Обложка
ищется

Обложка
ищется

XX Сем. 1-го Марта 1896 г. № 5.

# ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 233.



## ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНІЯ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХЪ ЧИСЕЛЪ

(по Cantor'у).

### Предварительныя замѣчанія.

§ 1. Число N называется *алгебраическимъ*, когда оно удовлетворяетъ уравненію вида

$$A = ax^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m = 0 \ . \ . \ . \ . \ (1),$$

гдѣ показатель $m$ есть положительное цѣлое число, коэффиціенты $a, a_1, \ldots a_{m-1}, a_m$ суть цѣлыя числа и $a$ отлично отъ нуля.

Въ этомъ уравненіи можемъ считать коэффиціентъ $a$ высшаго члена положительнымъ, ибо, допуская противное и мѣняя знаки всѣхъ членовъ уравненія, найдемъ, что алгебраическое число N удовлетворяетъ уравненію того же вида, но при этомъ коэффиціентъ высшаго члена уже есть положительное число Можно также предположить, что общій наибольшій дѣлитель $d$ всѣхъ коэффиціентовъ уравненія равенъ единицѣ, ибо, предположивъ $d$ отличнымъ отъ единицы и раздѣливъ обѣ части уравненія на $d$, найдемъ, что число N удовлетворяетъ уравненію вида (1) съ коэффиціентами, которыхъ общій наибольшій дѣлитель равенъ единицѣ.

Разсматривая алгебраическія уравненія, мы всюду будемъ предполагать, что эти уравненія приведены къ виду (1) и что коэффиціенты въ этихъ уравненіяхъ удовлетворяютъ условіямъ, установленнымъ нами относительно коэффиціентовъ уравненія (1).

Степень алгебраическаго уравненія, которому удовлетворяетъ алгебраическое число N, по опредѣленію, не можетъ быть меньше единицы и, слѣдовательно, имѣетъ minimum. Зная это, докажемъ слѣдующую теорему.

**Теорема I.** *Если алгебраическое уравненіе*

$$A = ax^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m = 0$$

*есть уравненіе наименьшей степени, удовлетворяющееся числомъ* N, *и если полиномъ* A *дѣлится безъ остатка на полиномъ*

$$B = bx^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} + b_n,$$

*въ которомъ показатель* $n$ *и коэффиціенты* $b, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n$ *удовлетворяютъ условіямъ, установленнымъ относительно показателя* $m$ *и коэффиціентовъ полинома* A, *то полиномы* A *и* B *тождественно равны, т. е.*

$$m = n;\ a = b;\ a_1 = b_1; \ldots,\ a_{m-1} = b_{n-1};\ a_m = b_n.$$

**Доказательство.** Нельзя допустить, чтобы было $n > m$, ибо въ этомъ случаѣ полиномъ A не можетъ дѣлиться безъ остатка на полиномъ B. Покажемъ также, что и неравенство $n < m$ невозможно. Когда $n < m$, то частное отъ дѣленія полинома A на полиномъ B представится въ видѣ полинома

$$C = cx^{m-n} + c_1x^{m-n-1} + \cdots + c_{m-n-1}x + c_{m-n}$$

съ раціональными коэффиціентами, гдѣ $c = \dfrac{a}{b}$ есть положительное число. Приведемъ всѣ коэффиціенты $c, c_1, \ldots, c_{m-n}$ къ одному знаменателю $q$ и допустимъ что послѣ этого ихъ числители имѣютъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ число $d$. Полиномъ C представится въ видѣ

$$C = \frac{d}{q}C',$$

гдѣ

$$C' = c'x^{m-n} + c'_1x^{m-n-1} + \cdots + c'_{m-n-1}x + c_{m-n}.$$

Показатель $m-n$ и коэффиціенты $c', c'_1, \ldots c'_{m-1}$ удовлетворяютъ теперь условіямъ, установленнымъ относительно показателя и коэффиціентовъ полинома A, и мы имѣемъ тождественно

$$A = \frac{d}{q}BC'.$$

Число N, обращая въ нуль полиномъ A, должно обратить въ нуль одинъ изъ двухъ полиномовъ B и C′, что невозможно, ибо степени алгебраическихъ уравненій $B = 0$ и $C' = 0$ меньше $m$, а уравненіе $A = 0$

степени $m$ есть алгебраическое уравненіе наименьшей степени, удовлетворяющееся при $x = \mathrm{N}$.

Такимъ образомъ необходимо допустить, что

$$m = n.$$

Въ этомъ случаѣ частное отъ дѣленія A на B равно $\frac{a}{b}$, и, обозначивъ черезъ $\frac{a'}{b'}$ несократимую дробь, равную $\frac{a}{b}$, будемъ имѣть тождественно

$$ax^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m = \frac{a'}{b'}(bx^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m),$$

откуда

$$b'a = a'b';\ b'a_1 = a'b_1; \ldots;\ b'a_m = a'b_m.$$

Принимая во вниманіе, что $a'$ и $b'$ взаимно простыя числа, найдемъ изъ этихъ равенствъ, что каждое изъ чиселъ $a, a_1, \ldots, a_m$ имѣетъ дѣлителемъ число $a'$, а каждое изъ чиселъ $b, b_1, \ldots, b_m$ имѣетъ дѣлителемъ число $b'$, слѣдовательно $a' = b' = 1$. Но въ такомъ случаѣ предыдущія равенства обращаются въ

$$a = b;\ a_1 = b_1, \ldots;\ a_m = b_m,$$

что и требовалось доказать.

**Слѣдствіе.** *Если полиномъ* A *дѣлится безъ остатка на полиномъ*

$$\mathrm{B}' = b'x^n + b'_1x^{n-1} + \cdots + b'_n,$$

*гдѣ* n *положительное цѣлое*, $b', b'_1, \ldots b'_n$ *раціональныя числа и* $b'$ *отлично отъ нуля, то* B′ *отличается отъ* A *только постояннымъ (независящимъ отъ* x) *раціональнымъ множителемъ.* Дѣйствительно, мы видѣли уже какъ приведеніемъ коэффиціентовъ къ одному знаменателю $q$ и вынесеніемъ за скобки общаго численнаго множителя $d$ можемъ представить такой полиномъ, какъ B′, въ видѣ

$$\mathrm{B}' = \frac{d}{q}\mathrm{B},$$

причемъ въ полиномѣ

$$\mathrm{B} = bx^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n$$

коэффиціенты удовлетворяютъ условіямъ, установленнымъ относительно коэффиціентовъ полинома A. Дѣлясь безъ остатка на B′, полиномъ A дѣлится безъ остатка и на B, но въ такомъ случаѣ

$$\mathrm{B} = \mathrm{A} \text{ и } \mathrm{B}' = \frac{d}{q}\mathrm{A}.$$

**Теорема II.** *Алгебраическое уравненіе* $\mathrm{A} = 0$ *наименьшей степени* m, *удовлетворяющееся при* $x = \mathrm{N}$, **неприводимо**, *т. е. лѣвая его часть неспособна дѣлиться безъ остатка ни на какой полиномъ*

$$B = bx^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b^n,$$

*гдѣ* $n < m$ *есть цѣлое число*, $b, b_1, \ldots b_n$ *суть раціональныя числа и* $b$ *отлично отъ нуля.*

Ибо, допустивъ противное, нашли бы, что B отличается отъ A только постояннымъ множителемъ и, слѣдовательно, степень $n$ полинома B не могла бы быть ниже степени $m$ полинома A.

**Теорема III.** *Если алгебраическое уравненіе*

$$A = ax^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = 0,$$

*удовлетворяющееся при* $x = N$, *неприводимо, и если*

$$B = bx^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b^n = 0$$

*есть одно изъ алгебраическихъ уравненій наименьшей степени, удовлетворяющихся при* $x = N$, *то полиномы* A *и* B *тождественно равны.*

**Доказательство.** Такъ какъ каждый изъ полиномовъ A и B дѣлится безъ остатка на $x - N$, то общій наибольшій дѣлитель D полиномовъ A и B содержитъ $x$. Изъ самаго же процесса нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя D вытекаетъ, что D есть полиномъ вида

$$D = dx^p + d_1 x^{p-1} + \cdots + d_p,$$

гдѣ $p$ положительное цѣлое $d, d_1, \ldots d_p$ — цѣлыя числа, коихъ общій наибольшій дѣлитель равенъ 1-цѣ, и $d$ отлично отъ нуля. Отсюда, согласно теоремѣ I, вытекаетъ, что полиномы B и D тождественны, слѣдовательно полиномъ A дѣлится безъ остатка на полиномъ B; но полиномъ A неприводимъ, слѣдовательно, степень $m$ полинома A равна степени $n$ полинома B. Частное отъ дѣленія A на B будетъ поэтому равно $\frac{a}{b}$ и не зависитъ отъ $x$. Частное $\frac{B}{A}$ будетъ равно $\frac{b}{a}$, т. е. полиномъ B дѣлится безъ остатка на полиномъ A, а такъ какъ $B = 0$ есть уравненіе наименьшей степени, удовлетворяющееся при $x = N$, и B дѣлится безъ остатка на A, то, по теоремѣ I, полиномы B и A тождественны, что и требовалось доказать.

**Теорема IV.** *Существуетъ только одно алгебраическое уравненіе наименьшей степени, удовлетворяющееся даннымъ алгебраическимъ числомъ* N. *Это уравненіе будемъ называть уравненіемъ, опредѣляющимъ алгебраическое число* N.

Ибо, если $A = 0$ и $B = 0$ суть два алгебраическихъ уравненія наименьшей степени, удовлетворяющихся числомъ N, то, по теоремѣ II, уравненіе $A = 0$ неприводимо, а по теоремѣ III полиномы A и B тождественно равны.

**Слѣдствіе.** Если алгебраическое число N удовлетворяетъ алгебраическому неприводимому уравненію $A = 0$, то уравненіе $A = 0$ и есть то единственное уравненіе, которымъ опредѣляется алгебраическое число N.

## Опредѣленіе трансцендентнаго числа.

§ 2. Къ классу алгебраическихъ чиселъ относятся:

1) Всѣ раціональныя числа, ибо каждое раціональное число можно представить въ видѣ несократимой дроби $\frac{b}{a}$, которая опредѣляется алгебраическимъ неприводимымъ уравненіемъ

$$ax - b = 0.$$

2) Всѣ тѣ ирраціональныя числа, которыя получаются какъ результатъ соединенія раціональныхъ чиселъ при помощи конечнаго числа раціональныхъ дѣйствій $(+, -, \times, :)$ и извлеченія конечнаго числа корней съ раціональными показателями, ибо такія ирраціональныя числа, какъ доказывается въ высшей Алгебрѣ, суть корни неприводимыхъ алгебраическихъ уравненій.

3) Всѣ тѣ ирраціональныя числа, которыя, служа корнями алгебраическихъ неприводимыхъ уравненій, не могутъ быть получены какъ результаты соединенія раціональныхъ чиселъ посредствомъ конечнаго числа раціональныхъ дѣйствій и извлеченій корней съ раціональными показателями. Существованіе такихъ ирраціональныхъ чиселъ впервые доказано Абелемъ.

Спрашивается, исчерпывается ли *весь* классъ ирраціональныхъ чиселъ указанными двумя классами алгебраическихъ ирраціональныхъ чиселъ, или существуютъ еще ирраціональныя неалгебраическія числа, т. е. такія, которыя не могутъ удовлетворять никакому неприводимому алгебраическому уравненію?

