Обложка
ищется

Обложка
пщется

XVIII Сем. 30-го мая 1895 г. № 12.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
И
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 216.

АРГОНЪ.

(Окончаніе).*

V.

Выводы. — Предположенія относительно химической природы аргона.—Такимъ образомъ несомнѣнно установлено, что въ земной атмосферѣ и въ минералѣ клевитѣ содержится газообразное вещество, остававшееся до сихъ поръ неизвѣстнымъ. Вещество это въ 20 разъ плотнѣе водорода, сгущается при — 120° и 50,6 атмосферы въ безцвѣтную жидкость, кипящую при —187° и замерзающую при — 189,6°. Оно растворяется въ водѣ легче азота, имѣетъ характерный спектръ, а въ химическомъ отношеніи является крайне недѣятельнымъ, хотя при извѣстныхъ условіяхъ способно вступать въ химическія соединенія.

Первый вопросъ, который долженъ быть рѣшенъ относительно новаго вещества, есть вопросъ о его химической индивидуальности. Представляетъ ли аргонъ химическій индивидъ или же онъ есть смѣсь нѣсколькихъ химическихъ индивидовъ, простыхъ или сложныхъ?

Этотъ вопросъ, какъ и всѣ прочіе вопросы относительно химической природы аргона, не можетъ быть рѣшенъ на основаніи имѣющихся фактовъ. Въ настоящее время можно только строить гипотезы, ожидая фактовъ. Имѣющіяся данныя говорятъ лишь *въ пользу* того либо другого предположенія, но не рѣшаютъ вопроса окончательно. Для постав-

*) См. „В. О. Ф.“ №№ 211, 213 и 215.

леннаго нами вопроса особенное значеніе имѣютъ наблюденія Ольшевскаго съ одной стороны и Крукса съ другой. По опытамъ Ольшевскаго аргонъ имѣетъ постоянную критическую температуру, постоянныя точки кипѣнія и замерзанія, а это говоритъ въ пользу того, что аргонъ есть химическій индивидуумъ. Дѣйствительно, если предположимъ, что аргонъ есть смѣсь двухъ элементовъ, то весьма вѣроятно, что одинъ изъ этихъ элементовъ помѣщается въ періодической системѣ между хлоромъ (35,5) и каліемъ (39), а другой между бромомъ (80) и рубидіемъ (85,5). Тогда атомный вѣсъ перваго элемента долженъ быть приблизительно равенъ 37, а второго 82. Пусть въ единицѣ вѣса аргона содержится x по вѣсу перваго элемента, тогда

$$37x + (1-x)82 = 40,$$

откуда $x = {}^{14}/_{15}$, т. е. 93,3 %. Но совершенно невѣроятно, чтобы 6,7 % болѣе тяжелаго элемента ускользнули отъ вниманія Ольшевскаго.

Опираясь на свои наблюденія надъ спектрами аргона, Crookes повидимому склоняется къ допущенію, что аргонъ представляетъ собою смѣсь по меньшей мѣрѣ двухъ элементовъ. Но дѣло въ томъ, что фактъ существованія двухъ различныхъ при разныхъ условіяхъ спектровъ аргона не можетъ служить указаніемъ на присутствіе въ аргонѣ двухъ различныхъ веществъ. Во время преній, которыя происходили послѣ чтенія мемуара Ramsay'я и Rayleigh'я въ Лондонскомъ Королевскомъ Обществѣ 31-го января, д-ръ Armstrong, предсѣдатель Химическаго Общества, высказался по этому поводу слѣдующимъ образомъ: „г. Crookes „очевидно въ нерѣшимости относительно существованія двухъ элемен-„товъ (въ аргонѣ) и такое же впечатлѣніе произвело изложеніе проф. „Ramsay'я. Если считаютъ доказаннымъ спектроскопически, что мы „имѣемъ дѣло съ двумя газами, то нѣтъ основанія не вывести подоб-„наго же заключенія для водорода и кислорода. Кислородъ имѣетъ, я „полагаю, три или четыре спектра, такъ что спектроскопическое дока-„зательство, хотя оно и представляетъ извѣстный интересъ, не можетъ „подтвердить подобнаго вывода“.

Итакъ, имѣющіяся данныя свидѣтельствуютъ скорѣе въ пользу того, что аргонъ есть не смѣсь, а химическій индивидъ. Если принять это, то на очередь является второй вопросъ: есть ли аргонъ новый химическій элементъ, или сложное вещество, состоящее изъ извѣстныхъ намъ уже элементовъ?

Для рѣшенія этого вопроса данныхъ еще меньше, чѣмъ для рѣшенія перваго вопроса. Можно лишь указать на замѣчательную устойчивость аргона по отношенію къ самымъ энергичнымъ химическимъ агентамъ при различныхъ условіяхъ и на то, что онъ выдѣляется со своими первоначальными свойствами изъ соединенія съ сѣроуглеродомъ, какъ на факты, свидѣтельствующіе въ пользу элементарности аргона. Если допустить, что аргонъ есть новый химическій элементъ, то остается рѣшить, въ какомъ отношеніи находится новый элементъ къ извѣстнымъ намъ уже элементамъ. Есть ли ему мѣсто въ періодической системѣ элементовъ, и если есть, то гдѣ именно?

Мы уже видѣли, что по мнѣнію Rayleigh'я и Ramsay'я, основанному на найденной или величинѣ для отношенія теплоемкости при постоянномъ объемѣ къ теплоемкости при постоянномъ давленіи, въ частицѣ аргона содержится одинъ его атомъ. Если это такъ, то, принимая плотность аргона равной 20, найдемъ, что его атомный вѣсъ равенъ 40. Для элемента съ такимъ атомнымъ вѣсомъ нѣтъ мѣста въ періодической системѣ Менделѣева. Дѣйствительно, элементы, атомные вѣса которыхъ близки къ 40, суть:

хлоръ	съ	атомнымъ	вѣсомъ	35,5
калій	"	"	"	39,1
кальцій	"	"	"	40,0
скандій	"	"	"	44.

Однако изъ того факта, что, отношеніе теплоемкостей аргона близко къ $1^2/_3$, вовсе не слѣдуетъ, что въ частицѣ его содержится одинъ атомъ, о чемъ мы и говорили выше (стр. 211). Возможно допустить, что въ частицѣ аргона содержится 2, 3, 4 и болѣе атомовъ. Всѣ эти допущенія подробно разбираетъ Менделѣевъ*) и мы приведемъ здѣсь его взгляды.

Если допустить, что въ частицѣ аргона содержатся два атома, то атомный вѣсъ аргона будетъ около 20, т. е. мѣсто ему нашлось бы въ восьмой группѣ вслѣдъ за фторомъ, атомный вѣсъ котораго равенъ 19. Тогда аргонъ долженъ былъ бы представлять переходъ отъ фтора въ седьмой группѣ къ натрію (23) въ первой. Но фторъ и натрій обладаютъ столь противоположными свойствами, что весьма трудно предположить существованіе между ними восьмой переходной группы. Поэтому предположеніе, что атомный вѣсъ аргона равенъ 20, вообще мало вѣроятно, хотя все же оно вѣроятнѣе перваго предположенія.

Если допустить, что въ частицѣ аргона содержатся три атома, то атомный вѣсъ аргона будетъ около 14, т. е. въ этомъ случаѣ аргонъ былъ бы аллотропическимъ видоизмѣненіемъ азота, подобнымъ озону O_3 по своему строенію, и формула его была бы N_3. Это *наиболѣе вѣроятное предположеніе*, за которое говорятъ почти всѣ извѣстные до сей поры относительно аргона факты. Совмѣстное существованіе аргона и азота въ природѣ, близость ихъ химическихъ свойствъ, выражающаяся особенно въ отношеніи ихъ къ бензолу и сѣроуглероду, недѣятельность, инертность аргона, полученіе его въ небольшомъ количествѣ изъ химическаго азота, объясняемое Rayleigh'емъ и Ramsay'емъ тѣмъ, что аргонъ проникаетъ изъ атмосферы въ азотъ черезъ воду газометровъ,— все это невольно наводитъ на мысль, что между аргономъ и азотомъ существуетъ тѣсная связь. Читатели наши вѣроятно помнятъ, что это предположеніе было впервые высказано J. Dewar'омъ въ лондонской газетѣ „Times" 18-го августа 1894 года**). Если это предположеніе вѣрно, то плотность аргона должна быть равна 21, а его молекулярный вѣсъ 42. И это весьма правдоподобно, такъ какъ по всей вѣроятности добы-

*) „Ж. Р. Ф. Х. О.", т. XXVII, стр. 69—72.

