ теоремы, необходимыя для того, чтобы обосновать нахожденіе общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ, теоремъ же, на которыхъ основано нахожденіе общаго наибольшаго дѣлителя и наименьшаго кратнаго нѣсколькихъ чиселъ онъ не указываетъ, ограничиваясь лишь сообщеніемъ правилъ, сюда относящихся.

Порядокъ курса обыкновенныхъ дробей не отличается отъ общепринятаго. Дѣйствія надъ дробями изложены кратко. Въ статьѣ о сложеніи и вычитаніи дробей авторъ ограничивается указаніемъ лишь правилъ и числовыхъ примѣровъ безъ всякихъ поясненій. Болѣе подробно изложены два другихъ дѣйствія. Напрасно авторъ въ своемъ элементарномъ курсѣ пользуется опредѣленіемъ умноженія Коши, умѣстнѣе было бы дать самостоятельное опредѣленіе умноженія на дробь въ той формѣ, въ какой онъ пользуется имъ въ статьѣ о дѣленіи. Эта статья изложена тщательнѣе другихъ; напрасно только авторъ ограничился въ ней указаніемъ лишь одного случая употребленія дѣленія на дробь при рѣшеніяхъ задачъ—а именно нахожденіемъ числа по данной его части,—относя другіе случаи къ статьѣ о дѣйствіяхъ надъ составными именованными числами, гдѣ они не приведены въ логическую связь съ опредѣленіемъ дѣйствія, почему и указаніе на нихъ носитъ чисто внѣшній характеръ, — ученики просто должны запомнить, что и въ этихъ случаяхъ дѣлается дѣленіе.

Тѣмъ же характеромъ изложенія отличается и курсъ десятичныхъ дробей, который заканчивается статьею объ обращеніи простыхъ дробей въ десятичныя и обратно, и если бы въ этой статьѣ было доказано условіе, при которомъ простая дробь обращается въ десятичную безконечную, то она была бы лучшей изъ всего курса.

III. Третья книжка, на нашъ взглядъ, удачнѣе первыхъ двухъ. Она даетъ довольно полное знакомство съ образцами задачъ на спеціальныя правила, причемъ смыслъ задачъ, равно какъ и способъ ихъ рѣшенія, выясненъ довольно полно.

Указанію способа рѣшенія задачъ предпослана статья о пропорціяхъ, гдѣ свойства пропорцій разсмотрѣны съ достаточной полнотой для той цѣли, съ которой этотъ вопросъ, къ несчастію, трактуется до сихъ поръ, въ курсахъ ариѳметики низшихъ классовъ нашихъ среднихъ учебныхъ заведеній.

С. Житковъ.

ЗАДАЧИ.

№ 499. Рѣшить уравненіе

$$\operatorname{tg} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} \operatorname{tg} x.$$

С. Циклинскій (Пинскъ).

№ 500. Рѣшить уравненіе

$$7346 .\ 7^{\sec x} + 7^{1+\sec x} - 7010 .\ 7^{2\sec x} - 7^{3+2\sec x} + 3 .\ 7^{2+3\sec x} = 147.$$

(Заимств.).

№ 501. Рѣшить систему:

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = a^2$$

$$y(x + z + u) = b^2$$

$$x(z + u) + zu = c^2$$

$$xz = d^2.$$

А. Гольденбергъ (С.-Петербургъ).

№ 502. Построить треугольникъ ABC, если даны: уголъ A, радіусъ внѣвписаннаго круга, соотвѣтствующаго сторонѣ BC, и радіусъ круга, вписаннаго въ треугольникъ, одна изъ вершинъ котораго есть A, а двѣ другія суть основанія высотъ треугольника ABC, опущенныхъ изъ B и C.

М. Зиминъ (Орелъ).

№ 503. Построить треугольникъ по данному углу $BAC = w$, по данной высотѣ $AD = h_a$ и по данной суммѣ квадратовъ сторонъ AB и AC, равной l^2.

П. Свѣшниковъ (Уральскъ).