Намекъ на существованіе неалгебраическихъ ирраціональныхъ чиселъ содержится уже у англійскаго геометра James Gregory (1638—1675) въ его сочиненіи „Vera circuli et hyperbolae quadratura“. Лейбницъ назвалъ такія числа *трансцендентными.*

Итакъ, *трансцендентнымъ называется всякое число, которое неспособно удовлетворить никакому алгебраическому неприводимому уравненію.*

Строгое доказательство существованія трансцендентныхъ чиселъ дано впервые Liouville'емъ (Comptes rendus 1844 и журналъ Liouville'я 16,1851). Оно основано на теоріи непрерывныхъ дробей и представляется довольно сложнымъ. Замѣчательное по простотѣ и геніальное по идеѣ доказательство существованія трансцендентныхъ чиселъ дано было затѣмъ нѣмецкимъ геометромъ Georg'омъ Cantor'омъ въ статьѣ „Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes reeler algebraischer Zahlen“ въ журналѣ Crelle'я 77.1873. Къ изложенію этого доказательства мы теперь и переходимъ.

## Понятіе объ исчислимомъ комплексѣ.

§ 3. Комплексомъ навываютъ группу, составленную изъ конечнаго или безконечно большого числа предметовъ, называемыхъ членами комплекса.

Мы будемъ разсматривать только такіе комплексы, членами которыхъ служатъ вещественныя числа, взятыя въ безконечно-большомъ числѣ.

Cantor называетъ *исчислимымъ комплексомъ* (abzählbare Menge) такой комплексъ, члены котораго могутъ быть перенумерованы, т. е. расположены въ одинъ рядъ такимъ образомъ, чтобы каждый членъ комплекса занималъ въ этомъ ряду совершенно опредѣленное мѣсто, и чтобы каждое опредѣленное мѣсто ряда было занято однимъ только опредѣленнымъ членомъ комплекса.

Комплексъ положительныхъ четныхъ чиселъ представляетъ примѣръ исчислимаго комплекса, ибо, располагая эти числа въ порядкѣ ихъ возрастанія

$$2,\ 4,\ 6,\ 8, \ldots,\ 2n, \ldots,$$

видимъ, что каждый членъ (напримѣръ $2n$) занимаетъ совершенно опредѣленное ($n$-ое) мѣсто и, наоборотъ, каждое опредѣленное ($n$-ое) мѣсто занято однимъ опредѣленнымъ членомъ ($2n$).

Комплексъ натуральныхъ чиселъ

$$1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots\ n,\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \qquad (2)$$

представляетъ другой примѣръ исчислимаго комплекса.

Члены этого комплекса могутъ быть разсматриваемы какъ нумера мѣстъ, занимаемыхъ членами любого исчислимаго комплекса и слѣдовательно, между членами всякаго исчислимаго комплекса и членами комплекса (2) существуетъ однозначное соотвѣтствіе, т. е. каждому члену исчислимаго комплекса соотвѣтствуетъ членъ комплекса (2) и каждому члену комплекса (2) соотвѣтствуетъ одинъ опредѣленный членъ исчислимаго комплекса.

Когда между членами двухъ комплексовъ возможно установить однозначное соотвѣтствіе, то Cantor говоритъ, что эти комплексы имѣютъ одинаковую *мощность* (Mächtigkeit). Можно поэтому установить слѣдующее опредѣленіе:

*Исчислимымъ комплексомъ называется комплексъ, мощность котораго равна мощности комплекса натуральныхъ чиселъ.*

Съ перваго взгляда можетъ показаться, что комплексъ *всѣхъ раціональныхъ* положительныхъ чиселъ не представляется исчислимымъ комплексомъ. Дѣйствительно, располагая всѣ эти числа въ одинъ рядъ по порядку ихъ возрастанія, находимъ, что каждому опредѣленному раціональному положительному числу N предшествуетъ безчисленное множество другихъ раціональныхъ чиселъ, меньшихъ N, вслѣдствіе чего нельзя указать номера мѣста, занимаемаго въ ряду числомъ N. Можно однако-же дать другое расположеніе членамъ комплекса раціональныхъ положительныхъ чиселъ, причемъ каждое число будетъ занимать совершенно опредѣленное мѣсто.

Комплексъ раціональныхъ положительныхъ чиселъ представляется комплексомъ всѣхъ неравныхъ раціональныхъ положительныхъ несократимыхъ дробей, которыхъ знаменатели въ частныхъ случаяхъ могутъ быть равны единицы. Разсмотримъ одну такую несократимую дробь $\frac{a}{b}\cdot$ Положимъ

$$\mathrm{H} = a + b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

и будемъ называть цѣлое положительное число Н высотою разсматриваемой несократимой дроби. Каждая несократимая дробь будетъ имѣть опредѣленную высоту Н. Наоборотъ, существуетъ только *конечное число* несократимыхъ дробей, имѣющихъ данное цѣлое положительное число Н своею высотою.

Для нахожденія всѣхъ этихъ дробей, достаточно разрѣшить неопредѣленное уравненіе (3) въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ, взять значенія $a$ числителями, а соотвѣтствующія значенія $b$ знаменателями дробей и отбросить всѣ тѣ дроби, которыя окажутся сократимыми. А такъ какъ уравненіе (3) допускаетъ только конечное число цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній, то число несократимыхъ дробей, имѣющихъ Н своею высотой, непремѣнно будетъ конечнымъ. Такъ напримѣръ, въ группѣ дробей

$$\frac{1}{9}, \frac{3}{7}, \frac{7}{3}, \frac{9}{1}$$

заключаются всѣ тѣ раціональныя числа, которыхъ высота равна 10.

Если распредѣлимъ всѣ раціональныя числа въ классы по ихъ высотамъ 1, 2, 3, 4, ..., если затѣмъ внутри каждаго класса расположимъ числа въ порядкѣ ихъ возрастанія и если наконецъ, соединимъ эти классы въ одинъ рядъ

$$\begin{array}{llllll} \text{Числа:} & 0,\ 1, & \underbrace{\left|\frac{1}{2}, 2\right|} & \underbrace{\left|\frac{1}{3}, \frac{3}{1}\right|} & \underbrace{\left|\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}\right|} & \ldots, \\ \text{Высоты:} & 1,\ 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots, \end{array}$$

то каждое раціональное число будетъ занимать въ этомъ ряду опредѣленное мѣсто, и на каждомъ мѣстѣ находится только одно опредѣленное число. Такимъ образомъ комплексъ раціональныхъ положительныхъ чиселъ оказывается исчислимымъ комплексомъ.

### Комплексъ вещественныхъ алгебраическихъ чиселъ.

§ 4. Доказательство существованія трансцендентныхъ вещественныхъ чиселъ основывается у Cantor'а на слѣдующихъ двухъ теоремахъ.

**Первая теорема Cantor'а.** *Комплексъ вещественныхъ алгебраическихъ чиселъ есть исчислимый комплексъ.*

**Доказательство.** Пусть N будетъ алгебраическое число, опредѣляемое неприводимымъ алгебраическимъ уравненіемъ

$$\mathrm{A} = ax^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_n x^n + \cdots + a_{m-1} x + a_m = 0.$$

Обозначимъ черезъ $|a_n|$ численную величину коэффиціента $a_n$. Положимъ

$$\mathrm{H} = m - 1 + a + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots + |a_m| \ldots (4)$$

и будемъ называть Н высотою алгебраическаго числа N и опредѣляющаго его уравненія $\mathrm{A} = 0$. Каждое алгебраическое число имѣетъ такимъ образомъ опредѣленную высоту H, которая выражается цѣлымъ положительнымъ числомъ.

Наоборотъ, существуетъ только конечное число вещественныхъ алгебраическихъ чиселъ, которыхъ высота равна данному положительному цѣлому числу H. Чтобы найти всѣ алгебраическія числа высоты H, составимъ всѣ тѣ алгебраическія неприводимыя уравненія, которыхъ высота равна H. Для этой цѣли достаточно будетъ сначала разрѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ неопредѣленное уравненіе (4), допускающее только конечное число системъ цѣлыхъ и положительныхъ значеній для $m$, $a$, $|a_1|, \ldots, |a_n|$. Имѣя всѣ системы рѣшеній уравненія (4), напишемъ всѣ тѣ алгебраическія уравненія, которыхъ высота равна H, причемъ коэффиціентами при $x^n$ въ составляемыхъ уравненіяхъ будутъ служить различныя значенія выраженія $\pm|a_n|$. Изъ полученной такимъ образомъ системы уравненій исключимъ всѣ приводимыя уравненія, а также и всѣ тѣ уравненія, коэффиціенты которыхъ имѣютъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ число, отличное отъ единицы. Остающаяся послѣ этого система уравненій будетъ въ себѣ заключать всѣ тѣ и только тѣ неприводимыя алгебраическія уравненія, которыхъ высота равна H. Система конечнаго числа вещественныхъ чиселъ, изъ коихъ каждое удовлетворяетъ одному изъ этихъ уравненій, будетъ содержать всѣ тѣ и только тѣ алгебраическія числа, которыхъ высота равна H *).

---

*) Найдемъ, для примѣра, всѣ тѣ веществнныя алгебраическія числа, которыхъ высота равна 4. Полагая $H=4$ въ уравненіи (4) и замѣчая, что при этомъ $m$ не можетъ быть больше 5 и что $a_m$ необходимо отлично отъ 0 (ибо въ противномъ случаѣ соотвѣтствующее алгебраическое уравненіе степени $m$, дѣлясь безъ остатка на $x$, будетъ приводимымъ), находимъ, что вопросъ приводится къ рѣшенію въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ каждаго изъ слѣдующихъ неопредѣленныхъ уравненій:

$$a+|a_1|=4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (m=1)$$
$$a+|a_1|+|a_2|=3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (m=2)$$
$$a+|a_1|+|a_2|+|a_3|=2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (m=3)$$
$$a+|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (m=4)$$
$$a+|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|+|a_5|=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (m=5)$$

Послѣднее уравненіе не допускаетъ положительнаго значенія для $a$ и потому должно быть отброшено. Уравненіе, соотвѣтствующее $m=4$, не допускаетъ для $|a_4|$ значенія, отличнаго отъ 0, и потому также должно быть отброшено. Въ уравненіи, соотвѣтствующемъ $m=1$, числа $a$ и $|a_1|$ положительны и общій наибольшій ихъ дѣлитель равенъ единицѣ, а потому имѣемъ только слѣдующія двѣ системы рѣшеній:

$$a=1;\ |a_1|=3,$$
$$a=3;\ |a_1|=1,$$

соотвѣтственно чему имѣемъ два уравненія

$$x\pm 3=0;\ x\pm 1=0.$$

Уравненіе, соотвѣтствующее $m=2$, допускаетъ, при $a$ и $|a_2|$ положительныхъ, только слѣдующую систему рѣшеній

$$a=|a_1|=|a_2|=1,$$

Если распредѣлимъ всѣ вещественныя алгебраическія числа въ классы по ихъ высотамъ 1, 2, 3, 4, ..., если затѣмъ внутри каждаго класса расположимъ числа въ порядкѣ ихъ возрастанія и если, наконецъ, соединимъ эти классы въ одинъ рядъ, то каждое вещественное алгебраическое число будетъ занимать въ этомъ ряду вполнѣ опредѣленное мѣсто и на каждомъ мѣстѣ будетъ находиться только одно опредѣленное алгебраическое число. Теорема Cantor'a такимъ образомъ доказана.

