Обложка
ищется

Обложка
пщется

XVIII Сем. 25-го февраля 1895 г. № 5.

# ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
# ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 209.



## ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРІЯ
## относительнаго движенія.

(*Окончаніе* *).

§ 7. Если на нѣкоторую массу $m$ (матеріальную точку), относительное движеніе коей мы наблюдаемъ, дѣйствуетъ нѣкоторая сила, то величина и направленіе этой послѣдней опредѣляются, по второму закону Ньютона, произведеніемъ $mg$ изъ массы и абсолютнаго ускоренія. Тогда уравненіе (21) показываетъ намъ, что

$$mj = mg + mf + mk - m\frac{\Delta\eta}{\tau} - mr'\frac{\Delta\omega}{\tau}. \qquad (22)$$

Если бы мы, не зная о томъ, что наблюдаемое нами движеніе есть относительное, стали выводить заключеніе о дѣйствующей на массу $m$ силѣ, то нашли бы, что упомянутая *кажущаяся* сила выражается произведеніемъ $mj$. Такимъ образомъ смыслъ уравненія (22) сводится къ нижеслѣдующему:

Относительное движеніе массы подъ дѣйствіемъ данной дѣйствительной силы ($mg$) происходитъ такимъ образомъ, какъ будто подвижная среда была бы неподвижною, а на массу $m$, кромѣ данной силы, дѣйствовали бы еще силы: 1) *центробѣжная сила* ($mf$), направленная по радіусу вращенія $r$, прочь отъ оси вращенія; 2) *поворотная сила*

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“ № 208.

($mk$), перпендикулярная къ плоскости, параллельной направленіямъ оси вращенія $\omega$ и относительной скорости $u$, дѣйствующая притомъ въ сторону, обратную вращенію среды; 3) сила, обратная *поступательной* $\left(-m\frac{\Delta\eta}{\tau}\right)$, дѣйствующая въ сторону, обратную поступательному ускоренію среды (не поступательному движенію); 4) сила, обратная *вращательной* $\left(mr'\frac{\Delta\omega}{\tau}\right)$, дѣйствующая въ сторону, обратную вращательному ускоренію среды, т. е. перпендикулярно оси добавочной угловой скорости $\Delta\omega$ и къ разстоянію $r'$ движущейся точки отъ этой оси, кромѣ того въ сторону, обратную добавочному вращенію среды*).

Не нужно упускать изъ виду того обстоятельства, что во всѣхъ предыдущихъ разсужденіяхъ о перемѣщеніяхъ подвижной среды относительно другой, считаемой за неподвижную, разыскивалась только связь между ускореніями $g$ и $j$ движеній, опредѣляемыхъ соотвѣтственно по точкамъ той или другой изъ обѣихъ средъ. Если бы считаемая неподвижною среда тоже перемѣщалась, то найденныя соотношенія остались бы тѣми же; только ускореніе $g$ могло бы быть выражено еще иначе по движенію соотвѣтствующей среды относительно новой третьей среды, принимаемой теперь за неподвижную.

§ 8. Если подвижная среда обладаетъ однимъ только поступательнымъ движеніемъ (прямолинейнымъ или криволинейнымъ, но *одинаковымъ* для всѣхъ ея точекъ), то силы: центробѣжная, поворотная и вращательная не входятъ въ разсужденіе, а потому

$$mj = mg \sim m\frac{\Delta\eta}{\tau}. \tag{23}$$

Предположимъ для примѣра, что подвижная среда движется поступательно съ такимъ же ускореніемъ, какое имѣетъ разсматриваемая движущаяся масса $m$ при ея абсолютномъ движеніи, т. е. положимъ въ (23): $\frac{\Delta\eta}{\tau} = g$; тогда

$$mj = 0; \tag{24}$$

т. е. относительное движеніе будетъ совершаться такъ, какъ будто бы на массу $m$ не дѣйствовала никакая сила. Такой случай мы будемъ имѣть, напримѣръ, наблюдая движеніе относительно другъ друга системы одновременно падающихъ тѣлъ**). Движеніе это представится намъ такимъ, какъ будто бы на упомянутыя тѣла не дѣйствовала сила вѣса. Между прочимъ мы можемъ наблюдать при этомъ нижеслѣдующія явленія:

*) Каріолисъ, творецъ теоріи относительнаго движенія, называетъ силу $mf \sim m\frac{\Delta\eta}{\tau}$ *силою влеченія* (force d'entrainement), а силу $mk$ — *сложною центробѣжною силою* (force centrifuge composée).

**) Проф. Н. А. Любимовъ демонстрировалъ на IX съѣздѣ русскихъ естествоиспытателей рядъ опытовъ, относящихся къ упомянутому случаю.

*a*) Неравные грузы на чашкахъ вѣсовъ остаются въ равновѣсіи при паденіи всей системы, т. е. вѣсовъ, чашекъ и грузовъ.

*b*) Падающіе пружинные вѣсы не вытягиваются привѣшаннымъ къ нимъ грузомъ.

*c*) Тѣло, помѣщенное на падающемъ шарѣ, останется во всякомъ положеніи въ относительномъ равновѣсіи.

*d*) Падающій маятникъ, отклоненный въ началѣ паденія, останется при томъ же отклоненіи во все время паденія.

*e*) Падающій маятникъ, ось коего укрѣплена въ массивной подставкѣ, будетъ во время паденія вращаться около оси равномѣрно съ тою скоростью, какую онъ имѣлъ въ моментъ начала паденія. Собственно говоря, маятникъ и подставка должны вращаться около ихъ общаго центра инерціи; если же масса подставки значительно превышаетъ массу маятника, то маятникъ представится вращающимся около подставки, внутри коей будетъ лежать общій центръ инерціи.

*f*) Давленіе внутри падающей жидкости, обусловленное вѣсомъ жидкости, не будетъ имѣть мѣста (останется, напримѣръ, капиллярное давленіе); жидкость не будетъ вытекать изъ отверстія сосуда, открытаго во время паденія; части струи, образовавшейся до начала паденія, будутъ двигаться относительно съ тѣми скоростями, какія онѣ имѣли въ моментъ начала паденія; относительное движеніе каждой части струи будетъ равномѣрное; вообще струя разорвется.

*g*) Законъ Архимеда при относительномъ движеніи внутри падающей жидкости не будетъ имѣть мѣста; всякое тѣло, помѣщенное внутри падающей жидкости, останется въ равновѣсіи; раздутый мѣшокъ не будетъ обратно сплющиваться внутри падающей жидкости.

*h*) Ртуть падающаго барометра подниметея, заполняя всю барометрическую трубку вплоть до верха.

*i*) Ртуть въ открытомъ колѣнѣ манометра, соединеннаго съ падающимъ баллономъ, наполненнымъ сжатымъ или разрѣженнымъ газомъ, будетъ соотвѣтственно повышаться или понижаться во время паденія.

§ 9. Предположимъ, что подвижная среда имѣетъ только вращательное движеніе, съ постоянною угловою скоростью около неизмѣнной оси. Пусть нѣкоторая масса $m$ сохраняетъ въ этой средѣ относительный покой. Тогда въ (21)

$$j = k = \frac{\Delta\eta}{\tau} = \frac{\Delta\omega}{\tau} = 0$$

и

$$mg + mf = 0, \tag{25}$$

откуда видимъ, что при этомъ абсолютное движеніе должно совершаться съ ускореніемъ $g$, равнымъ и прямо противоположнымъ центробѣжному $f$. Такимъ образомъ абсолютное движеніе будетъ круговое равномѣрное, обусловленное дѣйствіемъ *дѣйствительно существующей* центростремительной силы $mg$. Относительно подвижной среды масса $m$ будетъ неподвижна, и центростремительная сила представится въ относительномъ движеніи *какъ будто* уравновѣшенною *кажущеюся* центробѣжною силою *mf*. Поэтому мы можемъ сказать, что условіе относительнаго равновѣсія тѣлъ въ нѣкоторой равномѣрно вращающейся средѣ будетъ такое, какъ будто среда была въ покоѣ, а на тѣла, кромѣ данныхъ силъ, еще дѣйствовали бы извѣстнымъ образомъ вычисляемыя центробѣжныя силы; въ абсолютномъ равновѣсіи, конечно, эти тѣла не будутъ.

§ 10. Смѣшеніе понятій объ абсолютномъ и относительномъ движеніяхъ повело къ весьма распространенному ложному представленію о центробѣжной силѣ, на самомъ дѣлѣ приложенной къ тѣлу, обладающему круговымъ движеніемъ и „развивающейся" якобы при вращеніи. Насколько предразсудокъ о такой дѣйствительно существующей центробѣжной силѣ можетъ укорениться въ умѣ вслѣдствіе нелѣпаго изложенія основныхъ механическихъ понятій въ средней школѣ, свидѣтельствуетъ то обстоятельство, что впослѣдствіи отъ него иногда не могутъ отдѣлаться даже извѣстные ученые, вращающіеся въ высшихъ слояхъ механики и физики. Какъ на примѣръ, укажу на знаменитаго Hertz'а, творца электрическихъ волнъ. Въ вышедшей уже послѣ его смерти книгѣ „Die Prinzipien der Mechanik" онъ дѣлаетъ попытку основать механику на новыхъ принципахъ, находя старые недостаточно ясными и считая выводы изъ нихъ недостаточно консеквентными. Критикуя старыя механическія теоріи, Гертцъ останавливается между прочимъ на несообразности понятія о развивающейся при движеніи центробѣжной силѣ; но самое это понятіе Гертцъ считаетъ въ то же самое время не грубымъ искаженіемъ существующихъ механическихъ принциповъ, а какъ бы ихъ законнымъ слѣдствіемъ. Приведемъ самыя слова Гертца со стран. 6 и 7 его книги:

„...Во всякомъ случаѣ нужно удивляться, какъ легко связать съ „основными законами разсужденія, вращающіяся въ сферѣ обычныхъ „для механики оборотовъ рѣчи и, тѣмъ не менѣе, ставящія несомнѣнно „въ затрудненіе ясное мышленіе. Попытаемся обнаружить это на при„мѣрѣ. Мы размахиваемъ по кругу камнемъ на шнурѣ; при этомъ мы „сознательно дѣйствуемъ на камень нѣкоторою силою; эта сила откло„няетъ постоянно камень отъ прямого пути, и, если мы измѣнимъ эту „силу, массу камня, длину шнура, то найдемъ, что движеніе камня въ „самомъ дѣлѣ постоянно совершается въ согласіи со вторымъ закономъ „Ньютона. Но теперь, третій законъ требуетъ противодѣйствія той „силѣ, съ которою наша рука дѣйствуетъ на камень. На вопросъ о „такомъ противодѣйствіи слѣдуетъ для каждаго знакомый отвѣтъ: ка„мень воздѣйствуетъ на руку *вслѣдствіе центробѣжной силы* (?); эта „центробѣжная сила равна и противоположна силѣ, съ которою дѣй„ствуемъ мы. Но можно ли допустить такой способъ выраженія? Есть „ли то, что мы теперь называемъ силою размаха (Schwungkraft), или „центробѣжною силою, нѣчто иное, нежели *инерція* (?) (Trägheit) *камня?* „Можемъ ли мы, не нарушая ясности нашихъ представленій, дважды „брать въ разсчетъ *дѣйствіе инерціи* (?) (Wirkung der Trägheit), именно: „одинъ разъ—какъ массу и во второй разъ — какъ силу? Въ нашихъ „законахъ движенія сила была причиною, имѣющею мѣсто до дви„женія (?). Можемъ ли мы, не спутывая нашихъ понятій, говорить те„перь о силахъ, которыя возникаютъ отъ движенія, которыя суть слѣд„ствія движенія? Смѣемъ ли мы себя обманывать, будто объ этихъ но-

„ваго рода силахъ мы что то уже высказали въ нашихъ законахъ, будто „мы можемъ этимъ силамъ, вмѣстѣ съ названіемъ силъ, приписать также „и свойство силъ? Всѣ эти вопросы подлежатъ отрицанію, и ничего не „остается, какъ объяснить: принятіе центробѣжной силы за силу непод- „ходяще; это названіе, какъ названіе живой силы, должно понимать въ видѣ „историческаго преданія, и удержаніе этого термина съ большею цѣле- „сообразностью подлежитъ скорѣе извиненію, а не обоснованію. Но куда „же тогда дѣнутся притязанія третьяго закона, который требуетъ силы, „обнаруживаемой *мертвымъ* (?) камнемъ на руку, и который долженъ „быть удовлетворенъ дѣйствительною силою, а не простымъ терминомъ?

