Обложка
ищется

Обложка
пщется

XVII Сем. 20-го сентября 1894 г. № 4.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 196.

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ЭНЕРГЕТИКИ*).

Мм. гг.! Начиная чтеніе лекцій въ нашемъ университетѣ изложеніемъ механической теоріи теплоты, я хорошо сознаю тѣ значительныя трудности, которыя встрѣтятся при чтеніи этого курса. Нельзя чувствовать себя увѣреннымъ на кафедрѣ, съ которой раньше излагались образцовыя какъ по внутреннему содержанію такъ и по внѣшней отдѣлкѣ лекціи моимъ многоуважаемымъ предшественникомъ Николаемъ Алексѣевичемъ Умовымъ. Глубокая компетенція профессора Умова въ различныхъ отдѣлахъ теоретической физики извѣстна далеко за предѣлами нашего университета. Въ ряду его работъ находится между прочимъ превосходный курсъ математической физики, изданный еще въ 1878 году. Такимъ образомъ на преемника кафедры Николая Алексѣевича ложится нелегкая задача поддержать преподаваніе теоретической физики на весьма значительной высотѣ.

Другая существенная трудность предстоящаго курса заключается въ самомъ предметѣ, въ его глубинѣ, важности и обширности.

Механическая теорія теплоты занимаетъ въ ряду другихъ отдѣловъ физики особое мѣсто. Мѣсто это первенствующее. Подчиняя своимъ основнымъ законамъ всѣ физическія явленія, механическая теорія теплоты имѣетъ дѣло со всѣми отдѣлами физики. Исторія развитія опытныхъ наукъ въ послѣднія десятилѣтія свидѣтельствуетъ о тѣхъ круп-

*) Вступительная лекція проф. Н. Пильчикова, читанная въ Новороссійскомъ университетѣ 6-го сентября 1894 года.

ныхъ пріобрѣтеніяхъ, которыя дѣлаетъ наука о природѣ по мѣрѣ примѣненія къ ней принциповъ механической теоріи тепла. Ряды разрозненныхъ фактовъ и отрывочныхъ обобщеній получаютъ внутреннюю связь, выступаетъ ясно взаимная зависимость различныхъ физическихъ агентовъ и ихъ соподчиненность основнымъ законамъ, которые, въ свою очередь, теряютъ характеръ случайности или эмпиризма, обращаясь въ прямыя логическія слѣдствія двухъ общихъ міровыхъ законовъ, двухъ такъ называемыхъ началъ механической теоріи теплоты. Глубокое значеніе и обширность примѣненія этихъ основныхъ принциповъ обнаруживаются уже изъ того, что они являются законами, не имѣющими исключеній и что имъ подчиняются всѣ явленія, въ которыхъ принимаетъ участіе матерія, совершаются-ли эти явленія въ аморфномъ, кристаллическомъ, органическомъ или организованномъ веществѣ.

Мы посвятимъ нашъ курсъ возможно подробному анализу слѣдствій, вытекающихъ изъ основныхъ законовъ механической теоріи теплоты, а затѣмъ предложимъ краткій очеркъ главнѣйшихъ ея приложеній, теперь же займемся разсмотрѣніемъ основаній ученія объ энергіи вообще и тепловой энергіи въ частности.

Механическая теорія теплоты составляетъ часть *энергетики* т. е. ученія объ энергіи. Ученіе объ энергіи это не отдѣлъ физики, это—вся физика, понимаемая какъ „натуральная философія". Часть ея, изучающая соотношеніе между теплотою и работою, получила не совсѣмъ удачное названіе механической теоріи теплоты, или, болѣе правильное,—*термодинамики*.

Объектъ изслѣдованій въ ученіи объ энергіи это—нѣкоторая реальная сущность, столь же мало поддающаяся нашему пониманію, какъ и другой объектъ изслѣдованія физическихъ наукъ—матерія. Несомнѣнно Тэтъ*) былъ вполнѣ правъ, говоря: „нельзя придумать ничего болѣе нелѣпаго и ненаучнаго, чѣмъ увѣренія нѣкоторыхъ изъ современныхъ quasi-ученыхъ, что наши изслѣдованія приблизятъ насъ къ познанію конечной природы матеріи"; съ тѣмъ же правомъ и подобнымъ же образомъ слѣдуетъ отнестись къ различнымъ попыткамъ постичь сущность энергіи. Хотя такимъ образомъ ни матерія, ни энергія не могутъ быть поняты сами въ себѣ, но и та и другая подчиняются количественнымъ отношеніямъ и представляютъ въ каждомъ частномъ случаѣ величины, по крайней мѣрѣ теоретически, вполнѣ опредѣленныя.

По отношенію къ матеріи еще въ концѣ прошлаго столѣтія Лавуазье установилъ основной законъ или принципъ: *законъ сохраненія матеріи*. Что касается энергіи, то лишь полустолѣтіе спустя Гельмгольцемъ былъ научно обоснованъ вполнѣ тождественный законъ,—*законъ сохраненія энергіи*. Лавуазье училъ о томъ, что ни одна частица вещества не можетъ быть уничтожена или создана при всѣхъ возможныхъ измѣненіяхъ, какія вещество претерпѣваетъ въ физическихъ и химическихъ явленіяхъ; Гельмгольцъ доказываетъ, что ни одинъ элементъ энергіи не можетъ быть уничтоженъ или созданъ при всѣхъ возможныхъ физическихъ и химическихъ процессахъ.

*) Обзоръ нѣкоторыхъ изъ новѣйшихъ успѣховъ Физическихъ Знаній, стр. 257.

Необычайная важность закона сохраненія энергіи признана однако лишь въ послѣднія десятилѣтія. Знаменитый мемуаръ Гельмгольца „о сохраненіи силы“ былъ настолько мало оцѣненъ при своемъ появленіи, что не былъ даже признанъ достойнымъ помѣщенія въ нѣмецкомъ физическомъ журналѣ, въ который онъ былъ посланъ. А между тѣмъ идеи, развитыя въ этомъ мемуарѣ, были далеко не новы, нова была ихъ научная обоснованность и широта взгляда, охватившаго всѣ вѣтви физики, включая сюда и химію. Въ самомъ дѣлѣ, еще Галилей училъ о томъ, что машины не создаютъ работы, а лишь преобразуютъ ее. Онъ первый отвергъ возможность осуществленія вѣчнаго движенія—завѣтной мечты многихъ изобрѣтателей—и, анализируя дѣйствіе простыхъ машинъ, доказалъ, что хотя меньшая сила можетъ уравновѣшивать, напримѣръ на рычагѣ, силу большую, но при движеніи никакого выигрыша въ работѣ все таки не получается, т. е. работы обѣихъ силъ, большой и малой, совершенно равны. Начало Галилея подверглось въ послѣднее время обобщенію и теперь понимается такимъ образомъ, что вѣчное движеніе не можетъ быть осуществленно не только при помощи простыхъ машинъ, но что оно невозможно, какой бы физическій или химическій дѣятель или совокупность дѣятелей не была положена въ основу работающей системы. Понимаемое въ этомъ широкомъ смыслѣ начало Галилея имѣетъ важное научное значеніе и изъ него выводится множество цѣнныхъ слѣдствій, однако оно не можетъ замѣнить начала сохраненія энергіи, такъ какъ учитъ лишь о невозможности создать работу. Но можетъ быть мы могли бы ее уничтожить? Принципъ Галилея не даетъ намъ отвѣта на этотъ вопросъ, начало сохраненія энергіи отвѣчаетъ опредѣленно: не можемъ. Итакъ, первымъ міровымъ закономъ, закономъ абсолютно общимъ является начало сохраненія энергіи.

Важность этого закона безспорна. Чѣмъ же мы можемъ доказать его? Какова степень его вѣроятности?

Пуанкаре*) разсматривая этотъ вопросъ, говоритъ слѣдующее: „Одинъ знаменитый физикъ мнѣ сказалъ однажды по поводу закона ошибокъ: „всѣ твердо вѣрятъ въ этотъ законъ, потому что математики воображаютъ, что законъ ошибокъ ничто иное, какъ результатъ наблюденій, а наблюдатели увѣрены въ томъ, что этотъ законъ представляетъ собою математическую теорему. Долго дѣло обстояло подобнымъ же образомъ и по отношенію къ закону сохраненія энергіи, однако нынѣ вопросъ стоитъ иначе и всѣ знаютъ, что начало сохраненія энергіи—опытный фактъ“.

Въ самомъ дѣлѣ, при всѣхъ процессахъ, когда происходитъ уменьшеніе энергіи какого либо вида, прямыя измѣренія позволяютъ найти почти такое же ея количество, появляющееся въ какой либо иной формѣ. Чѣмъ совершеннѣе приборы, съ помощью которыхъ измѣряется энергія, и чѣмъ точнѣе методы изслѣдованія, тѣмъ болѣе согласными оказываются отдѣльныя измѣренія эквивалентныхъ количествъ энергіи, а потому въ законности того предположенія, что при всѣхъ случаяхъ

*) H. Poincaré, Thermodynamique, p. V.

трансформаціи количество энергіи остается неизмѣннымъ, нѣтъ основаній усомниться. Находимыя всегда при опытныхъ опредѣленіяхъ различія вполнѣ объясняются неизбѣжными ошибками измѣреній. Такъ же точно никто не сомнѣвается въ вѣрности начала сохраненія матеріи не смотря на то, что при всѣхъ химическихъ процессахъ всегда небольшой процентъ реагирующихъ веществъ пропадаетъ, конечно лишь въ грубомъ смыслѣ невозможности быть взвѣшеннымъ или измѣреннымъ какимъ либо инымъ способомъ.

Принимая начало сохраненія энергіи не приблизительно, но абсолютно приложимымъ ко всѣмъ наблюдавшимся случаямъ ея преобразованія, мы дѣлаемъ дальнѣйшее обобщеніе и утверждаемъ, что это начало столь же непреложно и для всѣхъ бывшихъ и будущихъ случаевъ преобразованія энергіи. Законность такого обобщенія много разъ подвергалась разсмотрѣнію философовъ, которые тщетно старались рѣшить вопросъ въ ту или другую сторону. Но дѣло въ томъ, какъ справедливо говоритъ Пуанкаре*), что если бы мы не считали себя въ правѣ обобщать подобнымъ образомъ эмпирическія данныя, то „наука не могла бы вовсе существовать или по меньшей мѣрѣ, будучи сведенной къ нѣкотораго рода описи, перечню отдѣльныхъ фактовъ, не имѣла бы для насъ никакой цѣны, такъ какъ не могла бы доставить удовлетворенія нашей потребности въ порядкѣ и гармоніи и была бы въ то же время совершенно неспособна что либо предвидѣть".

Не безъинтересно замѣтить, что еще задолго до введенія въ науку начала сохраненія энергіи многіе замѣчательные ученые какъ бы предчувствовали его необходимость, пытаясь апріорно найти нѣчто, что оставалось бы въ природѣ неизмѣннымъ. Такъ Декартъ, исходя изъ теологическаго положенія о Богѣ какъ неизмѣнной Сущности, пришелъ къ заключенію о неизмѣнности въ природѣ количества движенія. Ложность принципа Декарта не подлежитъ сомнѣнію. Идя по тому же метафизическому пути, Лейбницъ высказалъ идеи, болѣе близкія къ нынѣшнему ученію о сохраненіи энергіи. По Лейбницу въ природѣ сохраняется неизмѣннымъ „движущее дѣйствіе", которое состоитъ изъ „живой силы" и „скрытаго дѣйствія"; введенное имъ въ механику понятіе о живой силѣ послужило затѣмъ къ установленію такъ называемой теоремы живыхъ силъ, представляющей, хотя частную, но вполнѣ точную схему начала сохраненія энергіи.