**Вторая теорема Cantor'a.** *Можно всегда найти безконечное число вещественныхъ чиселъ, заключающихся между данными предѣлами* a *и* b > a *и не содержащихся въ данномъ исчислимомъ комплексѣ вещественныхъ чиселъ.*

**Доказательство.** Пусть C будетъ исчислимый комплексъ вещественныхъ чиселъ. Расположимъ эти числа въ одинъ рядъ

$$N_1,\ N_2,\ N_3,\ N_4,\ N_5, \ldots, \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

такъ, чтобы каждое занимало въ этомъ ряду вполнѣ опредѣленное мѣсто, и обратимъ каждое изъ нихъ въ безконечную десятичную дробь. Если какое либо изъ чиселъ N обращается въ конечную десятичную дробь, напримѣръ 0,26, то эту десятичную дробь можно будетъ представить въ видѣ безконечной десятичной дроби двумя способами: какъ безконечную десятичную дробь съ періодомъ 0 и какъ безконечную десятичную дробь съ періодомъ 9

$$0{,}26 = 0{,}26000\ldots$$

$$0{,}26 = 0{,}25999\ldots$$

Мы предположимъ, что если въ ряду (5) какое либо изъ чиселъ N обращается въ конечную десятичную дробь, то число N замѣщено

---

соотвѣтственно чему имѣемъ 4 уравненія

$$x^2 \pm x + 1 = 0;\ x^2 \pm x - 1 = 0.$$

Первыя два, какъ не содержащія вещественныхъ корней, должны быть отброшены. Уравненіе, соотвѣтствующее $m = 3$, допускаетъ, при $a$ и $|a_3|$ положительныхъ, только одну систему рѣшеній

$$a = |a_3| = 1;\ |a_1| = |a_2| = 0,$$

соотвѣтственно чему имѣемъ 2 уравненія

$$x^3 \pm 1 = 0.$$

Оба эти уравненія, какъ приводимыя, должны быть отброшены. Такимъ образомъ находимъ, что неприводимыми алгебраическими уравненіями высоты 4, удовлетворяющимися вещественными значеніями $x$, будутъ только слѣдующія уравненія:

$$x \pm 3 = 0;\ 3x \pm 1 = 0;\ x^2 \pm x - 1 = 0.$$

Вещественными алгебраическими числами, которыхъ высота равна 4, будутъ слѣдующія 8 чиселъ

$$\pm 3;\ \pm\frac{1}{3};\ \frac{\pm 1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

двумя равными ему безконечными десятичными дробями. Найдемъ затѣмъ двѣ конечныя десятичныя дроби, отличающіяся другъ отъ друга только одною единицею какого либо десятичнаго порядка и содержащіяся между двумя данными предѣлами $a$ и $b > a$. Пусть, напримѣръ, будетъ

$$a < 0{,}45 < 0{,}46 < b.$$

Составимъ безконечную десятичную дробь

$$c = 0{,}45\, c_3\, c_4\, c_5 \ldots c_n \ldots$$

гдѣ $c_3$, $c_4, \ldots c_n$ суть послѣдовательныя цифры числа $c$, начиная съ третьяго десятичнаго порядка. Каковы бы ни были цифры $c_3$, $c_4, \ldots c_n \ldots$, дробь $c$ будетъ содержаться между 0,45 и 0,46, а слѣдовательно и между $a$ и $b$. Возьмемъ теперь $c_3$ отличнымъ отъ третьей цифры десятичнаго порядка числа $N_1$, или отличнымъ отъ третьихъ цифръ двухъ безконечныхъ періодическихъ дробей, занимающихъ въ ряду (5) мѣсто числа $N_1$. Точно также возьмемъ $c_4$ отличнымъ отъ четвертой цифры числа $N_2$ или отъ четвертыхъ цифръ двухъ дробей, замѣняющихъ въ ряду (5) число $N_2$ и т. д., вообще, цифру $c_n$ возьмемъ отличною отъ $n$-ой цифры числа $N_{n-2}$ или отъ $n$-ыхъ цифръ двухъ безконечныхъ десятичныхъ дробей, замѣщающихъ число $N_{n-2}$ въ ряду (5). Если затѣмъ подчинимъ выборъ цифръ $c_3$, $c_4, \ldots$ какому либо опредѣленному дополнительному правилу, которое позволяло бы выбирать каждую цифру однимъ только способомъ, то для $c$ получимъ опредѣленную безконечную десятичную дробь, содержащуюся между предѣлами $a$ и $b$ и не входящую въ составъ комплекса С. Дѣйствительно, допуская противное, нашли бы, что $c = N_n$, что невозможно, такъ какъ $(n+2)$-ой десятичный знакъ числа $c$ отличается отъ соотвѣтствующаго $(n+2)$-ого знака числа $N_n$ или отъ $(n+2)$-хъ цифръ двухъ безконечныхъ десятичныхъ дробей, равныхъ $N_n$.

Такихъ чиселъ, какъ $c$, можно составить сколько угодно, варіируя дополнительное правило выбора цифръ $c_3$, $c_4, \ldots$, что и требовалось доказать.

Какъ непосредственное слѣдствіе изъ приведенныхъ двухъ теоремъ Cantor'а вытекаетъ

**Третья теорема Cantor'а.** *Существуетъ безконечное число вещественныхъ трансцендентныхъ чиселъ, содержащихся между двумя данными вещественными предѣлами* $a$ *и* $b > a$.

Ибо, по первой теоремѣ Cantor'а, комплексъ вещественныхъ алгебраическихъ чиселъ есть исчислимый комплексъ С, а по второй теоремѣ, можно написать сколько угодно вещественныхъ чиселъ, не содержащихся въ этомъ комплексѣ и заключающихся между предѣлами $a$ и $b$.

*С. Шатуновскій* (Одесса).

# КЪ ОТКРЫТІЮ РЁНТГЕНА.

## Опыты Рёнтгена

### въ физической лабораторіи Императорскаго Новороссійскаго Университета.

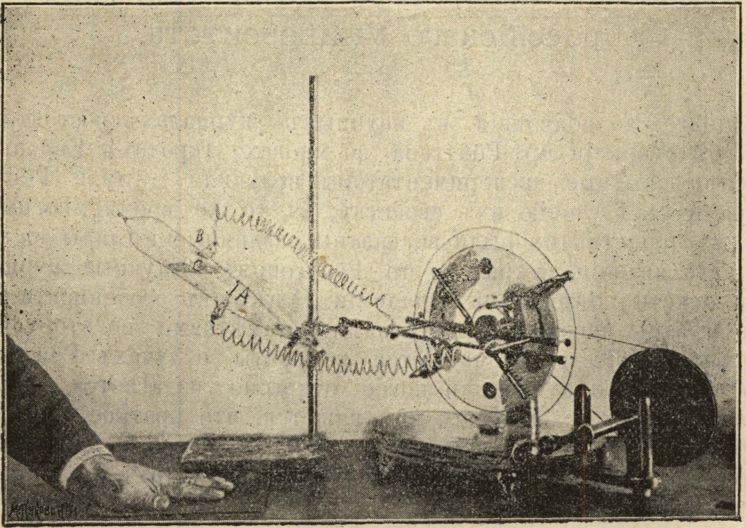
Задолго до появленія въ научныхъ журналахъ обстоятельныхъ статей объ открытии пр. Рёнтгена во многихъ городахъ Европы болѣе или менѣе опытные экспериментаторы получили $x$-лучи Рёнтгена и приступили къ изученію ихъ свойствъ; въ то же время многими авторитетными теоретиками были высказаны различные взгляды на природу загадочнаго явленія, открытаго пр. Рёнтгеномъ. Научные журналы вообще, а отчеты Парижской Академіи Наукъ въ особенности, за послѣдніе мѣсяцы переполнены статьями и замѣтками по этому вопросу; въ ученыхъ обществахъ читаются рефераты о лучахъ Рёнтгена, дѣлаются доклады; для публики новое открытіе излагается въ публичныхъ лекціяхъ и пр. Поэтому мнѣ кажется, что краткое описаніе способа полученія $x$-лучей, выработаннаго въ физической лабораторіи нашего университета, и свѣдѣнія о нѣкоторыхъ опытахъ не лишены будутъ интереса.

19 января, когда въ Одессѣ не было еще точныхъ свѣдѣній относительно открытія пр. Рёнтгена, проф. Н. Д. Пильчиковъ приступилъ къ опытамъ въ этомъ направленіи. Первый же опытъ доставилъ вполнѣ удовлетворительные результаты.

Для полученія $x$-лучей была взята трубка, носящая названіе лампы Пулуя. Лампа Пулуя отличается отъ обыкновенныхъ трубокъ Крукса тѣмъ, что внутри ея помѣщена небольшая слюдяная пластинка С, покрытая порошкомъ (сѣрнистый цинкъ), сильно флуоресцирующимъ подъ ударами катодныхъ лучей. Впаянный въ трубку дискъ А (катодъ) и другой электродъ В (анодъ) соединялись съ борнами небольшой электрофорной машины Фосса (діаметръ вращающагося круга этой машины равенъ всего 26 cm). Катодные лучи отклонялись помощію сильнаго магнита такъ, что, не доходя до слюдяной пластинки, попадали на стѣнку трубки между А и С и заставляли флуоресцировать стекло зеленовато-желтоватымъ свѣтомъ. На разстояніи 10 — 12 сантиметровъ*) подъ трубкой лежала обыкновенная фотографическая пластинка, завороченная въ восемь листовъ черной бумаги, на которую было положено нѣсколько небольшихъ предметовъ. Послѣ 40 минутъ позы пластинка была проявлена, и на ней совершенно отчетливо обрисовались силуэты лежавшихъ предметовъ. Такимъ образомъ удавшійся сразу снимокъ показалъ, что найденъ простой и удобный пріемъ для полученія $x$-лучей. Слѣдующіе опыты показали, что флуоресценція стекла вовсе не необхо-

*) При дальнѣйшихъ опытахъ разстояніе это доходило до 30 cm.

дима для полученія мощнаго потока $x$-лучей; принявъ магнитъ, отклонявшій катодные лучи, проф. Н. Д. Пильчиковъ получилъ усиленіе дѣйствія трубки. Такимъ образомъ оказалось, что изъ флуоресцирующаго порошка выдѣляется больше $x$-лучей, чѣмъ изъ флуоресцирующей стеклянной стѣнки трубки. На представленномъ рисункѣ и изображена,



Фиг. 22.

именно, установка приборовъ безъ отклоняющаго магнита. Замѣтимъ здѣсь кстати, что при дальнѣйшихъ работахъ машина Фосса была замѣнена для уменьшенія времени экспозиціи машиной Вимсхерхста съ восемью вращающимися кругами діаметромъ въ 52 cm каждый, которая позволила довести въ нѣкоторыхъ снимкахъ время экспозиціи до 2 секундъ.

Изъ значительнаго числа фотографическихъ снимковъ, полученныхъ съ помощью этой установки, упомянемъ о нѣкоторыхъ первыхъ изъ фотографій и наиболѣе интересныхъ: 21-го января — снимокъ лежавшей въ коробкѣ магнитной стрѣлки, кольца съ брильянтомъ (брильянтъ оказался прозрачнымъ*) и другихъ мелкихъ предметовъ Поза 40 минутъ (трубка приводилась въ дѣйствіе маленькой машиной Фосса). 22 января—снимокъ лежавшей въ коробкѣ записочки, написанной бронзовыми чернилами. Поза и машина тѣ же. При помощи этой же установки 24 января была сфотографирована рука при позѣ въ 35 минутъ, а 27—рука дѣвочки въ 18 минутъ и портмонэ съ монетами въ 15 минутъ. 28 января снимокъ монетъ, лежавшихъ на закрытой касеткѣ, былъ сдѣланъ въ 30 секундъ. (Машина Фосса была замѣнена

*) Между тѣмъ какъ стекло, кварцъ оказались мало прозрачными. Эти свойства брильянта были впослѣдствіи вновь открыты въ Руанѣ Бюге и Гаскаромъ (C. R. отъ 24 февраля).

большой машиной Вимсхерхста). 31 января—застрѣленный голубь; поза 1 часъ; выступили всѣ дробинки. Изъ другихъ снимковъ интересны снимки животныхъ: рака, рыбы, мыши, лягушки, мидіи, жука, коралла и проч. Въ значительномъ числѣ фотографировались предметы, помѣщенные въ закрытые ящики, коробки и проч. Имѣются между прочимъ снимки различныхъ предметовъ въ алюминіевыхъ коробкахъ: стекляной призмы, монетъ, ключей, записокъ и проч. Фотографированіе на одной и той же пластинкѣ ноги муміи и живой ноги обнаружило замѣчательную прозрачность муміи сравнительно съ живымъ организмомъ.