№ 504. Нѣкоторый предметъ помѣщенъ на разстояніи 16 дцм отъ экрана, на которомъ желаютъ проэктировать его изображеніе при помощи увеличительнаго стекла съ фокуснымъ разстояніемъ въ 30 см. Какое положеніе нужно дать чечевицѣ и каково отношеніе величины изображенія къ величинѣ предмета?

(Заимств.) *М. Г.*

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 415 (3 сер.). *Обозначая черезъ* h_a, h_b, h_c *и* a, b, c, *высоты и стороны треугольника* ABC, *показать, что*

$$(h_a+h_b+h_c)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right);$$

$$h_a+h_b+h_c=\frac{bc+ca+ab}{2R},$$

гдѣ R *есть радіусъ круга* ABC.

Такъ какъ

$$ah_a=bh_c=ch_c=2S,$$

гдѣ S — площадь треугольника, то

$$h_a=\frac{2S}{a},\ h_b=\frac{2S}{b},\ h_c=\frac{2S}{c};\ \frac{1}{h_a}=\frac{a}{2S},\ \frac{1}{h_b}=\frac{b}{2S},\ \frac{1}{h_c}=\frac{c}{2S},$$

откуда

$$h_a+h_b+h_c=2S\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\quad \frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a+b+c}{2S}.$$

Поэтому

$$(h_a+h_b+h_c)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Изъ извѣстныхъ формулъ

$$h_a=\frac{bc}{2R},\ h_b=\frac{ca}{2R},\ h_c=\frac{ab}{2R}$$

получаемъ также

$$h_a+h_b+h_c=\frac{bc+ca+ab}{2R}.$$

Пусть вообще $F(x, y, z)$ обозначаетъ такую однородную нулевого порядка функцію перемѣнныхъ x, y, z, которая не измѣняется отъ замѣны x, y, z соотвѣтственно черезъ

$$\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}.$$

Тогда

$$F(a, b, c) = F(h_a, h_b, h_c),$$

гдѣ h_a, h_b, h_c высоты и a, b, c стороны треугольника.

Дѣйствительно, при всякомъ m отличномъ отъ нуля по предположенію

$$F(x, y, z) = F\left(\frac{x}{m}, \frac{y}{m}, \frac{z}{m}\right) = F\left(\frac{m}{x}, \frac{m}{y}, \frac{m}{z}\right).$$

Полагая $x = a$, $y = b$, $z = c$, $m = S$, гдѣ a, b, c — стороны, а S — площадь треугольника, имѣемъ:

$$F(a, b, c) = F\left(\frac{2S}{a}, \frac{2S}{b}, \frac{2S}{c}\right) = F(h_a, h_b, h_c).$$

Б. Маллачи-Ханъ (Т. Х.-Шура); *Л. Магазаникъ* (Бердичевъ); *И. Поповскій* (Умань); *Я. Полушкинъ* (Знаменка); *А. Гвоздевъ* (Курскъ); ученики Уманской гимназіи *Р.* и *Ж.*

№ 416 (3 сер.). *Найти три числа, составляющихъ геометрическую прогрессію, если извѣстно, что отъ прибавленія 8-ми ко второму члену прогрессія превращается въ ариѳметическую, а если еще прибавить 64 къ третьему члену, то прогрессія снова становится геометрической.*

Называя искомыя числа черезъ x, y, z имѣемъ:

$$xz = y^2;\ 2(y + 8) = x + z;\ (y + 8)^2 = x(z + 64). \qquad (1)$$

Третье уравненіе по раскрытіи скобокъ принимаетъ видъ

$$y^2 + 16y + 64 = xz + 64x,$$

или, на основаніи перваго уравненія,

$$16y + 64 = 64x,$$

т. е.