**) См. „Вѣстникъ Оп. Физики" № 200, стр. 185.

тый Ramsay'емъ аргонъ содержитъ небольшую примѣсь болѣе легкаго азота, понижающую его плотность.

Если допустить, что въ частицѣ аргона содержится 4 атома, то его атомный вѣсъ будетъ около 10 и въ періодической системѣ Менделѣева мѣста ему нѣтъ. То же можно сказать и о допущеніи 5-ти атомовъ въ частицѣ аргона (атомный вѣсъ 8).

Если, наконецъ, допустить, что частица аргона содержитъ 6 атомовъ, то его атомный вѣсъ будетъ около 6,5, т. е. будетъ заключаться между водородомъ, первымъ и единственнымъ до сихъ поръ членомъ перваго ряда и литіемъ (7) первымъ членомъ второго или „типическаго" ряда. Тогда аргонъ можно было бы помѣстить въ первомъ ряду, по всей вѣроятности въ 5-ой группѣ, т. е. въ группѣ азота. Это предположеніе также довольно вѣроятно.

Итакъ, если допустить, что аргонъ не есть смѣсь нѣсколькихъ веществъ и не есть сложное вещество, то наиболѣе вѣроятно, что онъ помѣщается въ пятой группѣ и содержитъ либо 6 атомовъ въ частицѣ, либо три. Въ послѣднемъ случаѣ онъ есть просто аллотропическое видоизмѣненіе азота.

Надо надѣяться, что въ скоромъ времени всѣ эти вопросы будутъ надлежащимъ образомъ рѣшены. Для ихъ рѣшенія необходимо или превратить аргонъ въ азотъ, или получить и точно изучить химическія соединенія аргона. Менделѣевъ замѣчаетъ, что провѣрить предположеніе о томъ, что аргонъ есть уплотненный азотъ, можно было бы, накаливая боръ или титанъ въ атмосферѣ аргона при пропусканіи электрическихъ искръ. Тогда частицы аргона должны были бы распасться на атомы азота, которые вступили бы затѣмъ въ реакцію съ боромъ. Мы видѣли однако (стр. 242), что ни боръ, ни титанъ не реагируютъ повидимому съ аргономъ подъ дѣйствіемъ электрическихъ искръ. Это не значитъ, что аргонъ и боръ или титанъ вообще не вступаютъ въ реакцію другъ съ другомъ: каждая реакція совершается лишь при наличности извѣстныхъ условій, которыя не всегда могутъ быть легко найдены. Извѣстно напр., что соединеніе азота съ водородомъ подъ дѣйствіемъ электрической искры идетъ лишь въ томъ случаѣ, когда продуктъ реакціи, амміакъ, удаляется, поглощается кислотою по мѣрѣ своего образованія. Если этого нѣтъ, то въ самомъ началѣ реакціи наступаетъ уже равновѣсіе между азотомъ, водородомъ и амміакомъ: съ одной стороны подъ дѣйствіемъ искры азотъ вступаетъ въ соединеніе съ водородомъ, съ другой—образовавшійся амміакъ разлагается тою же искрой. Весьма возможно, что нѣчто подобное происходило во многихъ случаяхъ и съ аргономъ.

В. Гернетъ (Одесса).

ОЧЕРКЪ

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛОБАЧЕВСКАГО.

(Продолженіе).*

Если мы въ уравненіяхъ XXXVIII предположимъ r, x_1, y_1 постоянными, а x_2 и y_2 перемѣнными текущими координатами, то получимъ уравненіе окружности, для которой точка x_1, y_1 служитъ центромъ, а r радіусомъ. Это уравненіе можно, слѣдовательно, представить въ слѣдующей формѣ: **)

$$\sin r' e^{-x_0} e^{x} + \sin r' e^{x_0} e^{-x} = 2\sin r' \cos y'_0 \cos y' + 2\sin y'_0 \sin y'. \qquad \text{LII } a)$$

Отсюда заключаемъ, что уравненіе окружности всегда можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$Ae^{x} + Be^{-x} = C\cos y' + D\sin y'. \qquad \text{LII } b)$$

Найдемъ теперь условіе, при которомъ уравненіе этого вида дѣйствительно выражаетъ окружность круга. Для этого необходимо и достаточно, чтобъ его можно было привести къ виду LII a). Полагаемъ поэтому:

$$\begin{aligned} A &= \varrho\sin r' e^{-x_0}, \; B = \varrho \sin r' e^{x_0}, \\ C &= 2\varrho\sin r' \cos y'_0, \; D = 2\varrho \sin y'_0. \end{aligned} \qquad (48)$$

a) Комбинируя эти уравненія, мы найдемъ безъ труда

$$\sin^2 r' = \frac{4AB - C^2}{D^2}. \qquad (49)$$

Чтобы этому уравненію отвѣчало дѣйствительное и конечное значеніе радіуса, необходимо и достаточно, чтобы

$$D^2 > 4AB - C^2 > 0. \qquad (50)$$

Отсюда также видно, что коэффиціентъ D долженъ быть отличенъ отъ нуля. Оно и естественно, ибо при D=0 уравненіе представляетъ прямую (дѣйствительную или мнимую).

b) Далѣе изъ уравненій (48) видно, что коэффиціенты A и B должны имѣть одинаковые знаки; но это условіе очевидно уже заключается во второй части неравенства (50). Мы будемъ считать эти коэффиціенты *положительными*, вслѣдствіе чего и множитель ϱ будетъ имѣть положительное значеніе.

*) См. „Вѣстн. Оп. Физики" №№ 174, 178, 179, 183, 187, 188, 189, 190, 194, 195 196, 198, 199, 201, 202, 203, 206, 207, 209 и 214.

**) x_0 и y_0 поставлены вмѣсто x_1, y_1, а вмѣсто x_2, y_2 — x и y (Ур. XXXVIII b).

c) Послѣднее изъ уравненій (48) обнаруживаетъ, что при этихъ условіяхъ *коэффиціентъ* D *также долженъ быть положительнымъ*. Если это условіе соблюдено, то уравненія (48) даютъ:

$$\sin r' = \frac{\sqrt{4AB - C^2}}{D}; \varrho = D\sqrt{\frac{AB}{4AB - C^2}}. \qquad \text{LIII}$$

$$x_0 = \frac{1}{2}\lg\frac{B}{A}; \cos y'_0 = \frac{C}{2\sqrt{AB}}; \sin y'_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4AB - C^2}{AB}}.$$

Мы получаемъ дѣйствительныя значенія для x_0, y_0 и r, уравненіе LII *b*) приводится, слѣдовательно, къ виду LII *a*) и представляетъ собой окружность круга.

Замѣтимъ, что при $D^2 < 4AB - C^2$ уравненіе LII *b*) не представляетъ никакого дѣйствительнаго геометрическаго мѣста. Въ самомъ дѣлѣ, полагая здѣсь

$$R = \sqrt{C^2 + D^2} \text{ и } \frac{D}{C} = \operatorname{tg}\varphi,$$

мы приведемъ это уравненіе къ виду (20), именно получимъ:

$$Ae^x + Be^{-x} = R\cos(y' - \varphi).$$

Поэтому, на основаніи сдѣланнаго тамъ замѣчанія, уравненіе не представляетъ никакого дѣйствительнаго геометрическаго мѣста при $R^2 - 4AB < 0$.