„Я не думаю, что всѣ эти затрудненія представлены умышленно „или искусственно. *Выслѣживая ихъ источникъ*, не прійдемъ ли мы „къ самимъ основнымъ законамъ? . . . . . . . . .“.

§ 11. Разсмотримъ еще движеніе при земной поверхности относительно земли. Всѣ эти тѣла находятся во первыхъ всегда подъ дѣйствіемъ притяженія солнца и обладаютъ ускореніемъ по направленію къ солнцу, обратно пропорціональнымъ квадрату разстоянія движущагося тѣла отъ этого послѣдняго. Незначительность размѣровъ земли по сравненію съ ея разстояніемъ отъ солнца дозволяетъ допустить, что упомянутое ускореніе остается однимъ и тѣмъ же для движущагося тѣла на всѣхъ точкахъ земной поверхности, и что оно, слѣдовательно, такое же, какъ и поступательное ускореніе $\frac{\Delta\eta}{\tau}$ самой земли, которое также обусловливается дѣйствіемъ солнца. Кромѣ того тѣ же тѣла находятся подъ дѣйствіемъ земного притяженія, приблизительно одинаковаго во всѣхъ точкахъ земной поверхности и направленнаго приблизительно къ одной точки внутри земли.

Обозначая черезъ $g'$ ускореніе земного притяженія, мы найдемъ, что въ составъ всякой силы, дѣйствующей на тѣла при земной поверхности, войдетъ сила

$$mg' + m\frac{\Delta\eta}{\tau},$$

и, слѣдовательно, въ формулѣ (21) будетъ

$$g = g' + \frac{\Delta\eta}{\tau} + g_1, \tag{26}$$

причемъ $g_1$ представитъ ускореніе, зависящее отъ какой либо еще иной данной силы, кромѣ силъ тяготѣнія и земного притяженія. Сверхъ того въ той же формулѣ (21), мы можемъ положить $\frac{\Delta\omega}{\tau} = 0$, ибо вращеніе земли остается неизмѣннымъ за время обыкновенно наблюдаемыхъ движеній на земной поверхности. Такимъ образомъ, подставляя выраженіе (26) въ (21) и помня, что $\Delta\omega = 0$, мы находимъ:

$$j = g_1 + g' + f + k. \tag{27}$$

Ускореніе $g' + f$ есть ускореніе вѣса. Такъ какъ $g'$ для всѣхъ точекъ земной поверхности почти одинаково по величинѣ, а $f$—различно, то и ускоренiе вѣса на разныхъ точкахъ земной поверхности будетъ различно. Обозначимъ ускоренiе вѣса черезъ G; тогда

$$j = g_1 + G + k. \tag{28}$$

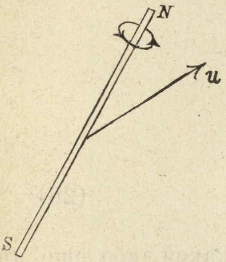
Если данная масса $m$ остается относительно земли въ покоѣ, то $j = 0$ и $k = 0$; слѣдовательно:

$$mg_1 + mG = 0, \tag{29}$$

откуда заключаемъ, что въ такомъ случаѣ на массу $m$ должна дѣйствовать сила $mg_1$, равная и прямо противоположная вѣсу. Если $mg_1 = 0$, то $j$ не нуль, и

$$mj = mG + mk, \tag{30}$$

откуда видимъ, что подъ дѣйствiемъ земного притяженiя тѣло движется относительно земли такъ, какъ будто на него кромѣ вѣса еще дѣйствовала поворотная сила $mk$. Направленiе поворотной силы, какъ было уже разъяснено выше, перпендикулярно къ плоскости, проходящей черезъ направленiе относительной скорости параллельно оси вращенiя; кромѣ того поворотная сила дѣйствуетъ въ смыслѣ, обратномъ вращенiю подвижной среды, т. е., въ нашемъ случаѣ, земли и ея атмосферы. Чтобы лучше орiентироваться относительно направленiя поворотной силы при земной поверхности, нужно представить себѣ линiю SN (фиг. 27), параллельную земной оси, проведенную черезъ начало вектора, представляющаго относительную скорость $u$; затѣмъ нужно представить себѣ, что упомянутая линiя, вмѣстѣ съ прикрѣпленнымъ какъ бы къ ней векторомъ $u$, вращается около самой себя отъ запада на востокъ (въ смыслѣ стрѣлки, изображенной на фиг. 27); поворотное ускоренiе будетъ перпендикулярно къ плоскости SN$u$ и обратно описанному вращенiю. Кромѣ того надо принять во вниманiе, что для наблюдателя, стоящаго на земной поверхности, конецъ N линiи SN будетъ направленъ къ верху въ сѣверномъ полушарiи и—къ низу въ южномъ; на экваторѣ линiя SN будетъ горизонтальна. Для такого наблюдателя, смотрящаго вдоль по направленiю $u$, векторъ $u$ будетъ отклоняться поворотнымъ ускоренiемъ направо въ сѣверномъ полушарiи и налѣво — въ южномъ. Если же мы вообразимъ себѣ наблюдателя расположеннымъ вдоль по линiи SN, головою къ N и смотрящаго вдоль по вектору $u$, то отклоненiе этого послѣдняго для такого наблюдателя будетъ всюду идти направо.



Фиг. 27.

Пользуясь вышесказанными соображенiями, мы легко прiйдемъ къ нижеслѣдующимъ заключенiямъ:

*a*) Тѣло, падающее на землю вертикально, отклоняется поворотною силою всюду къ востоку, на сѣверномъ полушарiи, на экваторѣ и на южномъ полушарiи, за исключенiемъ полюсовъ, гдѣ въ этомъ случаѣ $k=0$.

*b*) Тѣло, брошенное вертикально кверху, отклоняется всюду, за исключенiемъ полюсовъ, къ западу.

*c*) Тѣло, движущееся горизонтально съ юга на сѣверъ, отклоняется къ востоку въ сѣверномъ полушаріи и къ западу—въ южномъ. На экваторѣ отклоненія нѣтъ.

*d*) Тѣло, движущееся горизонтально съ сѣвера на югъ, отклоняется къ западу въ сѣверномъ полушаріи и къ востоку—въ южномъ. На экваторѣ отклоненія нѣтъ.

*e*) Для наблюдателя, стоящаго на сѣверномъ полюсѣ, всякое тѣло, удаляющееся горизонтально отъ полюса, летитъ къ югу и отклоняется направо; всякое тѣло, приближающееся къ наблюдателю, отклоняется налѣво. Обратное имѣетъ мѣсто для южнаго полюса.

*f*) Тѣло, движущееся горизонтально отъ востока на западъ, отклоняется въ сѣверномъ полушаріи къ сѣверу, въ южномъ полушаріи—къ югу.

*g*) Тѣло, движущееся горизонтально отъ запада къ востоку, отклоняется въ сѣверномъ полушаріи къ югу, въ южномъ полушаріи — къ сѣверу.

Проф. *Н. Шиллеръ* (Кіевъ).

# ОЧЕРКЪ
## геометрической системы Лобачевскаго.

*(Продолженіе*).*

Посмотримъ теперь, какъ расположена прямая, опредѣляемая уравненіемъ XXXIX *b*), относительно оси абсциссъ. Разыщемъ для этого точку ея пересѣченія $(x_0, 0)$ съ осью. Полагая $y_0 = 0$, будемъ имѣть $y'_0 = \frac{\pi}{2}$, и уравненіе XXXIX *b*) даетъ:

$$e^{2x_0} = -\frac{B}{A},\ x_0 = \lg\left(-\frac{B}{A}\right). \qquad (22)$$

Отсюда слѣдуетъ, что прямая пересѣкаетъ ось абциссъ лишь въ томъ случаѣ, если коэффиціенты B и A имѣютъ противоположные знаки. Въ этомъ случаѣ уравненіе (19) имѣетъ корни притивоположныхъ знаковъ, изъ которыхъ только одинъ, положительный, опредѣляетъ абсциссу, соотвѣтсвующую данной ординатѣ $y$.

Не нарушая общности, мы можемъ конечно считать коэффиціентъ A положительнымъ. Уравненіе XXXIX *b*) даетъ:

$$\cos y' = \frac{|A|e^x - |B|e^{-x}}{C},$$

*) См. „Вѣстн. Оп. Физики" №№ 174, 178, 179, 183, 187, 188, 189, 190, 194, 195 196, 198, 199, 201, 202, 203, 206 и 207.