$$y + 4 = 4x. \qquad (2)$$

Подставляя z изъ второго изъ уравненій (1) въ первое, а затѣмъ подставивъ въ полученное уравненіе y изъ уравненія (2), находимъ:

$$9x^2 - 40x + 16 = 0,$$

откуда

$$x_1 = 4;\ x_2 = \frac{4}{9},$$

а затѣмъ при помощи уравненія (2) и перваго изъ уравненій (1) находимъ:

$$y_1 = 12,\ z_1 = 36;\ y_2 = -\frac{20}{9},\ z_2 = \frac{100}{9}.$$

Ученики Уманской гимназіи *Р.* и *Ж.*; *И. Поповскій* (Умань); *В. Шатуновъ* (Полтава); *М. Огородовъ* (Сарапулъ; *Я. Тепляковъ* (Кіевъ); *А. Гвоздевъ* (Курскъ); *Б. Арѣшковъ* (Курскъ). Неполное рѣшеніе далъ *Л. Магазаникъ* (Бердичевъ).

№ 423 (3 сер.). *Показать, что площадь треугольника равна*

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2bc\,.\cos B\,.\cos C+b^2ac\,.\cos A\,.\cos C+c^2ab\,.\cos A\,.\cos B},$$

гдѣ a, b, c *суть стороны треугольника, а* A, B, C — *его углы.*

Изъ уравненій

$$c=\frac{b\sin C}{\sin B} \qquad (1)$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A} \qquad (2)$$

находимъ

$$c^2=\frac{ab\sin^2 C}{\sin A\sin B} \qquad (3).$$

Подставляя найденныя значенія для c и c^2 изъ уравненій (1), (2), (3) соотвѣтственно въ три члена подкоренного выраженія, получимъ:

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2bc\cos B\cos C+b^2ac\cos A\cos C+c^2ab\cos A\cos B}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2\left(\frac{\cos B\cos C\sin C}{\sin B}+\frac{\cos A\cos C\sin C}{\sin A}+\frac{\cos A\cos B\sin C}{\sin A\sin B}\right)}=$$

$$=\frac{ab}{2}\sqrt{\cos C\sin C\left(\frac{\cos B}{\sin B}+\frac{\cos A}{\sin A}\right)+\frac{\cos A.\sin B.\sin^2 C}{\sin A\sin B}}=$$

$$=\frac{ab}{2}\sqrt{\frac{\cos C\sin C\sin(B+A)+\cos A\sin B\sin^2 C}{\sin A\,.\sin B}}=$$

$$=\frac{ab}{2}\sqrt{\frac{\sin^2 C(\cos C+\cos A\cos B)}{\sin A\sin B}}=$$

$$=\frac{ab\sin C}{2}\sqrt{\frac{\cos A\cos B-\cos(A+B)}{\sin A\sin B}}=\frac{ab}{2}\sin C=S,$$

гдѣ S — площадь треугольника.

Я. Полушкинъ (Знаменка); *Н. С.* (Одесса).

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

MATHESIS.

1897.—№ 4.

Sur une conique inscrite ou circonscrite á un triangle. Par *M. Stuyvaert.* (См. обз. Mathesis, № 3, 1897). По содержанію статья касается теоріи коническихъ сѣченій. Методомъ высшей (синтетической) геометріи авторъ доказываетъ, что:

Если чрезъ какую нибудь точку въ плоскости тр-ка провести прямыя къ его вершинамъ и параллельныя его сторонамъ, то три пары такихъ прямыхъ въ пересѣченіи съ безконечно удаленной прямой образуютъ инволюцію точекъ, сопряженныхъ съ коническимъ сѣченіемъ, описаннымъ около тр-ка, и опредѣляющимся тр-мъ, избранной точкой въ его плоскости и положеніемъ прямой въ безконечности.