Съ самаго начала было приступлено къ изслѣдованію и физическихъ свойствъ Рёнтгеновскихъ лучей. Въ числѣ первыхъ снимковъ, какъ выше уже упомянуто (21 января) былъ сдѣланъ снимокъ магнитной стрѣлки, показавшій, что $x$-лучи магнитомъ не отклоняются, т. е. что это лучи не катодные*).

Для доказательства отсутствія дѣйствія на эти лучи заряженныхъ электричествомъ тѣлъ былъ сдѣланъ (22 января) слѣдующій опытъ: на фотографическую пластинку, завороченную въ совершенно непрозрачную черную бумагу, были положены двѣ изолированныя стекломъ толстыя мѣдныя проволоки. Половина пластинки съ лежавшими на ней проволоками была прикрыта толстымъ мѣднымъ листомъ и пущенъ былъ на нее потокъ Рёнтгеновскихъ лучей. По истеченіи 10 мин. проволоки были соединены съ борнами электрофорной машины; прикрывающая мѣдная пластинка была перемѣщена на открытую прежде для $x$-лучей половину; данъ былъ ходъ $x$-лучамъ опять на 10 мин., и послѣ проявленія обнаружилось, что заряженныя электричествомъ тѣла не дѣйствуютъ на $x$-лучи (потому что на фотографіи вторыя половины снимаемыхъ проволокъ составляютъ строгое продолженіе первыхъ), т. е. лучи эти не имѣютъ характера извѣстнаго уже явленія конвекціонныхъ разрядовъ электричества**). Одновременно съ другими учеными обнаружено было и разряжающее дѣйствіе лучей Рёнтгена. Разряжающимся объектомъ была амальгама натрія въ приборѣ Эльстеръ-Гейтеля.

Наконецъ, было обнаружено дѣйствіе этихъ лучей на двойные и тройные электрическіе слои, съ которымъ читатели уже знакомы изъ изложенія доклада проф. Н. Д. Пильчикова въ Парижскую Академію Наукъ, помѣщеннаго въ № 231 настоящаго журнала.

Нѣкоторыя новыя изслѣдованія, начатыя въ физической лабораторіи нашего университета, не доведены еще до конца за недостаткомъ времени. Говорю за недостаткомъ потому, что, съ одной стороны, много времени ушло на фотографированіе обращавшихся за помощью больныхъ, а съ другой,—на чтеніе проф. Н. Д. Пильчиковымъ публичныхъ лекцій, знакомившихъ публику съ новымъ открытіемъ и его примѣненіями***).

---

*) Изъ полученной лишь впослѣдствіи въ Одессѣ брошюры проф. Рёнтгена выяснилось, что Рёнтгену это свойство было уже извѣстно.

**) См. № 230 „Вѣстника", стр. 41.

***) Проф. Н. Д. Пильчиковъ за эти 2—3 мѣсяца прочелъ 5 публичныхъ лекцій (двѣ въ Одессѣ, затѣмъ въ Кишиневѣ, Херсонѣ и Николаевѣ. Сборъ со всѣхъ лекцій

Ко всему, что было изложено, прибавимъ, что лампа Пулуя можетъ быть приведена въ дѣйствіе и при помощи небольшой катушки Румкорфа, дающей искру въ 3 сантиметра.

Такимъ образомъ ясно кажется, что полученіе лучей Рёнтгена не требуетъ большихъ, дорого стóящихъ установокъ, и что въ каждомъ физическомъ кабинетѣ гимназіи съ успѣхомъ могутъ быть воспроизведены опыты Рёнтгена, давшаго намъ лучи, дѣлающіе видимымъ невидимое, прозрачнымъ непрозрачное.

*И. Точидловскій* (Одесса).

## О дѣйствіи лучей Рёнтгена на наэлектризованные тѣла.

Почти одновременно многими учеными было обнаружено интересное и важное свойство лучей Рёнтгена, о которомъ намъ уже приходилось упоминать въ предыдущихъ замѣткахъ, — свойство разряжать заряженныя какъ положительно такъ и отрицательно тѣла. Этимъ свойствомъ лучи Рёнтгена отличаются отъ ультра-фіолетовыхъ свѣтовыхъ лучей, которые, какъ показали недавніе опыты Elster'а и Geitel'я, разряжаютъ лишь отрицательно заряженныя тѣла. Правда, по нѣкоторымъ авторамъ (L. Benoist, D. Hurmuzescu*) отрицательные заряды быстрѣе теряются въ $x$-лучахъ, чѣмъ положительные, однако другіе авторы (J. Thomson**), Augusto Righi***), И. И. Боргманъ и А. А. Гершунъ****) этого не подтверждаютъ.

Benoist и Gurmuzescu пользовались при своихъ опытахъ круксовой трубкой, приводимой въ дѣйствіе сильнымъ возбудителемъ. Заряженнымъ проводникомъ служилъ электрометръ съ золотымъ листкомъ, находящійся въ разстояніи 20 cm отъ трубки, тщательно изолированный и помѣщенный въ фарадеевъ цилиндръ, т. е. попросту въ металлическій ящикъ съ отвѣсными стѣнками, соединенный съ землей. Въ стѣнкахъ этого ящика были сдѣланы два отверстія, два „окна“, которыя закрывались различными веществами, проницаемыми для $x$-лучей. Когда сквозь „окно“, закрытое алюминіемъ, электрометръ „освѣщался“ лучами Рёнтгена, разряженіе происходило очень быстро. Закрывая „окно“ пластинками изъ различныхъ веществъ, возможно было сравнивать проницаемость этихъ послѣднихъ для лучей Рёнтгена. 16 слоевъ черной бумаги оказались почти столь же проницаемыми, какъ и алюминіевая пластинка въ 0,1 mm толщиной:—разряженіе происходило въ нѣсколько

поступилъ въ пользу будущихъ Высш. Женскихъ Курсовъ въ Одессѣ) и три раза демонстрировалъ опыты въ ученыхъ обществахъ. Докладъ въ соед. засѣд. Общ. Естеств. и Врач. привлекъ въ тѣсный актовый залъ университета тысячную толпу.

*) C. R. CXXII, 235.

**) Nature, LIII, 377.

***) Electrician, XXXVI, 552.

****) Ж. Р. Ф. X. О. XXVIII, 37.

секундъ. Бумага, пропитанная растворами солей, желатина, целлюлоидъ, эбонитъ, серебряные листки хорошо пропускали $x$-тучи. Латунь, цинкъ, стекло, фарфоръ (3 mm) оказались непрозрачными.

A. Righi пользовался круксовой трубкой, которая вмѣстѣ съ возбудителемъ помѣщалась въ металлическій ящикъ, соединенный съ землей и снабженный алюминіевымъ „окномъ", изъ котораго выходили рёнтгеновы лучи. Металлическая пластинка, заряженная отрицательно и помѣщенная противъ „окна", теряла свой зарядъ; нейтральная пластинка *заряжалась положительно* (такъ же дѣйствуютъ и ультра-фіолетовые лучи), такъ что если освѣтить лучами Рёнтгена отрицательно заряженную пластинку, то она не только теряетъ вполнѣ свой зарядъ, но затѣмъ заряжается положительно. Положительно заряженная пластинка тоже теряетъ свой зарядъ.

J. Thomson пользовался при своихъ опытахъ квадрантнымъ электрометромъ. Въ нѣсколько секундъ исчезали и положительные и отрицательные заряды. Помѣщая незаряженный электрометръ въ лучи Рёнтгена, Thomson *не обнаружилъ заряда.* Дѣйствіе лучей было еще замѣтно, когда между ихъ источникомъ и электрометромъ помѣщалась цинковая пластинка въ $1/4$ дюйма толщиной. Если давленіе въ трубкѣ было настолько велико, что ея стѣнки не фосфоресцировали, то на электрометрѣ не замѣчалось никакого дѣйствія. Сильное дѣйствіе обнаруживалось лишь тогда, когда давленіе было уменьшено до прекращенія свѣченія у анода. Такимъ образомъ является возможность измѣрить интенсивность лучей Рёнтгена въ зависимости отъ степени разрѣженія въ трубкѣ. Природа электризуемаго металла, равно какъ и то, находится ли онъ въ воздухѣ, или окруженъ изоляторами, нисколько не вліяетъ на скорость разряженія. Томсонъ погружалъ металлическую пластинку въ парафинъ, въ сѣру, въ жидкое парафиновое масло, окружалъ ее эбонитомъ, гумми—и во всѣхъ этихъ случаяхъ пластинка разряжалась. Такимъ образомъ *всѣ тѣла оказываются хорошими проводниками электричества, когда сквозь нихъ проходятъ лучи Рёнтгена.*

Проф. Боргманъ и А. А. Гершунъ употребляли круксову трубку и тщательно изолированный цинковый кружокъ, соединенный съ электроскопомъ Кольбе, располагая трубку и кружокъ такъ, что мысленно продолженные катодные лучи падали нормально на поверхность цинковаго кружка. При разстояніи около 1 метра положительный зарядъ исчезалъ вполнѣ съ кружка, отрицательный же *ослабѣвалъ до извѣстнаго предѣла и затѣмъ не уменьшался,* причемъ листочекъ электроскопа не оставался въ полномъ покоѣ, а слегка колебался и колебанія эти повидимому соотвѣтствовали измѣненіямъ въ дрожаніи прерывателя румкорфовой катушки. При разстояніи кружка отъ трубки въ 20 cm положительно заряженный кружокъ терялъ свой зарядъ почти моментально и затѣмъ столь же быстро *обнаруживалъ возрастаніе на себѣ отрицательнаго заряда,* отрицательно же наэлектризованный кружокъ или терялъ нѣсколько свой зарядъ, или заряжался еще сильнѣе, смотря по тому, какъ онъ былъ заряженъ предварительно. Не наэлектризованный кружокъ при такомъ расположеніи *всегда заряжался отрицательно.* Характеръ явленій не измѣнился, когда между круксовой трубкой и цинковымъ кружкомъ былъ помѣщенъ большой алюминіевый листъ толщиною въ 0,1 mm, соединенный съ землею. Стеклянная пластинка толщиною въ 10 mm вполнѣ уничтожала дѣйствіе $x$-лучей.

Замѣтивъ способность $x$-лучей сообщать отрицательный зарядъ нейтральному кружку, авторы соединили цинковый кружокъ съ однимъ изъ концовъ чувствительнаго гальванометра (В. В. Лермантова), а другой конецъ обмотки соединили съ землей. Когда цинковый кружокъ подвергся дѣйствію $x$-лучей, *въ гальванометрѣ появился весьма слабый, но, тѣмъ не менѣе, вполнѣ замѣтный токъ.*

Авторы нашли также, что лучи Рёнтгена, подобно ультра-фіолетовымъ лучамъ, оказываютъ сильное дѣйствіе на длину искры, получающейся между двумя шариками искромѣра. Платиновые шарики искромѣра, соединенные съ концами вторичной обмотки маленькой румкорфовой катушки, были раздвинуты настолько, что проскакиваніе между ними электрическихъ искръ совершенно прекратилось. Какъ только на шарики попадали лучи Рёнтгена, искры тотчасъ же появлялись. Алюминіевъ листъ, помѣщенный между круксовой трубкой и искромѣромъ, не оказывалъ замѣтнаго вліянія на появленіе потока искръ.