гдѣ $|A|$ и $|B|$ означаютъ абсолютныя величины коэффиціентовъ A и B. Такъ какъ въ числителѣ уменьшаемое постоянно возрастаетъ вмѣстѣ съ $x$, а вычитаемое убываетъ, то $\cos y'$ постоянно и неопредѣленно возрастаетъ или убываетъ, смотря по знаку C. При переходѣ черезъ точку $(x_0,0)$ пересѣченія прямой съ осью $\cos y'$, а вмѣстѣ съ нимъ и $y$, мѣняетъ знакъ, т. е. прямая переходитъ съ одной стороны оси на другую и неопредѣленно отъ нея удаляется въ обѣ стороны. Дѣля уравненіе XXXIX $b$) на $\sqrt{-AB}$, мы представимъ его въ такомъ видѣ:

$$\sqrt{-\frac{A}{B}}\,e^{x}-\sqrt{-\frac{B}{A}}\,e^{-x}=\frac{C}{\sqrt{-AB}}\cos y',$$

а имѣя въ виду уравненіе (22), мы преобразуемъ его такимъ образомъ:

$$e^{x-x_0}-e^{x_0-x}=\frac{C}{\sqrt{-AB}}\cos y',$$

или, наконецъ, на основаніи формулы XXII $a$):

$$\cot g(x-x_0)'=\frac{C\cos y'}{2\sqrt{-AB}}. \qquad (23)$$

Возьмемъ двѣ точки нашей прямой $(x_1y_1)$ и $(x_2y_2)$, проекціи которыхъ на ось абсциссъ $(x_1,0)$ и $(x_2,0)$ находятся на равныхъ разстояніяхъ $(\xi)$ отъ точки $(x_0,0)$, такъ что $x_1=x_0+\xi$, $x_2=x_0-\xi$. Уравненіе (23) даетъ:

$$\cos y'_1=\frac{2\sqrt{-AB}}{C}\cot g\xi'$$

$$\cos y'_2=-\frac{2\sqrt{-AB}}{C}\cot g\xi'$$

и слѣдовательно

$$y_2=-y_1.$$

Это соотношеніе обнаруживаетъ, что данная прямая расположена симметрично относительно оси абсциссъ и точки $(x_0,0)$, на ней лежащей. Мы видимъ далѣе изъ уравненія (23), что

$$\cot g^2(x-x_0)'\leqslant\frac{C^2}{-4AB},$$

откуда

$$\cos^2(x-x_0)'\leqslant\frac{C^2}{E^2}.$$

Полагая

$$\cot gX'=\frac{|C|}{2\sqrt{-AB}}\text{ или }\cos X'=\frac{|C|}{E}, \qquad (24)$$

мы находимъ, что

$$X\geqslant(x-x_0)\geqslant-X.$$

Отсюда слѣдуетъ, что наша прямая расположена цѣликомъ между двумя перпендикулярами къ оси абсциссъ, возстановленными изъ двухъ точекъ, отстоящихъ на разстояніи X отъ точки $(x_0 0)$.

Если въ уравненіи (23) положимъ

$$x - x_0 = \pm X,$$

то найдемъ

$$\cos Y' = \pm \eta,$$

гдѣ $\eta$ представляетъ собой 1 взятую съ тѣмъ знакомъ, какой имѣетъ коэффіентъ C.

Отсюда слѣдуетъ, что $Y'$ равняется нулю или $\frac{\pi}{2}$, и стало быть $Y = \pm \eta \infty$. (Сохраняемъ множитель $\eta$ для соотвѣтствія знаковъ). Это значитъ, что два перпендикуляра къ оси, уравненія которыхъ суть:

$$x - x_0 = \pm X$$

ассимптотически приближаются къ нашей прямой съ противоположныхъ сторонъ. Такъ какъ эти перпендикуляры, очевидно, параллельны прямой, то $X = \Phi(\vartheta)$, гдѣ $\vartheta$ острый уголъ, который прямая образуетъ съ осью абсциссъ. Иными словами $\vartheta = \Pi(X)$, и слѣдовательно, согласно уравненію (24):

$$\cos\vartheta = \frac{|C|}{E}.$$

Этотъ острый уголъ расположенъ съ положительной стороны оси, когда $\eta = +1$, и съ отрицательной стороны, при $\eta = -1$, какъ это показываетъ уравненіе (23).

Итакъ, если прямая пересѣкаетъ ось абсциссъ, то она переходитъ съ одной стороны оси на другую, удаляется отъ нея неопредѣленно въ обѣ стороны; при этомъ она ассимптотически приближается къ двумъ прямымъ, перпендикулярнымъ къ оси, между которыми она цѣликомъ расположена. Тѣ точки, проэкціи которыхъ на ось абсциссъ находятся на равныхъ разстояніяхъ отъ точки пересѣченія $(x_0, 0)$, равно отстоятъ отъ оси. Все это находится въ полномъ согласіи съ теоріей пересѣкающихся прямыхъ, изложенной синтетически въ IV главѣ.

Если одинъ изъ коэффиціентовъ, A или B, равенъ нулю, то уравненіе (22) обнаруживаетъ, что точка пересѣченія прямой съ осью уходитъ въ безконечность. Уравненіе прямой принимаетъ въ этомъ случаѣ слѣдующій видъ:

$$Ae^{x} = C\cos y' \text{ или } Be^{-x} = C\cos y'. \tag{25}$$

Въ томъ и другомъ случаѣ $\cos y'$, а вмѣстѣ съ нимъ и $y$ сохраняетъ знакъ, т. е. прямая цѣликомъ расположена по одну сторону оси. Прямая, выражаемая первымъ уравненіемъ, ассимптотически приближается къ оси съ отрицательной стороны; вторая приближается къ оси съ положительной стороны ея. Въ противоположномъ направленіи каждая изъ этихъ прямыхъ постоянно удаляется отъ оси. Однако первое изъ этихъ уравненій обнаруживаетъ, что абсциссы точекъ этой прямой удовлетворяютъ неравенству:

$$e^x < \frac{|C|}{A},$$

предполагая по прежнему, что коэффиціентъ A положителенъ.

Иными словами:

$$x < \lg \frac{|C|}{A}.$$

Если же положимъ

$$x = X = \lg \frac{|C|}{A},$$

то найдемъ $У = \eta\,\infty$, гдѣ $\eta$ сохраняетъ прежнее значеніе. Это значитъ, что перпендикуляръ къ оси, опредѣляемый уравненіемъ $x = X$, ассимптотически приближается къ нашей прямой. Она расположена, слѣдовательно, цѣликомъ внутри прямого угла, составленнаго осью и перпендикуляромъ и неопредѣленно приближается къ сторонамъ этого угла. Всѣ перпендикуляры, лежащіе внутри этого угла, пересѣкаютъ данную прямую, остальные же, которые лежатъ съ другой стороны предѣльнаго перпендикуляра, ея не пересѣкаютъ. Мы уже знаемъ, что геометрія Лобачевскаго неизбѣжно приводитъ къ этому выводу, ибо вмѣстѣ съ постулатомъ Евклида мы отказываемся отъ эквивалентнаго ему предложенія, по которому перпендикуляръ къ одной изъ двухъ пересѣкающихся прямыхъ неизбѣжно встрѣчаетъ другую. (См. гл. 1)

Обратимся теперь къ тому случаю, когда коэффиціенты A и B имѣютъ одинаковые знаки, такъ что мы можемъ считать ихъ положительными. Въ этомъ случаѣ

$$\cos y' = \frac{Ae^x + Be^{-x}}{C}; \qquad (26)$$

$\cos y'$, а слѣдовательно и $y$ не мѣняетъ знака, т. е. вся прямая, какъ этого и слѣдовало ожидать, расположена цѣликомъ съ одной стороны оси: со стороны положительныхъ или отрицательныхъ ординатъ, смотря по тому, будетъ ли C больше или меньше нуля. Корни уравненія (19) имѣютъ при этомъ одинаковые знаки и каждому значенію $y$, взятому съ надлежащимъ знакомъ, отвѣчаютъ два значенія $x$, которыя остаются дѣйствительными, пока $C^2\cos^2 y' > 4AB$. Изъ этого вытекаетъ, что абсолютная величина $\cos y'$, а слѣдовательно и абсолютная величина ординаты $y$ имѣетъ *minimum* въ точкѣ $(x_0.y_0)$, для которой

$$C^2\cos^2 y_0' - 4AB = 0.$$

Принимая во вниманіе указанное выше правило знаковъ, мы отсюда найдемъ:

$$\cos y'_0 = \frac{2\sqrt{AB}}{C}, \sin y'_0 = \frac{E}{|C|}, \qquad (27)$$

$$e^{x_0} = \sqrt{\frac{B}{A}}. \qquad (28)$$

Уравненіе (27) опредѣляетъ кратчайшее разстояніе данной прямой отъ оси абсциссъ. Дѣля обѣ части уравненія прямой на $\sqrt{AB}$, мы при помощи уравненій (27) и (28) дадимъ ему такой видъ:

$$\frac{e^{x-x_0}+e^{x_0-x}}{2}=\frac{\cos y'}{\cos y'_0}$$

или на основаніи формулы XXII *c*)

$$\sin(x-x_0)'=\frac{\cos y'_0}{\cos y'}. \tag{29}$$

Представимъ себѣ теперь на нашей прямой двѣ точки $(x_1,y_1)$, проэкціи которыхъ на ось абсциссъ находятся на равныхъ разстояніяхъ ($\xi$) отъ точки $(x_0,0)$, такъ что

$$x_1-x_0=\xi;\ x_2-x_0=-\xi.$$

Тогда уравненіе (29) даетъ

$$\cos y'_1=\cos y'_2=\frac{\cos y'_0}{\sin\xi'},\ y_1=y_2.$$

Эти точки находятся, слѣдовательно, на равныхъ разстояніяхъ отъ оси абсциссъ.

Наконецъ уравненіе (29) обнаруживаетъ, что абсолютное значеніе отношенія $\dfrac{\cos y'_0}{\sin(x-x_0)'}$ не можетъ превышать единицы. Имѣя въ виду, что $\cos y'$ имѣетъ знакъ коэффиціента C, какъ это видно изъ уравненія (26), обозначимъ черезъ X отрѣзокъ, для котораго

$$\sin X'=\eta\cos y'_0.$$

Очевидно

$$X\geqslant x-x_0\geqslant -X,$$

такъ что наша прямая цѣликомъ расположена между двумя перпендикулярами къ оси, возставленными изъ двухъ точекъ, находящихся на разстояніи, равномъ X, отъ точки $(x_0,0)$. Полагая въ уравненіи (29) $x-x_0=\pm X$, найдемъ, что $y'=0$, и слѣдовательно, $y=\eta\infty$, т. е. оба перпендикуляра съ одной и той же стороны приближаются къ нашей прямой. Все это находится въ полномъ согласіи съ теоріей расходящихся прямыхъ, изложенной выше синтетически.

Найдемъ теперь уравненіе прямой, проходящей черезъ двѣ данныя точки $(x_1,y_1)$ и $(x_2,y_2)$.