Notes mathématiques. 11. *Sur les combinaisons* (Barbette) Извѣстно, что (при принятыхъ обозначеніяхъ въ теоріи соединеній):

$$C_m^r = C_m^{m-r};$$

обратно, если
$$C_m^r = C_m^s, \qquad (1)$$
то
$$s = m - r, \text{ или } r + s = m.$$

Дѣйствительно, если $r > s$, то представивъ равенство (1) въ видѣ

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)}{1.2.3\ldots r} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-s+1)}{1.2.3\ldots s},$$

получимъ:

$$(m-s)(m-s-1)\ldots(m-r+1) = (s+1)(s+2)\ldots r,$$

откуда
$$m - s = r,$$

ибо каждая часть послѣдняго равенства есть произведеніе $r - s$ цѣлыхъ послѣдовательныхъ чиселъ.

12. *Sur le théorème relatif au carré de l'hypoténuse et le cinquième postulat d'Euclide* (Reyes). Пусть AD есть высота равнобедреннаго прямоугольнаго (при A) тр-ка ABC, такъ что

$$AB = AC, \; BD = DC = \frac{1}{2} BC.$$

Допуская справедливость теоремы: „квадратъ гипотенузы = суммѣ квадратовъ катетовъ“, получимъ:

$$BC^2 = 4BD^2 = AB^2 + AC^2 = BD^2 + AD^2 + AD^2 + DC^2,$$

или
$$4BD^2 = 2BD^2 + 2AD^2,$$

откуда
$$2BD^2 = 2AD^2 \text{ и } BD = AD,$$

т. е. тр-къ ADB — равнобедренный и $\angle ABD = \angle BAD = \frac{1}{2}$ прямого; тоже справедливо и для угла $\angle ACD$, а потому сумма угловъ тр-ка ABC = 2 прямымъ; но Лежандръ показалъ, что если сумма угловъ одного какого нибудь тр-ка = $2d$, то и во всякомъ тр-кѣ сумма угловъ = $2d$; такимъ образомъ изъ допущенной теоремы о гипотенузѣ и катетахъ выводится теорема о суммѣ угловъ тр-ка, а слѣдовательно и постулатъ Эвклида о параллельныхъ прямыхъ.

13. *La multiplication égyptienne et russe* *). У древнихъ Египтянъ умноженіе цѣлыхъ чиселъ производилось чрезъ послѣдовательное удвоеніе множимаго и чрезъ сложеніе (Cantor). Напр., чтобы умножить 42 на 37, замѣчаемъ, что $37 = 2^5 + 2^2 + 1$ и составляемъ произведенія

$$\begin{array}{lr}
42 \times 1 = & 42 \\
42 \times 2^2 = 84 \times 2 = & 168 + \\
42 \times 2^5 = 168 \times 2^3 = 336 \times 2^2 = 672 \times 2 = & 1344 \\
\hline
42 \times 37 = & 1554.
\end{array}$$

откуда

Крестьяне Тамбовской губерніи, по сообщенію г. Plakhovo (?) (J. E. 1896), дѣлаютъ умноженіе цѣлыхъ чиселъ слѣдующимъ образомъ: дѣлятъ множимое на 2, удерживая только цѣлое частнаго, и умножаютъ множителя на 2; съ полученными числами поступаютъ такимъ же образомъ, до тѣхъ поръ, пока отъ множимаго получится 1; сложивъ затѣмъ числа, полученныя отъ множителя и соотвѣтствующія нечетнымъ числамъ, полученнымъ отъ множимаго, находятъ искомое произведеніе. Напр., чтобы умножить 42 на 37, пишемъ:

---

*) См. зад. № 2, 7, 8 въ № 226 Вѣстника, рѣшенная въ № 237.

37	42,		42
18	84,		—
9	168		168
4	336		—
2	672		—
1	1344		1344
37 × 42	=		1554.

14. *Sur une propriété des coniques.* (Droz-Farny). *Теорема Mannheim'а:* Пусть A_1, B_1, C_1, суть пересѣченія касательной къ кругу, вписанному въ тр-къ ABC, съ его биссектриссами AI, BI, CI. Если касательныя къ тому же кругу, проведенныя изъ точекъ A_1, B_1, C_1, пересѣкаются съ сторонами тр-ка BC, CA, AB въ A_2, B_2, C_2, то точки A_2, B_2, C_2 лежатъ на прямой, проходящей чрезъ пересѣченіе биссектриссъ тр-ка (I).