Различныя попытки найти апріорнымъ, метафизическимъ путемъ основной законъ всѣхъ явленій матеріяльнаго міра не увѣнчались однако успѣхомъ и начало сохраненія энергіи было и будетъ закономъ опытнымъ, т. е. законнымъ обобщеніемъ опытныхъ данныхъ.

Разсмотримъ теперь, какимъ образомъ начало сохраненія энергіи прилагается къ термодинамикѣ.

Важная заслуга Мора, Сегена, Мейера, Кольдинга и Джауля заключается въ томъ, что они установили, а послѣдній изъ нихъ и доказалъ опытно, что теплота не есть какая нибудь самостоятельная первичная сущность или „невѣсомая жидкость", но лишь одинъ изъ видовъ

*) l. c. p. VI.

энергіи. Изъ этого положенія вытекаетъ другое, которое и принимается за первое начало термодинамики: теплота эквивалентна работѣ.

Если принять, какъ предложилъ Липманъ, за единицу теплоты термію, то основной законъ термодинамики выразится положеніемъ: одна термія равна одному эргу. Въ обычныхъ единицахъ, на основаніи лучшихъ опытныхъ измѣреній принимаютъ, что одна (истинная) калорія равна $427\frac{1}{2}$ килограмметрамъ.

Мы уже говорили о полной аналогіи основного закона физики— начала сохраненія энергіи и основного закона химіи—начала сохраненія матеріи. Часто считаютъ, что принципъ эквивалентости вноситъ существенное различіе между энергіей и матеріей, такъ какъ въ то время, какъ по смыслу этого принципа, превращенія могутъ происходить между всѣми видами энергіи: тепловымъ, лучистымъ, электрическимъ, магнитнымъ и проч., ни одно химически простое тѣло не можетъ быть превращено въ какое либо другое химически простое тѣло. Однако, помимо того, что идея генезиса химическихъ элементовъ изъ первичнаго матеріальнаго агента можетъ рано или поздно получить какія либо подтвержденія, можно и теперь указать на явленія аллотропіи и изомеріи, какъ представляющія точную аналогію закону эквивалентности. Граммъ алмаза не можетъ быть правращенъ въ два грамма графита, или килограммъ какого либо спирта въ пять килограммовъ соотвѣтствующаго изо-спирта.

Основной законъ природы — принципъ эквивалентности -- рѣшая опредѣленно вопросъ о количественномъ отношеніи между различными видами энергіи при ихъ взаимномъ превращеніи, оставляетъ совершенно въ сторонѣ вопросъ о томъ, *при какихъ условіяхъ одинъ видъ энергіи дѣйствительно переходитъ въ другой и, вообще, когда энергія можетъ переходитъ съ одного тѣла на другое и когда не можетъ?*

Прежде чѣмъ дать отвѣтъ на этотъ вопросъ, необходимо обратить вниманіе на качественныя и количественныя отношенія энергіи.

Съ точки зрѣнія количественныхъ отношеній, энергія, въ какомъ бы видѣ она не проявлялась, вполнѣ опредѣляется однимъ параметромъ и, слѣдовательно, можетъ быть измѣрена нѣкоторыми единицами. Можно было бы согласиться назвать единицу энергіи, какого бы то ни было вида „*энергъ*" и, слѣдовательно, энергъ былъ бы не эквивалентенъ, но равенъ единицѣ теплоты, единицѣ электрической энергіи, единицѣ живой силы и т. д. Что касается качественныхъ отношеній, то энергія опредѣляется съ двухъ сторонъ: *видомъ* и *напряженіемъ*. Видовое названіе дается энергіи по тому физическому дѣятелю, помощью котораго она проявляется, подъ напряженіемъ же разумѣется нѣкоторый параметръ, столь же существенно характеризующій энергію, какъ и ея количество. Будучи признакомъ количественнымъ, напряженіе представляетъ, однако, параметръ перемѣнный и, слѣдовательно, въ свою очередь можетъ быть измѣряемо по нѣкоторой скалѣ. Для различныхъ видовъ энергіи напряженіе получило различныя названія. По отношенію къ тепловой энергіи напряженіе называется температурой, по отношенію къ электрической, магнитной, частичнаго притяженія — потенціаломъ и т. д.

Для правильнаго и систематическаго развитія ученія объ энергіи вообще и о теплотѣ въ частности весьма важно имѣть общій однообразный критерій для опредѣленія въ каждомъ частномъ случаѣ, какое изъ двухъ сравниваемыхъ напряженій больше. Прежде чѣмъ дать этотъ критерій, обратимъ вниманіе на одно основное характерное различіе между матеріей и энергіей. Матерія стремится сохранить состояніе покоя и обнаруживаетъ сопротивленіе всякой попыткѣ къ перемѣщенію ее въ пространствѣ. Энергія стремится разсѣяться, уйти и обнаруживаетъ сопротивленіе всякой попыткѣ къ удержанію ея въ тѣлѣ. Итакъ, основное свойство энергіи—стремленіе къ разсѣянію. Представимъ себѣ два тѣла, обладающія нѣкоторымъ запасомъ энергіи одного и того же вида. Если физическія условія, въ которыя поставлены эти тѣла, не устраняютъ возможности къ обмѣну между ними энергіи, то могутъ представиться два случая: или энергія не будетъ переходить изъ одного тѣла въ другое, или же количество энергіи станетъ убывать на одномъ тѣлѣ и возрастать на другомъ. Въ первомъ случаѣ будемъ считать напряженіе энергіи на обоихъ тѣлахъ одинаковымъ, во второмъ—*условимся называть то тѣло, изъ котораго энергія уходитъ, тѣломъ, имѣющимъ энергію высшаго напряженія*, *а тѣло, въ которое энергія переходитъ—имѣющимъ энергію съ напряженіемъ низшимъ.*

Сдѣланныя замѣчанія позволяютъ формулировать второй основной законъ энергіи для частнаго случая перехода энергіи какого-либо вида съ сохраненіемъ вида.

Въ явленіяхъ распространенія энергіи съ сохраненіемъ ея вида энергія уходитъ оттуда, гдѣ ея напряженіе больше, и переходитъ туда, гдѣ ея напряженіе меньше. Замѣтимъ, что этотъ законъ, въ отличіе отъ перваго основного закона—закона сохраненія энергіи,—не требуетъ по существу дѣла никакихъ опытныхъ подтвержденій. Въ примѣненіи къ тепловой энергіи онъ выражается такъ называемой аксіомой Клаузіуса: *теплота не можетъ быть переведена изъ холоднаго тѣла въ теплое безъ затраты на это работы или безъ одновременнаго перехода теплоты изъ теплаго тѣла въ холодное.* При изложеніи курса мы разсмотримъ главнѣйшія сомнѣнія, выказывавшіяся по поводу аксіомы Клаузіуса, которая подвергалась разнообразнымъ истолкованіямъ. По мѣткому замѣчанію проф. Ѳ. Н. Шведова, добрая часть этихъ сомнѣній и толкованій могла бы и не появиться, если бы ихъ авторы обратили нѣсколько больше вниманія на то обстоятельство, что *названія не доказываются.* Въ самомъ дѣлѣ, если мы назовемъ теплымъ то тѣло, изъ котораго теплота уходитъ, а холоднымъ то, въ которое она приходитъ, то доискиваться, не можетъ-ли теплота перейти изъ холоднаго тѣла въ теплое совершенно столь же основательно, какъ доискиваться, не можетъ ли меньшая величина быть больше большей. „Конечно можетъ", можно было бы отвѣтить на послѣдній вопросъ—и это было бы въ духѣ термодинамическихъ толкованій, но лишь при условіи, что мы къ меньшей величинѣ присоединимъ приличное число единицъ.

Кромѣ явленій перехода энергіи съ пониженіемъ ея напряженія въ природѣ происходятъ постоянно процессы превращенія энергіи изъ одного вида въ другой. Такъ какъ мы не имѣемъ никакихъ апріорныхъ данныхъ для опредѣленія условій подобныхъ превращеній, то необходимо обратиться къ наблюденію и опыту, единственнымъ надежнымъ источникамъ нашихъ познаній о внѣшнемъ мірѣ.

Наблюденіе и опытъ показываютъ, что, во 1-хъ, *всѣ виды энергіи сами стремятся перейти въ концѣ концовъ въ тепловой видъ*. Во 2-хъ, что *энергія любого вида, кромѣ тепловой, можетъ быть превращена въ энергію всякаго другого вида, въ томъ числѣ и въ тепловую, нацѣло;* и въ 3-хъ, *что тепловая энергія можетъ быть превращена въ любую другую лишь отчасти;* другая ея часть остается неизмѣнно въ тепловой формѣ и притомъ съ пониженной напряженностью.

Вскорѣ послѣ того, какъ Гельмгольцъ развилъ во всей широтѣ принципъ эквивалентности и сохраненія энергіи, серъ Вильямъ Томсонъ ввелъ въ науку новый и столь же общій принципъ, названный имъ *принципомъ разсѣянія энергіи*. Тэтъ придаетъ новому принципу названіе принципа упадка энергіи. Принципъ Томсона можно было бы назвать началомъ деградаціи или пониженія полезности энергіи. Дѣло въ томъ, что энергію, помимо ея количества и напряженія, можно изучать еще съ нѣкоторой стороны:—со стороны способности ея превращаться изъ одного вида въ другой. Условимся измѣрять *полезность* энергіи количествомъ работы, которая можетъ быть получена изъ даннаго количества энергіи. Въ такомъ случаѣ, на основаніи опытныхъ данныхъ, различные виды энергіи могутъ быть отнесены къ двумъ категоріямъ. Къ категоріи высшей полезности относятся тѣ виды, которые превращаются въ работу нацѣло; таковы энергія тяготѣнія, энергія электрическая, энергія магнитная и др.; въ категорію низшей полезности входитъ тепловая энергія, могущая превращаться въ работу лишь отчасти. Такъ какъ всѣ виды энергіи стремятся перейти въ категорію низшей полезности—теплоту, а теплота въ свою очередь стремится уйти изъ теплыхъ тѣлъ въ тѣла холодныя, при чемъ ея полезность, какъ будетъ въ послѣдствіи доказано, понижается, то принципъ деградаціи энергіи дѣйствительно оказывается столь же основнымъ принципомъ въ ученіи объ энергіи, какъ и начало ея сохраненія.

Мы не будемъ вовсе касаться вопроса о томъ, какъ велика вѣроятность принципа Томсона, такъ какъ этотъ вопросъ долженъ быть трактуемъ совершенно такъ же, какъ и вопросъ о вѣроятности перваго принципа, о чемъ уже говорилось.

Итакъ, въ ученіи объ энергіи вообще и въ термодинамикѣ въ частности на основаніи научнаго обобщенія опытныхъ данныхъ лежатъ два общихъ закона. Первый учитъ о томъ, что при всѣхъ явленіяхъ матеріальнаго міра количество энергіи остается неизмѣннымъ, а второй о томъ, что полезность ея неизбѣжно убываетъ.