Пусть искомое уравненіе будетъ:

$$Ae^{x}+Be^{-x}=C\cos y'.$$

Слѣдовательно имѣемъ тождественно:

$$Ae^{x_1}+Be^{-x_1}=C\cos y'_1$$

$$Ae^{x_2}+Be^{-x_2}=C\cos y'_2.$$

Исключая A, B и C изъ этихъ уравненій, найдемъ искомое уравненіе прямой:

$$\begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} & \cos y' \\ e^{x_1} & e^{-x_1} & \cos y'_1 \\ e^{x_2} & e^{-x_2} & \cos y'_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{XLI}$$

Слѣдовательно условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы три точки $(x_0,y_0)$, $(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)$ лежали на одной прямой выражается уравненіемъ:

$$\begin{vmatrix} e^{x_0} & e^{-x_0} & \cos y'_0 \\ e^{x_1} & e^{-x_1} & \cos y'_1 \\ e^{x_2} & e^{-x_2} & \cos y'_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{XLII}$$

Займемся теперь опредѣленіемъ разстоянія точки $(x_0,y_0)$ отъ прямой

$$\mathrm{A}e^{x} + \mathrm{B}e^{-x} = \mathrm{C}\cos y'.$$

Пусть нормальные параметры этой прямой (фиг. 28) будутъ $\mathrm{OP}=q$ и $\angle \mathrm{POX}=\omega$. Изъ данной точки $\mathrm{M}_0$ опускаемъ перпендикуляръ $\mathrm{M}_0\mathrm{Q}$ на данную прямую PQ и перпендикуляръ $\mathrm{M}_0\mathrm{R}$ на прямую OP. Введемъ для краткости слѣдующія обозначенія:

$$\mathrm{M}_0\mathrm{Q} = h,\ \mathrm{OR} = f,\ \mathrm{RP} = g,\ \mathrm{M}_0\mathrm{R} = k.$$

Въ четыреугольникѣ $\mathrm{ORM}_0\mathrm{N}$ углы $\mathrm{ORM}_0$ и $\mathrm{ONM}_0$ прямые. Мы можемъ поэтому положить въ уравненіяхъ XXXV $a$) и $c$)

$$a = f,\ b = k,\ c = y_0,\ d = x_0,\ \mathrm{A} = \omega,$$

такъ что мы получимъ:

$$\cos f' = \cos\omega \cos x'_0 + \sin\omega \sin x'_0 \cos y'_0 \qquad (30)$$

$$\frac{\sin f'}{\sin y'_0} = \frac{\sin x'_0}{\sin k'}. \qquad (31)$$

Съ другой стороны, въ четырехугольникѣ $\mathrm{M}_0\mathrm{RPQ}$ три прямыхъ угла. Мы можемъ поэтому принять въ уравненіи XXXV $g$): $a=h$, $c=g$, $d=k$,—и тогда найдемъ:

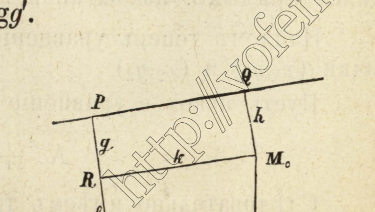
$$\operatorname{tg} h' = \sin k' \operatorname{tg} g'.$$

На основаніи уравненія XV $b$)

$$\operatorname{tg} g' = \operatorname{tg}(q-f)' = \frac{\sin q' \sin f'}{\cos q' - \cos f'}.$$

Подставляя это выраженіе въ предыдущее уравненіе, мы получимъ:

$$\operatorname{tg} h' = \frac{\sin k' \sin f' \sin q'}{\cos q' - \cos f'}.$$




Фиг. 28.

Замѣняя на основаніи уравненія (31) произведеніе $\sin k' \sin f'$ равнымъ ему произведеніемъ $\sin x'_0 \sin y'_0$ и подставляя вмѣсто $\cos f'$ выраженіе (30), находимъ:

$$\operatorname{cotg} h' = \frac{\cos q' - \cos\omega \cos x'_0 - \sin\omega \sin x'_0 \cos y'_0}{\sin x'_0 \sin y'_0 \sin q'}.$$

Дѣля числитель и знаменатель на $\sin x'_0$ и выражая $\frac{1}{\sin x'_0}$ и $\operatorname{cotg} x'_0$ въ показательныхъ функціяхъ по формуламъ XXII, мы получимъ:

$$\operatorname{cotg} h' = \frac{(\cos q' - \cos\omega) e^{x_0} + (\cos q' + \cos\omega) e^{-x_0} - 2\sin\omega \cos y'_0}{2\sin q' \sin y'_0}.$$

Пользуясь же уравненіями 17 *a*) и XL *b*) и *d*), мы дадимъ этой формулѣ окончательный видъ:

$$\operatorname{cotg} h' = \frac{A e^{x_0} + B e^{-x_0} - C \cos y'_0}{\varepsilon E \sin y'_0}. \qquad \text{XLIII } a)$$

Выводъ этой формулы предполагаетъ, что точки $M_0$ и начало координатъ расположены по одну сторону прямой. Предоставляя читателю провести весь этотъ рядъ разсужденій въ томъ случаѣ, когда данная точка и начало координатъ расположены съ различныхъ сторонъ прямой, укажемъ только окончательный результатъ:

$$\operatorname{cotg} h' = -\frac{A e^{x_0} + B e^{-x_0} - C \cos y'_0}{\varepsilon E \sin y'_0}. \qquad \text{XLIII } b)$$

Итакъ: для того, чтобы получить $\operatorname{cotg} h'$ нужно въ уравненіе прямой подставимъ координаты данной точки, результатъ раздѣлить на $\varepsilon E \sin y'_0$ и полученную величину взять со своимъ или съ обратнымъ знакомъ, смотря по тому, расположены ли точки и начало съ одной стороны прямой или съ различныхъ сторонъ. Предоставляемъ также читателю провести до конца аналогію между этимъ предложеніемъ и Евклидовымъ, т. е. обнаружить, что выведенная формула переходитъ въ Евклидову при $l = \infty$.

Положимъ теперь, что намъ заданы двѣ прямыя своими уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} A_1 e^{x} + B_1 e^{-x} &= C_1 \cos y' \\ A_2 e^{x} + B_2 e^{-x} &= C_2 \cos y'. \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

Найдемъ прежде всего точку ихъ пересѣченія $(\xi, \eta)$. Рѣшая эти уравненія совмѣстно, находимъ:

$$(A_1 C_2 - A_2 C_1) e^{\xi} + (B_1 C_2 - B_2 C_1) e^{-\xi} = 0,$$

откуда

$$e^{\xi} = \sqrt{\frac{B_2 C_1 - B_1 C_2}{A_1 C_2 - A_2 C_1}},\; e^{-\xi} = \sqrt{\frac{A_1 C_2 - A_2 C_1}{B_2 C_1 - B_1 C_2}} \qquad (33)$$

$$\xi = \frac{1}{2} \lg \frac{B_2 C_1 - B_1 C_2}{A_1 C_2 - A_2 C_1}. \qquad (34)$$

Отсюда видно, что точки пересѣченія существуютъ только при

$$\frac{B_2C_1 - B_1C_2}{A_1C_2 - A_2C_1} > 0, \tag{35}$$

т. е. когда разности $B_2C_1 - B_1C_2$ и $A_1C_2 - A_2C_1$ имѣютъ одинаковые знаки. Мы будемъ обозначать черезъ $\delta$ единицу, взятую съ тѣмъ знакомъ, который принадлежитъ этимъ разностямъ. При помощи равенствъ (33) находимъ непосредственно:

$$C_1\cos\eta' = A_1\sqrt{\frac{B_2C_1 - B_1C_2}{A_1C_2 - A_2C_1}} + B_1\sqrt{\frac{A_1C_2 - A_2C_1}{B_2C_1 - B_1C_2}};$$

$$\cos\eta' = \frac{\delta(A_1B_2 - A_2B_1)}{\sqrt{(A_2C_1 - A_1C_2)(B_1C_2 - B_2C_1)}}. \tag{36}$$

Очевидно, для существованія конечной точки пересѣченія необходимо также, чтобы $\cos^2 y' < 1$, т. е. чтобы

$$(A_2C_1 - A_1C_2)(B_1C_2 - B_2C_1) > (A_1B_2 - A_2B_1)^2. \quad \text{XLIV } a)$$

Такъ какъ въ этомъ неравенствѣ уже заключается неравенство (35), то оно выражаетъ условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы двѣ прямыя пересѣкались въ конечной точкѣ. Если

$$(A_2C_1 - A_1C_2)(B_1C_2 - B_2C_1) = (A_1B_2 - A_2B_1)^2, \quad \text{XLIV } b)$$

то точка пересѣченія уходитъ въ безконечность, а потому это равенство выражаетъ условіе параллельности двухъ прямыхъ. Точка пересѣченія имѣетъ при этомъ конечную абсциссу

$$\xi_0 = \lg\frac{(A_1B_2 - A_2B_1)\zeta}{A_1C_2 - A_2C_1}, \tag{37}$$

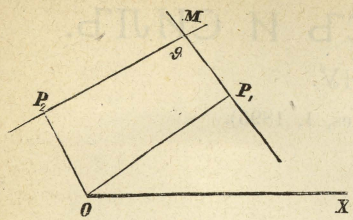
гдѣ $\zeta$ означаетъ единицу, выбранную съ такимъ знакомъ, чтобы дробь была положительной.

При $C_2A_1 - A_2C_1 = 0$ числитель также обращается въ нуль, какъ это видно изъ уравненія XLIV $b$); вслѣдствіе этого

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

и прямыя совпадаютъ. Впрочемъ частные случаи $A_1 = A_2 = 0$ и $B_1 = B_2 = 0$ подлежатъ спеціальному изслѣдованію. Но это уже сдѣлано выше: прямыя въ этомъ случаѣ параллельны оси абсциссъ. При $C_1 = C_2 = 0$ прямыя совпадаютъ.

Займемся теперь опредѣленіемъ угла между тѣми же двумя прямыми. Пусть $q_1$ и $\omega_1$, $q_2$ и $\omega_2$ будутъ нормальные параметры двухъ прямыхъ $MP_1$ и $MP_2$ (фиг. 29), такъ что перпендикуляры $OP_1$ и $OP_2$ равны $q_1$ и $q_2$, а уголъ между ними $P_1OP_2$ равенъ $\omega_2 - \omega_1$. Уголъ между двумя прямыми, въ которомъ расположено начало координатъ, мы обозначимъ черезъ $\vartheta$. Четырехугольникъ $OP_1MP_2$ заключаетъ два противо-



Фиг. 29.

положныхъ прямыхъ угла. Если мы поэтому произведемъ подстановку:

$$\begin{bmatrix} a & d & A & C \\ q_1 & q_2 & \omega_2-\omega_1 & \vartheta \end{bmatrix}$$

въ уравненіи XXXV $b$), то найдемъ:

$$\cos\vartheta = \frac{\cos q'_1 \cos q'_2 - \cos(\omega_2-\omega_1)}{\sin q'_1 \sin q'_2}. \qquad \text{XLV } a)$$

Если мы сюда вмѣсто функцій отъ $q_1, q_2, \omega_1$ и $\omega_2$ подставимъ выраженія XL, то найдемъ:

$$\cos\vartheta = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2[2(A_1B_2+B_1A_2)-C_1C_2]}{E_1E_2}. \qquad \text{XLV } b)$$

Это выраженіе опредѣляетъ дѣйствительный уголъ только въ томъ случаѣ, когда абсолютная величина дроби не превышаетъ единицы, т. е. когда

$$[2(A_1B_2+A_2B_1)-C_1C_2]^2 \leqslant (C_1^2-4A_1B_1)(C_2^2-4A_2B_2). \qquad (38)$$

Не трудно убѣдиться, что это условіе тожественно съ условіями XLIV $a$) и $b$) а потому требуетъ, чтобы прямыя пересѣкались $[\vartheta > 0]$ или были параллельны $[\vartheta = 0]$.