При

$$D^2 = 4AB - C^2 \text{ и } D > 0 \qquad (51)$$

уравненіе представляетъ точку. Въ самомъ дѣлѣ уравненіе (49) обнаруживаетъ, что радіусъ окружности при этомъ условіи обращается въ нуль. Но и помимо того, дѣля лѣвую часть уравненія на $\sqrt{AB}$, а правую на $\frac{1}{2}\sqrt{C^2 + D^2}$, мы представимъ его въ видѣ:

$$\left[\sqrt[4]{\frac{A}{B}}e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\sqrt[4]{\frac{B}{A}}\right]^2 + \left[\frac{C}{\sqrt{C^2 + D^2}} - \cos y'\right]^2 + \left[\frac{D}{\sqrt{C^2 + D^2}} - \sin y'\right]^2 = 0.$$

Чтобы это уравненіе могло быть удовлетворено дѣйствительными значеніями координатъ, необходимо, чтобы каждый членъ отдѣльно обращался въ нуль. Этому условію удовлетворяютъ координаты единственной точки (x_0, y_0), для которой

$$x_0 = \frac{1}{2}\lg\frac{B}{A}, \cos y'_0 = \frac{C}{\sqrt{C^2 + D^2}}, \sin y'_0 = \frac{D}{\sqrt{C^2 + D^2}}.$$

Послѣднее изъ этихъ равенствъ возможно только при положительномъ D, что вполнѣ согласуется съ условіемъ *c*).

Не трудно обнаружить, что при $D < 0$ уравненіе также не удовлетворяется никакими дѣйствительными значеніями координатъ x и y, даже если условіе (50) соблюдено. Въ самомъ дѣлѣ, замѣняя въ этомъ случаѣ систему уравненій (48) слѣдующими

$$\mathrm{A} = \varrho \sin r' e^{-x_0}, \quad \mathrm{B} = \varrho \sin r' e^{x_0}$$

$$\mathrm{C} = 2\varrho \sin r' \cos y'_0, -\mathrm{D} = 2\varrho \sin y'_0$$

мы получимъ дѣйствительныя значенія для x_0, y_0 и r, и приведемъ уравненіе LII b) къ виду:

$$\sin r' = -\frac{\sin y'_0 \sin y' \sin(x - x_0)'}{1 - \cos y'_0 \cos y' \sin(x - x_0)'}.$$

Но при всѣхъ дѣйствительныхъ и конечныхъ значеніяхъ для x и y лѣвая часть этого уравненія положительна, а правая отрицательна, такъ что равенство не можетъ имѣть мѣста ни при какихъ дѣйствительныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ.

Итакъ для того, чтобы уравненіе LII b) представляло окружность круга необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^2 > 4\mathrm{AB} - \mathrm{C}^2 > 0 \\ \mathrm{D} > 0. \end{aligned} \tag{52 a}$$

А при

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^2 > 4\mathrm{AB} - \mathrm{C}^2 > 0 \\ \mathrm{D} < 0, \end{aligned} \tag{52 b}$$

равно какъ при

$$\mathrm{D}^2 < 4\mathrm{AB} - \mathrm{C}^2 \tag{52 c}$$

уравненіе не представляетъ накакого дѣйствительнаго геометрическаго мѣста.

Если мы себѣ представимъ, что въ уравненіи окружности величина $4\mathrm{AB} - \mathrm{C}^2$ уменьшается, приближаясь къ нулю, то r' приближается къ нулю а r къ безконечности. При этомъ ордината центра неопредѣленно возрастаетъ, а абсцисса сохраняетъ конечную величину $x_0 = \frac{1}{2} \lg \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$ (въ предположеніи, что ни одинъ изъ коэффиціентовъ А и В не стремится къ нулю). Поэтому при

$$4\mathrm{AB} - \mathrm{C}^2 = 0 \tag{53}$$

уравненіе

$$\mathrm{A}e^{x} + \mathrm{B}e^{-x} = \mathrm{C}\cos y' + \mathrm{D}\sin y'$$

принадлежитъ предѣльной линіи: если при этомъ А и В отличны отъ нуля, то, прямая, перпендикулярная къ оси абсциссъ на разстояніи $x_0 = \frac{1}{2} \lg \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$ отъ начала координатъ, служитъ осью кривой. Точку встрѣчи этой кривой съ осью, конечно, легко опредѣлить при помощи уравненія кривой. Однако при соотношеніи (53) уравненіе допускаетъ такой случай, который не можетъ имѣть мѣста для окружности круга при наличности неравенства (52 a), именно: одинъ изъ коэффиціентовъ А и В можетъ обратиться въ нуль; вмѣстѣ съ тѣмъ обращается, конечно, въ нуль и коэффиціентъ C. Чтобы изслѣдовать этотъ случай, составимъ уравненіе окружности, имѣющей центръ въ точкѣ $(x_0, 0)$ на оси абсциссъ. Полагая въ уравненіи

$$\sin r' = \frac{\sin y'_0 \sin y' \sin(x-x_0)'}{1-\cos y'_0 \cos y' \sin(x-x_0)'}$$

y_0 равнымъ нулю (т. е. $y'_0 = 90^0$), получимъ требуемое уравненіе:

$$\sin r' = \sin y' \sin(x-x_0)'.$$

Если окружность проходитъ черезъ точку $(x_1, 0)$, то

$$\sin r' = \sin(x_1-x_0)',$$

и мы можемъ представить это уравненіе въ видѣ:

$$\sin(x_1-x_0)' = \sin(x-x_0)\sin y'$$

или иначе

$$\frac{\sin x'_1}{1-\cos x'_1 \cos x'_0} = \frac{\sin x' \sin y'}{1-\cos x' \cos x'_0}.$$

Полагая здѣсь $x_0 = \pm\infty$, мы получимъ уравненіе предѣльной линіи, которая проходитъ черезъ точку $(x_1, 0)$ имѣетъ ось абсциссъ (взятую въ положительномъ или отрицательномъ направленіи) своею осью и пересѣкаетъ ее въ точкѣ $(x_1, 0)$:

$$\operatorname{cotg}^2 \frac{1}{2} x'_1 \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} x = \sin y' \qquad (\text{при } x_0 = \infty, x'_0 = 0).$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} x' \operatorname{cotg} \frac{1}{2} x' = \sin y' \qquad (\text{при } x_0 = -\infty, x'_0 = \pi).$$

Или иначе:

$$e^{x_1 - x} = \sin y' \qquad \text{LIV } a)$$

$$e^{x - x_1} = \sin y'. \qquad \text{LIV } b)$$

Очевидно въ первомъ случаѣ x всегда больше x_1, во второмъ случаѣ x меньше x_1. Къ одному изъ этихъ видовъ всегда можетъ быть приведено уравненіе вида:

$$\mathrm{A}e^{\pm x} = \mathrm{D}\sin y',$$

если коэффиціенты A и D одинаковыхъ знаковъ; въ противномъ случаѣ это послѣднее уравненіе никакого геометрическаго мѣста не опредѣляетъ.

Составимъ теперь уравненіе линій равныхъ разстояній. Это уравненіе дается непосредственно формулой XLIII b), если мы въ ней примемъ величину h за постоянную, а x_0 и y_0 за перемѣнныя текущія координаты. Уравненіе кривой будетъ имѣть видъ:

$$\mathrm{A}e^{x} + \mathrm{B}e^{-x} = \mathrm{C}\cos y' + \varepsilon E \operatorname{cotg} h' \sin y', \qquad \text{LV}$$

при этомъ, отбрасывая послѣдній членъ, мы получимъ уравненіе прямой, для которой кривая служитъ линіей равныхъ разстояній. Мы будемъ называть эту прямую основаніемъ кривой. Ея уравненіе:

$$Ae^{x}+Be^{-x}=C\cos y'.$$

Итакъ уравненіе предѣльной линіи также имѣетъ видъ:

$$Ae^{x}+Be^{-x}=C\cos y'+D\sin y'.$$

Не трудно теперь найти условія, при которыхъ уравненіе этого типа представляетъ кривую равныхъ разстояній. Для этого достаточно, чтобы уравненіе, которое мы получимъ, отбрасывая послѣдній членъ, представляло дѣйствительную прямую, т. е. согласно условію (18), чтобы

$$C^2-4AB>0.$$

Полагая тогда

$$\mathrm{cotg}h'=\frac{\pm D}{\varepsilon\sqrt{C^2-4AB}}, \qquad (54)$$

мы приведемъ уравненіе къ виду (LV). Знакъ ε опредѣляется по указанному выше (см. форм. XL a) правилу положеніемъ прямой относительно оси. Знакъ же числителя зависитъ отъ того, расположена ли кривая относительно основанія съ той же стороны, съ которой лежитъ начало координатъ, или съ противоположной.