Для того, чтобы составить себѣ понятіе о той существенной помощи въ дѣлѣ изученія свойствъ тѣлъ и законовъ явленій, которую доставляютъ основные принципы ученія объ энергіи, достаточно разсмотрѣть нѣсколько примѣровъ приложенія этихъ принциповъ. Прежде чѣмъ это сдѣлать, скажемъ два слова о классификаціи различныхъ видовъ энергіи. Выше мы замѣтили, что видовыя названія энергія получаетъ отъ тѣхъ физическихъ дѣятелей, помощью которыхъ она проявляется. Такая классификація совершенно естественна, однако она страдаетъ тѣмъ недостаткомъ, что въ ней не оттѣняется основное различіе, зависящее отъ отношеній энергіи ко времени и къ пространству. Съ этой точки зрѣнія всѣ виды энергіи раздѣляются лишь на два типа: типъ энергіи, зависящей отъ движенія,—*энергія движенія* или *кинетическая энергія*, и типъ энергіи, зависящей отъ относительнаго положенія вѣсомыхъ или невѣсомыхъ массъ (планетъ, физическихъ тѣлъ, частицъ, электрическихъ зарядовъ, магнитныхъ элементовъ и проч.), т. е. отъ конфигураціи системы—это *энергія положенія* или *потенціальная* энергія.

Полная энергія какой либо системы массъ выражается всегда суммой двухъ членовъ—энергіи кинетической и энергіи потенціальной. Если мы будемъ разсматривать систему, изолированную отъ дѣйствія на нее всего внѣшняго міра, то начало сохраненія энергіи въ примѣненіи къ такой системѣ выразится положеніемъ: *полная энергія системы сохраняетъ неизмѣнную величину*.

Если бы система не была изолирована отъ дѣйствія внѣ ея лежащихъ массъ, то энергія могла бы диффундировать въ систему или изъ системы, однако начало сохраненія энергіи не потеряло бы своего значенія, и лишь въ выраженіе энергіи вошли бы члены, зависящіе отъ всѣхъ массъ, находящихся во взаимодѣйствіи съ данною системою. *Убыль или прибыль энергіи въ системѣ находилась бы при этомъ въ совершенномъ равенствѣ съ прибылью или убылью энергіи въ массахъ, на данную систему дѣйствующихъ.*

Ученіе о потенціальной и кинетической энергіи, переводя вопросъ объ энергіи изъ сферы абстрактныхъ соображеній на чисто механическую почву, доставляетъ прежде всего нѣкоторыя существенно важныя свѣдѣнія о всѣхъ вообще силахъ, дѣйствующихъ въ природѣ.

Разсмотримъ сначала простѣйшій случай какой-либо массы (тяготѣющей, магнитной, электрической, эфирной и т. д.) находящейся въ полѣ дѣйствія какихъ-либо силъ. Выберемъ совершенно произвольно два какія-либо положенія этой массы, оба въ полѣ дѣйствія силъ. Взятая масса, вообще говоря, можетъ быть переведена изъ I-го положенія во II-ое и возвращена изъ II въ I по безчисленному множеству путей. Начало сохраненія энергіи, въ примѣненіи къ данному случаю, выразится слѣдующимъ положеніемъ: *работа всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на данную массу при перемѣщеніи массы изъ I положенія во II по какой бы то ни было траекторіи, представляетъ собою величину опредѣленную, независящую отъ пути, и опредѣляемую лишь конечными точками пути, т. е. координатами положенія I и положенія II.*

Въ самомъ дѣлѣ, если бы величина работы силъ была различна для различныхъ путей, по которымъ можно перевести взятую массу изъ положенія I въ положеніе II или обратно, такъ что по нѣкоторому пути α она была бы меньше, чѣмъ по какому либо другому пути β, то мы могли бы нашу массу подвергнуть слѣдующему циклу измѣненій: перевесть ее изъ положенія I въ положеніе II по пути α, на что затратили бы нѣкоторую роботу, а затѣмъ возвратить нашу массу назадъ по пути β при чемъ, по условію, получили бы уже большую работу. Такимъ образомъ въ концѣ этого цикла измѣненій мы располагали бы избыткомъ работы, созданнымъ изъ ничего. Такъ какъ съ возвращеніемъ взятой массы въ положеніе I какъ масса, такъ и дѣйствующія на нее силы находились бы совершенно въ тѣхъ же отношеніяхъ, какъ и до начала цикла, то, слѣдовательно, можно было бы вновь выполнить тотъ же циклъ и вновь получить избытокъ работы и т. д. Этотъ избытокъ работы можно было бы утилизировать для осуществленія perpetuum mobile, что противорѣчитъ закону сохраненія энергіи. Къ этому противорѣчію мы пришли допущеніемъ неравенства работъ для различныхъ путей между положеніемъ I и положеніемъ II, слѣдовательно допущеніе это неправильно. Такимъ образомъ работа дѣйствительно оказывается нѣкоторою опредѣленной функціей лишь координатъ положенія I-го и положенія II-го, что возможно только въ томъ случаѣ, какъ это доказывается въ механикѣ, когда дѣйствующія на данную массу силы относятся къ числу силъ центральныхъ, происходящихъ вслѣдствіе притяженій или отталкиваній между данною массою и массами ее окружающими.

Проф. *Н. Пильчиковъ.*

(*Окончаніе слѣдуетъ*).

ОЧЕРКЪ

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛОБАЧЕВСКАГО.

(*Продолженіе*)*.

Одно только свойство отличаетъ, на первый взглядъ, существенно орисферу отъ плоскости: орисфера не допускаетъ наложенія фигуръ другой стороной.

Это обстоятельство играетъ несомнѣнно существенную роль съ точки зрѣнія реальной. Но при изложеніи сферической геометріи мы уже старались обнаружить, что съ формальной точки зрѣнія это различіе не имѣетъ такого важнаго значенія; даже наоборотъ, при извѣстныхъ соглашеніяхъ оно не оказываетъ *никакого* вліянія на формальную систему. Возвратимся къ этому вопросу еще разъ и обнаружимъ, что дѣло обстоитъ такимъ же образомъ на предѣльной поверхности.

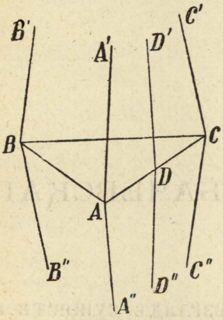
Въ планиметріи мы прибѣгаемъ къ наложенію фигуръ другой стороной въ томъ случаѣ, когда намъ приходится сравнивать фигуры—и прежде всего треугольники, въ которыхъ равныя стороны расположены въ обратномъ порядкѣ относительно равныхъ угловъ. Чтобы изложить понятнѣе, какъ трактуется этотъ вопросъ на орисферѣ, разсмотримъ частный случай, именно разсмотримъ два треугольника на предѣльной сферѣ, въ которыхъ двѣ стороны одного равны двумъ сторонамъ другого и углы между ними также равны. Положимъ, что въ треугольникахъ ABC и abc равныя стороны AB и BC, ab и $b'c'$ одинаково расположены относительно равныхъ угловъ ABC и abc. Тогда мы убѣждаемся

---

*) См. „В. О. Ф.“ №№ 174, 178, 179, 183, 187, 188, 189, 190, 194 и 195.

непосредственнымъ наложеніемъ въ томъ, что треугольники конгруэктны. Когда же соотвѣтствующія стороны расположены въ обратномъ порядкѣ по отношенію къ равнымъ угламъ, то наложенія совершить нельзя. Въ этомъ случаѣ мы построимъ орисферу, проходящую черезъ вершины треугольника ABC и симметричную данной. Треугольникъ, который расположенъ на этой орисферѣ и имѣетъ тѣ-же вершины, называется *симметричиымъ* по отношенію къ данному. Стороны симметричныхъ треугольниковъ соотвѣтственно равны, какъ предѣльныя дуги, имѣющія равныя хорды (см. *i*). Докажемъ, что ихъ углы также соотвѣтственно равны.

Уголъ при вершинѣ A въ одномъ треугольникѣ опредѣляется плоскостями $A'AC$ и $A'AB$, предполагая, что AA' представляетъ собою ось. Уголъ при той же вершинѣ въ другомъ треугольникѣ составленъ плоскостями $A''AC$ и $A''AB$, предполагая конечно, что AA'' представляетъ собой ось второй поверхности. Проводимъ въ плоскостяхъ $A'AC$ и $A''AC$ къ сторонѣ AC перпендикуляры DD' и DD'' изъ ея середины D. Тогда $DD' \| AA'$ и $DD'' \| AA''$, такъ какъ перпендикуляръ, возставленный изъ середины хорды предѣльной линіи параллеленъ оси. Слѣдовательно,



Фиг. 17.

$$\angle A'AC = \Pi(AD) \text{ и } \angle A''AC = \Pi(AD),$$

такъ что $\angle A'AC = \angle A''AC$; такимъ же образомъ обнаружимъ, что $\angle A'AB = \angle A''AB$. Слѣдовательно, въ трегранныхъ углахъ $(A, A'BC)$ и $(A, A''BC)$ плоскіе углы соотвѣтственно равны, а потому и двугранные углы (AA') и (AA'') равны. Однако, въ треугольникѣ симметричномъ по отношенію къ данному, стороны расположены въ обратномъ порядкѣ относительно равныхъ угловъ. Поэтому, если мы теперь сравнимъ треугольникъ *abc* съ треугольникомъ, вновь построеннымъ, то у нихъ не только соотвѣтствующіе стороны и углы будутъ равны, но стороны будутъ также одинаковы расположены по отношенію къ равнымъ угламъ; они будутъ поэтому конгруэнтны. Названіе „симметричныхъ" относительно треугольниковъ ABC можно распространить на всѣ треугольники вида *abc*, которые могутъ быть приведены въ совмѣщеніе съ треугольникомъ ABC, расположеннымъ на симметричной орисферѣ. Тогда мы получимъ такое предложеніе: если двѣ стороны одного треугольника равны двумъ сторонамъ другого, и углы, заключенные между равными сторонами также равны, то треугольники либо конгруэнтны, либо симметричны. Въ томъ и другомъ случаѣ всѣ стороны и углы попарно равны, при чемъ равные углы противолежатъ равнымъ сторонамъ. Условимся теперь называть два треугольника на предѣльной поверхности *тождественными* въ томъ случаѣ, когда они либо конгруэнтны, либо симметричны. Послѣ такого соглашенія предыдущія положенія формулируются слѣдующимъ образомъ. Если двѣ стороны одного треугольника соотвѣтственно равны двумъ сторонамъ другого треугольника, и углы между ними равны, то треугольники тождественны. При этомъ, въ тождественныхъ треугольникахъ третьи стороны также равны, и противъ равныхъ сторонъ лежатъ равные углы. Мы видимъ, что это предложенiе, съ формальной стороны, рѣшительно ничѣмъ не отличается отъ соотвѣтствующаго предложенiя плоской геометрiи. Если читатель примѣнитъ къ орисферѣ всѣ тѣ соображенiя о тождествѣ, которыя мы изложили въ главѣ, посвященной сферической геометрiи, то онъ убѣдится, что геометрiя на орисферѣ съ формальной точки зрѣнiя не измѣнится отъ того, что эта поверхность не допускаетъ наложенiя другой стороной. Не измѣнится въ томъ смыслѣ, что каждому предложенiю на плоскости будетъ соотвѣтствовать предложенiе на предѣльной поверхности, которое формулируется буквально въ тѣхъ же словахъ. Правда, всякiй разъ когда мы будемъ говорить о тождествѣ на предѣльной поверхности, то мы будемъ соединять съ этимъ понятiемъ не вполнѣ то представленiе, которое ему соотвѣтствуетъ на плоскости. Но формальная система отъ этого нисколько не страдаетъ: идея симметрiи вполнѣ замѣняетъ наложенiе поверхности другой стороной*).