Сравнивая результаты изложенныхъ опытовъ, нельзя не замѣтить, что они сильно противорѣчатъ другъ другу: замѣченное Benoist и Hurmuzescu различіе въ скорости разряженія тѣлъ, заряженныхъ положительно, и тѣлъ, заряженныхъ отрицательно, не подтверждается ни Thomson'омъ, ни Righi, ни гг. Боргманомъ и Гершуномъ. По Thomson'у нейтральное тѣло не заряжается лучами Рёнтгена, по Righi оно заряжается положительно, у русскихъ же авторовъ оно пріобрѣтало отрицательный зарядъ. Эти несогласія могутъ зависѣть отъ разныхъ причинъ. Возможно, что различные авторы производили свои опыты не при одинаковыхъ условіяхъ, но возможно также и то, что дѣятель, который называютъ лучами Рёнтгена, не одинъ и тотъ же, когда для полученія его берутся различныя трубки или когда въ одной и той же трубкѣ измѣняется давленіе. Иными словами, если сохранить за лучами Рёнтгена названіе „лучей", возможно допустить, что круксова трубка даетъ пучекъ разнородныхъ лучей, составъ или „цвѣтъ" котораго измѣняется при разныхъ условіяхъ. Съ измѣненіемъ „цвѣта" измѣняются и свойства лучей, а такъ какъ условія, при которыхъ получались лучи у разныхъ изслѣдователей, не были тожествены, то и результаты ихъ опытовъ не вполнѣ совпали. Нѣтъ сомнѣнія, что въ непродолжительномъ времени всѣ эти вопросы будутъ рѣшены экспериментально.

Свойство $x$-лучей разряжать заряженные проводники даетъ возможность по скорости разряженія быстрѣе и точнѣе измѣрять проницаемость различныхъ веществъ для этихъ лучей, чѣмъ фотографическій способъ. Такія точныя измѣренія предприняты Benoist и Hurmuzescu. Когда результаты этихъ измѣреній будутъ опубликованы, мы познакомимъ съ ними нашихъ читателей.

*В. Г.*

# Краткій отчетъ

## о дѣятельности 2-й секціи (секціи реальныхъ училищъ) 2-го Съѣзда Русскихъ Дѣятелей по Техническому и Профессіональному Образованію въ Москвѣ.

### *(Окончаніе*).*

Въ засѣданіи того же числа въ 2 часа дня прочитанъ сводный докладъ изъ мнѣній Педагогическихъ Совѣтовъ и отдѣльныхъ лицъ о преподаваніи математики въ реальныхъ училищахъ, составленный *Ѳ. С. Коробкинымъ*.

По вопросу о преподаваніи математики были получены отвѣты отъ Педагогическихъ Совѣтовъ 40 реальныхъ училищъ и отъ 23 частныхъ лицъ. Относительно *распредѣленія числа уроковъ по классамъ* почти всѣ присланные отвѣты совпадаютъ между собой и даютъ въ среднемъ такія числа уроковъ: въ I кл.—4; во II-мъ—4; въ III-мъ—2 ариѳм., 3 алгебр.; въ IV-мъ—2 алг., 3 геом.; въ V-мъ—2 алг., 3 геом.; VI-мъ—2 алг., 2 геом., 2 триг.; въ VII-мъ—3 или 4.

Что касается *измѣненія программъ*, то по этому вопросу Педагогическими Совѣтами сдѣланы слѣдующія предложенія:

*a) По ариѳметикѣ.* Предложено перенести: 1) *теоремы о дѣлимости чиселъ* изъ VII кл. въ V (Рижскимъ уч. Имп. Петра I), изъ VII кл. въ VI (Ловичскимъ, Херсонскимъ), 2) *ученіе объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ* и *теорію періодическихъ дробей*—изъ II кл. въ VII (Одесскимъ св. Павла), 3) *геометрическое отношеніе* — въ IV кл., въ курсъ алгебры, изъ II кл. (Рижскимъ Имп. Петра I), 4) *ученіе о пропорціяхъ*—изъ II кл. въ III (Вольскимъ, Костромскимъ, Одесскимъ св. Павла, Юрьевскимъ), изъ II въ VII (Пермскимъ), 5) *спеціальныя правила съ приложеніемъ пропорцій* при повтореніи курса ариѳметики—изъ III въ VII (Рижскимъ Имп. Петра I).

Предложено исключить: 1) *изображеніе чиселъ церковно-славянскими буквами*, 2) *признаки дѣлимости на составныя числа* (Рижскимъ городск.), 3) *періодическія дроби* (Тульское р. уч. предлагаетъ знакомить съ ними въ курсѣ алгебры, въ началѣ статьи объ ирраціональномъ количествѣ, а окончательное изученіе ихъ отнести къ главѣ о прогрессіяхъ), 4) *ариѳметическое отношеніе* и *пропорціи* (Рижскимъ Имп. Петра I, Рижскимъ городск.), 5) *правило математич. учета* (Рижск. Имп. Петра I, Херсонскимъ), 6) *правило учета векселей* (Одесскимъ), 7) *цѣпное правило* (Рижскимъ Имп. Петра I), 8) *правила процентовъ и смѣшенія* (Одесскимъ), 9) *рѣшеніе задачъ помощью пропорцій* (Рижскимъ городск.) и 10) *рѣшеніе задачъ алгебраическаго характера* (Рижск. Имп. Петра I).

Преeложено ввести въ курсъ:

1) *Теоретическую ариѳметику* (Скопинскимъ и Роменскимъ) и 2) *коммерческую ариѳметику* (Елисаветградскимъ).

*b) По алгебрѣ.* Предложено перемѣстить: 1) *рѣшеніе уравненій* изъ III кл. въ IV (Юрьевскимъ), 2) *рѣшеніе ур. со многими неизвѣстными*—изъ III кл. въ IV (Костромскимъ, Рижскимъ Имп. Петра I); 3) *способъ Безу* — изъ III кл. въ VII (Вольскимъ), 4) *изслѣдованіе ур. 1-й степени* — изъ V въ VI (Костромскимъ, Рижскимъ Имп. Петра I), 5) *неопредѣленныя ур.* — изъ V въ VI (Рижскимъ Имп. Петра I), 6) *свойства корней кв. ур.*—изъ V въ IV (Костромскимъ), 7) *кв. ур. со многими неизвѣ-*

*) См. „В. О. Ф." № 232.

*стными*—изъ IV въ V (Рижск. Имп. Петра I), 8) *радикальныя, равносильныя и тожественныя ур.*—изъ VII въ V (Рижск. Имп. Петра I), *введенiе постороннихъ рѣшенiй въ ур.*—изъ VII въ V (Херсонск.), 10) *ур. высшихъ степеней*—изъ V въ VI (Костромскимъ), 11) *рѣшенiе двучленныхъ ур. 3-й степ.* — изъ VI въ VII (Рижск. городск.), 12) *извлеченiе кубич. корней* — изъ IV въ VII (Костромск.), — въ V (Вольскимъ), 13) *логариѳмы*—изъ V въ VI (Одесск. св. Павла), 14) *дѣйствiя надъ радикалами*—изъ V въ IV (Рижск. гор., Вольск.), 15) *дополнит. статьи курса алгебры* — изъ VI въ VII (Рижск. город.), 16) *maximum и minimum трехчлена 2-й ст.*—изъ VI въ VII (Рижск. гор., Вольскимъ), 17) *способъ предѣловъ*—изъ VII въ VI (Одесск. св. Павла, Елисаветградскимъ),—въ курсъ геометрiи (Рижск. Имп. Петра I), 18) *комплексныя выраженiя въ алгебраическомъ видѣ*—изъ VII въ VI (Кiевск.)—въ V (Херсонскимъ).

Предложено исключить: 1) *извлеченiе кв. корня изъ многочленовъ* (Орловск.), 2) *извлеченiе куб. корня изъ чиселъ* (Тульск., Орловск., Петербургскимъ-Петропавл.), 3) *рѣшенiе двучленныхъ ур. 3-й ст.* (Орловск.), 4) *непрерывныя дроби* (Петерб.-Петропавл., Одесск. св. Павла), 5) *неопредѣленныя ур.* (Петерб.-Петропавл.), 6) *статьи дополнит. курса алгебры*: комплексныя выраженiя въ алгебраическомъ и тригонометрическомъ видѣ (Ловичск., Одесск. св. Павла), maxima и minima, теорiю предѣловъ, способъ неопредѣленныхъ коэффицiентовъ (Тульск., Орловск., Рижск. Имп. Петра I, Митавскимъ, Могилевск.).

Предложено ввести въ курсъ: 1) *введенiе въ алгебру* для III кл. (Николаевск.), 2) *подробное развитiе ученiя о мнимыхъ величинахъ* и ихъ геометрич. значенiе — въ старшихъ классахъ (Скопинск.), 3) *ученiе о рядахъ* (Роменск.).

c) *По геометрiи.* Предложено перенести: 1) *понятiе о предѣлахъ* — изъ IV въ VII (Петерб.-Петропавл.),—въ VI (Одесск. Св. Павла),—въ V (Либавск.), 2) *ученiе о площадяхъ прямолинейныхъ фигуръ*—изъ V въ IV (Вижск. Имп. Петра I), 3) *равенство трехгранныхъ угловъ, равенство и подобiе призмъ и пирамидъ, круглыя тѣла*—изъ VII въ VI (Костромск.), 4) *приложенiе алгебры къ геометрiи*—изъ VII въ VI (Рижск. Имп. Петра I)—не выдѣлять изъ курса геометрiи (Елисаветгр.).

Предложено исключить: 1) *равенство трехгранныхъ угловъ* (Одесск. св. Павла), 2) *равенство призмъ и пирамидъ, подобiе многогранниковъ и симметричные многогранники* (Митавск.).

Предложено ввести: 1) *предварительный курсъ геометрiи* для III кл. (Митавск., Николаевск.), 2) *аналитическую геометрiю* (Рижск. Имп. Петра I), 3) *начертательную геометрiю* (Скопинск., Севастопольск., Херсонск.).

d) *По тригонометрiи.* Предложено: 1) перенести преподаванiе въ VII кл. изъ VI (Херс.), 2) раздѣлить курсъ на два года, въ VI и VII кл. (Тюменск.), 3) ввести въ старшемъ классѣ теорiю обратныхъ тригоном. функцiй (Пинск.).

Кромѣ Педагогическихъ Совѣтовъ прислали свои мнѣнiя также 23 преподавателя реальныхъ училищъ. Только одинъ изъ нихъ не видитъ никакой нужды въ измѣненiяхъ существующихъ программъ. Мнѣнiями остальныхъ 22 лицъ устанавливается фактъ, что преподаванiе математики въ реальныхъ училищахъ поставлено въ ненормально тяжелыя условiя, что увеличенiе числа недѣльныхъ уроковъ не можетъ помочь дѣлу и что существуютъ два выхода изъ настоящаго положенiя: прибавить VIII классъ (гг. Виноградскiй, Саларевъ, Арефьевъ), или существенно сократить курсъ математики (Булюбашъ). Въ существующихъ же планахъ предлагаются слѣдующiя измѣненiя:

a) *По ариѳметикѣ.* I. Относительно числа недѣльныхъ уроковъ: *a*) уменьшить число уроковъ во II кл. (6 лицъ противъ 2-хъ) и увеличить до 2-хъ число уроковъ въ III кл. (10 лицъ), *b*) въ приготовительномъ классѣ ограничиваться изученіемъ умноженія и дѣленія на однозначное число (г. Павловскій) и поручать преподаваніе въ этомъ классѣ преподавателю основныхъ классовъ (г. Виноградскій).

II. Относительно распредѣленія учебнаго матеріала сдѣланы слѣдующія предложенія:

1) Перенести изъ I кл. во II-й понятіе о дробяхъ (Ширяевъ) и изъ II въ III ученіе объ отношеніяхъ, пропорціяхъ и тройныхъ правилахъ (Карякинъ, Кронштадское реальн. уч., Ширяевъ, Лахмундъ, Лишко, Невскій, Ивановъ).