Итакъ изслѣдованіе уравненія

$$Ae^{x}+Be^{-x}=C\cos y'+D\sin y',$$

приводитъ насъ къ слѣдующему выводу:

A) $$C^2+D^2<4AB.$$

Уравненіе не представляетъ никакого геометрическаго мѣста.

B) $$C^2+D^2>4AB.$$

Если будемъ считать коэффиціентъ A положительнымъ, то при этомъ могутъ имѣть мѣсто слѣдующіе случаи.

$$\text{I } a)\ C^2<4AB,\ D>0.$$

Уравненіе представляетъ окружность круга.

$$b)\ C^2<4AB,\ D<0.$$

Уравненіе не представляетъ никакого геометрическаго мѣста.

$$\text{II } a)\ C^2=4AB,\ D>0.$$

Уравненіе представляетъ предѣльную линію

$$b)\ C^2=4AB,\ D<0.$$

Уравненіе не представляетъ дѣйствительнаго геометрическаго мѣста.

$$\text{III } a)\ C^2 > 4AB \qquad D = 0.$$

Уравненіе представляетъ прямую.

$$b)\ C^2 > 4AB \qquad D \gtreqless 0.$$

Уравненіе представляетъ линію равныхъ разстояній

C) $$C^2 + D^2 = 4AB.$$

При этомъ снова возможны слѣдующіе случаи:

$$\text{I } a)\ C^2 < 4AB, \quad D > 0.$$

Уравненіе представляетъ точку.

$$b)\ C^2 < 4AB \quad D < 0.$$

Уравненіе не представляетъ дѣйствительнаго геометрическаго мѣста.

$$\text{II } C^2 = 4AB,\ D = 0.$$

Уравненіе представляетъ безконечно удаленную точку.

Во всякомъ случаѣ уравненіе либо вовсе не представляетъ геометрическаго мѣста, либо представляетъ прямую, окружность круга, предѣльную линію, кривую равныхъ разстояній или наконецъ точку.

Такъ какъ уравненіе LII b) имѣетъ только три независимыхъ параметра, то геометрическое мѣсто этого типа опредѣляется тремя данными, напримѣръ координатами (x_0, y_0) (x_1, y_1), (x_2, y_2) трехъ точекъ, черезъ которыя геометрическое мѣсто проходитъ. Уравненіе геометрическаго мѣста можно въ этомъ случаѣ представить въ такой формѣ:

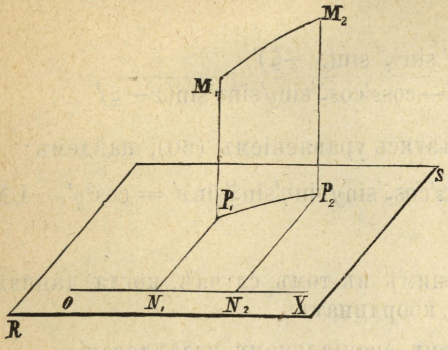
$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \cos y' & \sin y' \\ e^{x_0} & e^{-x_0} & \cos y'_0 & \sin y'_0 \\ e^{x_1} & e^{-x_1} & \cos y'_1 & \sin y'_1 \\ e^{x_2} & e^{-x_2} & \cos y'_2 & \sin y'_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{LVI}$$

Это уравненіе пе можетъ представлять ни мнимаго геометрическаго мѣста, ни точки, ибо удовлетворяется координатами трехъ дѣйствительныхъ точекъ. Слѣдовательно оно принадлежитъ одному изъ четырехъ остальныхъ геометрическихъ мѣстъ; отсюда слѣдующій, не лишенный интереса выводъ:

Любыя три точки на плоскости Лобачевскаго расположены: либо на одной прямой, либо на одной окружности, либо на предѣльной кривой, либо на линіи равныхъ разстояній; одно исключаетъ другое. Отсюда слѣдуетъ, что двѣ линіи этого типа могутъ пересѣкаться не болѣе, какъ въ двухъ точкахъ.

Опасаясь, что мы уже и безъ того дали этой главѣ слишкомъ большое развитіе, мы ограничимся только самыми общими указаніями относительно аналитической геометріи въ пространствѣ.

Представимъ себѣ неподвижную плоскость RS (фиг. 49), неподвижную прямую OX на ней и опредѣленную точку O на этой прямой. Положеніе точки M_1 въ пространствѣ вполнѣ опредѣляется разстояніемъ $M_1P_1 = z$ этой точки отъ плоскости, даннымъ по величинѣ и по знаку, и координатами x и y проэкціи P_1 данной точки на плоскость XY, отнесенными къ началу координатъ O и оси абсциссъ OX.



Фиг. 49.

Разыщемъ прежде всего разстояніе между двумя точками $M_1\,(x_1\,y_1\,z_1)$ и $M_2\,(x_2\,y_2\,z_2)$.

Пусть P_1 и P_2 проэкціи данныхъ точекъ на плоскости XY. Обозначимъ черезъ r разстояніе M_1M_2, черезъ ϱ разстояніе P_1P_2 между проэкціями. По формулѣ XXXVIII a) имѣемъ:

$$\sin r' = \frac{\sin z'_1 \sin z'_2 \sin \varrho'}{1 - \cos z'_1 \cos z'_2 \sin \varrho'}$$

$$\sin \varrho' = \frac{\sin y'_1 \sin y'_2 \sin(x_1 - x_2)'}{1 - \cos y'_1 \cos y'_2 \sin(x_1 - x_2)'}.$$

Отсюда

$$\sin r' = \frac{\sin y'_1 \sin y'_2 \sin z'_1 \sin z'_2 \sin(x_1 - x_2)'}{1 - \cos y'_1 \cos y'_2 \sin(x_1 - x_2)' - \cos z'_1 \cos z'_2 \sin y'_1 \sin y'_2 \sin(x_1 - x_2)'}. \quad \text{LVIII}$$

Принимая въ этой формулѣ $x_2 = y_2 = z_2 = 0$, мы получаемъ непосредственно слѣдующее выраженіе для радіуса вектора точки $(x_1\,y_1\,z_1)$

$$\sin r' = \sin x'_1 \sin y'_2 \sin z'_1. \quad \text{LIX}$$

Если же мы въ предыдущей формулѣ пріймемъ разстояніе r и координаты x_2, y_2, z_2 за постоянныя, а x_1, y_1, z_1 за текущія координаты перемѣнной точки, то уравненіе выразить сферу, имѣющую центръ въ точкѣ x_2, y_2, z_2 и радіусомъ разстояніе r.

Найдемъ теперь уравненіе плоскости.

Изъ начала координатъ опустимъ перпендикуляръ OQ на данную плоскость и обозначимъ черезъ ξ, η, ζ координаты основанія перпендикуляра Q. Пусть M (x, y, z) произвольная точка на плоскости. Тогда изъ прямоугольнаго треугольника OQM имѣемъ:

$$\sin \Pi(\mathrm{OM}) = \sin \Pi(\mathrm{OQ}) \sin \Pi(\mathrm{QM}). \quad (58)$$

По формуламъ (LVIII и LIX) имѣемъ:

$$\sin \Pi(\mathrm{OM}) = \sin x' \sin y' \sin z' \quad (59)$$

$$\sin \Pi(\mathrm{OQ}) = \sin \xi' \sin \eta' \sin \zeta' \quad (60)$$

$$\sin \Pi(\mathrm{QM}) = \frac{\sin y' \sin \eta' \sin z' \sin \zeta' \sin(x - \xi)'}{1 - \cos y' \cos \eta' \sin(x - \xi)' - \cos z' \cos \zeta \sin y' \sin \eta' \sin(x - \xi)'}.$$

Подставляя эти выраженія въ уравненіе (58), получимъ уравненіе плоскости:

$$\sin x' = \frac{\sin\xi' \sin^2\eta' \sin^2\zeta' \sin(x-\xi)'}{1-\cos y'\cos\eta'\sin(x-\xi)'-\cos z'\cos\zeta'\sin y'\sin\eta'\sin(x-\xi)'}.$$

Отсюда, раскрывая $\sin(x-\xi)'$ и пользуясь уравненіемъ (60), найдемъ:

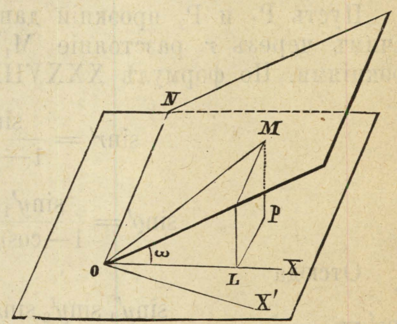
$$\cos x'\cos\xi' + \cos y'\cos\eta'\sin x'\sin\xi' + \cos z'\cos\zeta'\sin y'\sin\eta'\sin\xi'\sin x' = \cos^2 q', \qquad \text{LX}$$

гдѣ $q = OQ$.