Чтобы освѣтить этотъ вопросъ съ другой стороны, взглянемъ на дѣло съ нѣсколько иной точки зрѣнiя. Мы говорили выше („Вѣст." № 188 стр. 175), что геометрiю каждой поверхности, въ томъ числѣ, конечно, и геометрiю на плоскости, можно строить, оставаясь въ предѣлахъ этой поверхности, т. е. не переходя въ третье измѣренiе. Ясное дѣло, что плоская геометрiя при такихъ условiяхъ нѣсколько бы измѣнилась, именно: симметричныя фигуры не допускали бы совмѣщенiя. Каждый случай тождества треугольниковъ распался бы на два случая: —на случай конгруэнтности и случай симметрiи. Но метрическiя соотношенiя элементовъ плоской геометрiи, не могутъ, очевидно, измѣниться отъ того, позволимъ ли мы себѣ переходить въ третье измѣренiе или нѣтъ. Если же мы условимся называть плоскiя фигуры тождественными, какъ въ томъ случаѣ, когда онѣ конгруэнтны, такъ и въ томъ случаѣ, когда онѣ симметричны, — то различiе, вызванное тѣмъ, что мы ограничили свободу перемѣщенiя плоскихъ фигуръ, изчезнетъ, по крайней мѣрѣ, съ формальной точки зрѣнiя,—т. е. теоремы будетъ формулироваться буквально точно такъ же, какъ они формулировались раньше.

Начала, на которыхъ строится геометрiя предѣльной поверхности, отличаются отъ принциповъ, на которыхъ основывается плоская геометрiя, только тѣмъ, что первая не допускаетъ наложенiя фигуръ другой сторонной,—поэтому геометрiя на орисферѣ будетъ отличаться отъ планиметрiи на столько, на сколько отличается плоская геометрiя, построенная безъ пособiя третьяго измѣренiя, отъ обыкновенной планиметрической системы. Отсюда ясно, что и это различiе устранится, когда мы введемъ тѣ соглашенiя, о которыхъ была рѣчь выше.

*) Лобачевскiй ограничивается по этому вопросу слѣдующимъ замѣчанiемъ, которымъ, конечно, вполнѣ исчерпываетъ сущность дѣла: «что же касается до взгляда на треугольникъ съ противоположной стороны, то здѣсь это замѣняется составленiемъ *оборотнаго треугольника*, подъ которымъ, также какъ на сферѣ, будемъ разумѣть такой, гдѣ бока слѣдуютъ въ другомъ направленiи». („Новыя начала" ст. 121).

Другiе авторы совершенно обходятъ вопросъ молчанiемъ. Между тѣмъ намъ приходилось лично убѣждаться (и даже неоднократно), что этотъ пунктъ вызываетъ серьезныя затрудненiя, если читатель хочетъ искренне и добросовѣстно отнестись къ вопросу. Поэтому мы сочли нужнымъ остановиться на немъ подробно.

И такъ, тождество принциповъ убѣждаетъ насъ, что геометрія на предѣльной поверхности совпадаетъ съ геометріей на плоскости въ тѣхъ частяхъ, которыя не зависятъ отъ теоріи параллельныхъ линій. Чтобы рѣшить вопросъ о дальнѣйшемъ развитіи геометріи этой поверхности, необходимо разсмотрѣть вопросъ объ XI-мъ постулатѣ.

Положимъ, что мы имѣемъ на орисферѣ двѣ не встрѣчающіяся предѣльныя линіи. Пусть одна проходитъ черезъ точку L, другая черезъ точку K. Оси проходящія черезъ эти точки обозначимъ черезъ LL′ и KK′. Плоскости, въ которыхъ лежатъ эти предѣльныя линіи, не могутъ встрѣчаться. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что эти плоскости пересѣкаютъ по прямой M′M. Такъ какъ плоскости соотвѣтственно заключаютъ параллельныя прямыя LL′ и KK′, то прямая MM′ параллельна этимъ прямымъ, т. е. служитъ осью поверхности. Пусть M точка, въ которой она встрѣчаетъ поверхность. Эта точка, будучи расположена, какъ на первой плоскости, такъ и на орисферѣ, принадлежитъ также первой предѣльной линіи. На основаніи такихъ-же соображеній убѣдимся, что точка M лежитъ и на второй предѣльной линіи, между тѣмъ по условію эти кривыя не имѣютъ общихъ точекъ. Плоскости, слѣдовательно, не пересѣкаются. Съ другой стороны, всякая плоскость, проходящая черезъ точку K и пересѣкающая орисферу по предѣльной линіи, заключаетъ ось KK′. Такъ какъ черезъ данную прямую, параллельную данной плоскости, всегда можно провести *одну и только одну* плоскость, не встрѣчающую данной, (см. „Вѣст". № 190 стр. 224) то находимъ, что *черезъ данную точку на орисферѣ всегда можно провести одну и только одну предѣльную линію, не встрѣчающую данной предѣльной линіи, расположенной на той же поверхности.*

Такимъ образомъ на предѣльной поверхности постулатъ Евклида справедливъ и слѣдовательно:

Геометрія на предѣльной поверхности совпадаетъ съ системой Евклида.

И такъ, если мы отвергнемъ XI постулатъ Евклида, то распредѣленіе и относительное положеніе основныхъ геометрическихъ образовъ въ пространствѣ измѣняется кореннымъ образомъ. Но система Евклида, разсматриваемая съ формальной точки зрѣнія, какъ извѣстный рядъ умозаключеній изъ опредѣленныхъ посылокъ не рушится: она переносится только на другую поверхность.

Отсюда слѣдуетъ, что опровергнуть систему Евклида, правильнѣе, XI постулатъ со всѣми его логическими слѣдствіями, сохранивъ остальные постулаты, невозможно. Въ самомъ дѣлѣ, если постулатъ справедливъ на плоскости, то его нельзя опровергнуть по существу дѣла; если постулатъ не справедливъ на плоскости, то онъ примѣняется къ предѣльной поверхности—и опровергнуть его въ такой-же мѣрѣ невозможно.

Полученный результатъ можно было предвидѣть, исходя изъ слѣдующихъ соображеній. Мы видѣли, что сферическая геометрія не зависитъ отъ постулата Евклида. Мы видѣли далѣе, что геометрія безконечно малыхъ на сферѣ совпадаетъ съ геометріей Евклида. Правильнѣе, геометрія на сферѣ приближается къ геометріи Евклида по мѣмѣ того, какъ площади и стороны фигуръ, подлежащихъ разсмотрѣнію, убываютъ. Къ этому выводу насъ приводятъ (см. „Вѣстн." № 187 стр. 191) два соображенія. Во-первыхъ, сумма угловъ сферическаго треугольника, равная $2\pi+s$, стремится къ 2π, когда площадь s стремится къ нулю; во-вторыхъ, въ предѣлахъ небольшихъ фигуръ можно принимать, что дуга большого круга вполнѣ опредѣляется двумя точками. Но площадь треугольника въ равенствѣ $A+B+C=2\pi+s$ выражена въ частяхъ сферы. Поэтому, когда мы говоримъ о весьма малыхъ фигурахъ, то разумѣемъ, что размѣры ихъ ничтожны по сравненію со всей сферой. Но такое уменьшеніе можетъ реализоваться двояко: могутъ уменьшаться абсолютные размѣры фигуры на неизмѣнной сферѣ или же, при незначительномъ измѣненіи абсолютныхъ размѣровъ сферическихъ фигуръ, можетъ возрастать радіусъ сферы. Поэтому на предѣльной поверхности, на которую можно смотрѣть, какъ на сферу безконечно большого радіуса, по отношенію ко всѣмъ конечнымъ фигурамь примѣняется геометрія Евклида. Вопросъ только о формѣ этой поверхности. Если мы примемъ постулатъ Евклида относительно прямой и плоскости, то предѣльной поверхностью служитъ плоскость. Въ противномъ случаѣ эта поверхность кривая—орисфера.

В. Каганъ (Спб.).

(Продолженіе слѣдуетъ).

КЪ ВОПРОСУ О РАЗМѢРАХЪ ОКЛАДА УЧИТЕЛЬСКОЙ ПЕНСІИ.

Однимъ изъ явленій, неблагопріятно отражающихся на ходѣ учебно-воспитательнаго дѣла въ нашихъ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ, слѣдуетъ признать тотъ фактъ, что учителя, выслужившіе пенсію, вслѣдствіе ничтожныхъ размѣровъ послѣдней, не имѣютъ возможности отказаться отъ дальнѣйшей службы и уступить свое мѣсто молодымъ педагогамъ со свѣжими силами.

Оклады пенсій для лицъ, прослужившихъ по учебному вѣдомству узаконенный 25-лѣтній срокъ, остаются безъ измѣненія съ 1859 года, не смотря на воспослѣдовавшія съ того времени различныя преобразованія штатовъ среднихъ учебныхъ заведеній и на весьма рѣзко измѣнившіяся за истекшій сорокалѣтній періодъ условія жизни, приведшія нынѣ, при непрерывно возрастающей дороговизнѣ, къ абсолютной невозможности обезпечить путемъ пенсіи бывшему учителю безбѣдное существованіе подъ старость.

Эта невозможность, всѣми преподавателями хорошо сознаваемая, помимо того, что порождаетъ во все время ихъ служебной дѣятельности гнетущую мысль о предстоящей имъ нищенской почти старости, мысль, парализующую столь необходимый для каждаго педагога свѣтлый взглядъ на задачи жизни и школы, подрывающую бодрость духа и усугубляющую нервную раздражительность, къ которой вообще такъ склонны люди, несущіе тяжелыя учительскія обязанности и недостаточно за свой трудъ вознаграждаемые,—помимо того, слишкомъ скудный окладъ предвидимой пенсіи заставляетъ тѣхъ изъ учителей, кои не могли своевременно перемѣнить своей неблагодарной профессіи на какую нибудь иную—все равно какую, лишь бы болѣе прибыльную—постоянно стремиться къ захвату возможно большаго числа уроковъ, если не въ томъ же, то въ другихъ учебныхъ заведеніяхъ того же города. Такое обстоятельство, съ одной стороны вполнѣ оправдываемое недостаточнымъ при нынѣ существующихъ условіяхъ городской жизни окладомъ учительскаго штатнаго жалованья и желаніемъ скопить кое какіе гроши къ тому черному дню, когда прійдется довольствоваться одною пенсіею, съ другой—является крайне нежелательнымъ для учебно-воспитательнаго дѣла, обременяя преподавателя непосильнымъ почти трудомъ, доводя его до переутомленія, нервности и пр. и вообще понижая его педагогическія качества.

Въ виду такихъ соображеній, въ настоящее время, когда вопросъ объ измѣненіи пенсіонныхъ окладовъ поднятъ, повидимому, и въ оффиціальныхъ сферахъ, считаю небезъинтереснымъ познакомить читателей „Вѣстника“ съ однимъ частнымъ случаемъ рѣшенія задачи объ увеличеніи пенсіи, даннаго недавно профессоромъ математики Новороссійскаго университета И. В. Слешинскимъ.

Задача, предложенная пр. Слешинскому Г. Попечителемъ Одесскаго Учебнаго Округа, заключалась въ слѣдующемъ: до какого размѣра можно было бы увеличить пенсію, не увеличивая расходовъ государства, если бы продлить срокъ службы на 5 лѣтъ и удвоить пенсіонный вычетъ съ жалованья?

Для точнаго рѣшенія такого вопроса нужны статистическія данныя, а именно таблицы смертности учителей, выбыванія ихъ изъ службы по разнымъ причинамъ и семейнаго ихъ положенія. Имѣя въ своемъ распоряженіи лишь общую таблицу смертности для мужского населенія (Буняковскаго), авторъ, не разсматривая ни пенсіи семействамъ учителей, ни пенсіи по разстроенному здоровью, даетъ слѣдующее рѣшеніе задачи.