Выраженіе XLV $b$) обнаруживаетъ также, что условіе перпендикулярности двухъ прямыхъ выражается уравненіемъ:

$$2(A_1B_2+B_1A_2)-C_1C_2 = 0. \qquad \text{XLVI}$$

Замѣтимъ, что при наличности этого уравненія неравенство XLIV $a$) удовлетворяется само собой. Слѣдовательно уравненіе XLVI выражаетъ условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы двѣ прямыя, пересѣкаясь, составляли прямой уголъ.

Въ непосредственной связи съ установленными соотношеніями находится рѣшеніе слѣдующей задачи: найти уравненіе прямой, перпендикулярной къ двумъ даннымъ прямымъ.

*В. Каганъ* (Спб.).

*(Продолженіе слѣдуетъ).*

# ОПРЕДѢЛЕНІЕ МАССЪ И СИЛЪ.

## МЕТОДЪ VASCHY.

(Nouvelles annales de mathématiques, 1, 1895).

### I.

Въ современномъ обученіи раціональной механикѣ динамику основываютъ на слѣдующихъ принципахъ:

1) принципъ инерціи;

2) принципъ независимости пріобрѣтеннаго движенія и одновременныхъ дѣйствій силъ;

3) принципъ равенства дѣйствія и противодѣйствія.

Изложенію этихъ принциповъ не предшествуетъ никакое точное опредѣленіе силы. Въ дѣйствительности, эти самые принципы, переведенные въ математическую форму, служатъ ей безъ условія опредѣленіемъ.

Этотъ способъ вводить понятіе силы *a priori* намъ представляется опаснымъ, такъ какъ можетъ внушить ученикамъ идею, что то, что опредѣляется, есть дѣйствительная причина движенія, тогда какъ изученіе этой причины не входитъ въ задачу раціональной механики. Еще бо́льшимъ неудобствомъ является пробѣлъ, существующій въ лучшихъ руководствахъ, и который мы постараемся выяснить.

Все то, что выводится изъ двухъ первыхъ принциповъ, резюмируется въ опредѣленіи силы $f$, которая сообщаетъ ускореніе $w$ матеріальной точкѣ A, *всегда одной и той же*; имѣется, по величинѣ и направленію, равенство

$$\overline{f} = m\overline{w},$$

коэффиціентъ $m$ выбранъ произвольно разъ навсегда. Чтобы опредѣлить силу $\overline{f_1}$, которая сообщаетъ ускореніе $\overline{w_1}$ другой точкѣ $A_1$, пишутъ точно такъ же

$$\overline{f_1} = m_1\overline{w_1};$$

$m_1$ означаетъ новый коэффиціентъ, столь же произвольный, какъ и $m$. Такъ что, принимая во вниманіе только два первые принципа, при произвольныхъ коэффиціентахъ $m$ и $m_1$ отношеніе двухъ предыдущихъ силъ $f$ и $f_1$ не имѣетъ никакого смысла.

Чтобы опредѣлить при помощи формулы

$$\frac{f}{f_1} = \frac{m}{m_1}\frac{w}{w_1}$$

отношеніе массъ $m$ и $m_1$ точекъ A и $A_1$, какъ это дѣлается обыкновенно, необходимо было бы поэтому предварительно опредѣлить отношеніе двухъ силъ $f$ и $f_1$, приложенныхъ къ двумъ различнымъ матеріальнымъ точкамъ, съ такою же точностью, какъ это было сдѣлано при опредѣленіи двухъ силъ, приложенныхъ къ одной и той же точкѣ. *Но* *этого то и не дѣлается;* предполагаютъ безъ малѣйшаго намека, безъ всякаго объясненія, что отношеніе силъ $f$ и $f_1$ хорошо опредѣлено само по себѣ, чего, понятно, недостаточно.

Правда, этотъ пробѣлъ пополняется впослѣдствіи при изученіи системы матеріальныхъ точекъ тѣмъ, что вводится принципъ равенства дѣйствія и противодѣйствія. Тѣмъ не менѣе онъ существуетъ въ началѣ, при опредѣленіи силъ и массъ, и, чтобы устранить этотъ пробѣлъ, слѣдуетъ измѣнить изложеніе принциповъ динамики.

Мы предполагаемъ показать, что было бы болѣе естественно начинать динамику съ опредѣленія понятія массы, тѣмъ болѣе что это понятіе составляется очень ясно при помощи опыта. Опредѣленіе затѣмъ силы не представитъ никакого затрудненія.

## II. Законъ Ньютона.

Напомнимъ прежде всего результаты болѣе подробнаго, чѣмъ это дѣлается обыкновенно, изученія кинематики и ея приложеній. Извѣстно, какъ Ньютонъ вывелъ изъ приближенныхъ законовъ Кеплера то слѣдствіе, что ускореніе $w$ планеты направлено къ центру солнца и обратно пропорціонально квадрату ея разстоянія $r$ отъ этого центра:

$$w = \frac{M}{r^2}.$$

Постоянная M имѣетъ одну и ту же величину для всѣхъ планетъ.

Приписавъ это дѣйствіе присутствію солнца, Ньютонъ перешелъ къ обобщенію этого закона и къ допущенію, что присутствіе каждой планеты $P_1$ имѣетъ своимъ дѣйствіемъ сообщеніе ускоренія другой какой нибудь планетѣ $P_2$ по составляющей $w_{21}$, направленной отъ $P_2$ къ $P_1$ и, имѣющаго величину, равную $\frac{m_1}{r_{12}^2}$; гдѣ $r_{12}$ означаетъ разстояніе отъ $P_2$ до $P_1$, а $m_1$—коэффиціентъ, который зависитъ отъ вліяющей планеты $P_1$, но не отъ той планеты $P_2$, на которую она дѣйствуетъ. По этой же самой причинѣ $P_1$ должно принимать подъ вліяніемъ $P_2$ ускореніе $w_{12}$, противоположное предыдущему и равное $\frac{m_2}{r_{12}^2}$.

Этотъ законъ повергнутъ былъ множеству опытныхъ провѣрокъ, состоявшихъ въ сравненіи результатовъ теоріи, основанной на этомъ законѣ, съ наблюденіями движенія звѣздъ, и потому его можно разсматривать, какъ вполнѣ установленный.

Изъ формулъ для $w_{12}$ и $w_{21}$ выводится,

$$m_1 w_{12} = m_2 w_{21} = \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2},$$

или лучше, принимая во вниманіе противоположность направленій двухъ ускореній и обозначая черезъ $\overline{w}$ ускореніе, разсматриваемое какъ векторъ:

$$m_1 \overline{w}_{12} + m_2 \overline{w}_{21} = 0.$$

Этотъ результатъ, независимый отъ закона обратной пропорціональности квадрату разстояній, можно выразить такъ: „Ускореніе планеты $P_1$ подъ дѣйствіемъ другой планеты $P_2$ и ускореніе $P_2$ подъ дѣйствіемъ $P_1$ направлены по одной и той же прямой, но въ противоположныя стороны, кромѣ того они имѣютъ между собою постоянное отношеніе $\frac{m_2}{m_1}$, которое представляетъ обратное отношеніе коэффиціентовъ вліянія $P_1$ и $P_2$“.

Этотъ астрономическій законъ былъ распространенъ Ньютономъ на взаимное дѣйствіе двухъ какихъ бы то ни было тѣлъ, дѣйствующихъ одно на другое либо на разстояніи (случай двухъ свѣтилъ), либо при прикосновеніи (случай двухъ тѣлъ, соединенныхъ одно съ другимъ, случай двухъ тѣлъ, которыя сталкиваются).

Не было еще случая, гдѣ бы онъ былъ найденъ ошибочнымъ; онъ является абсолютно строгимъ.

Разъ эти результаты усвоены, чтобы перейти въ область динамики, достаточно будетъ изложить принципъ и опредѣленія слѣдующимъ образомъ.

## III. Основной принципъ и опредѣленія динамики.

Допускаютъ, какъ основной принципъ динамики, законъ Ньютона, который въ случаѣ одной пары изъ двухъ матеріальныхъ точекъ выражается слѣдующимъ образомъ: „Если матеріальная точка $A_1$ пріобрѣтаетъ подъ дѣйствіемъ другой матеріальной точки $A_2$ ускореніе $w_{12}$, взаимно $A_2$ пріобрѣтаетъ подъ дѣйствіемъ $A_1$ ускореніе $w_{21}$; эти два ускоренія прямо противоположны, идутъ по одной и той же прямой (соединяющей $A_1$ и $A_2$) и соединены соотношеніемъ

$$m_1 \overline{w}_{12} + m_2 \overline{w}_{21} = 0, \tag{1}$$

гдѣ $m_1$ и $m_2$ означаютъ два коэффиціента вліянія, соотвѣтственно свойственныхъ точкамъ $A_1$ и $A_2$.

*Опредѣленіе массъ.* Такимъ образомъ различныя матеріальныя точки $A_1$, $A_2$, $A_3$..., имѣютъ каждая собственный коэффиціентъ $m_1$, $m_2$, $m_3$..., отношеніе которыхъ, попарно взятыхъ, совершенно опредѣленно, благодаря этому закону; одинъ же изъ нихъ, $m_1$ напримѣръ, можетъ быть выбранъ произвольно.

Этимъ коэффиціентамъ даютъ названіе *массъ.* Массы различныхъ матеріальныхъ точекъ суть слѣдовательно ихъ коэффиціенты соотвѣтственнаго вліянія съ точки зрѣнія дѣйствій, оказываемыхъ ими на другія матеріальныя точки.

Прямое приложеніе принципа Ньютона, выраженное формулой (1), не доставляетъ практическаго способа сравненія массъ между собою (исключая астрономію). Но этотъ принципъ, какъ основаніе теоріи системы матеріальныхъ точекъ, подверженныхъ сцѣпленію, именно статики и динамики твердыхъ тѣлъ, позволяетъ установить свойства инструментовъ, предназначенныхъ къ измѣренію вѣса или массы (рычагъ и пр.).

*Опредѣленіе силъ.*—Опредѣляемъ теперь величину и направленіе силы $\bar{f}$, которая сообщаетъ ускореніе $\bar{w}$ матеріальной точкѣ A массы $m$, формулою

$$\bar{f} = m\bar{w}.$$

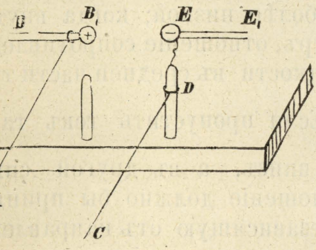
Тогда можно будетъ выразить соотношеніе (1) словами: „$m_1\bar{w}_{12} = \bar{f}_{12}$, сила дѣйствія матеріальной точки $A_2$ на точку $A_1$ равна и прямо противоположна $m_2\bar{w}_{21} = \bar{f}_{21}$, силѣ дѣйствія точки $A_1$ на точку $A_2$“, что представляетъ обыкновенное выраженіе принципа равенства дѣйствія и противодѣйствія.

*И. Пламеневскій* (Тифлисъ).