Этотъ выводъ однако непримѣнимъ въ томъ случаѣ, когда данная плоскость проходитъ черезъ начало координатъ.

Этотъ случай подлежитъ поэтому специальному изслѣдованію.

Пусть ON (фиг. 50) прямая, по которой данная плоскость пересѣкаетъ плоскость XY. Остановимся сначала на простѣйшемъ случаѣ, когда ось абсциссъ перпендикулярна къ ON. Пусть OK представляетъ прямую, по которой плоскость, проходящая черезъ ось абсциссъ перпендикулярно къ плоскости XY пересѣкаетъ данную плоскость. Уголъ KOX обозначимъ черезъ ω.



Фиг. 50.

Изъ произвольной точки M (x, y, z) данной плоскости опускаемъ перпендикуляръ MK на прямую OK. Проэкціи точекъ K и M на основную плоскость обозначимъ черезъ L и P. Прямоугольные треугольники OKM и OLK даютъ:

$$\sin\Pi(OM) = \sin\Pi(OK)\sin\Pi(KM)$$

$$\sin\Pi(OK) = \sin\Pi(OL)\sin\Pi(KL).$$

А по формулѣ XXXVIII a) находимъ:

$$\sin\Pi(KM) = \frac{\sin\Pi(LK)\sin\Pi(MP)\sin\Pi(LP)}{1-\cos\Pi(LK)\cos\Pi(MP)\sin\Pi(LP)}$$

такъ что

$$\sin\Pi(OM) = \frac{\sin\Pi(OL).\sin\Pi(MP)\sin\Pi(LP).\sin^2\Pi(KL)}{1-\cos\Pi(KL)\cos\Pi(MP)\sin\Pi(LP)}.$$

Съ другой стороны, такъ какъ $ON \perp OX$, то и $PL \perp OX$. Поэтому

$$\sin\Pi(OM) = \sin\Pi(OL).\sin\Pi(MP)\sin\Pi(LP),$$

такъ что предыдущее уравненіе принимаетъ послѣ простого преобразованія такой видъ:

$$\cos\Pi(MP)\sin\Pi(LP) = \cos\Pi(KL). \qquad (61)$$

Но, съ другой стороны треугольникъ OKL на основаніи уравненія V даетъ:

$$\cos\Pi(KL) = \cot g\,\Pi(OL)\,tg\omega.$$

Такъ какъ $OL = x$, $LP = y$ и $MP = z$, то уравненіе (61) преобразовывается въ уравненіе плоскости:

$$\cos z' \sin y' = \cot g\, x' tg\omega.$$

Остается перейти отъ этого случая къ болѣе общему, когда ось абсциссъ OX′ составляетъ съ перпендикуляромъ OX уголъ ϑ. Если мы принимаемъ OX за ось абсциссъ, то уравненіе плоскости имѣетъ видъ LX *a*). Чтобы перейти къ общему случаю, достаточно очевидно произвести преобразованіе координатъ. Написавъ для этого уравненіе въ видѣ:

$$\cos z' \sin y' \sin x' = \cos x' tg\omega \qquad LX\,a)$$

и совершая затѣмъ преобразованіе при помощи формулъ XXXVI *a*) и XXXVII *c*), мы найдемъ требуемое уравненіе

$$\cos z' \sin y' \sin x' = (\cos x' \cos\vartheta + \sin\vartheta \sin x' \cos y')\,tg\omega. \qquad LX\,b)$$

Можно обнаружить, что это уравненіе представляетъ частный случай уравненія LIX *a*); но мы предоставляемъ это читателю.

В. Каганъ (Спб.).

(*Продолженіе слѣдуетъ*).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Свойства твердой углекислоты. *P. Villard* и *R. Jarry* (C. R. CXX, 1413).—Ввиду разногласія опубликованныхъ до сей поры данныхъ относительно твердой углекислоты, авторы предприняли изученіе ея свойствъ, обставивъ свои опыты возможно тщательно. Температуры они измѣряли хорошо вывѣреннымъ толуеновымъ термометромъ.

Точка плавленія углекислоты.—Сухая углекислота была перегнана и заморожена въ широкой охлажденной трубкѣ, по оси которой былъ подвѣшенъ термометръ. Затѣмъ трубка медленно нагрѣвалась; скоро углекислота стала плавиться и во все время плавленія (около 20 минутъ) термометръ показывалъ—56,7^0 а соединенный съ трубкой манометръ 5,1 атм.

Температура твердой углекислоты подъ обыкновеннымъ давленіемъ.—Такъ какъ углекислота плавится подъ давленіемъ въ 5,1 атм., то при обыкновенномъ давленіи она можетъ существовать только въ газообразномъ или въ твердомъ состояніи. Кромѣ того, находящаяся въ открытомъ сосудѣ твердая углекислота должна сама собой принять ту температуру, при которой давленіе ея пара равно атмосферному давленію. Это дѣйствительно имѣетъ мѣсто, и подъ нормальнымъ давленіемъ температура твердой углекислоты понижается до постоянной температуры

—79^0. Нужно только защитить углекислоту отъ вліянія окружающихъ ее предметовъ. Авторы достигали этого, помѣщая снѣгъ углекислоты въ стеклянную довольно широкую (3,5 cm діаметромъ) трубку, снаружи высеребренную и заключенную, въ свою очередь, въ ящикъ, покрытый внутри металломъ; изъ этого ящика выкачивался воздухъ.

Regnault, пользуясь воздушнымъ термометромъ, нашелъ, что температура твердой углекислоты подъ обыкновеннымъ давленіемъ, т. е. температура кипѣнія углекислоты, равна—$78{,}16^0$, а Pouillet опредѣлилъ эту температуру въ—79^0.

Охлаждающія смѣси.—Вопреки установившемуся мнѣнію оказывается, что эфиръ не понижаетъ температуры твердой углекислоты: смѣсь углекислоты съ эфиромъ не охлаждается ниже—79^0 и лишь при избыткѣ углекислоты достигаетъ этой температуры. Если охладить предварительно эфиръ до—79^0, то прибавленіе къ нему небольшого количества снѣга углекислоты понижаетъ его температуру вслѣдствіе растворенія, но всего на 1^0 приблизительно.

Наоборотъ, хлористый метилъ производитъ замѣтное охлажденіе. Начиная съ—65^0 углекислота растворяется въ хлористомъ этилѣ безъ выдѣленія газовъ, и въ моментъ насыщенія раствора температура его равна—85^0. Пропуская же сквозь смѣсь токъ сухого воздуха, легко понизить ея температуру до—90^0.

Температура твердой углекислоты въ разрѣженномъ пространствѣ,—Около 120 g снѣга углекислоты были помѣщены въ цилиндрѣ, закрытомъ на одномъ концѣ пробковой пластинкой. По оси цилиндра былъ расположенъ термометръ и приборъ установленъ подъ колоколомъ воздушнаго насоса. Простое приспособленіе давало возможность поднимать термометръ изъ цилиндра во время отсчетовъ. Большой сосудъ съ кусками ѣдкаго кали для поглощенія углекислоты былъ помѣщенъ между насосомъ и пріемникомъ.