2) Исключить изъ курса: *a*) Измѣненіе результатовъ дѣйствія (директоръ Астраханскаго реальнаго уч.), *b*) ученіе о производныхъ пропорціяхъ (Буханцевъ, Коваржинъ, Сахаровъ, Арефьевъ, Тороповъ), *c*) ученіе о сложныхъ пропорціяхъ (Коваржинъ, Тороповъ), *d*) рѣшеніе задачъ на сложное тройное правило способомъ пропорцій (директоръ Астраханскаго реальн. уч.), *e*) правило обоихъ учетовъ (Манохинъ), *f*) математическій учетъ (директоръ Астраханскаго реальнаго учил., Лобовиковъ), *g*) всѣ доказательства и выводы, имѣющіе алгебраическій характеръ (Коваржинъ).

3) Включить новыя статьи: *a*) уравненіе срока платежей (Ширяевъ), *b*) изученіе простѣйшихъ практическихъ пріемовъ приблизительнаго вычисленія (Лахмундъ).

4) Кромѣ того предложено: *a*) производить повтореніе всего курса ариѳметики въ VI кл., а не въ III или VII (Сахаровъ, Арефьевъ, Лахмундъ), *b*) знакомить учащихся съ дробями въ I классѣ, начинать курсъ II класса съ изученія дѣйствій надъ десятичными дробями съ приложеніемъ къ метрической системѣ, а затѣмъ уже вести систематическій курсъ простыхъ дробей (Тороповъ).

В. *По алгебрѣ.* I. По вопросу о числѣ недѣльныхъ уроковъ высказаны слѣдующія мнѣнія:

Сокративъ *въ III кл.* число уроковъ до 3-хъ (10 лицъ), увеличить *въ IV кл.* до двухъ (10 лицъ) или до 3-хъ (3 лица), сохранить *въ V кл.* два урока (6 лицъ) или увеличить до 3-хъ (1 лице), увеличить *въ VI кл.* во второмъ полугодіи до 2-хъ (6 лицъ) и назначить 2 урока *въ VII кл.* (2 лица).

II. Относительно распредѣленія учебнаго матеріала предложено:

1) Перенести: *a*) *изъ III въ IV классъ*: разложеніе многочленовъ высшихъ степеней и болѣе сложные случаи дѣйствій съ многочленами (директоръ Астраханскаго реальн. уч.), дѣйствія надъ количествами съ отрицательными показателями (Буханцевъ), рѣшеніе ур. съ однимъ неизвѣстнымъ (Павловскій, Буханцевъ, Ширяевъ, Невскій), рѣшеніе ур. съ 2-мя и многими неизвѣстными (Карякинъ, Павловскій, Буханцевъ, Коваржинъ, Ширяевъ, Лахмундъ, Лишко, Тороповъ, Ивановъ, Невскій); *b*) *изъ III въ VI классъ:* исключеніе неизвѣстныхъ изъ ур. способомъ Безу (Невскій); *c*) *изъ IV въ V кл.*: извлеченіе кубическихъ корней изъ чиселъ (Карякинъ, Тороповъ), биквадратныя уравненія (Сахаровъ, Арефьевъ, Невскій), рѣшеніе уравненій 2-й ст. съ 2-мя неизвѣстными (Сахаровъ, Арефьевъ); *d*) *изъ V въ IV кл.*: дробные показатели (Сахаровъ, Арефьевъ), дѣйствія надъ ирраціональными выраженіями (Карякинъ, Павловскій, Коваржинъ, Сахаровъ, Арефьевъ), изслѣдованіе ур. 1-й и 2-й степ. (Карякинъ); *e*) *изъ V въ VI классъ*: изслѣдованіе ур. 1-й и 2-й степени (Лахмундъ, Тороповъ, Арефьевъ, Невскій), логариѳмы и ихъ приложенія (Карякинъ), неравенства и неопредѣленныя уравненія (Ширяевъ, Лахмундъ, Тороповъ), двухчленное уравненіе (Невскій); *f*) *изъ VI въ VII кл.*: рѣшеніе неравенства 1 и 2 степ., нахожденіе maxima и minima трехчлена 2 степ., дѣйствія надъ мнимыми выраженіями, непрерывныя дроби (Лахмундъ, Невскій); *g*) *изъ VII въ VI кл.*: способъ предѣловъ мнимыхъ количествъ въ алгебраическомъ видѣ, тожественныя ур., сто-

роннія рѣшенія и исчезновеніе корней въ уравненіи (Арефьевъ); дѣлимость двучлена $a^m + b^m$, умноженіе и дѣленіе уравненій (Невскій); *b*) повтореніе теоріи *перенести въ VII кл.* (Сахаровъ, Арефьевъ).

2) Исключить: *a*) теорію непрерывныхъ дробей (директоръ Астраханскаго уч.), *b*) теорію соединеній и биномъ Ньютона.

3) Ввести новыя статьи: *a*) общій наибольшій дѣлитель (Карякинъ), *b*) вычисленіе приближеннаго значенія суммы, разности, произведенія, частнаго, степени, корня (Ширяевъ), *c*) систематическія *устныя* упражненія въ рѣшеніи простѣйшихъ примѣровъ и задачъ (Тороповъ), *d*) статью о рядахъ — въ VII кл. (директоръ Астраханск. реальн. уч.).

4) Кромѣ того предложено: *a*) знакомить учениковъ со свойствами равенства тотчасъ послѣ усвоенія алгебраическаго знакоположенія, для примѣненія къ составленію и рѣшенію ур. съ однимъ неизвѣстнымъ 1-й степ, и послѣ уже изучать дѣйствія надъ всякими алгебраическими выраженіями (Тороповъ); *b*) считать однимъ изъ важнѣйшихъ результатовъ изученія алгебры навыкъ въ упрощенномъ вычисленіи сложнѣйшихъ формулъ (Волжинъ, Лишко), *c*) требовать знанія учениками логариѳмовъ первыхъ десяти натуральныхъ чиселъ, хотя бы съ однимъ или съ двумя десят. знаками, и рѣшать задачи безъ таблицъ (Виноградскій).

C. *По геометріи.* I. По вопросу о числѣ недѣльныхъ уроковъ предложено: *въ IV кл.*—сократить до двухъ (1); соединить съ уроками черченія и сократить до пяти (4); сократить до 3-хъ (1); *въ V кл.* — оставить прежнее число (3); уменьшить до 2-хъ (1); соединивъ съ черченіемъ, оставить прежніе пять уроковъ (3) или сократить до 4-хъ или 3-хъ (1); *въ VI кл.* — увеличить до двухъ (2), соединить съ черченіемъ безъ измѣненій (2), сократить до 2-хъ (2); *въ VII кл.* — назначить два урока на повтореніе (2).

II. Относительно распредѣленія учебнаго матеріала по классамъ предложено:

1) Перемѣстить: *a*) *изъ IV въ V кл.*: правильные многоугольники (Невскій, Ивановъ, директоръ Астрах. уч.), пропорціональныя линіи въ окружности (Ширяевъ), способъ предѣловъ (Карякинъ, Арефьевъ, Ширяевъ, Лахмундъ); *b*) *изъ IV въ VI*: способъ предѣловъ, изслѣдованіе окружности, круга, сектора, сегмента (Невскій); *c*) *изъ V въ VI*: измѣреніе поверхностей (Ширяевъ), объемовъ и круглыя тѣла (Ширяевъ, Волжинъ, Карякинъ); *d*) *изъ VI въ V*: четыре замѣчательныя точки треугольника (Ширяевъ); г. Невскій предлагаетъ перенести эту статью въ IV кл.).

2) Включить: *a*) луночки, квадратуру круга и распрямленіе окружности — въ VI кл. (Невскій), *b*) краткое знакомство съ главнѣйшими геодезическими инструментами—въ VI кл. (Лахмундъ), *c*) краткое знакомство съ коническими сѣченіями —въ VI (Карякинъ) или VII кл. (Лысцовъ), *d*) понятіе о воображаемой геометріи— въ VI кл. (Карякинъ).

D. *Приложеніе алгебры къ геометріи* предложено или соединить съ теоріей коническихъ сѣченій, при повтореніи геометріи въ VII кл. (3), или отнести къ курсу VI кл. (1).

E. *По тригонометріи.* Тремя лицами предложено посвятить тригонометріи 2 урока въ VI кл. При этомъ предлагается исключить таблицы натуральныхъ тригонометрическихъ величинъ (Невскій) и ввести статью о тригонометрическихъ рядахъ (Карякинъ); два лица считаютъ удобнымъ разбить курсъ на два года (VI и VII кл.) при одномъ или 2-хъ урокахъ въ томъ и другомъ классѣ; г. Лысцовъ предлагаетъ перенести весь курсъ въ VII кл. при двухъ урокахъ въ недѣлю.

F. *По геометрическому и техническому черченію* большинство настаиваетъ на необходимости отдѣленія геометрическаго черченія отъ техническаго, причемъ предлагается отнести рѣшеніе задачъ на построеніе къ упражненіямъ по геометріи, ограничиваясь въ IV, V и VI классахъ лишь рѣшеніемъ несложныхъ и наиболѣе типичныхъ задачъ; г. Каура предлагаетъ проходить, кромѣ геометрическаго черченія, также начертательную геометрію въ IV кл. при 2-хъ урокахъ, въ VI кл. посвящать 3 урока рѣшенію задачъ по начертательной геометріи, а въ VII — 3 урока удѣлить начерт. геометріи и 4—черченію.

Въ томъ же засѣданіи доложены для обсужденія тезисы реферата отъ комиссіи преподавателей математики при учебномъ отдѣлѣ Общества Распространенія Техническихъ Знаній. Секціей приняты слѣдующія резолюціи:

1. Желательно болѣе детально разграничить курсы ариѳметики въ приготовительномъ и I кл. реальныхъ училищъ.

2. Дѣйствія съ составными именованными числами желательно поставить въ болѣе тѣсную связь съ дѣйствіями надъ отвлеченными числами, указывая при изученіи каждаго дѣйствія надъ отвлеченными числами примѣненіе его къ составнымъ именованнымъ числамъ.

3. Сдѣлать необязательнымъ въ курсѣ ариѳметики рѣшеніе задачъ на время.

4. Исключить изъ отдѣла о дѣлимости чиселъ во II классѣ намѣченныя программой главнѣйшія положенія о дѣлимости чиселъ и признаки дѣлимости на составныя числа: 6, 12, 15, 20, 30, 36.

5. Исключить изъ курса II класса періодическія дроби, отнеся ученіе о нихъ всецѣло къ курсу дополнительнаго класса.

6. Изъ курса ариѳметики низшихъ классовъ исключить ученіе о пропорціяхъ, отнеся его къ курсу алгебры.

7. Желательно при изученіи такъ наз. „правилъ" ограничиться правилами тройнымъ и пропорціональнаго дѣленія.

8. Понятіе о процентахъ должно быть дано при прохожденіи десятичныхъ дробей.

Обсуждавшіеся затѣмъ тезисы по геометріи:

1) Не представляется ли желательнымъ ввести въ III кл. реальн. уч. особый курсъ геометріи, имѣющій цѣлью развить въ дѣтяхъ знакомство съ формами и развитіе пространственныхъ представленій и отличающійся отъ обычнаго главнымъ образомъ бо́льшимъ числомъ положеній, принимаемыхъ безъ доказательства, причемъ этотъ курсъ можетъ быть поставленъ въ связь съ техническимъ черченіемъ?

и 2) Не желательно ли въ преподаваніи геометріи ученіе о площадяхъ предпосылать ученію о пропорціональныхъ линіяхъ и подобіи фигуръ?

рѣшены собраніемъ въ *отрицательномъ* смыслѣ.

Вечеромъ того же дня происходило соединенное засѣданіе секцій I (высшихъ учебныхъ заведеній) и II.