Примемъ предположеніе (которое нѣсколько уменьшаетъ размѣры пенсіи, но упрощаетъ разсчетъ), что какъ вычеты въ пенсіонный капиталъ, такъ и выдача пенсій производится только разъ въ годъ, а именно—вычеты въ концѣ, а пенсіи въ началѣ года, и назовемъ:

нынѣ выдаваемую пенсію	черезъ	p,
новую пенсію	„	P,
нынѣ взимаемый вычетъ .	„	q,
новый ежегодный вычетъ .	„	Q,
нынѣшній срокъ службы .	„	n,
новый „ „ .	„	N,
возрастъ начинающихъ службу	„	t,
предѣльный возрастъ людей	„	T,
процентный множитель . .	„	k.

Кромѣ того обозначимъ доставляемыя таблицею смертности числа лицъ, доживающихъ до a лѣтъ изъ нѣкотораго достаточно большого числа новорожденныхъ, символомъ $(\overline{a})$.

Для рѣшенія задачи должно составить выраженія стоимости, отнесенной къ настоящему времени, для нынѣ выдаваемой и для искомой новой пенсіи и для добавочнаго пенсіоннаго вычета.

Одинъ рубль пожизненной пенсіи $(\overline{t})$ лицамъ, поступающимъ въ настоящее время на службу, имѣетъ теперь стоимость

$$\mathrm{A} = (\overline{n+t})\,k^{-n} + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot + (\overline{\mathrm{T}})\,k^{-(\mathrm{T}-t)}.$$

Поэтому стоимость нынѣшняго оклада пенсіи этимъ лицамъ въ настоящее время $= \mathrm{A}p$ . . . . (1).

Одинъ рубль вычета въ теченіе n лѣтъ имѣетъ въ настоящее время стоимость

$$\mathrm{B} = (\overline{t+1})\,k^{-1} + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot + (\overline{t+n})\,k^{-n}.$$

Поэтому добавочный вычетъ за n лѣтъ будетъ стоить теперь

$\mathrm{B}(\mathrm{Q}-q)$ . . . . (2).

Одинъ рубль вычета за добавленные годы имѣетъ въ настоящее время стоимость

$$\mathrm{C} = (\overline{t+n+1})\,k^{-(n+1)} + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot + (\overline{t+\mathrm{N}})\,k^{-\mathrm{N}}.$$

Поэтому вычетъ за добавочные годы будетъ

CQ. . . . . (3).

Сложивъ выраженія (2) и (3), получимъ величину добавочнаго вычета, отнесенную къ настоящему времени. Если же прибавимъ эту сумму къ (1), то получимъ стоимость въ настоящее время нынѣшней пенсіи вмѣстѣ съ добавочнымъ вычетомъ. Эта сумма, по условію задачи, должна быть равна стоимости новой пенсіи въ настоящее время, т. е. должна быть равна DP, гдѣ

$$\mathrm{D} = (\overline{\mathrm{N}+t})\,k^{-\mathrm{N}} + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot + (\overline{\mathrm{T}})\,k^{-(\mathrm{T}-t)}$$

и представляетъ стоимость одного рубля этой пенсіи, отнесенной къ настоящему времени.

Такимъ образомъ получается уравненіе

$$\mathrm{A}p + \mathrm{B}(\mathrm{Q}-q) + \mathrm{CQ} = \mathrm{DP} \quad . \ . \ . \ . \quad (\alpha)$$

откуда опредѣляется искомая величина P.

Принимая $t = 25$ и $q = 24$, возьмемъ $\mathrm{Q} = 48$, $p = 600$, $n = 25$, $\mathrm{N} = 30$ и $\mathrm{T} = 94$ (сообразно съ таблицей Буняковскаго). Что касается k, то сдѣлаемъ самое невыгодное для увеличенія пенсіи предположеніе, принявъ $k = 1{,}036$. При такихъ данныхъ, вычисляя въ рубляхъ, находимъ изъ уравненія (α)

$$\mathrm{P} = 1091.$$

Этотъ результатъ полученъ при помощи невыгодныхъ для увеличенія пенсіи предположеній и потому представляетъ minimum.

Считая достаточнымъ приведенныхъ соображеній для постановки вопроса объ увеличеніи учительской пенсіи и разработки его какъ съ математической стороны на основаніи достаточныхъ данныхъ, такъ и со стороны значенія условій продленія службы и увеличенія пенсіоннаго вычета, профессоръ Слешинскій замѣчаетъ касательно пенсій по растроенному здоровью и пенсій семействамъ, что при измѣненіи пенсій сроки и размѣры ихъ подлежатъ выбору и потому не имѣютъ рѣшающаго значенія.

Итакъ, если бы срокъ службы вмѣсто 25-и лѣтъ былъ установленъ въ 30 лѣтъ, и если бы въ теченіе этого времени взымалось не 2%, а 4% съ жалованья, то окладъ учительской пенсіи могъ быть увеличенъ до 1000 рублей съ лишнимъ, безъ обремененія государственнаго казначейства новыми расходами. Нельзя сказать, конечно, чтобы удвоеніе пенсіоннаго вычета съ жалованья, и безъ того незначительнаго и подлежащаго еще другимъ случайнымъ вычетамъ (при повышеніи оклада, за получаемые ордена) было желательнымъ съ указанной выше точки зрѣнія. Что же касается продленія службы на 5 лѣтъ, то при узаконеніи подобнаго проекта наврядъ ли встрѣтились бы какія либо серьезныя затрудненія, такъ какъ въ дѣйствительности и теперь служащіе по учебному вѣдомству своими ходатайствами объ оставленіи на пятилѣтія только доказываютъ, что ранѣе установленный 25-лѣтній срокъ для настоящаго времени приходится признать слишкомъ кратковременнымъ.

РЕЦЕНЗІИ.

Краткій курсъ прямолинейной тригонометріи. Составилъ К. Тороповъ, преподаватель Пермскаго Алексіевскаго реальнаго училища. Пермь, 1894 г. Цѣна 75 коп.

Всѣ русскіе учебники тригонометріи очень похожи другъ на друга, учебникъ же г. Торопова существенно отличается отъ другихъ. Причина тому та, что наша математическая учебная литература подражательна: образцами для нея служила и служитъ иностранная литература; по скольку различаются образцы, по стольку же различаются и подражанія. Большинство авторовъ учебниковъ тригонометріи подражало французскимъ авторамъ, представителемъ которыхъ несомнѣнно является Серре; г. Тороповъ, вѣроятно, подражалъ нѣмецкимъ авторамъ, представителемъ которыхъ можетъ быть названъ Грасаманъ.

Полетъ мысли, точность, опредѣленность и изящество теорій французскихъ математиковъ выгодно отличаютъ ихъ отъ нѣмецкихъ, расплывающихся въ мелочахъ, въ желаніи быть нагляднымъ даже грудному младенцу, и потому непослѣдовательныхъ въ изложеніи.

Учебникъ г. Торопова, не смотря на свои многія достоинства, существенно страдаетъ недостаткомъ нѣмецкихъ учебниковъ, особенно въ гоніометріи. Желая быть нагляднымъ, г. Тороповъ на первыхъ же страницахъ приступаетъ къ рѣшенію треугольниковъ (подобно Грасаману), почему по необходимости даетъ самое элементарное опредѣленіе синуса, и здѣсь же касается самыхъ разнообразныхъ свойствъ тригонометрическихъ функцій, ограничивая гоніометрію углами, не превышающими 180°. Вслѣдствіе этого нарушена послѣдовательность теоріи, отсутствуютъ обобщенія, изъ которыхъ нѣкоторыя даются уже въ концѣ курса, и то на частныхъ примѣрахъ. Авторъ забываетъ, что преподаваніе тригонометріи въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ имѣетъ цѣль скорѣе теоретическую, а не практическую: знакомство учащихся съ стройной математической теоріей (вполнѣ для нихъ доступной), а не выработку изъ нихъ таксаторовъ, механически рѣшающихъ треугольники. Учащемуся по учебнику г. Торопова, при поступленіи въ высшее учебное заведеніе, прійдется переучивать тригонометрію по другому учебнику, чтобы стать на высотѣ тѣхъ обобщеній, съ которыми ему прійдется имѣть дѣло.

Указавъ на недостатки гоніометріи, нельзя не признать за авторомъ оригинальности, находчивости и изворотливости, весьма поучительныхъ для гг. преподавателей.

За выводъ формулъ соотношеній между элементами треугольника авторъ вполнѣ заслуживаетъ пальму первенства, настолько онъ удачно и просто воспользовался теоремой о свойствѣ равныхъ отношеній. Пріемъ автора заслуживаетъ полнаго вниманія и подражанія: это новый вкладъ, который навсегда останется цѣннымъ.

Взобравшись на олимпъ, авторъ увлекся, однако, „ключарями", которыхъ похвалили (почему, не знаю) компетентныя лица, и потому, самъ не замѣчая, спустился на равнины житейской универсальности.

Извѣстно, какой громадный вредъ принесли и приносятъ „ключари", т. е. составители ключей къ хрестоматіямъ и различнымъ задачникамъ. Выдавая себя за спасителей учащагося юношества, эти господа, на самомъ дѣлѣ, имѣютъ въ виду самую безсовѣстную наживу и причиняютъ непоправимый вредъ самостоятельному развитію учащихся. Ключи ихъ имѣютъ, конечно, большой успѣхъ у лѣнтяевъ и искателей различнаго рода аттестатовъ. Успѣху ключарей позавидовали нѣкоторые составители учебниковъ и стали придумывать универсальные способы рѣшенія задачъ по извѣстному рецепту. Такіе рецепты, между прочимъ, предложены въ учебникѣ тригонометріи Преображенскаго и въ такъ называемой (рекламы ради) „новой тригонометріи" Агапова. Примѣру ихъ, къ сожалѣнію, послѣдовалъ и г. Тороповъ, сводя всѣ задачи тригонометріи къ тремъ группамъ съ тремя рецептами. Однако, такая группировка нисколько не приводитъ къ универсальному способу рѣшенія задачъ, а только ставитъ учащихся въ недоумѣніе, почему авторъ постоянно напоминаетъ имъ „искать въ ряду отношеній такія, которыя скорѣе привели бы къ желаемому результату"; да и самъ авторъ въ концѣ въ этомъ признается, замѣчая, что рѣшеніе задачъ второй и третьей группы „возможно лишь въ частныхъ случаяхъ". Къ чему же было огородъ городить, коли ничего на немъ не ростетъ!— Мнѣ кажется, что предложенный способъ деморализируетъ умственную дѣятельность учащихся: отъ нихъ требуется не сообразительность и самостоятельность, а только хорошее запоминаніе формулъ и предложенныхъ рецептовъ. Къ чему же тогда задачи рѣшать?

Тою же шаблонностью отличается отдѣлъ о рѣшеніи тригонометр. уравненій. Не усвоивъ обстоятельно указанныхъ многочисленныхъ типовъ уравненій (составляющихъ, все таки, каплю въ безпредѣльномъ множествѣ другихъ), ученикъ станетъ въ тупикъ предъ самымъ простымъ уравненіемъ, такъ какъ, слѣдуя указаннымъ шаблонамъ, онъ лишается самостоятельности, которая, по нашему мнѣнію, важнѣе умѣнія рѣшать самыя сложныя тригонометрическія уравненія.

Въ заключеніе скажемъ, что хотя книга г. Торопова не можетъ служить учебникомъ, однако она заслуживаетъ полнаго вниманія гг. преподавателей.