Черезъ 15 минутъ послѣ начала выкачиванія воздуха температура упала до—115^0, а когда давленіе понизилось до 5 mm термометръ показывалъ—125^0. Эту температуру можно было поддерживать три часа; углекислота испарялась сравнительно медленно и по окончаніи опыта осталось ея 60 g.

Этотъ опытъ важенъ въ томъ отношеніи, что онъ доказываетъ возможность сжиженія кислорода, пользуясь только углекислотой въ качествѣ охладителя и приборами, имѣющимися въ каждой порядочной лабораторіи.

Оптическая дѣятельность.—Кристаллы углекислоты, положенные на стеклянную пластинку, прямо изслѣдовались подъ микроскопомъ. Оказалось, что твердая углекислота вовсе не дѣйствуетъ на поляризованный свѣтъ.

В. Г.

Спектральное изслѣдованіе газовъ, выдѣленныхъ изъ различныхъ минераловъ. *Normann Lockyer* (C. R., CXX p. 1103).—Различные минералы нагрѣвались въ пустотѣ и выдѣлившіеся газы изслѣдовались спектроскопически. Всего было изслѣдовано до 18 минераловъ, въ томъ числѣ и клевитъ, давшій, какъ извѣстно, проф. Ramsay'ю газъ, въ спектрѣ котораго оказались линіи аргона, а также блестящая желтая линія, приписанная авторомъ еще въ 1869 году гипотетическому элементу *гелію.*

Въ добытыхъ такимъ образомъ газахъ оказалось до 60 линій, не принадлежащихъ, повидимому, спектрамъ извѣстныхъ земныхъ веществъ. Линіи эти были сравнены съ неизвѣстными линіями въ спектрѣ бѣлыхъ звѣздъ созвѣздія Оріона и солнечной хромосферы, причемъ оказались слѣдующія совпаденія:

Линіи минераловъ; $\lambda =$	Линіи хромосферы; $\lambda =$	Линіи, сфотографированныя при затменіи 1893 г.; $\lambda =$	Линіи звѣздъ Оріона; $\lambda =$
3889	3888,73	3889,1	3889,1
3947	3945,2	3946,0	„
3982	„	3982,0	„
4026,5	„	4026,5	4026,5
4142	„	„	„
4145	„	4144,0	4144,0
4177	„	4177,8	4178,0
4182	„	„	„
4338	4338,7	„	4338,0
4347	„	„	4346,0
4390	4389,2	4390,0	4389,0
4398	4399,2	4398,7	„
4453	„	4454,0	„
4471	4471,7	4471,8	4471,8
4515	4514,7	4514,5	„
4522	4522,7	4522,9	„
4580	„	„	„

Трудно думать, чтобы эти совпаденія были случайны. Изслѣдованіе продолжается съ большимъ свѣторазсѣяніемъ.

В. Г.

Катастрофы въ Тителѣ и въ Мендозѣ. *Ch.-V. Zenger* (C. R., CXX, 1133).—Со времени катастрофы въ Лайбахѣ*) прошли точно два солнечныхъ періода, ознаменовавшихся землетрясеніями въ Сициліи и изверженіемъ Коллимы въ Мексикѣ, когда произошла новая катастрофа въ Мендозѣ (Аргентина), городѣ съ 10000 жителей, лежащемъ у подножія Андовъ подъ 32°50′ ю. шир. и 67°48′ зап. долг. отъ Парижа, на высотѣ 2400 фут. надъ уровнемъ моря. Утромъ 8-го мая (н. с.) сильные толчки разрушили городъ и принудили жителей покинуть его. Утромъ 20-го марта 1861 года городъ этотъ былъ уже разрушенъ;

*) См. „В. О. Ф.“ № 215, стр. 255.

тогда изъ всѣхъ зданій уцѣлѣлъ лишь театръ и 6000 человѣкъ были убиты на мѣстѣ. Промежутокъ между этими двумя катастрофами равенъ 34 г. 49 сут., т. е. 12467,2 сут. Но 990 солнечныхъ періодовъ или полуоборотовъ солнца, изъ которыхъ каждый равенъ по Faye'ю 12,5935 сут., составляютъ 12467,565 сут. Это совпаденіе заслуживаетъ вниманія и подтверждаетъ теорію автора*).

Въ то же время гора Calvarie у Тителя подъ $44^0,5$ сѣв.широты и $18^0,4$ вост. долготы отъ Парижа передвинулась на своемъ основаніи на 200 метровъ; одинъ домъ былъ засыпанъ обломками скалъ и 4 человѣка были погребены въ немъ. Съ 7-го мая гора продолжаетъ осыпаться.

7-го мая у солнечнаго экватора и у центральнаго мериндіана наблюдалась группа изъ многочисленныхъ малыхъ пятенъ, тогда какъ на центральномъ меридіанѣ появилось громадное пятно, которое быстро увеличивалось. У края диска была видна группа яркихъ и значительныхъ по размѣрамъ факеловъ. Описанныя катастрофы совпали по времени съ прохожденіемъ этихъ пятенъ черезъ центральный меридіанъ солнца.

Одновременно съ этими землетрясеніями въ Европѣ (Прага) были сильныя бури и отмѣчены пертурбаціи въ магнитномъ склоненіи. 10-го мая были сильные толчки въ Лайбахѣ, нагнавшіе снова панику на жителей.

Прохожденіе періодическаго роя метеоритовъ 2—4 мая было отмѣчено въ Америкѣ сильнымъ циклономъ у Sioux-Falls, убившимъ 50 человѣкъ.

В. Г.

ЗАДАЧИ НА ИСПЫТАНІЯХЪ ЗРѢЛОСТИ ВЪ $18^{94}/_{95}$ Г.

Московскій учебный округъ.

Иваново-Вознесенское реальное училище.

VI кл. *Ариѳметика.* Торговецъ имѣлъ товаръ двухъ сортовъ въ 24 руб. и въ 18 руб. за фунтъ. Смѣшавъ 30% числа фунтовъ 1 сорта съ 0,(2) числа фунтовъ 2-го сорта, торговецъ получилъ 9 фунт. смѣси по 20 руб. за фунтъ. Изъ оставшагося количества того и другого сорта онъ сдѣлалъ новую смѣсь. Что стоитъ фунтъ этой новой смѣси?

Геометрія. Сѣченіе прямого круглаго цилиндра плоскостью, проходящею черезъ ось цилиндра, представляетъ прямоугольникъ, у котораго діагональ $= d$, а высота относится къ основанію какъ $m:n$. Въ нижнее основаніе цилиндра вписанъ квадратъ, служащій основаніемъ правильной пирамидѣ, имѣющей вершину въ центрѣ верхняго основанія цилиндра. Опредѣлить объемъ этой пирамиды.

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“ № 215, стр. 256.

(На обѣ задачи назначено 3 ч. 40 м.).

Алгебра. Три числа, сумма которыхъ $= 18$, образуютъ непрерывную ариѳметическую пропорцію; если же первое изъ нихъ увеличить на 1, то они составятъ непрерывную геометрическую пропорцію. Найти эти три числа.

Тригонометрія. Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины одного изъ угловъ тр-ка на противоположную сторону $= a = 15$ метр., дѣлитъ этотъ уголъ на двѣ части, величины которыхъ суть $\alpha = 18^0$, $\beta = 35^0 4' 12''$. Найти длину этого перпендикуляра.

(На обѣ задачи назначено 3 ч. 40 м.).

Алгебра (на вычисленіе). Вмѣсто капитала въ 25000 р., отданнаго на сложные % 18-го августа 1863 года, получено 3-го января 1870 г. 34121 руб. По сколько % былъ отданъ капиталъ? (Мѣсяцъ принимается равнымъ 30 днямъ).

Геометрія (на вычисленіе). Перпендикуляръ AD, опущенный изъ вершины A прямоугольнаго тр-ка BAC на гипотенузу BC, дѣлитъ ее на два отрѣзка: $BD = 2{,}88$ м. и $DC = 5{,}12$ м. Изъ средины M катета AC проведена параллельно катету AB прямая ME, пересѣкающая гипотенузу въ точкѣ E. Вычислить: 1) длину катетовъ тр-ка BAC и 2) боковую поверхность усѣченнаго конуса, производимаго вращеніемъ трапеціи AMEB около AM ($\pi = 3{,}14$).