Были прочитаны рефераты: 1. *П. Ѳ. Никульцева*: „Объ окончившихъ курсъ реалистахъ"; *Н. В. Сухинскаго*: „Замѣтка о поступленіи учащихся въ реальныхъ училищахъ въ военно-учебныя заведенія", *Д. Н. Горячева*, *М. М. Дмитріевскаго* и *С. М. Зегера*: „О каникулярныхъ работахъ".

По этимъ докладамъ секціей приняты слѣдующія резолюціи:

1. Ходатайствовать, чтобы кончившіе курсъ въ реальныхъ училищахъ принимались въ высшія спеціальныя заведенія не по повѣрочному испытанію, а по конкурсу аттестатовъ.

2. Ходатайствовать о томъ, чтобы для окончившихъ курсъ реальныхъ училищъ былъ расширенъ доступъ къ высшему образованію, какъ спеціальному, такъ и на физико-математическомъ факультетѣ.

3. Желательно освобожденіе курса реальныхъ училищъ отъ такъ называемыхъ дополнительныхъ статей алгебры, не стоящихъ въ связи съ общимъ курсомъ алгебры, замѣнивъ ихъ краткимъ курсомъ аналитической геометріи на плоскости.

4. Ходатайствовать объ отмѣнѣ обязательности каникулярныхъ работъ.

Утреннее и вечернее засѣданія 4 января были посвящены преподаванію русскаго языка и словесности въ реальныхъ училищахъ.

Въ засѣданіи 5 января были прочитаны рефераты:

1) *В. В. Шихова*: „О преподаваніи физики въ реальныхъ училищахъ“ и сводъ мнѣній Педагогическихъ Совѣтовъ по тому же вопросу.

Г. Шиховъ, указавъ на то, что физика болѣе другихъ опытныхъ наукъ приспособлена къ школьному преподаванію и что, не смотря на это, программа ея мало разработана и страдаетъ недостаткомъ системы, объясняетъ этотъ фактъ современнымъ состояніемъ физики, какъ науки, и, главнымъ образомъ, чрезвычайно быстрымъ развитіемъ ея практическихъ приложеній. Благодаря увлеченію практическими приложеніями физики, основные ея законы остаются часто невыясненными, ученики недостаточно углубляются въ сущность предмета, неотчетливо разграничиваютъ главное и второстепенное, пріобрѣтаютъ разрозненныя знанія и не имѣютъ возможности правильно оцѣнить значеніе отдѣльныхъ частей въ общемъ цѣломъ. Общая связь затемняется также и устарѣлыми традиціонными опытами и приборами, имѣющими въ настоящее время лишь историческое значеніе. Чтобы избѣжать этого, необходимо выдѣлить приложенія изъ общаго курса, направленнаго къ выясненію явленій и законовъ, ими управляющихъ. Черезъ все преподаваніе должна проходить одна общая мысль—о превращеніяхъ энергіи и о законѣ ея сохраненія. Для выполненія этого плана авторомъ предлагается слѣдующая программа:

Свѣдѣнія по механикѣ; общія свойства тѣлъ, независимо отъ ихъ состоянія, и свойства, принадлежащія тремъ состояніямъ. Теплота, ея превращеніе въ работу и обратный переходъ работы въ теплоту. Свѣтъ. Звукъ. Химическая энергія. Краткія свѣдѣнія по химіи; роль теплоты при химическихъ процессахъ и взаимныя превращенія теплоты и химической энергіи. Магнитизмъ и электричество.

При прохожденіи курса рекомендуется обращать особенное вниманіе на взаимную связь различныхъ дѣятелей. Курсъ заключается изученіемъ законовъ тяготѣнія, закона сохраненія энергіи, энергіи солнечнаго луча и ея метаморфозъ на землѣ.

Секціей были приняты слѣдующія резолюціи:

1) Необходимо, чтобы прикладная часть физики въ реальныхъ училмщахъ не затемняла собою основной части курса ея.

2) Было бы желательно черезъ весь курсъ физики, насколько это возможно въ средней школѣ, провести ученіе о сохраненіи энергіи.

Предложеніе С. М. Зегера:

„въ случаѣ сохраненія при реальныхъ училищахъ коммерческихъ отдѣленій, необходимо преподаваніе физики въ обоихъ отдѣленіяхъ вести раздѣльно“

принято секціей единогласно.

Затѣмъ были читаны рефераты:

1) *А. Н. Рождественскаго*: Въ какой мѣрѣ должно сообщать ученикамъ реальныхъ училищъ свѣдѣнія по химіи.

2) Сводъ мнѣній Педагогическихъ Совѣтовъ по тому же вопросу.

По предложенію проф. Н. А. Умова секція постановила ходатайствовать, чтобы въ каждомъ университетскомъ городѣ при одномъ изъ среднихъ учебныхъ заведеній былъ устроенъ образцовый физическій кабинетъ, въ которомъ лица, ищущія званія учителя физики, могли бы практически знакомиться съ образцовой системой демонстрацій.

Вечернее засѣданіе было посвящено докладамъ о преподаваніи рисованія въ реальныхъ училищахъ.

7 января въ 2 ч. дня происходило Общее Собраніе Съѣзда подъ предсѣдательствомъ Его Императорскаго Высочества Великаго Князя Константина Константиновича. На этомъ собраніи состоялось постановленіе Съѣзда ходатайствовать о томъ, чтобы періодическіе съѣзды и выставки по техническому и профессіональному образованію созываемы были въ промежутки времени отъ 3 до 5 лѣтъ, и Съѣздъ высказалъ желаніе, чтобы будущій 3-й съѣздъ былъ созванъ въ Одессѣ.

Для болѣе нагляднаго выясненія современнаго состоянія въ Россіи учебнаго дѣла по техническому и профессіональному образованію при Съѣздѣ была устроена выставка. На II-мъ ея отдѣлѣ были выставлены работы учениковъ реальныхъ училищъ по черченію и рисованію, альбомы съ планами и фотографіями помѣщеній и учениковъ училищъ, годовые отчеты и историческія записки, конспекты по естественной исторіи и замѣтки учениковъ по физикѣ.

Въ заключеніе позволю себѣ привести краткую рѣчь товарища предсѣдателя II секціи, С. М. Зегера, сказанную на заключительномъ Общемъ Собраніи Съѣзда 7 января 1896 г.:

Ваше Императорское Высочество,

Милостивыя Государыни и Милостивые Государи!

Секція реальныхъ училищъ въ теченіе 8 дней имѣла 17 засѣданій, въ которыхъ разсмотрѣно до 40 рефератовъ.

Обсужденные доклады затрагивали почти со всѣхъ сторонъ положеніе реальныхъ училищъ, какъ это видно изъ слѣдующаго краткаго перечня главнѣйшихъ ходатайствъ и пожеланій секціи.

1. Объ органической связи дополнительнаго класса съ шестью первыми.

2. Объ отмѣнѣ переводныхъ испытаній и обязательности каникулярныхъ работъ.

3. Объ улучшеніи постановки преподаванія почти всѣхъ предметовъ, въ особенности же отечественнаго языка, и о возстановленіи химіи, какъ самостоятельнаго предмета.

4. Объ устройствѣ образцовыхъ кабинетовъ — физическихъ и естественно-историческихъ при одномъ изъ среднихъ учебныхъ заведеній въ университетскихъ городахъ.

5. О необходимости спеціальной подготовки для лицъ, ищущихъ званія учителя реальныхъ училищъ.

6. Объ улучшеніи матеріальнаго положенія учителей реальныхъ училищъ и объ учрежденіи эмеритальной кассы въ вѣдомствѣ Мин. Народнаго Просвѣщенія.

7. Объ учрежденіи съѣздовъ учителей реальныхъ училищъ какъ всероссійскихъ, такъ и окружныхъ.

При своихъ занятіяхъ секція руководилась слѣдующими завѣтными словами нашего маститаго Министра Народнаго Просвѣщенія, графа Ивана Давыдовича Делянова, сказанными имъ въ этой же залѣ при открытіи съѣзда 28 декабря 1895 года: „Высказывайтесь съ полною откровенностью, руководясь пользою дѣла по указанію вашей совѣсти и житейской опытности, при взаимномъ другъ къ другу уваженіи и доброжелательности".

Главнѣйшею же цѣлью трудовъ секціи было то, чтобы наши молодыя реальныя училища получили самостоятельное значеніе общеобразовательныхъ учебныхъ заведеній, имѣющихъ цѣлью подготовить слушателей для высшихъ спеціальныхъ учебныхъ заведеній и способныхъ давать обществу полезныхъ работниковъ, одушевленныхъ преданностью и любовью къ Церкви, Царю и Россіи.

*К. В. Май* (Одесса).

# НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

**О температурахъ, достигаемыхъ при помощи твердой углекислоты.**—Въ виду разногласія, существовавшаго между данными различныхъ авторовъ относительно температуры твердой углекислоты (эти данныя колеблются между — 89° и —60°), а также относительно температуръ, достигаемыхъ смѣшеніемъ углекислоты съ различными веществами, P. Villard и R. Jarry произвели рядъ опытовъ для установки этихъ данныхъ, пользуясь хорошо вывѣреннымъ толуоловымъ термометромъ и избѣгая всякаго усложненія опытовъ. Они нашли, что снѣгъ углекислоты, образовавшійся внутри сосуда, сообщающагося съ наружнымъ воздухомъ и погруженнаго въ охладительную смѣсь, быстро плавится, если сосудъ вынуть изъ охладительной смѣси. Во время этого плавленія температура остается постоянной и равной—57°, а давленіе 5,1 атм.; по окончаніи плавленія и температура и давленіе повышаются. Кристаллы углекислоты не дѣйствуютъ на поляризованный свѣтъ. Если помѣстить снѣгъ углекислоты въ открытый сосудъ, такъ что развивающаяся изъ него газообразная углекислота имѣетъ напряженіе въ 1 атм., и если защитить сосудъ отъ внѣшней лучистой теплоты, то погруженный въ него термометръ постоянно показываетъ—79°. При смѣшеніи твердой углекислоты съ эфиромъ или толуоломъ получается та же температура. Если охладить до—65° хлористый метилъ, то снѣгъ углекислоты растворяется въ немъ, не развивая газа (при смѣшеніи съ эфиромъ и толуоломъ газъ выдѣляется), и температура постепенно падаетъ до—85°; эта послѣдняя температура достигается, когда растворъ насыщенъ. Пропуская токъ сухого воздуха сквозь эту смѣсь, удается охладить ее ниже—90°. Если помѣстить въ пріемникъ воздушнаго насоса твердую углекислоту, сжатую въ цилиндрѣ изъ проволочной сѣтки, то уже черезъ 15 мин. дѣйствія насоса температура падаетъ до—115°, затѣмъ и до—125°, когда давленіе достигаетъ 5 mm ртутнаго столба. Такимъ образомъ не трудно при помощи твердой углекислоты достичь температуръ, лежащихъ ниже критической температуры кислорода (— 118°). (Journ. de Phys. IV, 511).

*В. Г.*

**Отраженіе катодныхъ лучей отъ стекла и отъ металла.** *Gaston Ségny* (C. R. CXXII, 134).—Въ центрѣ стекляннаго баллона, разрѣженіе въ которомъ доведено до 0,000001 атмосферы, помѣщается алюминіевый электродъ въ формѣ звѣзды. Параллельно звѣздѣ у стѣнки баллона помѣщается второй электродъ въ формѣ диска. Электроды эти соединяются съ полюсами индукціонной катушки, дающей искры въ 10 cm, причемъ дискъ служитъ катодомъ. Пучекъ катодныхъ лучей отбрасываетъ на противоположную стѣнку темную тѣнь звѣзды. Здѣсь лучи отражаются отъ стѣнки баллона, освѣщаютъ пространство, окружающее катодъ, и даютъ вторую тѣнь звѣзды, которая больше первой. Наконецъ и металлическая поверхность звѣзды отражаетъ часть падающихъ на нее лучей. Эти послѣдніе лучи проэктируютъ свѣтлое изображеніе звѣзды, которое замѣтно въ центрѣ тѣни той же звѣзды, окружающей катодъ.