# ДВА ОПЫТА СЪ МАШИНОЙ ГОЛЬЦА.

*Опытъ первый.* Если въ машинѣ Гольца снять лейденскія банки, поддерживающія ея кондукторы, и затѣмъ, прикрывъ шарики этихъ кондукторовъ сверху стекляною пластинкою, насыпать на стекло надъ шариками небольшое количество ликоподія, то, приводя машину въ дѣйствіе, мы увидимъ, что порошокъ ликоподія образуетъ вблизи шариковъ кисти, напоминающія собою тѣ кисти, которыя образуются изъ желѣзныхъ опилокъ вблизи полюсовъ магнита. Частицы ликоподія, перенося при этомъ отъ одного шарика къ другому, располагаются на стеклѣ по направленію силовыхъ линій электрическаго поля, представляя картину, подобную магнитному спектру. Чтобы порошокъ не подвергался вліянію подвижнаго круга машины Гольца, я стеклянную пластинку замѣнялъ въ послѣднее время ящикомъ со стеклянными стѣнками и дномъ. Освѣщая приборъ снизу, можно проложить этотъ „*электрическій спектръ*“ на экранъ.

*Опытъ второй.* Если, не снимая лейденскихъ банокъ въ машинѣ Гольца, мы, раздвинувъ шарики кондукторовъ на такое разстояніе, чтобы между ними не могла проскакивать электрическая искра, прикрѣпимъ къ одному изъ кондукторовъ $BB_1$, (фиг. 30), длинную проволоку (сажени въ 3—4), натянемъ ее горизонтально и другой свободный ея конецъ закрѣпимъ наглухо у какого нибудь изолятора, то, натягивая другую проволоку параллельно первой, но прикрѣпляя ее однимъ концомъ уже не ко второму кондуктору $EE_1$, а къ тому металлическому столбику D, который подъ нимъ находится и приподымая верхнюю подвижную часть послѣдняго на такую высоту, чтобы между D и E могла проскакивать искра, мы замѣтимъ, если будемъ опытъ производить въ темнотѣ, что обѣ проволоки $AB_1$ и CD свѣтятся на всемъ своемъ протяженіи. Конецъ C второй проволоки прикрѣпляется къ изолятору, какъ и конецъ A первой проволоки. При этомъ необходимо, чтобы оба конца каждой про-



Фиг. 30.

волоки не оканчивались остріемъ, такъ какъ иначе зарядъ съ острія будетъ уходить въ воздухъ; для этой цѣли удобно на концахъ проволокъ дѣлать петли, съ помощью которыхъ и надѣвать ихъ на кондукторъ $BB_1$ и столбикъ D. Вмѣстѣ съ тѣмъ свѣченіе бываетъ особенно сильно только тогда, когда перерывъ въ цѣпи между точками D и E довольно значительный, такъ что искра въ этомъ мѣстѣ проскакиваетъ съ рѣзкимъ звукомъ. Проволока $AB_1$ представляется въ видѣ *толстаго* свѣтящагося шнура, причемъ лучи свѣта выходятъ изъ каждой ея точки и располагаются въ плоскости, перпендикулярной къ ея длинѣ. Другая проволока представляется въ видѣ *тонкаго* свѣтящагося шнурка, причемъ рядъ свѣтлыхъ точекъ движется вдоль проволоки, вспыхивая, изчезая и вновь появляясь. Разстояніе между проволоками нужно оставлять около двухъ дециметровъ. Чѣмъ проволока (голая) толще и чѣмъ емкость кондукторовъ больше, тѣмъ явленіе эффектнѣе. Опытъ производился мною съ проволоками (голыми) изъ мѣди и желѣза.

*Н. Леоновъ* (Москва).

# НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

**Термоэлектричество.** Въ Comptes rendus des séances de l'Academie de sciences (T. CXVI—CXVII) помѣщены интересныя изслѣдованія по термоэлектричеству. H. Bagard изслѣдовалъ термоэлектрическія свойства электролитовъ, составивши термоэлектрическую пару изъ двухъ растворовъ сѣрнокислаго цинка различной концентраціи, раздѣленныхъ перегородкой. Оказалось, что электровозбудительная сила возрастаетъ вмѣстѣ съ разностью въ степени концентраціи; законъ промежуточныхъ температуръ и законъ промежуточныхъ тѣлъ оказываются справедливыми и въ этомъ случаѣ. Въ подобныхъ растворахъ наблюдается также электрическій переносъ теплоты (явленіе Томсона). Послѣднее Bagard обнаружилъ слѣдующимъ образомъ: двѣ одинаковой длины цилиндрическихъ трубки съ испытуемой жидкостью помѣщаются рядомъ въ вертикальномъ положеніи; верхніе концы поддерживаются при одной болѣе высокой температурѣ, нижніе—при другой болѣе низкой; когда внутри жидкости установится равновѣсіе температуръ, отношеніе сопротивленій двухъ опредѣленной величины столбовъ жидкости въ средней части трубокъ приметъ опредѣленную величину $\frac{R_1}{R_2}$. Если пропустить токъ такъ, чтобы въ одной трубкѣ онъ шелъ сверху внизъ, а въ другой снизу вверхъ, то жидкость нагрѣется и то же отношеніе должно бы принять нѣкоторую другую постоянную величину, независящую отъ направленія тока, такъ какъ нагрѣваніе по закону Джоуля пропорціонально квадрату силы тока; но опытъ показываетъ, что отношеніе $\frac{R_1}{R_2}$ измѣняется вмѣстѣ съ направленіемъ тока и что, слѣд., существуетъ переносъ тепла въ одной трубкѣ внизъ, въ другой вверхъ, при перемѣнѣ же направленія тока наоборотъ.

Houllevigue замѣтилъ переносъ теплоты токомъ въ намагниченномъ желѣзномъ стержнѣ; изъ своихъ опытовъ онъ заключилъ, что существуетъ разность потенціаловъ между двумя неодинаково намагниченными сѣченіями.

Chassagny составилъ цѣпь изъ двухъ паръ Fe|Cu, расположенныхъ такъ, что онѣ даютъ токъ въ противоположномъ направленіи; желѣзо одной изъ паръ было заключено въ бобину; при пропусканіи тока черезъ бобину въ термоэлектрической цѣпи появлялся токъ. Результаты опытовъ слѣдующіе: 1) продольное намагничиваніе желѣза увеличиваетъ электровозбудительную силу пары Fe|Cu, 2) направленіе намагничиванія не играетъ роли и 3) при увеличеніи напряженности намагничиванія электровозбудительная сила достигаетъ нѣкотораго maximum'а.

Изслѣдуя термоэлектрическія свойства металловъ, Huey Steele нашелъ, что электровозбудительная сила всегда (между $0^0$ и $100^0$C) подчиняется уравненію

$$e = a(T-T_1) + b(T-T_1)^2,$$

гдѣ T и $T_1$ температуры спаевъ, $a$ и $b$ — постоянныя. Для термоэлектрической силы $\left(\frac{de}{dt}\right)$ по отношенію къ свинцу имъ получены такія формулы:

| | |
|---|---|
| Алюминій | $-52,7 + 0,21\,t$ |
| Олово | $-11,1 + 0,04\,t$ |
| Цинкъ | $80 + 1,19\,t$ |
| Таллій | $214 - 0,77\,t$ |
| Серебро | $250 + 1,15\,t$ |
| Золото | $254 + 0,31\,t$ |
| Мѣдь | $276 + 1,22\,t$ |
| Кадмій | $285 + 3,89\,t$ |
| Сурьма | $3558 + 14,5\,t$ (Journal de Physique). |

*К. С.* (Умань).

**Вераскопъ.** Фотографическія изображенія предметовъ страдаютъ нѣкоторыми недостатками, въ числѣ которыхъ главный—сильное преувеличеніе перспективы. Поэтому при разсматриваніи такихъ изображеній мы не получаемъ того впечатлѣнія, какъ если бъ смотрѣли на тѣ же предметы невооруженнымъ глазомъ. Если при помощи двояковыпуклаго стекла съ сильной сферической аберраціей проектировать квадратъ, то получится фигура съ выпуклыми сторонами; если же эту фигуру освѣтить и, не измѣняя относительнаго положенія ея и стекла, снова ее проектировать при помощи того же стекла, то въ полученномъ изображеніи мы снова будемъ имѣть предъ собою совершенно правильный квадратъ, потому что лучь возвращается изъ B въ A тѣмъ же путемъ, какимъ онъ шелъ изъ A въ B. Вообще, каковы бы ни были деформаціи въ фотографическомъ изображеніи, зависящія отъ недостатковъ стекла, онѣ исчезнутъ, если полученное изображеніе разсматривать черезъ то же самое стекло. Для этой цѣли Jules Richard устроилъ „вераскопъ“— приборъ, представляющій соединеніе стереоскопа съ камерой обскурой; къ той части стереоскопа, гдѣ помѣщается картина, можно привинчивать ящикъ съ свѣточувствительными пластинками, которыя можно быстро мѣнять, если желательно получить моментальныя фотографіи; при приборѣ, среди разныхъ другихъ приспособленій, имѣется маленькая трубка, играющая почти ту же роль, что искатель въ телескопахъ. Когда получено на стеклѣ два негатива съ даннаго вида, ихъ проявляютъ, стекло разрѣзаютъ, изображенія мѣняютъ мѣстами и тогда получаютъ позитивъ тоже на стеклѣ. Для разсматриванія позитивъ ставится въ приборъ на мѣсто негатива (магазинъ съ пластинками отвинчивается). Такъ какъ при изготовленіи позитива изображенія переставлены, то мы увидимъ ихъ такими, какими ихъ видѣлъ бы съ того же мѣста правый и лѣвый глазъ непосредственно.

Всѣ части вераскопа въ случаѣ надобности могутъ быть замѣнены новыми, такъ какъ всѣ вераскопы одинаковыхъ размѣровъ. Полный вѣсъ прибора (съ дюжиной пластинокъ) 980 g. (Bul. de la Soc. Astr. и Les sciences popul.).

*К. С.* (Умань).

**Платиновый аккумуляторъ.** L. Cailletet и E. Collardeau изслѣдовали вольтаметръ съ платиновыми электродами какъ аккумуляторъ. Съ цѣлью увеличить способность электродовъ сгущать продукты электролиза они придали имъ форму шелковыхъ мѣшковъ, наполненныхъ губчатой платиной; разрядной токъ при этомъ получается гораздо сильнѣе и продолжительнѣе, чѣмъ при пластинчатыхъ электродахъ. Еще лучше получаются результаты, если такой аккумуляторъ подвергнуть сильному давленію (до 600 атм.). Емкость такого аккумулятора при давленіи въ 580 атм. = 56 амперочасовъ на 1 килогр. губчатой платины, разрядной же токъ доходитъ до 100 амперовъ на кил. Такъ какъ выдѣленіе газовъ идетъ не одинаково на обоихъ электродахъ, то экономичнѣе всего, какъ указалъ опытъ, дѣлать катодъ втрое болѣе анода. Такой аккумуляторъ возвращаетъ 95—98% количества электричества, затраченнаго на зарядъ.