П. З. (Одесса).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

О температурѣ наибольшей плотности водныхъ растворовъ солей.— Температура, при которой растворъ данной соли, имѣющій данную концентрацію, пріобрѣтаетъ наибольшую плотность, опредѣлена въ послѣднее время для ряда солей италіанскими учеными Silvio Lussana и Giovanni Bozzola. Для своихъ опытовъ они пользовались дилатометрами Гейсслера, для которыхъ предварительно были опредѣлены коэффиціенты расширенія стекла между 0° и 100°. Нѣсколько такихъ дилатометровъ наполнялись растворами извѣстной концентраціи и помѣщались въ водяную баню, снабженную мѣшалкой. Сперва измѣрялась температура бани, затѣмъ отсчитывались показанія дилатометровъ и, наконецъ, вторично записывалась температура бани. Такіе отсчеты дѣлались черезъ 0,1° при температурахъ, близкихъ къ maximum'у плотности, т. е. между 2° и 5°.

Для воды, перегнанной нѣсколько разъ, авторы нашли температуру наибольшей плотности 4,15°. Результаты нѣсколькихъ опредѣленій для растворовъ солей приведены въ слѣдующей табличкѣ.

	Число грам. соли въ 100 g воды	Темпер. наиб. плотности	Maximum плотности
KNO_3.	1,2942	2,06	1,008535
„	0,6404	3,08	1,004504
„	0,1640	3,94	1,000874
$NaNO_3$	1,0868	4,86	1,007493
„	0,5414	3,00	1,003901
„	0,2717	3,66	1,001709
„	0,1391	3,94	1,000366
$Ba(NO_3)_2$	3,3365	0,52	1,028029
„	0,8403	3,34	1,007223
„	0,4189	3,68	1,003699
$CoCl_2$	0,5526	3,28	1,004951
„	0,2777	3,90	1,002366

Изъ этой таблички видно, что температура maximum'а плотности для водныхъ растворовъ солей меньше, нежели для чистой воды, и что она вообще тѣмъ ниже, чѣмъ больше концентрація раствора. Кромѣ того авторы нашли, что это пониженіе температуры максимальной плотности выражается въ зависимости отъ концентраціи раствора формулой, сходной съ формулой van't Hoff'а для пониженія температуры замерзанія водныхъ растворовъ, но не тождественной съ ней.

Авторами были изслѣдованы и нѣсколько такихъ случаевъ, когда растворъ содержалъ двѣ соли. Оказалось, что наблюдаемое въ этихъ случаяхъ пониженіе температуры maximum'а плотности равно суммѣ тѣхъ пониженій, которые дала бы каждая соль въ отдѣльности, если бы она одна находилась въ растворѣ (Naturwiss. Rundsch.).

В. Г.

ДОСТАВЛЕННЫЯ ВЪ РЕДАКЦІЮ КНИГИ И БРОШЮРЫ.

Астрономія въ общепонятномъ изложеніи. *С. Ньюкомба* и *Р. Энгельмана*, дополненная Г. Фогелемъ, директоромъ астрофизической обсерваторіи въ Потсдамѣ. Переводъ со 2-го изданія: „Newcomb-Engelmann's Populäre Astronomie“ herausgegeben von Dr. H. C. Vogel. H. C. Дрентельна. Выпускъ I. Спб. Изданіе К. Л. Риккера. 1894. Цѣна 1-му выпуску 1 р. 40 к.

Актинометрическія изслѣдованія, произведенныя въ Константиновской Обсерваторіи въ Павловскѣ въ 1891 и 1892 гг. (Отд. отт. изъ „Метеорологическаго Вѣстника“ за 1894 г.). Проф. *О. Хвольсона.*

Путеводитель по небу. *К. Покровскаго*, Ассистента Астрономической Обсерваторіи Императорскаго Московскаго университета. Москва. 1894. Цѣна 2 р.

Сборникъ геометрическихъ задачъ на построеніе. Для среднихъ учебныхъ заведеній. Составилъ и издалъ *Г. З. Рябковъ*, преподаватель Одесской 2-й городской женской гимназіи. Одесса. 1894. Ц. 1 р.

Опытъ методики рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе. Приложеніе къ „Сборнику геометрическихъ задачъ на построеніе“. Пособіе для преподавателя. (Съ 280 чертежами въ текстѣ). Составилъ и издалъ *Г. З. Рябковъ*, преподаватель Одесской 2-й городской женской гимназіи. Одесса. 1894. Ц. 2 р.

Методы рѣшеній геометрическихъ задачъ на построеніе и сборникъ геометрическихъ задачъ съ полными и краткими рѣшеніями. Курсъ среднихъ учебныхъ заведеній (для старшихъ классовъ). Составилъ *И. Александровъ*, преподаватель тамбовской гимназіи. Изданіе пятое исправленное, книжнаго магазина В. Думнова подъ фирмою Наслѣдники братьевъ Салаевыхъ. Москва. 1894. Ц. 1 р. съ перес. 1 р. 20 к.

Практическое руководство для электрохимическихъ работъ. Д-ра *Ф. Эттеля.* Переведено съ нѣмецкаго: „Anleitung zu elektrochemischen Versuchen von Dr. Felix Oettel“, подъ редакціей проф. Д. П. Коновалова, В. И. Святскимъ. Съ 26-ю рис. въ текстѣ. Изданіе Ф. В. Щепанскаго. Спб. 1894. Ц. 1 р. 50 к.

Новѣйшая метода или русско-нѣмецкій учебникъ для обученія въ три мѣсяца нѣмецкому чтенію, письму и разговору, безъ помощи учителя.

Плято ф. Рейсснера. Высшій курсъ. VI изданіе. 3-й выпускъ. Петербургъ, Варшава, Москва. 1894. Ц. 20 к.

Нѣкоторыя теоремы изъ теоріи опредѣлителей. *И. М. Занчевскаго.* Изданіе Московскаго Математическаго Общества (Математическій Сборникъ. Т. XVII). Москва. 1894.

ЗАДАЧИ НА ИСПЫТАНІЯХЪ ЗРѢЛОСТИ ВЪ $18^{93}/_{94}$ Г.

Одесскій Учебный Округъ.

Гимназіи:

Ананьевская.

1) *Алгебра:* А отправился въ путь изъ города M къ городу N и проходилъ по 8 в. въ день; послѣ того какъ онъ прошелъ 27 в., на встрѣчу ему изъ города N отправился B; проходя каждый день $^1/_{20}$ всего разстоянія между городами M и N, B по прошествіи столькихъ дней, сколько онъ дѣлалъ въ день верстъ, встрѣтилъ A. Опредѣлить разстояніе между городами M и N.

2) *Геометрія:* Образующая конуса составляетъ съ его осью уголъ $\alpha = 35^{0}18'20''$. Опредѣлить отношеніе объема этого конуса къ объему описаннаго около него шара.

Бердянская.

1) *Алгебра:* Найти три числа, которыхъ сумма равна 60 и которыя составляютъ ариѳметическую прогрессію. Если къ этимъ числамъ прибавить соотвѣтственно $2^1/_5$, 4 и 7, то новыя 3 числа составятъ послѣдовательные члены геометрической прогрессіи.

2) *Геометрія:* Опредѣлить полную поверхность S правильной шестиугольной пирамиды, сторона основанія которой равняется a, а боковыя грани наклонены къ плоскости основанія подъ угломъ φ.—Найти численное значеніе S, когда $a = 21{,}38$ д. а $\varphi = 63^{0}20'24''$.

Болградская.

1) *Алгебра:* Составить уравненіе 2-ой степени по слѣдующимъ даннымъ: сумма корней равна первому члену безконечно убывающей геометрической прогрессіи, которой знаменатель равенъ $^1/_2$, а сумма безконечнаго числа членовъ равна 20; произведеніе же корней искомаго уравненія есть пятый членъ такой ариѳметической прогрессіи, которой сумма четвертаго и второго ея членовъ равна 20, сумма же шестого и третьяго—равна 29.

2) *Геометрія:* Изъ двухъ параллельныхъ сторонъ трапеціи большая $a = 15{,}218$ д., меньшая $b = 5{,}912$ д.; одна изъ непараллельныхъ сторонъ $c = 2{,}832$ д. и образуетъ съ большею изъ параллельныхъ сторонъ уголъ $\beta = 28^{\circ}17'24''$. Опредѣлить объемъ тѣла, происходящаго отъ вращенія трапеціи около большей изъ параллельныхъ сторонъ.

ЗАДАЧИ.

№ 95. Доказать, что квадратъ трехчлена a^2+ab+b^2 можетъ быть приведенъ къ трехчлену того же вида.

А. Гольденбергъ (Спб.).

№ 96. Доказать, что произведеніе

$$(a^2+ab+b^2)(a_1^2+a_1b_1+b_1^2)$$

можетъ быть приведено къ виду A^2+AB+B^2.

А. Гольденбергъ (Спб.).

№ 97. Стороны вписаннаго въ кругъ четыреугольника, взятыя по порядку, образуютъ ариѳметическую прогрессію. Углы его также образуютъ ариѳметическую прогрессію. Вычислить углы четыреугольника.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 98. Рѣшить уравненіе

$$6-x+\sqrt{x^2+5x+2}=0.$$

С. Гирманъ (Кіевъ).

№ 99. Доказать, что всѣ корни уравненія

$$\frac{A_1^2}{x-a_1}+\frac{A_2^2}{x-a_2}+\frac{A_3^2}{x-a_3}+\ldots+\frac{A_r^2}{x-a_r}=1$$

дѣйствительны, если $A_1, A_2, A_3, \ldots A_r$ и $a_1, a_2, a_3, \ldots a_r$ означаютъ дѣйствительныя величины.

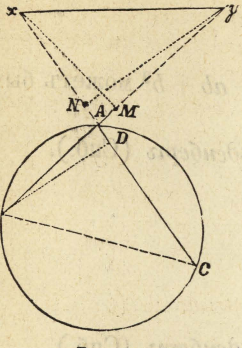
А. Варенцовъ (Рост. н. Д.).

№ 100. Найти четырехзначное число, представляющее точный квадратъ, зная, что число, составленное двумя его первыми цифрами, на единицу большее числа, составленнаго двумя послѣдними его цифрами.

(Заимств.) *В. Г.* (Одесса).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 15 (3 сер.). Черезъ точку A на окружности проведены хорды AB и AC. На продолженіи хорды AC взята точка x такъ, что разстояніе ея отъ хорды AB равно хордѣ AB, а на продолженіи хорды AB взята точка y такъ, что разстояніе ея отъ хорды AC равно хордѣ AC. Показать, что разстояніе xy есть величина постоянная.



Фиг. 18.

Пусть разстояніе точки x (фиг. 18) отъ хорды $AB = xM$, а точки y отъ хорды $AC = yN$. Такъ какъ

$$\frac{xA}{yA} = \frac{xM}{yN} = \frac{AB}{AC},$$

то треугольники xAy и ABC подобны. Проведя $BD \perp AC$, находимъ

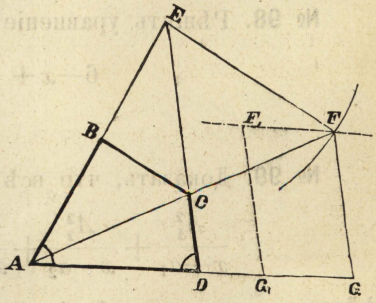
$$\frac{xy}{BC} = \frac{xM}{BD} = \frac{AB}{BD}, \text{ откуда } xy = \frac{AB.BC}{BD} = 2R.$$

К. Щиголевъ (Курскъ); *С. Копровскій* (с. Дяткевичи); *Я. Блюмбергъ* (Рига); *А. Варенцовъ* (Шуя); *П. Ивановъ* (Одесса).

№ 455 (2 сер.). Построить четыреугольникъ $ABCD$ по основанію AD, прилежащимъ угламъ A и D и по отношенію $AB{:}BC{:}CD = m{:}n{:}p$.