Droz-Farny, основываясь на теоремѣ Бріаншона, доказываетъ, что теорема Mannheim'а справедлива для всякаго коническаго сѣченія, вписаннаго въ тр-къ, и для произвольной точки I въ плоскости этого тр-ка

Résumé des propriétés concernant les triangles d'aire maximum inscrits dans l'ellipse. Par *M. E. Barisien.* Продолженіе перечня свойствъ тр-ка съ наибольшею площадью, вписаннаго въ эллипсъ.

Solutions de questions proposées. №№ 252, 1035, 1053, 1059, 1094.

Questions proposées. №№ 1111—1118.

Questions d'examen. №№ 790—795.

Publications récentes. 9. **Essai sur la représentation analytique de la direction.** Par Caspar Wessel.

10. **Récherches sur la théorie des parallèles.** Par *M. Frolov.* Paris. 1897.

11. **Arithmétique.** Par *L. Gérard.* Paris.

12. **De Plückersche Grootheden de Deviatiekromme.** *W. Bouwman.*

Д. Е.

JOURNAL
de mathématiques élémentaires.
1896.—№ 2.

Etude sur l'involution généralisée. Par *A. Noyer* et *Ch. Michel.* **Volume des segments de sphère, d'ellipsoïde et d'hyperboloïdes.** Par *F. J. Формула Maclaurin'а,* по которой опредѣляется объемъ v шароваго слоя (или сегмента), имѣетъ видъ

$$v = \pi h\left(\varrho^2 - \frac{h^2}{12}\right),$$

гдѣ ϱ — радіусъ сѣченія слоя, равноотстоящаго отъ основаній его, а h — его высота. Эта ф-ла служитъ также для опредѣленія объема сегмента равносторонняго гиперболоида, при тѣхъ же значеніяхъ ϱ и h, если въ скобкахъ вмѣсто знака — при $\frac{h^2}{12}$ взять знакъ $+$.

Ур-ніе коническихъ сѣченій, отнесенныхъ къ ихъ вершинѣ и главной оси, имѣетъ видъ

$$y^2 = 2px + qx^2,$$

гдѣ

$$p = \frac{b^2}{a},\ a\ q = \begin{cases} -\dfrac{b^2}{a^2} & \text{для эллипса,} \\ 0 & \text{„ параболы,} \\ +\dfrac{b^2}{a^2} & \text{„ гиперболы.} \end{cases}$$

Объемъ слоя (или сегмента) эллипсоида, параболоида и гиперболоида вращенія около главной оси опредѣляется ф-лой

$$v = \pi h\left(\varrho^2 + \frac{qh^2}{12}\right).$$

Объемы слоевъ эллипсоида или гиперболоида вращенія кривыхъ

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

около оси x суть

$$v = \pi\varrho^2 h \mp \frac{\pi h^3}{12} \cdot \frac{b^2}{a^2}.$$

Ф-лы для объемовъ слоевъ тѣлъ, получающихся отъ вращенія тѣхъ-же кривыхъ около оси y, суть

$$v = \pi\varrho^2 h - \frac{\pi h^3}{12} \cdot \frac{a^2}{b^2}.$$

Для опредѣленія объема слоя трехъ-оснаго эллипсоида служитъ ф-ла

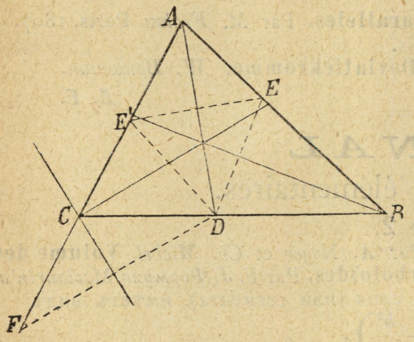
$$v = \pi\varrho\varrho' h - \frac{\pi h^3}{12} \cdot \frac{bc}{a^2},$$

гдѣ ϱ и ϱ' — суть полуоси сѣченія слоя, равно отстоящаго отъ его основаній.