(На обѣ задачи назначено 3 ч. 40 м.).

Геометрическое черченіе. Данный правильный 6-ти угольникъ обратить въ равновеликій ромбъ, одна изъ діагоналей котораго $= d$.

(На рѣшеніе и исполненіе чертежа назначено 3 часа).

VII дополн. кл. *Дополнит. курсъ алгебры* (4 часа). Найти способомъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ частное и остатокъ отъ дѣленія

$$10x^4 - 9x^3 - 61x^2 - 10x - 2$$

на $2x^2 - 5x - 3$.

Приложеніе алгебры къ геометріи (4 часа). Въ круговой секторъ съ угломъ $= 90^0$, радіусъ котораго $= R$, вписать прямоугольникъ, коего периметръ былъ бы равенъ $2p$ и коего двѣ смежныя стороны расположены по сторонамъ прямого угла сектора. Изслѣдовать рѣшеніе задачи.

ЗАДАЧИ.

№ 218. Безъ помощи тригонометріи вычислить площадь четыреугольника, въ которомъ произведеніе прямыхъ, соединяющихъ середины противоположныхъ сторонъ, равно a^2, а уголъ между этими прямыми содержитъ 150^0.

В. Сахаровъ (Тамбовъ).

№ 219. Безъ помощи тригонометріи опредѣлить по даннымъ сторонамъ вписаннаго въ окружность треугольника ABC стороны и площадь другого треугольника, вписаннаго въ ту же окружность, если углы его суть $\frac{A+B}{2}$, $\frac{B+C}{2}$ и $\frac{C+A}{2}$, гдѣ A, B и C суть углы треугольника ABC.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 220. Рѣшить систему уравненій:

$$\operatorname{tg}(y+x) = 4\sin x + 2\cos x,$$

$$\operatorname{tg}(y-x) = 4\sin x - 2\cos x.$$

(Заимств.). *Д. Е.* (Иваново-Вознесенскъ).

№ 221. Показать, что если A, B, C суть углы треугольника ABC, а A', B', C'—углы, подъ которыми стороны треугольника ABC видны изъ центра круга вписаннаго, то

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\sin A' . \sin B' . \sin C'.$$

(Заимств.). *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка).

№ 222. Рѣшить уравненіе:

$$8x^4 + 8x^3 - x = 190.$$

Ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.

№ 223. Треугольная прямая призма, основаніе которой есть равнобедренный треугольникъ, плаваетъ въ двухъ несмѣшивающихся жидкостяхъ въ такомъ положеніи, что ребро ея, соединяющее вершины обѣихъ основаній, горизонтально. Высота равнобедреннаго треугольника есть h, глубина слоя верхней жидкости a, удѣльный вѣсъ призмы d, удѣльные вѣса жидкостей d' и d''. Опредѣлить разстояніе погруженнаго ребра отъ верхней поверхности болѣе тяжелой жидкости.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 155 (3 сер.). Если отъ нѣкотораго числа отнять 10 и къ полученной разности приписать съ начала цифру 6, а съ конца 4, то получится квадратъ того же числа. Найти это число.

Пусть x есть искомое число. Очевидно, что x можетъ быть только двухзначнымъ или трехзначнымъ числомъ. Полагая x двухзначнымъ, на основаніи условій задачи получимъ уравненіе

$$6000 + (x-10)\,10 + 4 = x^2,$$

откуда $x = 82$.

Если же положимъ, что x, есть трехзначное число, то получимъ уравненіе

$$60000+(x-10)\,10+4=x^2,$$

не имѣющее раціональныхъ корней.

А. Шантырь, М. фонъ Циглеръ, Н. Соловьевъ (Спб.); *Я. Соколовъ* (Курскъ); *Г. Легошинъ* (с. Знаменка); *Д. Сканави* (Ростовъ на Дону); *Г. Левиковъ* (Тамбовъ); *М. Зиминъ* (Орелъ); *Ученики Кіево-Печерской гимназіи Л.* и *Р.*

№ 156 (3 сер.). Показать, что разстояніе центра описаннаго около треугольника круга отъ какой либо изъ сторонъ треугольника вдвое меньше разстоянія ортоцентра отъ вершины угла, противолежащаго этой сторонѣ.

Обозначимъ черезъ O центръ круга, описаннаго около треугольника ABC; пусть будетъ M средина стороны BC, N—средина AC, H—ортоцентръ. Очевидно, что $MN \| AB$ и равно $AB:2$. Такъ какъ $\triangle MON \infty \triangle AHB$, то

$$\frac{OM}{MN}=\frac{HA}{AB}=\frac{HA}{2MN},$$

откуда $2OM=AH$.

L. (Тамбовъ); *И. Барковскій, Э. Заторскій* (Могилевъ губ.); *А. Бачинскій* (Холмъ); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка); *А. Щантырь* (Спб.); *М. Зиминъ* (Орелъ); *ученики Кіево-Печерской гимназіи Л.* и *Р.*

№ 165 (3 сер.). По уравненіямъ

$$a+b.\sin x.\cos x=a'+b'\sin y.\cos y,$$

$$b\sin^2 x=b'\sin^2 y$$

опредѣлить уголъ $\vartheta=x-y$.

Изъ второго уравненія имѣемъ:

$$\sin x=\sin y\sqrt{\frac{b'}{b}} \text{ и } \sin y=\sin x\sqrt{\frac{b}{b'}}.$$

Подставляя эти значенія въ первое изъ данныхъ уравненій, получимъ:

$$a+b\cos x.\sin y\sqrt{\frac{b'}{b}}=a'+b'\cos y.\sin x\sqrt{\frac{b}{b'}},$$

или

$$a-a'=\sqrt{bb'}\,(\sin x.\cos y-\sin y.\cos x)=\sqrt{bb'}.\sin\vartheta,$$

откуда

$$\sin\vartheta=\frac{a-a'}{\sqrt{bb'}}.$$

Ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и *Р.*; *А. Шантырь* (Спб.). *И. Барковскій* (Могилевъ губ.); *П. Бѣловъ* (с. Знаменка); *А. Павлычевъ* (д. Петровская); *А. Варенцовъ* (Шуя).

№ 166 (3 сер.). Данъ треугольникъ ABC. Вычислить безъ помощи тригонометріи стороны другого треугольника, площадь котораго равна площади треугольника ABC и два угла соотвѣтственно равны половинамъ двухъ угловъ треугольника ABC.

Пусть биссекторы угловъ A и B треугольника ABC пересѣкаются въ точкѣ O. Искомый треугольникъ подобенъ, очевидно, треугольнику AOB. Обозначивъ стороны треугольника ABC черезъ a, b, c, периметръ его черезъ $2p$ и площадь черезъ $\triangle$, легко найдемъ, что

$$\text{пл. } AOB = \frac{c.\triangle}{2p}.$$

Площадь искомаго треугольника должна равняться

$$\triangle = \text{пл. } AOB.\frac{2p}{c}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что отношеніе сходственныхъ сторонъ искомаго треугольника и треугольника ABC равно $\sqrt{\frac{2p}{c}}$. Такъ какъ

$$AO = \frac{\sqrt{\triangle^2 + p^2(p-a)^2}}{p},\ BO = \frac{\sqrt{\triangle^2 + p^2(p-b)^2}}{p} \text{ и } AB = c,$$

то искомыя стороны будутъ:

$$\sqrt{2b(p-a)},\ \sqrt{2a(p-b)} \text{ и } \sqrt{2pc}.$$

П. Хлѣбниковъ (Тула); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка); *И. Барковскій* (Могилевъ губ.); *L.* (Тамбовъ); *ученики Кіево-Печерской гимназіи Л.* и *Р.*; *А. Шантырь* (Спб.); *А. Павлычевъ* (д. Петровская); *А. Варенцовъ* (Шуя).

№ 167 (3 сер.). Выраженіе

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

представить въ видѣ суммы двухъ квадратовъ.