Пусть $ABCD$ (фиг. 19)—искомый четыреугольникъ. Продоживъ AB и DC до встрѣчи въ точкѣ E, проводимъ черезъ E параллельно BC прямую до пересѣченія ея съ AC въ точкѣ F. Проведя наконецъ $FG \| CD$ до встрѣчи съ AB въ точкѣ G, получимъ изъ подобныхъ четыреугольниковъ $ABCD$ и $AEFG$:

$$AE{:}EF{:}FG = AB{:}BC{:}CD = m{:}n{:}p, \ldots (1)$$



Фиг. 19.

а такъ какъ линію AE можно построить, какъ сторону $\triangle AED$, въ которомъ извѣстны $AD, \angle A$ и $\angle D$, то легко найти и EF и FG изъ соотношенія (1).

Для рѣшенія задачи строимъ треугольникъ AED и взявъ на AD произвольную точку G_1 проводимъ черезъ нее прямую G_1F_1, равную GF и параллельную DE. Тогда точка F опредѣлится, какъ пересѣченіе дуги, описанной изъ точки E радіусомъ EF, съ прямою, проведенною черезъ F_1 параллельно AD. Зная положеніе точки F, легко докончить построеніе.

П. Хлѣбниковъ, В. Ахматовъ (Тула); *В. Рубцовъ* (Уфа); *А. Варенцовъ* (Рост. н. Д.); *В. Буханцевъ* (Борисоглѣбскъ); *С. Конюховъ* (Тамбовъ); *Л. Заржецкій* (Обольцы).

№ 574 (2 сер.). Данъ уголъ A и на сторонахъ его двѣ точки B и C. Найти на сторонѣ AB точку M и на сторонѣ AC точку N, удовлетворяющія условію $BM = MN = NC$.

Чтобы рѣшить эту задачу, надо построить четыреугольникъ $BMNC$ по сторонѣ его BC, двумъ прилежащимъ угламъ MBC и NCB и по отношенію остальныхъ сторонъ $BM{:}MN{:}NC = 1{:}1{:}1$, а это есть частный случай задачи 455 (2 сер.), рѣшеніе которой помѣщено въ этомъ же № „Вѣстника“.

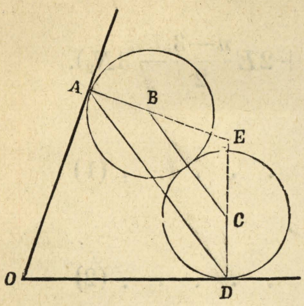
П. Хлѣбниковъ (Тула); *С. Адамовичъ* (с. Спасское); *К. Щиголевъ* (Курскъ).

№ 160 (1 сер.). На сторонахъ угла даны двѣ точки; построить два круга равныхъ радіусовъ, касательные другъ къ другу и къ сторонамъ угла въ данныхъ точкахъ.

Пусть AOD (фиг. 20) есть данный уголъ, A и D—двѣ данныя точки. Центры B и C данныхъ круговъ должны, очевидно, лежать на перпендикулярахъ AE и DE, возставленныхъ къ сторонамъ угла въ точкахъ A и D. Кромѣ того должно быть $AB = CD = {}^1/_2 BC$. Слѣдовательно задача сводится къ построенію четыреугольника $ABCD$ по основанію AD, двумъ прилежащимъ угламъ A и D и по отношенію

$$AB{:}BC{:}CD = 1{:}2{:}1,$$

т. е. представляетъ частный случай задачи 455 (2 сер.), рѣшеніе которой напечатано въ этомъ же № „Вѣстника".



Фиг. 20.

Д. Н. З. (Казань); *Мясковъ* (Слонимъ); *В. Ахматовъ, П. Хлѣбниковъ* (Тула); *В. Рубцовъ* (Уфа); *С. Шатуновскій* (Кам.-Под.); *А. Бобятинскій* (Егор. зол. пріиски); *Н. Шимковичъ* (Харьковъ); *А. Варенцовъ* (Рост. н. Д.); *В. Буханцевъ* (Борисоглѣбскъ); *И. К.* (Астрахань); *К. Щиголевъ* (Курскъ).

№ 457 (1 сер.). Опредѣлить число системъ цѣлыхъ положительныхъ и нулевыхъ рѣшеній совмѣстныхъ уравненій

$$x + y + z + u = n + 1;\ y + 2z + 3u = 2n + 3,$$

въ которыхъ n есть положительное цѣлое число.

Опредѣляя u и z черезъ x и y, находимъ

$$u = 1 + 2x + y;\ z = n - 3x - 2y,$$

откуда видно, что x не можетъ быть больше цѣлой части частнаго отъ дѣленія n на 3 и что для опредѣленнаго значенія x число y не можетъ быть больше цѣлой части частнаго отъ дѣленія $n-3x$ на 2. Обозначая наибольшія цѣлыя, заключающіяся въ дробяхъ $\frac{n}{3}$ и $\frac{n-3x}{2}$, символами $E\frac{n}{3}$ и $E\frac{n-3x}{2}$, находимъ, слѣдовательно, что для даннаго значенія x число y имѣетъ $1 + E\frac{n-3x}{2}$ различныхъ значеній: $0, 1, 2, 3, \ldots, E\frac{n-3x}{2}$, а такъ какъ x не больше $E\frac{n}{3}$, то, давая x всѣ цѣлыя значенія отъ нуля до $E\frac{n}{3}$ включительно и обозначая черезъ M_n искомое число системъ рѣшеній, получимъ

$$M_n = \left(1 + E\frac{n}{2}\right) + \left(1 + E\frac{n-3.1}{2}\right) + \left(1 + E\frac{n-3.2}{2}\right) + \cdots + \left(1 + E\frac{n-3.E\frac{n}{3}}{2}\right).$$

Не трудно видѣть, что въ суммѣ M_n изъ двухъ членовъ, смежныхъ одному и тому же третьему, послѣдующій меньше предшествующаго на 3, ибо если $1 + E\frac{n-3p}{2}$ и $1 + \frac{n-3.(p+2)}{2}$ суть два такихъ члена, то

$$1 + E\frac{n-3(p+2)}{2} = 1 + E\left(\frac{n-3p}{2} - 3\right) = \left(1 + E\frac{n-3p}{2}\right) - 3.$$

Изъ этого слѣдуетъ, что въ суммѣ M_n члены, занимающіе нечетныя мѣста, равно какъ и члены, занимающіе четныя мѣста, образуютъ ариѳметическую прогрессію, которой разность равна—3. Обозначивъ черезъ N_1 и S_1 число и сумму членовъ первой и черезъ N_2 и S_2 число и сумму членовъ второй прогрессіи, получимъ

$$S_1 = \frac{1}{2} N_1 (5 + 2E\frac{n}{2} - 3N_1); \; S_2 = \frac{1}{2} N_2 (5 + 2E\frac{n-3}{2} - 3N_2).$$

Въ суммѣ M_n число членовъ

$$N = 1 + E\frac{n}{3}; \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

сверхъ того ясно, что, въ случаѣ N четнаго,

$$N_1 = N_2 = {}^1/_2 N; \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

въ случаѣ же N нечетнаго

$$N_1 = {}^1/_2 (N+1); \; N_2 = {}^1/_2 (N-1). \; . \; . \; . \; (3)$$

Принимая же во вниманіе, что $N_1 + N_2 = N$ и что $M_n = S_1 + S_2$, имѣемъ

$$M_n = \frac{5}{2} N + N_1 E\frac{n}{2} + N_2 E\frac{n-3}{2} - \frac{3}{2}(N_1^2 + N_2^2). \quad (4)$$

Изъ равенства (1) слѣдуетъ, что четность или нечетность числа N зависитъ отъ остатка r, который получается при дѣленіи n на 6. Полагая $n = 6m + r$, найдемъ, что $N = 2m+1$, $N_1 = m+1$, $N_2 = m$, когда $r = 0, 1, 2$ и что $N = 2m+2$; $N_1 = N_2 = m+1$, когда $r = 3, 4, 5$.

Опредѣляя по равенству (4) M_n для случая $r=0$, получимъ

$$M_{6m} = 3m(m+1) + 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Опредѣляя точно также M_n для случаевъ $r = 1, 2, 3, 4, 5$, находимъ, что, при r отличномъ отъ нуля,

$$M_{6m+r} = (3m + r)(m + 1) \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Равенства (5) и (6) служатъ отвѣтомъ на предложенную задачу.

NB. Ни одного удовлетворительнаго рѣшенія. Напечатанное рѣшеніе принадлежитъ автору задачи г. *Шатуновскому.*

ПОЛУЧЕНЫ РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ отъ слѣдующихъ лицъ: *Я. Полушкина* (с. Знаменка) 82, 83 (3 сер.), 68, 184, 244, 248, 528, 559 (2 сер.); *А. Апарина* (Тамбовъ) 77, 82 (3 сер.); *П. Иванова* (Одесса) 19, 20 (3 сер.), 397, 495, 533, 547 (2 сер.); *А. Дёмина* (Тамбовъ) 82 (3 сер.); *И. Барковскаго* (Могилевъ) 42 (3 сер.); *П. Бѣлова* (с. Знаменка) 81 (3 сер.); *Э. Заторскаго* (Могилевъ) 34, 42 (3 сер.); *П. Х.* (Тула) 62, 65, 68, 71, 72, 74, 75, 82 (3 сер.); *А. Бачинскаго* (Холмъ) 83, 84, 86 (3 сер.); *А. Гольфанда* (Одесса) 85 (3 сер.); *Д. Татаринова* (Троицкъ) 80 (3 сер.); *С. Конюхова* (Харьковъ) 76, 77, 78, 81, 82, 83, 84, 85, 86 (3 сер.); *А. Дмитріевскаго* (Цивильскъ) 82 (3 сер.); *В. Новикова* (Троицкъ) 80, 82 (3 сер.).

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Одесса, 6-го Октября 1894 г.
„Центральная типо-литографія", уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. Болгарова.

представится кругомъ. Наоборотъ, возможенъ случай, что лучъ, вошедшій извнѣ въ атмосферу, будетъ имѣть меньшую кривизну, чѣмъ планета, и нигдѣ на нее не упадетъ.

L'occultation de l'épi de la Vierge. *C. F.*

Sur la théorie des satellites de Jupiter. *I. I. Landerer.*

Halo solaire. *P. Marty.* **Même sujet.** *A. Grein.* 24-го апрѣля между 11 ч. 45 м. и 2 ч. 45 м. въ Caillac (близь горы Канталь, въ Овернѣ) наблюдалось интересное явленіе: кромѣ halo съ радіусомъ въ 22° около солнца былъ другой halo эллиптической формы, облекающій первый и касающійся его въ верхней и нижней части; второй halo былъ слабо окрашенъ (красн. и зелен.) Оба halo были пересѣчены паргеліемъ.—Въ началѣ явленія на небѣ кое-гдѣ были перистыя облака, движущіяся съ Ю. на С. и nimbo-cumuli, движущіяся съ ЮЗ. на СВ; съ 12 ч. 15 м. до 2 ч. 15 м. явленія не было видно вслѣдствіе густого слоя nimbo-cumuli.