Теорема. *Система гиперболъ съ общими ассимптотами, при вращеніи ихъ около оси x, образуютъ тѣла вращенія, гиперболоиды и конусъ, отрѣзки которыхъ между плоскостями, перпендикулярными къ оси x, равновелики, если имѣютъ равныя высоты и равныя сѣченія, равноотстоящія отъ ихъ основаній.*

Démonstration d'une proposition conduisant à la relation entre les trois côtés d'un triangle et une bissectrice. Par *M. Lauvernay.*

Теорема. *Пусть D есть внутренняя биссектрисса угла A треугольника ABC; если перпендикуляры изъ D на внѣшнюю биссектриссу угла C и внутреннюю биссектриссу угла B пересѣкаютъ AC и AB въ F и E, то $AE \,.\, AF = AD^2$.*



Фиг. 2.

Обозначивъ чрезъ E′ точку симметричную съ E относительно AD, получимъ $AE' = AE$ и $\angle AE'D = \angle AED = 90^0 + \frac{B}{2}$. Съ другой стороны, $\angle ADF = \angle CDA + \frac{C}{2} = \frac{A}{2} + B + \frac{C}{2} = 90^0 + \frac{B}{2}$; слѣдов., прямыя DE′ и DF антипараллельны относительно угла DAC, а потому $AD^2 = AE' . AF = AE . AF$.

Слѣдствіе. Если $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, то $AE = \frac{2c\,(p-a)}{b+c}$, $AF = \frac{2bp}{b+c}$ и $AD^2 = \frac{4bcp\,(p-a)}{(b+c)^2}$.

La multiplication russe *). Par *M. Goyens.* Способъ умноженія цѣлыхъ чиселъ, практикующійся у тамбовскихъ крестьянъ (См. Обз. Mathesis, 1897, № 4), объясняется слѣдующимъ образомъ: если множимое число четное, то отъ дѣленія его на 2 и одновременнаго умноженія множителя на 2 произведеніе не измѣняется. Если же множимое число нечетное, то отбрасываніе $\frac{1}{2}$ въ частномъ отъ дѣленія множимаго на 2 равносильно отбрасыванію въ произведеніи неизмѣненнаго множителя. Напр. $35 \times 42 = 17\frac{1}{2} \times 84 = 17 \,.\, 84 + 42 = 8\frac{1}{2} \cdot 168 + 42 = 8 \,.\, 168 + 84 + 42 = 4 \,.\, 336 + 84 + 42 = 2 \,.\, 672 + 84 + 42 = 1344 + 84 + 42 = 1470$.

Bibliographie. Exercices de Géométrie. Par F. J.

Exercices divers. Par *M. Aug. Boutin.* №№ 415, 416.

Baccalauréats.

Questions. №№ 659, 660, 662.

Rappel de questions non résolues. №№ 149, 199, 240, 241, 284, 359, 360, 391, 418, 420.

Questions proposées. №№ 701, 702.

---

*) См. зад. № 278 въ № 226 Вѣстника, рѣшенная въ № 237.

1896.—№ 3.

Sur l'ombre propre des polyèdres. Par *M. d'Ocagne.* Извлеченіе изъ курса начертательной геометріи того-же автора.

Etude sur l'involution généralisée. Par *M. A. Noyer et Ch. Michel.*

Sur la détermination géométrique de l'angle x donné par léquation $a \sin x + b \cos x = c$. Par. *E. Lemoine.* Оцѣнка разныхъ способовъ геометричеекаго рѣшенія ур-нія $a \sin x + b \cos y = c$ съ точки зрѣнія геометрографіи.