*В. Г.*

# ЗАДАЧИ.

**№ 320.** Показать, что въ треугольникѣ $ABC$ разность между суммою квадратовъ сторонъ $AC$ и $BC$ и суммою квадратовъ линій, соединяющихъ вершину $C$ съ лежащими на $AB$ точками касанія $M$ вписаннаго круга и $N$ — внѣвписаннаго, соотвѣтствующаго сторонѣ $AB$, вдвое больше разности квадратовъ радіуса описаннаго круга и линіи, соединяющей центръ $O$ описаннаго круга съ точкою $M$.

*М. Зиминъ* (Орелъ).

**№ 321.** При какомъ значеніи $n$ неопредѣленное уравненіе

$$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=a$$

имѣетъ наибольшее число цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній? Нулевыя рѣшенія не считаются.

*М. Зиминъ* (Орелъ).

**№ 322.** Найти число, равное квадрату числа его единицъ, сложенному съ кубомъ числа его десятковъ.

*С. Петрашкевичъ* (Скопинъ).

**№ 323.** Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненія:

$$x^2+2y=u^2,$$
$$x^2-2y=v^2,$$

гдѣ $x$, $y$, $u$ и $v$ суть неизвѣстныя.

(Заимств.). *Д. Е.* (Иваново-Вознесенскъ).

**№ 324.** Рѣшить безъ помощи тригонометріи слѣдующую задачу (Н. Рыбкинъ. Собраніе стереометрическихъ задачъ, требующихъ примѣненія тригонометріи. 3 изд. 1894 г., стр. 19, № 19):

„Основаніемъ пирамиды служитъ квадратъ; — двугранные углы при немъ относятся какъ 1 : 2 : 4 : 2. Опредѣлить эти углы“.

*Н. Николаевъ* (Пенза).

# РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

**№ 256** (3 сер.). Показать, что во вписанномъ четыреугольникѣ, діагонали котораго взаимно перпендикулярны, произведеніе суммы діагоналей на діаметръ описаннаго круга равно суммѣ четырехъ произведеній сторонъ четыреугольника, взятыхъ попарно.

Пусть діагонали $AC$ и $BD$ вписаннаго четыреугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны и пересѣкаются въ точкѣ $K$. Пусть радіусъ описанной окружности есть $R$. Изъ треугольниковъ $ABC$, $BCA$, $CDA$, $DAB$ имѣемъ:

$$BK=\frac{AB.BC}{2R};\quad CK=\frac{BC.CD}{2R};\quad DK=\frac{CD.DA}{2R};\quad AK=\frac{DA.AB}{2R};$$

сложивъ эти равенства, легко получимъ:

$$(BD+AC)\,2R=AB.BC+BC.CD+CD.DA+DA.AB.$$

*Б. К.*, *С. Соколовъ*, *Д. Цельмеръ*, *L.* (Тамбовъ); *Э. Заторскій* (Вильно); *ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.*, *В. Соковичъ* (Кіевъ); *М. Зиминъ* (Орелъ); *Г. Леготинъ* (с. Знаменка); *Лежебокъ* (Иваново-Вознесенскъ).

**№ 257** (3 сер.). Рѣшить систему уравненій:

$$x^2+y^2=a^2,$$

$$x+y\sqrt[3]{\frac{x}{y}}=r\sqrt{1+\sqrt[3]{\frac{x^2}{y^2}}}.$$

Представивъ второе уравненіе въ видѣ:

$$\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)=r\,\frac{\sqrt{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}}}{\sqrt[3]{y}}$$

или

$$\sqrt[3]{xy}\,.\sqrt{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}}=r,$$

и возвысивъ его въ кубъ, легко найдемъ

$$xy=\frac{r^3}{\sqrt{3r^2+a^2}}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1).$$

Изъ уравненія (1) и перваго изъ данныхъ уравненій найдемъ:

$$x=\pm\,{}^1\!/_2\left(\sqrt{a^2+\frac{2r^3}{\sqrt{a^2+3r^2}}}+\sqrt{a^2-\frac{2r^3}{\sqrt{a^2+3r^2}}}\right),$$

$$y=\pm\,{}^1\!/_2\left(\sqrt{a^2+\frac{2r^3}{\sqrt{a^2+3r^2}}}-\sqrt{a^2-\frac{2r^3}{\sqrt{a^2+3r^2}}}\right).$$

*В. Поздюнинъ* (Самара); *Э. Заторскій* (Вильно); *М. Зиминъ* (Орелъ); *ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.*; *Д. Цельмеръ* (Тамбовъ); *Лежебокъ* (Иваново-Вознесенскъ).

# ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

## JOURNAL
## de mathématiques élémentaires.

### 1895.—№ 10.

**Note sur l'équation trigonométrique** $a\sin x + b.\cos x = c$. Par. M. *Droz-Farny*. Если коэффиціенты $a$, $b$, $c$ ур-нія

$$a \sin x + b.\cos x = c$$

заданы числами, то ур-ніе рѣшается при помощи подстановки

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi;$$

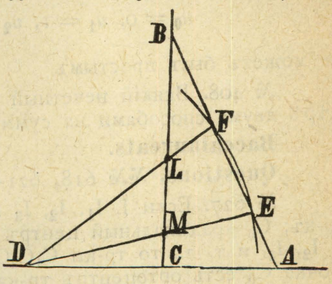
при этомъ оказывается, что $x$ имѣетъ дѣйствительную величину при условіи

$$c \leqq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Droz-Farny даетъ графическое рѣшеніе этого ур-нія въ предположеніи, что $a$, $b$, $c$ заданы какъ отрѣзки. Если на сторонахъ прямого угла C отложить отрѣзки $CA = b$ и $CB = a$, то $\angle CBA = \varphi$. Отложивъ затѣмъ на AC отъ точки A отрѣзокъ $AD = c$, опишемъ около D окружность радіусомъ $a$, которая можетъ пересѣчь гипотенузу AB въ E и F. Въ тр-хъ DEA и DFA

$$\left.\begin{matrix}\sin DEA\\ \sin DFA\end{matrix}\right\} : \sin A = DA : \left\{\begin{matrix}DE\\ DF\end{matrix}\right.;$$

отсюда $\sin DEA = \sin DFA = \dfrac{c.\cos\varphi}{a}$; слѣдовательно углы DEA и DFA суть два значенія угла $x + \varphi$; поэтому, если L и M суть пересѣченія прямыхъ DF и DE съ BC, то корни ур-нія суть



Фиг. 23.

$$x' = \angle BLF \text{ и } x'' = \angle BME.$$

Опустивъ изъ D перпендикуляръ DH на AB, замѣчаемъ, что задача возможна только при $DH \leqq a$; но $\dfrac{DH}{c} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; поэтому условіе возможности задачи выражается неравенствомъ

$$c \leqq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Подобнымъ же образомъ строится уголъ $x$, удовлетворяющій ур-нію

$$a\sin x - b\cos x = c.$$

**Quelques propriétés du cercle conjugué à un triangle.** Par *S. Chassiotis*. Тр-къ и кругъ наз. сопряженными, если поляра каждой вершины тр-ка относительно круга есть противоположная сторона тр-ка.

Взявъ четыре прямыхъ $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$, $\Delta_4$ на плоскости и обозначивъ черезъ $T_1$ кругъ, сопряженный съ тр-мъ, составленнымъ прямыми $\Delta_2$, $\Delta_3$, $\Delta_4$, и т. д., авторъ доказываетъ слѣдующія теоремы:

**Теорема** I. *Окружности* $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$ *ортогональны съ окружностями* $D_1$, $D_2$, $D_3$, *имѣющими діаметрами діагонали полнаго чет-ка, составленнаго прямыми* $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$, $\Delta_4$.

**Слѣдствіе** I. Окружности $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$ имѣютъ общую радикальную ось.

**Слѣдствіе** 2. Окружность Е, описанная около тр-ка, составленнаго діагоналями полнаго чет-ка, и окружности, сопряженныя съ тр-ми, составленными его сторонами, имѣютъ общую радикальную ось Окружность описанная около тр-ка, составленнаго діагоналями полнаго чет-ка, ортогональна съ окружностями, имѣющими діаметрами діагонали этого чет-ка.

**Теорема** II. *Точки пересѣченія окружностей* Е, $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$ *съ каждой изъ діагоналей чет-ка образуютъ инволюцію, двойныя точки которой суть вершины чет-ка, а центральная точка есть средина діагонали.*

**Теорема** III. *Пусть стороны тр-ка* ABC *пересѣкаются прямою въ* A′, B′, C′. *Двойныя точки инволюцій на сторонахъ тр-ка, центральныя точки которыхъ суть* A′, B′, C′ *и степени которыхъ суть* A′B.A′C, B′C.B′A, C′A.C′B, *по три лежатъ на одной прямой.*

Статья заканчивается слѣдующими теоремами, относящимися къ коническимъ сѣченіямъ:

1) Для даннаго тр-ка ABC существуютъ три равнобочныя гиперболы, имѣющихъ одинъ изъ фокусовъ въ ортоцентрѣ тр-ка и касательныхъ къ двумъ сторонамъ тр-ка.

2) Директрисы этихъ гиперболъ, соотвѣтствующія общему фокусу ихъ, суть перпендикуляры изъ вершинъ тр-ка A, B, C на прямыя, соединяющія общій фокусъ съ срединами сторонъ.

3) Ассимптоты гиперболъ суть касательныя, проведенныя изъ срединъ сторонъ тр-ка къ сопряженному съ нимъ кругу.

**Exercices divers.** Par M. *Aug. Boutin.* №№ 405—408.

№ 405. Ни одно изъ чиселъ ряда

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 6,\ u_3 = 35, \ldots\ u_n = 6u_{n-1} - u_{n-2}$$

не можетъ быть простымъ.

№ 408. Всякій нечетный квадратъ, увеличенный на 2, разлагается по крайней мѣрѣ двумя способами на сумму трехъ квадратовъ.

**Baccalauréats.**

**Questions.** №№ 618, 621—631.

№ 627. Если I, $I_1$, $I_2$, $I_3$ суть радіусы круговъ вписаннаго и внѣвписаннаго въ тр-къ; $C_0$—радикальный центръ круговъ $I_1$, $I_2$, $I_3$, $C_1$—радикальный центръ круговъ $I_1$ $I_2$, $I_3$, и т. д., то тр-ки $C_1C_2C_3$ и $I_1I_2I_3$ подобны и отношеніе сторонъ ихъ $= 1/2$. Точка $C_0$ есть ортоцентръ тр-ка $C_1C_2C_3$. (*Barisien*).

**Questions proposées.** №№ 673—682. *Д. Е.*

## ПОПРАВКА.

Въ № 231 „Вѣстника“, на стр. 81, въ задачѣ № 311 напечатано: „Доказать, что діагонали $a_1b_2$, $b_1c_2$ и $c_1c_2$ этого шестиугольника“... Слѣдуетъ читать: „Доказать, что діагонали $a_1b_2$, $b_1c_2$ и $c_1a_2$ этого шестиугольника“.

# ОТВѢТЫ РЕДАКЦІИ.

**С. А—ву** (Гельсингфорсъ). Будетъ помѣщено въ слѣдующемъ номерѣ.

**С. Гирману** (Варшава). Будетъ напечатано.

**В. Г. Красницкому** (Варшава). Просимъ прислать.



Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса, 23-го Мая 1896 г.

„Центральная типо-литографія“, уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. № 39.

Обложка
ищется

Обложка
ищется