Подвергнувши другіе платиновые металлы подобному же изслѣдованію, они получили тѣ же результаты для иридія; наилучшіе результаты далъ губчатый палладій даже при атмосферномъ давленіи; при сильныхъ давленіяхъ емкость аккумулятора въ 3—4 раза больше, чѣмъ для губчатой платины ceteris paribus, такъ, напр., при давленіи въ 600 атм. емкость достигаетъ 176 амперочасовъ на килогр. губчатаго палладія. (Journal de Physique. 1895. № 2).

*К. С.* (Умань).

# ЗАДАЧИ.

**№ 176.** Показать, какимъ образомъ изъ пропорціи

$$a:b=c:d$$

выводится пропорція

$$\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{c+d}+\sqrt{c-d}}=\frac{a\sqrt{c+d}}{c\sqrt{a+b}}.$$

*А. Бачинскій* (Холмъ).

**№ 177.** Показать, что изъ всѣхъ треугольныхъ чиселъ только 1 и 6 по возвышеніи въ квадратъ даютъ также треугольное число.

*А. Бачинскій* (Холмъ).

**№ 178.** Обозначивъ черезъ $x$ искомое число, составить одно уравненіе съ одной неизвѣстной для рѣшенія слѣдующей задачи (изъ „Алгебры“ Давидова, стр. 167, № 10):

„Двузначное число при раздѣленіи на сумму его цифръ даетъ частное 4; если же число, составленное изъ тѣхъ же цифръ, взятыхъ только въ обратномъ порядкѣ, раздѣлить на разность цифръ единицъ и десятковъ, увеличенную на 2, то частное будетъ 14. Опредѣлить это число“.

*Н. Николаевъ* (Пенза).

**№ 179.** Въ пятомъ отдѣлѣ „Геометрическихъ теоремъ и задачъ“ Е. Пржевальскаго помѣщена задача (III изд. 1876 г. № 196):

„Построить треугольникъ по радіусу $r$ вписаннаго круга и радіусу $R$ внѣвписаннаго круга, касающагося одного изъ боковъ, и высотѣ относительно этого же бока“.

Показать, что задача эта либо неопредѣленная, либо вовсе не имѣетъ рѣшеній.

*И. Ок—чъ* (с. Голле).

**№ 180.** Показать, что если стороны треугольника составляютъ ариѳметическую прогрессію, то разстояніе центра тяжести треугольника отъ центра круга вписаннаго равно третьей части разности прогрессіи.

(Заимств.). *Г. Легошинъ* (с. Знаменка).

**№ 181.** Въ треугольникѣ $ABC$ проведены медіаны, пересѣкающіяся въ точкѣ $G$, и углы $GAB$, $GBC$, $GCA$ обозначены черезъ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

Показать, что

$$\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\gamma=3(\operatorname{cotg}A+\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}C)=$$
$$=\operatorname{cotg}(A-\alpha)+\operatorname{cotg}(B-\beta)+\operatorname{cotg}(C-\gamma).$$

*П. Свѣшниковъ* (Троицкъ).

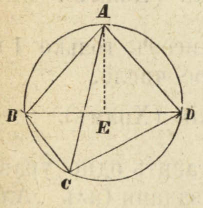
# РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

**№ 422** (2 сер.). Опредѣлить площадь вписаннаго въ кругъ четыреугольника $ABCD$, если его діагональ $AC=a$, сумма сторонъ $CD+CB=s$ и стороны $AD$ и $AB$ равны между собою.

Называя радіусъ описаннаго около четыреугольника $ABCD$ круга черезъ $r$, получимъ (фиг. 31)

$$\text{пл. } ABCD = \text{пл. } ABC + \text{пл. } ADC = \frac{AB.BC.AC}{4r} + \frac{AD.DC.AC}{4r} =$$

$$= \frac{AB.a.s}{4r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$



Фиг. 31.

По теоремѣ Птоломея имѣемъ

$$a.BD = s.AB, \text{ откуда } BD = \frac{s.AB}{a}.$$

Опустивъ изъ вершины $A$ перпендикуляръ $AE$ на $BD$, изъ треугольниковъ $ABD$ и $ABE$ получимъ

$$r = \frac{AB.AD}{2AE} = \frac{\overline{AB}^2}{2AE}; AE = \sqrt{\overline{AB}^2 - \frac{\overline{BD}^2}{4}} = \frac{AB}{2a}\sqrt{4a^2-s^2},$$

откуда

$$r = \frac{a.AB}{\sqrt{4a^2-s^2}}.$$

Подстанавливая это выраженіе вмѣсто $r$ въ равенство (1), получимъ

$$\text{пл. } ABCD = \frac{s}{4}\sqrt{4a^2-s^2}.$$

*К. Щиголевъ* (Курскъ); *А. П.* (Пенза); *П. Ивановъ* (Одесса).

**ПОЛУЧЕНЫ РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ** отъ слѣдующихъ лицъ: *В. Ахматова* (Тула) 479 (2 сер.), 63, 73, 120, 137, 142, 146, 150 (3 сер.); *Э. Заторскаго* (Могилевъ губ.) 126, 128, 130, 131, 135, 140, 152, 153, 156, 157 (3 сер.); *И. Барковскаго* (Могилевъ губ.) 110, 130, 135, 140, 142, 143, 147, 152, 153, 156 (3 сер.); *П. Р.* (Ромны) 77, 83, 92, 93, 120, 123, 125, 127 (3 сер.); *Б. Гальперна* (Пинскъ) 127, 135, 136 (3 сер.); *Г. Левикова* (Тамбовъ) 147, 155 (3 сер.); *П. Хлѣбникова* (Тула) 144, 145 (3 сер.); *А. Мошковскаго* (Варшава) 125, 127 (3 сер.); *А. Шантыра* (Спб.) 146, 147, 151, 152, 153, 155, 156, 157 (3 сер.); *Л. Беркмана* (Бѣлостокъ) 85, 98, 120, 138, 139, 140, 143 (3 сер.); *М. фонъ Циглера* (Спб.) 153, 157 (3 сер.); *Я. Соколова* (Курскъ) 148, 151, 155, 157 (3 сер.); *А. Бачинскаго* (Холмъ) 87, 121, 124, 142, 147, 152, 153, 156, 157, 161 (3 сер.) и 12 (М. В.); *В. Я—ъ* (Ив.-Вознесенскъ) 98 (3 сер.); *Н. Кузнецова* (Ив.-Вознесенскъ); 120, 123, 125, 126, 127, 128, 135, 140, 147 (3 сер.); *V. N.* (Ив.-Вознесенскъ) 120, 123, 127, 147 (3 сер.); $\sqrt{-1}$ (Ив.-Вознесенскъ) 123 (3 сер.); *учениковъ Кіево-Печерской гимназіи Л.* и *Р.* 102, 104, 108, 112, 118, 126, 131, 136, 138, 139, 140, 142, 143, 147 (3 сер.); *L.* (Тамбовъ) 92, 127, 153, 156, 157, 167, 169 (3 сер.); *Д. Сканави* (Ростовъ на Дону) 98, 102, 155 (3 сер.); *А. Дмитріевскаго* (Цивильскъ); 96 (2 сер.); 100, 135, 140, 151, 157 (3 сер.) и 11 (М. В.); *Ѳ. Александрова* (Цивильскъ) 125 (3 сер.); *Г. Сѣдова* (Цивильскъ) 140 (3 сер.); *А. Сѣрянина* (Цивильскъ) 140 (3 сер.); *П. Бѣлова* (с. Знаменка); 157, 165, 167, 168 (3 сер.); *Г. Легошина* (с. Знаменка) 131, 155 (3 сер.), 508 (2 сер.); *Я. Полушкина* (с. Знаменка) 534 (1 сер.), 533, 548, 556, 591 (2 сер.); 152, 156, 161, 162 (3 сер.); *А Махова* (Ливны) 123, 125 (3 сер.).

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса, 15-го Апрѣля 1895 г.

„Центральная типо-литографія“, уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. Болгарова.

къ землѣ колебанія съ періодомъ въ 69 ч., что и должно быть, такъ какъ при этой гипотезѣ оба тѣла должны вращаться около общаго центра тяжести и, слѣд., Альголь то движется по направленію къ намъ, то въ противоположную сторону, абсолютное же движеніе его то ускоряется, то замедляется.

При сравненіи промежутковъ между наблюдавшимися эпохами minimum'а блеска за большой промежутокъ времени (болѣе столѣтія) Chandler замѣтилъ, что эти эпохи то запаздываютъ, то наступаютъ раньше вычисленныхъ, причемъ уклоненія въ ту и другую сторону доходятъ до 3 часовъ; періодъ этихъ измѣненій = 140 годамъ. Для объясненія этихъ явленія Chandler предположилъ, что система Альголя сама вращается около нѣкотораго центра въ теченіе 140 л., радіусъ же этой орбиты равенъ разстоянію, проходимому свѣтомъ въ 3 часа. Находя такое движеніе маловѣроятнымъ, тѣмъ болѣе, что то же самое пришлось бы допустить для подобныхъ же звѣздъ *и* Цефея и *и* Офіуха, Tisserand предлагаетъ свою гипотезу: если предположить, что (въ 69 ч.) спутникъ описываетъ эллиптическую орбиту съ эксцентрицитотомъ = $^1/_8$ и что сжатіе Альголя = $^1/_{200}$, то большая ось эллипса должна вращаться около Альголя и между эпохами послѣдовательныхъ minimum'овъ должна получаться разность съ вышеуказаннымъ періодомъ (140 л.) = періоду вращенія большой оси. Не заключая въ себѣ ничего маловѣроятнаго, эта гипотеза по мнѣнію Tisserand'а можетъ быть принята окончательно только тогда, когда болѣе обильныя спектральныя изслѣдованія позволятъ рѣшить, близокъ ли экцентрицитетъ къ $^1/_8$ и можно ли принять то направленіе большой оси орбиты, какое вычислено имъ для настоящаго времени.

**Distribution dans l'espace des petites planètes entre Mars et Jupiter.** *C. Flammarion.* Послѣ того какъ Max Wolf примѣнилъ въ 1891 г. фотографію къ изысканію малыхъ планетъ, число ихъ возрасло до 390, въ числѣ которыхъ 62 открыты при помощи фотографіи. Наиболѣе густо онѣ распредѣлены въ поясѣ между Brucia (на разстояніи отъ солнца 2,16) и Camilla (разстояніе 3,48). Этотъ поясъ въ послѣднее время расширился въ обѣ стороны: къ Марсу—открытіемъ планетъ на разстояніи 2,08 и 2,09 и къ Юпитеру—открытіемъ планетъ на разстояніи 3,90, 3,95, 3,96, 4,13, 4,26 и 4,68. Недостаточное знаніе элементовъ орбитъ многихъ астероидовъ не позволяетъ точно вычислить вліянія Юпитера на ихъ группировку, а также рѣшить вопросъ объ ихъ взаимныхъ вліяніяхъ. Приложена наглядная таблица распредѣленія астероидовъ и списокъ ихъ съ обозначеніемъ разстоянія каждой отъ солнца.