Exercices divers. Par *M. Aug. Boutin.* №№ 417, 418, 419. Три теоремы относительно коническихъ сѣченій. Первая есть обобщеніе *теоремы Lemoine'a:* Пусть M и M′ суть изогонально сопряженныя точки тр-ка ABC и A_1, B_1, C_1,—пересѣченія прямыхъ AM, BM, CM, съ окружностью ABC; если прямая MM′ пересѣкаетъ стороны тр-ка въ A′, B′, C′, то прямыя $A_1 A'$, $B_1 B'$, $C_1 C'$ пересѣкаются въ одной точкѣ на окружности ABC, именно, въ *точкѣ Штейнера.* *)

Correspondance.

Questions. № 7. Доказательство теоремы, предложенной *Neuberg'омъ.* «Если ABC_1, BCA_1 CAB_1 суть подобные тр-ки, построенные на сторонахъ тр-ка ABC, и если прямыя AA_1, BB_1, CC_1 пересѣкаются въ одной точкѣ D, то геометрическія мѣста каждой изъ точекъ A_1, B_1 C_1 суть окружности». (*E. Duporcq*).

Questions proposées. №№ 703—718. *Д. Е.*

Присланы въ редакцію книги и брошюры.

78. *Г. Г. Бѣлькевичъ.* **Какъ безъ мастера проводить и исправлять электрическіе звонки.** Изд. П. О. Рабиновича. Москва 1898. Ц. 25 к.

79. *Плято ф. Рейсснера.* **Новѣйшая метода или Русско-Нѣмецкій учебникъ** для обученія въ три мѣсяца нѣмецкому чтенію, письму и разговору безъ помощи учителя. Высшій курсъ, VI изд., 7-й вып. Варшава. 1898. Ц. 20 к.

80. **Курсъ химической технологіи** *Н. А. Бунге,* Профессора Университета Св. Владиміра. Выпускъ III. Мыловареніе.—Взрывчатыя тѣла.—Запалы.—Зажигательныя спички.—Стекляное производство. — Глиняное производство.—Известь.—Гипсъ.—Цементы.—Асфальтъ. — Дерево (предохраненіе отъ порчи). Приложеніе къ Университетскимъ Извѣстіямъ 1897 г. Кіевъ. 1897.

81. *Плято ф. Рейсснера.* **Новѣйшая метода или Русско-Нѣмецкій учебникъ** для обученія въ три мѣсяца нѣмецкому чтенію, письму и разговору безъ помощи учителя. Высшій курсъ. VI изданіе. 8-ой вып. Варшава, 1898. Ц. 20 к.

82. — 9-ый вып. Ц. 20 к.

83. **Сборникъ статей въ помощь самообразованію по математикѣ, физикѣ, химіи и астрономіи,** составленныхъ кружкомъ преподавателей. Выпускъ I. (Съ 3 портретами и 31 чертежемъ). М. 1898. Ц. 1 р. 20 к.

84. *Плято ф. Рейсснера.* **Новѣйшая метода или Русско-Нѣмецкій учебникъ** для обученія въ три мѣсяца нѣмецкому чтенію, письму и разговору безъ помощи учителя. Высшій курсъ. VI изданіе. 10-ый вып. Варшава. 1898. Ц. 20 к.

85. — 11-й вып. Ц. 20 к.

86. *Электротехническая библіотека. Томъ IX.* **Многофазные электрическіе токи и двигатели перемѣннаго тока.** Проф. *Сильвануса Томпсона.* Переводъ съ англійскаго, изданіе *М. А. Шателена.* Съ 171 фиг. въ текстѣ. Изданіе журнала „Электричество". СПБ. 1898. Ц. 3 р. 20 к.

*) См. «Новая геом. тр-ка» V, 9 и VII, 12.

87. *Эрикъ Жераръ*, Директоръ Электротехническаго Института Montefiore. **Электрическія измѣренія.** (Лекціи, читанныя въ Электротехническомъ Институтѣ Montefiore при университетѣ въ Лютихѣ). Перевелъ и дополнилъ П. Д. Войнаровскій, преподаватель С.-Петербургскаго Электротехническаго Института, Телеграфный Инженеръ, Инженеръ-Электрикъ Института Montefiore. Съ 225 рис. Принято какъ пособіе въ электротехническомъ Институтѣ. Изданіе Ф. В. Щепанскаго. Невскій, 34. СПБ. 1898. Стр. 209—406; I—XII.