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 \pm 2abcd \mp 2abcd =$$
$$= (ac \pm bd) + (bc \mp ad)^2.$$

М. Зиминъ (Орелъ); *А. Бачинскій* (с. Любень); *А. Шантырь* (Спб.); *И. Барковскій* (Могилевъ губ.); *ученики Кіево-Печерской гимназіи Л.* и *Р.*; *П. Бѣловъ* (с. Знаменка); *А. Дмитріевскій* (Цивильскъ); *L.* (Тамбовъ); *А. Павлычевъ* (д. Петровская); *А. Варенцовъ* (Шуя).

Конецъ XVIII-го семестра.

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Одесса, 9-го Августа 1895 г.
„Центральная типо-литографія“, уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. № 39.

4) Центръ круга Longchamps'а описываетъ эллипсъ.

5) Прямая Lemoine'а обертываетъ эллипсъ.

6) Радикальная ось круга 9-ти точекъ и круга Brocard'а обертываетъ эллипсъ.

7) Ур-нія окружностей круга, описаннаго около тр-ка T, круга 9-ти точекъ и круга Brocard'а суть:

$$x^2 + y^2 - \frac{c^2\cos 3\varphi}{2a}x - \frac{c^2\sin 3\varphi}{2b}y - \frac{a^2+b^2}{2} = 0,$$

$$x^2 + y^2 + \frac{c^2\cos 3\varphi}{4a}x + \frac{c^2\sin 3\varphi}{4b} - \frac{a^2+b^2}{8} = 0,$$

$$x^2 + y^2 + \frac{c^4\cos 3\varphi}{4a(a^2+b^2)}x - \frac{c^4\sin 3\varphi}{4b(a^2+b^2)}y - \frac{c^4}{8(a^2+b^2)} = 0,$$

гдѣ a и b—полуоси эллипса, описаннаго около тр-ка T, а φ аномалія вершины этого тр-ка.

8) Изогональныя точки V и V' тр-ка T описываютъ окружности.

9) Прямая VV' проходитъ черезъ точку Lemoine'а и черезъ проэкціи ортоцентра на оси эллипса.

10) Поляра точки Steiner'а относительно круга Brocard'а проходитъ черезъ центръ тяжести тр-ка T.

Arthur Cayley (1821—1895), извѣстный англійскій математикъ, родился 16 авг. 1821 г. въ Ричмондѣ. Будучи юристомъ по профессіи и математикомъ по призванію, онъ съ 1863 г. оставилъ юридическую карьеру и занялъ каѳедру математики въ Кембриджскомъ университетѣ. Кромѣ курса эллиптическихъ функцій (*An Elementary Treatise on Elliptic Functions.* 1876), Cayley написалъ болѣе 800 мемуаровъ, относящихся почти ко всѣмъ отраслямъ математики. Мемуары эти издаются Кембриджскимъ университетомъ съ 1889 г. подъ заглавіемъ: *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley.* За свои труды Cayley былъ избранъ членомъ главнѣйшихъ академій Европы. Скончался онъ 26 янв. 1895 г.

Notes mathématiques. 3. *Note sur le triangle.* Обозначимъ черезъ a, b, c, S стороны и площадь тр-ка ABC и положимъ

$$p_a = \frac{b^2+c^2-a^2}{2},\quad p_b = \frac{c^2+a^2-b^2}{2},\quad p_c = \frac{a^2+b^2-c^2}{2},$$

$$P = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Если H_a, H_b, H_c, H суть основанія перпендикуляровъ тр-ка и ортоцентръ его, то

$$p_a = AH_b . b = AH_c . c = AH.AH_a, \text{ и т. д.}$$

Кромѣ того

$$p_a = bc.\cos A,\ p_b = ca.\cos B,\ p_c = ab.\cos C,$$

$$P = p_a + p_b + p_c;$$

отсюда

$$P^2 + p_a^2 + p_b^2 + p_c^2 = a^4 + b^4 + c^4,$$

$$\frac{ap_a}{\cos A} = \frac{bp_b}{\cos B} = \frac{cp_c}{\cos C} = abc = 4SR;$$

$$\frac{p_b}{p_c} = \frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B},\ S = \frac{1}{2}\sqrt{p_a p_b + p_b p_c + p_c p_a}.$$

1) Равновеликіе тр-ки съ равными P имѣютъ одинъ и тотъ же уголъ Brocard'а; сумма квадратовъ обратныхъ величинъ радіусовъ вписанныхъ круговъ такихъ тр-въ постоянна.

2) При данныхъ вершинахъ B,C тр-ка и данныхъ p_a или p_c, вершина A описываетъ соотвѣтственно окружность или перпендикуляръ къ BC.

3) Тр-ки, вписанные въ одну окружность и имѣющіе общій центръ тяжести (или ортоцентръ), имѣютъ равныя P.

4) *Vocabulaires mathématiques.* Математическій конгрессъ въ *Caen*'ѣ принялъ предложеніе *Mansion'a* составить французско-англійско-италіянско-нѣмецкій словарь математическихъ терминовъ. Проф. *F. Müller* въ Берлинѣ окончилъ составленіе нѣмецкаго математическаго словаря, заключающаго въ себѣ объясненія 5500 терминовъ.

5) *Constructions linéaires du centre de courbure des podaires.* Par *M. d'Ocagne.*

6) *Quadrature approchée du cercle.* Пусть AB — діаметръ круга. Раздѣлимъ радіусъ CA на 6 равныхъ частей; пусть $CG = \frac{1}{6}$ CA и положимъ, что окружность описанная около G радіусомъ $= 2AB$, пересѣкаетъ въ F касательную къ окружности въ точкѣ B. Если прямая AF пересѣкаетъ окружность въ D, то BD^2 приблизительно = площади круга.

Sur les centres de gravité. Par *L. Desaint.* Доказываются слѣдующія предложенія:

1) Пусть G есть центръ тяжести кривой AP; при перемѣщеніи точки P точка G опишетъ кривую; касательная въ этой кривой въ G проходитъ черезъ P. (*E. Cesaro*).

2) Пусть G_1 есть центръ тяжести фигуры, ограниченной кривой △ и ея хордой AP; при перемѣщеніи точки P точка G_1 опишетъ кривую; касательная въ G_1 къ этой кривой дѣлитъ хорду AP въ отношеніи 2:1 (*E. Catalan*).

3) Пусть S есть нѣкоторая поверхность, P—постоянная плоскость а Q перемѣнная плоскость съ постояннымъ направленіемъ, пересѣкающая S по кривой C. Если I есть центръ тяжести площади сѣченія S по C, а G—центръ тяжести объема, ограниченнаго плоскостями P и Q и поверхностью S, то при перемѣщеніи Q точка G опишетъ кривую, касательная къ которой въ G проходитъ черезъ I.

Bibliographie. Mémoire sur l'application d'une méthode vectorielle à l'étude de divers systèmes de droites. Par *A. Demoulin.* Paris 1894.

Cours de géometrie analytique. Par *B. Niewenglowski.* 1894.

Solutions de questions proposées. №№ 835, 891, 893, 904, 920, 924, CXXII, CXXIII (M. C. M).

Quesions d'examen. №№ 682—685.

Questions proposées. №№ 1014—1018. *Д. Е.*

БИБЛІОГРАФИЧЕСКІЙ ЛИСТОКЪ

НОВѢЙШИХЪ ФРАНЦУЗСКИХЪ ИЗДАНІЙ.

Физика, астрономія, физ. географія, метеорологія.

Travaux et *Mémoires* du Bureau international des poids et mesures, publiés sous les auspices du comité international, par le directeur du Bureau. T. 10. In- 4⁰, CCCCLXII--123 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils. fr. 15.

Bloch, F. Eau sous pression. Appareils producteurs d'eau sous pression. In- 16⁰, 180 p. Paris, Gauthier-Villars et fils. fr. 2,50.

Recherches sur les chronomètres et les instruments nautiques. 15-e cahier. In- 8⁰, 70 p. avec fig. Paris. fr. 1,00.

Bagard, H. Sur les forces électromotrices thermoélectriques entre deux électrolytes et le transport électrique de la chaleur dans les électrolytes (thèse). In- 4⁰, 59 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils.

XXI-e Bulletin météorologique annuel du département des Pyrénées-Orientales. Publié par le docteur Fines. (Année 1892). Iu- 4⁰, 44 p. Perpignan, Latrobe.

Обложка
ищется

Обложка
ищется