**Astronomie siderale. L'amas Messier 11 de l'Aigle.** *Leon Fenet.* Недавно появился прекрасный небесный атласъ Исаака Робертса, астронома наблюдателя и члена Лондонскаго Королевскаго общества. Среди фотографій, занимающихъ 54 таблицы, имѣется много снимковъ съ звѣздныхъ скопленій и туманностей. Fenet даетъ увеличенный снимокъ съ центральной части кучи № 11 катал. Месье; здѣсь на протяженіи 6′ находится 395 звѣздъ по большей части сложныхъ. Все скопленіе занимаетъ въ созвѣздіи Орла 50′ по прямому восхожденію и 63′ по склоненію.

**La perspective photographique et la perspective oculaire.** *Jules Richard* *).

**Nouvelles de la Science. Variétés.**

*К. С.* (Умань).

# БИБЛІОГРАФИЧЕСКІЙ ЛИСТОКЪ

## НОВѢЙШИХЪ РУССКИХЪ ИЗДАНІЙ.

*Анучинъ, Н. Н.* Руководство ариѳметики. Для среднихъ учебныхъ заведеній и городскихъ училищъ. Цѣлыя числа. Изд. В. Сельчукова. Орелъ. 1894.

*Довгирдъ, А. Ѳ.* Рѣшеніе алгебраическихъ задачъ, помѣщенныхъ въ сборникѣ для учениковъ старшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній В. Арбузова, А. Минина, В. Минина, Д. Назарова. Изд. К. Пашковскаго. Кіевъ. 1894.

---

*) См. Вераскопъ въ Научной хроникѣ этого №.

*Одинцовъ, А.* Возвышеніе чиселъ въ квадратъ и кубъ и извлеченіе изъ чиселъ квадратнаго и кубическаго корней. Изд. книжн. магазина К. Тихомирова. Москва. 1894. Ц. 30 к.

*Воиновъ, А.* Сборникъ геометрическихъ задачъ на вычисленіе, съ прибавленіемъ задачъ, рѣшаемыхъ при помощи тригонометріи. Курсъ среднихъ учебныхъ заведеній. Москва. 1895. Ц. 65 к.

*Гебель, В.* Сборникъ примѣровъ и задачъ для усвоенія метрической системы мѣръ и вѣсовъ. Изд. книжн. магазина В. Думнова. Москва. 1895. Ц. 10 к.

*Глаголевъ, А. И.* Элементарная геометрія и собраніе геометрическихъ задачъ. Изд. книжн. магазина К. Тихомирова. Москва. 1845. Ц. 1 р. 25 к.

*Кракау, Ал.* Объ электропроводности водородистаго палладія въ связи съ его упругостью диссоціаціи (Отт. изъ „Извѣстій Имп. академіи наукъ", 1894). Спб. 1894.

*Лебединцевъ, А. А.* Организація химико-аналитическихъ изслѣдованій на сельско-хозяйственной опытной станціи „Галлэ" (Изъ Записокъ Имп. Общ. Сельск. Хоз. Южн. Россіи" за 1894 г.). Одесса. 1894.

Лѣтописи Главной Физической Обсерваторіи, издаваемыя г. Вильдомъ. 1893 годъ. Часть II. Метеорологическія наблюденія по международной системѣ станцій 2 разряда въ Россіи. Спб. 1894.

*Пельхрцимъ, Ѳ.* Популярное электричество. Новыя и новѣйшія открытія въ области электротехники. Съ 18 чертежами. Перевелъ съ нѣмецкаго Г. Шавельскій. Изд. книгопр. Ф. Іогансона. Кіевъ. 1885. Ц. 25 к.

*Пильчиковъ, Н.* Изъ введенія въ курсъ механической теоріи теплоты. Основные принципы энергетики. Вступительная лекція, читанная въ Имп. Новороссійскомъ университетѣ 6 сентября 1894 года. (Отд. отт. изъ журнала „Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики"). Одесса. 1894.

*Попруженко, М.* О биномѣ Ньютона. (Отд. отт. изъ журнала „Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики"). Одесса. 1894.

*Савицкій, М. А.* Инструкція для опредѣленія склоненія магнитной стрѣлки при производствѣ инструментальной топографической съемки. Съ 9-ю политипажами въ текстѣ. Издано подъ ред. А. А. Тилло. Спб. 1894.

*Сорокинъ, Н.* Сборникъ геометрическихъ задачъ съ примѣненіемъ тригонометріи для учениковъ гимназій и реальныхъ училищъ. (Примѣнительно къ правиламъ объ испытаніяхъ учениковъ, утвержденнымъ г. Министромъ Народнаго Просвѣщенія 12-го марта 1891 года). Изд. 4-е, значичельно дополненное. Кіевъ. 1894. Ц. 50 к.

*Срезневскій, Б. И.* Метеорологія въ Россіи въ 1892 году. (Изъ „Извѣстій" Имп. русск. географ. общества). Спб.

*Титковскій, П.* О геологической фотографіи и фотограмметріи. (Значеніе фотографіи въ различныхъ отрасляхъ естествознанія. Значеніе фотографіи въ геологіи, и проч.). Кіевъ. 1894.

*Эпштейнъ.* Очеркъ физическихъ основаній электротехники въ общепонятномъ изложеніи. Шесть популярныхъ опытныхъ чтеній. Переводъ со 2-го изданія „Ueberblick über die Electrotechnik von Dr. J. Epstein". Н. С. Дрентельна. Съ 39-ю рис. въ текстѣ. Изд. Эггерсъ и К°. Спб. Ц. 1 р.

## ОТВѢТЫ РЕДАКЦІИ.

**С. Гирману** (Варшава). Будетъ напечатано.

# ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

## JOURNAL
de mathématiques élémentaires.

**1894.—№ 8.**

**Notes sur les symédianes.** Par M. *J. Dhavernas.* *Во всякомъ тр-кѣ* ABC *точка Gergonne'а есть точка Lemoine'а тр-ка* $\alpha\beta\gamma$, *вершины котораго суть точки касанія сторонъ тр-ка* ABC *съ вписаннымъ въ него кругомъ* *).

Обозначимъ черезъ I и M точки пересѣченія прямой $\beta\gamma$ съ прямыми $A\alpha$ и BC. Точки $M\beta I\gamma$ составляютъ гармоническій рядъ; слѣдов. пучокъ $\alpha(M\gamma I\beta)$ также гармоническій; поэтому $A\alpha$ есть симедіана тр-ка $\alpha\beta\gamma$; то же справедливо и для прямыхъ $B\beta$ и $C\gamma$; слѣдов. пересѣченіе этихъ прямыхъ есть точка Lemoine'а для тр-ка $\alpha\beta\gamma$.

*Общая хорда окружностей* 1) *описанной около тр-ка и* 2) *имѣющей діаметромъ отрѣзокъ между основаніями его биссектриссъ, проведенныхъ изъ одной вершины, есть симедіана тр-ка.*

Пусть $a$, $b$, $c$ суть стороны тр-ка ABC, AD и AD′ — его биссектриссы, AI — медіана стороны BC, AM — общая хорда окружностей ABC и DAD′. По теоремѣ Птоломея

$$c.MC + b.MB = AM.BC;$$

отсюда, вслѣдствіе равенства:

$$\frac{MB}{MC} = \frac{c}{b} \text{ и } BC = 2BI,$$

получаемъ пропорцію

$$\frac{MC}{AM} = \frac{BI}{AB};$$

слѣдов., тр-ки ABI и AMC подобны; отсюда слѣдуетъ, что AM есть симедіана тр-ка ABC.

Черезъ непрерывное преобразованіе (trausformation continue) 1-я теорема обобщается для круговъ внѣ-вписанныхъ въ тр-къ.

**Exercices divers.** Par M. *Boutin.* 334. Ур-нія

(1) $$2x^2 \pm 5p = k^2,$$

(2) $$3x^2 + p = k^2,$$

(3) $$3x^2 - p = k^2,$$

(4) $$3x^2 + 7p = 2y^2,$$

(5) $$22x^2 - 23p = y^2,$$

не рѣшаются въ цѣлыхъ числахъ, если $p$ соотвѣтственно удовлетворяетъ условіямъ:

---

*) Точкой Gergonne'а называется точка пересѣченія прямыхъ $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$; точкой Lemoine'а называется точка пересѣченія симедіанъ тр-ка.

(1) Если $p$ число простое съ 5 или содержитъ 5 въ четной степени;

(2) Если $p$ содержитъ 3 въ нечетной степени или имѣетъ видъ $3m+1$;

(3) Если $p$ имѣетъ видъ $3m-1$;

(4) Если $p$ не содержитъ множителя 7 или содержитъ его въ четной степени;

(5) Если $p$ не содержитъ множителя 23 или содержитъ его въ четной степени.

335. Данъ рядъ:

$$u_0 = 1,\ u_1 = z+1,\ \ldots\ldots,\ u_n = (z+1)u_{n-1} + u_{n-2};$$

опредѣлить $u_n$ въ ф-ціи $z$.

*Рѣш.* $$u_n = z^n + nz^{n-1} + \frac{(n-1)(n+2)}{1.2} z^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)(n+6)}{1.2.3} z^{n-3} + \ldots$$

Ф-ція $u_n$ удовлетворяетъ дифф-ому ур-нію

$$(z^2+2z+5)\frac{d^2u_n}{dz^2} + 3(z+1)\frac{du_n}{dz} - n(n+2)u_n = 0.$$

Коэффиціентъ $A_p$ при $z^{n-p}$ опредѣляется ф-лой

$$p(p-2n-2)A_p + (n-p+1)(2n-2p+3)A_{p-1} + 5(n-p+1)(n-p+2)A_{p-2} = 0.$$

336. Данъ рядъ:

$$X_0 = 1,\ X_1 = x+1,\ X_2 = x^2+3x+1,\ \ldots\ldots,\ X_n = (x+2)X_{n-1} - X_{n-2};$$

опредѣлить $X_n$ въ ф-ціи $x$.

*Рѣш.* $$X_n = x^n + (2n-1)x^{n-1} + (n-1)(2n-3)x^{n-2} + (n-2)\frac{(2n-3)(2n-5)}{1.3}x^{n-3} + \ldots$$
$$+ \ldots + \frac{n(n+1)}{2}x + 1.$$

Ф-ція $X_n$ удовлетворяетъ дифф-му ур-нію:

$$(x^2+4x)\frac{d^2X_n}{dx^2} + 2(x+1)\frac{dX_n}{dx} - n(n+1)X_n = 0.$$

Коэффиціентъ $A_p$ при $x^{n-p}$ опредѣляется ф-лой:

$$A_p = \frac{2(n-p+1)(2n-2p+1)}{p(2n-p+1)} \cdot A_{p-1}.$$

**Bibliographie**. Cours de Géométrie. Par *M. H. Andoyer*.

**Baccalauréats.**

**Questions résolues.** №№ 525, 517, 518, 530.

**Questions proposées.** №№ 564—566.

*Д. Е.*

Обложка
ищется

Обложка
пщется