88. **Отчетъ Либавскаго Отдѣленія Императорскаго Русскаго Техническаго Общества за 1897 годъ.** Либава.

89. **Значеніе понятій о „силѣ" и о „массѣ" въ теоріи познанія и въ механикѣ.** *Н. Н. Шиллера.* Кіевъ. 1898.

90. **Нѣкоторые опыты съ испареніемъ жидкости подъ высокимъ газовымъ давленіемъ.** *Н. Шиллера.* (Оттискъ изъ «Университетскихъ Извѣстій» за 1897 г.). Кіевъ.

91. **Лѣтописи Главной Физической Обсерваторіи**, издаваемые *М. Рыкачевымъ*, Членомъ Императорской Академіи Наукъ и Директоромъ Главной Физической Обсерваторіи. 1896 годъ. Часть I. Метеорологическія и магнитныя наблюденія станцій 1 разряда, экстраординарныя наблюденія станцій 2 разряда и наблюденія станцій 3 разряда. СПБ. 1897.

92. **Лѣтописи Главной Физической Обсерваторіи**, издаваемыя *М. Рыкачевымъ*, Членомъ Императорской Академіи Наукъ и Директоромъ Главной Физической Обсерваторіи. 1896 годъ. Часть II. Метеорологическія наблюденія по международной системѣ станцій 2 разряда въ Россіи. СПБ. 1897.

93. **Отчетъ по Главной Физической Обсерваторіи за 1896 г.**, представленный Императорской Академіи Наукъ *М. Рыкачевымъ*, Директоромъ Главной Физической Обсерваторіи. (Съ одною таблицею). (Записки Императорской Академіи Наукъ. По Физико-Математическому Отдѣленію. Томъ V. № 9). СПБ. 1897. Ц. 1 р. 40 к.

ПОЛУЧЕНЫ РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ отъ слѣдующихъ лицъ: *Б. Арњшкова* (Курскъ) 464, 468 (3 сер.); *С. Циклинскаго* (Пинскъ) 441, 462, 468 (3 сер.); *М. Зимина* (Орелъ) 397, 398, 400, 401, 402, 404. 407, 409, 411, 451, 455, 456, 458 (3 сер.); *Я. Полушкина* (с. Знаменка) 538 (2 сер.), 481, 482, 484 (3 сер.); *А. Гвоздева* (Курскъ) 415 (3 сер.); *П Лисевича* (Курскъ) 436 (3 сер.); *А. Старостина* (Курскъ) 479 (3 сер.); *Л. Магазаника* (Бердичевъ) 436 (3 сер.); *Я. Полушкина* (с. Знаменка) 433, 435, 436 (3 сер.); *Б. Арњшкова* (Курскъ) 427, 428, 429, 430, 431 (3 сер.); *В. Шидловскаго* (Полоцкъ) 435, 436, 481, 482, 483, 484, 486 (3 сер.); *В. Гартіера* (Полоцкъ) 435, 436 (3 сер.); *П. Полушкина* (с. Знаменка) 438 (3 сер.); *В. Морозова* (Тамбовъ) 435, 436, 438, 481 (3 сер.); *Р. и Ж.* (Умань) 415, 416, 418 (3 сер.).

Поправка.

Въ № 260 „Вѣстника" слѣдуетъ исправить слѣдующія опечатки:

стр. 203, строка 8 снизу напечатано p, слѣдуетъ: $p-1$

„ 207, „ 6 сверху напечатано $1 . 2^6 + 0 + 1$,

слѣдуетъ: $1 . 2^6 + (0 + 1) 2^5$.

Редакторъ **В. А. Циммерманъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою. Одесса, 1-го Мая 1898 г.

„Центральная типо-литографія", уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. № 39.

Обложка
ищется

Обложка
ищется