Nouvel équatorial d'amateurs. *B. Mailhat.*

L'aurore de l'astronomie. Недавно появилось новое сочиненіе Н. Локьера о возникновеніи Астрономіи въ Египтѣ и орьентировкѣ Египетскихъ храмовъ. Оказывается, что большая часть храмовъ древняго Египта орьентирована на восходъ или заходъ солнца и нѣкоторыхъ звѣздъ. Такъ, напр., храмъ въ Геліополисѣ орьентированъ на восходъ солнца, Хеопсова пирамида и почти всѣ другія пирамиды, храмъ Озириса и Изиды въ Гизерѣ—на восходъ солнца во время равноденствій. Вообще въ Өивахъ и Карнакѣ они орьентированы на восходъ солнца во время солнцестоянія, въ Мемфисѣ, Саисѣ—на восходъ во время равноденствій.—Есть также храмы, орьентированные на восходъ и заходъ нѣкоторыхъ звѣздъ, т. н. одинъ изъ храмовъ въ Карнакѣ орьентированъ на восходъ γ Draconis, другой—на заходъ Канопуса.

Société astronomique de France. Séance du 6 Juin. **Variétés.**

К. Смоличъ (Умань).

БИБЛІОГРАФИЧЕСКІЙ ЛИСТОКЪ
НОВѢЙШИХЪ РУССКИХЪ ИЗДАНІЙ

Станкевичъ, Б. В. Теорія многоатомныхъ газовъ. Варшава. 1893.

Ученыя записки Имп. московскаго университета. Отдѣлъ физико-математическій Вып. 11-ый. Москва. 1894.

Фишманъ, Л. Краткое руководство ариөметики и сборникъ ариөметическихъ задачъ для начальнаго преподаванія. Часть III (Четыре дѣйствія съ обыкновенными дробями). Изд. 2-е, въ большей своей части дополненное, подъ ред. В. Я. Попова. Изд. К. Зигмана. Рига. 1894. Ц. 25 к.

Эмзе. Ключъ къ рѣшенію геометрическихъ задачъ примѣнительно къ курсу среднихъ учебныхъ заведеній. Спб. Ц. 20 к.

Воиновъ, А. Прямолинейная тригонометрія. Курсъ среднихъ учебныхъ заведеній съ собраніемъ задачъ. Харьковъ. 1894.

Воленсъ, В. Собраніе ариөметическихъ задачъ (по Грубе). Учебное пособіе при первоначальномъ преподаваніи ариөметики. Изд. 17-е, исправл. и дополненное, книжн. торговли А. Панафидина. Москва. 1894. Ц. 30 к.

Граменицкій, С. Руководство ариөметики по программѣ низшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній. Изд. 2-е, измѣн. и исправленное, книжн. магаз. В. Думнова. Москва. 1894. Ц. 40 к.

Извѣстія русскаго астрономическаго общества. Выпускъ II. Изданъ подъ ред. секретаря общества. Спб. 1894.

Корнухъ-Троцкій, Я. П. Отчетъ объ астрономическихъ и магнитныхъ наблюденіяхъ, произведенныхъ въ Пермской губерніи въ іюнѣ и іюлѣ 1893 года. Казань. 1894.

Морозовъ, Всев. Космографія въ историко-генетическомъ изложеніи для среднихъ учебныхъ заведеній. Съ 98 чертежами, 20 рисунками и картой наиболѣе замѣчательныхъ созвѣздій, видимыхъ въ Европѣ. Вильна. 1894. Ц. 1 р. 40 к.

Пржишиховскій, Р. В. Къ вопросу объ экзаменахъ по математикѣ и физикѣ (Отд. отт. изъ популярно-научнаго журнала „Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики"). Одесса. 1894.

Соколовъ, Н. П. Значеніе изслѣдованій Н. И. Лобачевскаго въ геометріи и ихъ вліяніе на ея дальнѣйшее развитіе. Рѣчь, произнесенная въ торжественномъ собраніи кіевскаго физико-математическаго общества 22 октября 1893 года. (Отт. изъ „Университетскихъ Извѣстій" за 1894 г.). Кіевъ. 1894. Ц. 40 к.

Тугутъ С. О. О химическомъ строеніи нѣкоторыхъ алюмосиликатовъ. Диссертація на степень доктора химіи. Юрьевъ. 1894.

Павловъ, К. Н. Краткій историческій очеркъ изобрѣтеній воздушныхъ шаровъ и парашютовъ съ ихъ примѣненіями къ практическимъ цѣлямъ. Москва. 1894.

БИБЛІОГРАФИЧЕСКІЙ ЛИСТОКЪ

НОВѢЙШИХЪ АНГЛІЙСКИХЪ ИЗДАНІЙ.

Математика.

Hall, H. S., and *Knight, S. R.* Elementary Trigonometry. Post 8vo, pp. 370. Macmillan. 4 s. 6 d.

Jessop, C. M. The Elements of Applied Mathematics, including Kinetics, Statics, and Hydrostatics. Post 8vo., pp. 336. Bell & S. 6 s.

Ziwet, A. An Elementary Treatise on Theoretical Mechanics. Part 2: Introduction to Dynamics: Statics. 8vo. Macmillan. 8 s. 6 d. net.

Briggs, W., and *Bryan, G. R.* Elements of Co-ordinate Geometry. Part 1: The Equations and Properties of the Right Line and Circle. 2nd edit. post 8vo. pp. 216 (Univ. Corr. Coll. Tutorial Series) Clive. 3 s. 6 d.

Dobbie, A. S. A Text-Book of Solid or Descriptive Geometrie, including Elementary Courses on Plane Geometry and Graphic Arithmetic. Post 8vo. pp. 230. (Science Text Books.) Blackie. 2 s. 6 d.

Dupuis, N. F. Elements of Synthetic Solid Geometry. Post 8vo. pp. 248. Macmillan. 6 s. 6 d. net.

Smith, I. Hamblin. Elementary Algebra. New and revised edit. 12mo. pp. 400 with Answers. Longmans. 3 s. 6 d.

Briggs, W., and. *Bryan, G. H.* An Elementary Text-book of Mechanics. Book I.: Dynamics. 12mo. pp. 192. (University Tutorial Series). Glive. 2 s.

Cajori, Florence. A. History of Mathematics. 8vo. pp. 420. Macmillan. 14 s. net.

Hall, H. S., and *Stevens, F. H.* A Text-book of Euclid's Elements. Books II. and III. 12mo. pp. 140. Macmillan. 2 s.

Klein, F. Lectures on Mathematics, delivered from August 28 to September 9, 1893. 8vo. (The Evanston Colloquium) Macmillan. 6 s. 6 d. net.

Richardson, G., and *Ramsey, A. S.* Modern Plane Geometry, being the proofs of the Theorems in the Syllabus of Modern Plane Geometry issued by the Association for the Improvement of Geometrical Teaching. With the sanction of the Council of the A. J. G. T. 12mo. pp. 204. Macmillan. 3 s. 6 d.

Hime, H. W. L. The Outlines of Quaternions. Cr. 8vo. Longmans. 10 s.

Rankin, T. T. Complete Solutions to Papers in Mathematics. Second Stage, 1877—1893; Science and Art Examination, 1887—1893. Post 8vo. (Blackburn, Coward) pp. 84. Moffatt. 1 s.

Uyvyan, T. G. Analytical Geometry for Beginners. Part 1.: The Straight Line and Circle. Post 8vo. pp. 128. Bell & S. 2 s. 6 d.

Физика, астрономія, физ. географія, метеорологія.

Clerke, Ellen, M. The Planet Venus. 8vo. pp. 58. Witherby. 1 s.

Gore, I. F. An Astronomical Glossary; or, Dictionary of Terms used in Astronomy; with Tables of Data and Lists of remarkable and interesting Celestial Objects. Post 8vo. pp. 140. Lockwood. 2 s. 6 d.

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

JOURNAL
de mathématiques élémentaires.
1894.—№ 5.

Sur la pratique de la multiplication et de la division. Par M. *Aubry*. Въ J. E. за 1893 г. (Обз. въ „Вѣстникѣ" XV см. № 6) M. Collignon указалъ способъ упрощенія дѣйствія умноженія, основанный на разложеніи *множителя* на слагаемыя, изображающіяся только цифрами 0, 1, 2 и 5. M. Aubry, замѣтивъ, что операція умноженія въ значительной степени усложняется тѣмъ, что при составленіи частныхъ произведеній приходится одновременно съ умноженіемъ дѣлать и сложеніе, предлагаетъ разлагать *множимое* на два слагаемыхъ, изъ которыхъ у одного на мѣстахъ четныхъ, а у другого на мѣстахъ нечетныхъ справа, были бы нули (напр. $3497218 = 3090208 + 407010$); при умноженіи этихъ слагаемыхъ частныя произведенія составляются безъ сложенія, черезъ что упрощается все дѣйствіе, тѣмъ болѣе, что при нѣкоторомъ навыкѣ можно эти слагаемыя не выписывать отдѣльно.

Относительно дѣленія въ статьѣ нѣтъ какихъ-либо существенныхъ указаній.

Sur le trapèze. Par M. *L. Vautré*. Обозначимъ основанія AB и CD трапеціи ABCD черезъ a и b, боковыя стороны ея AC и BD —черезъ c и d и діагонали AD BC—черезъ f и g. Построивъ параллелограммы CADE и DABF и соединивъ B съ E и E съ F, положимъ, что

$$c > d \text{ и } f > g; \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

при этомъ условіи получимъ неравенства:

$$c + d + g > f. \quad \ldots \ldots \quad (2)$$
$$f + g > c + d, \quad \ldots \ldots \quad (3)$$
$$f - g > c - d, \quad \ldots \ldots \quad (4)$$
$$f > c, \quad \ldots \ldots \quad (5)$$
$$f^2 - g^2 > c^2 - d^2, \quad \ldots \ldots \quad (6)$$
$$f^2 + g^2 > c^2 + d^2, \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

выражающія слѣдующія свойства трапеціи:

Въ равнобочной трапеціи діагонали равны и обратно: если діагонали трапеціи равны, то трапеція равнобочная.

Большее основаніе, большая сторона и большая діагональ трапеціи сходятся въ одной вершинѣ ея.

Разность діагоналей трапеціи больше разности ея сторонъ

Большая діагональ трапеціи больше каждой изъ сторонъ ея.

Пусть M,N суть средины боковыхъ сторонъ трапеціи, а P и Q - средины ея діагоналей; тогда

$$MN = \frac{a+b}{2}, \; PQ = \frac{a-b}{2};$$

пользуясь этими равенствами, изъ тр-въ BCE и BDE получимъ:

$$(f^2 + g^2) - (c^2 + d^2) = 2ab. \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

$$\frac{f^2 - g^2}{c^2 - d^2} = \frac{a+b}{a-b}. \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Равенства эти выражаютъ зависимость между сторонами и діагоналями трапеціи. При помощи ихъ авторъ рѣшаетъ задачу:

Построить трапецію по даннымъ діагоналямъ и боковымъ сторонамъ ея.

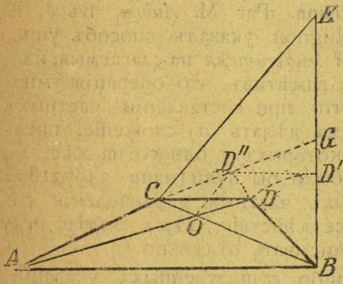
Алгебраическое рѣшеніе этой задачи состоитъ въ опредѣленіи основаній трапеціи и въ построеніи формулъ:

$$a=\sqrt{\frac{(m^2-p^2)(n^2+q^2)}{2(n^2-q^2)}},\ b=\sqrt{\frac{(m^2-p^2)(n^2-q^2)}{2(n^2+q^2)}},$$

гдѣ

$$m^2=f^2+g^2,\ n^2=f^2-g^2,\ p^2=c^2+d^2,\ q^2=c^2-d^2.$$

Геометрическое рѣшеніе той же задачи состоитъ въ слѣдующемъ.



Фиг. 21.

На произвольной прямой (фиг. 21) откладываемъ отрѣзки BD′ = d и D′E = c и строимъ тр-къ BCE, у котораго BC = g и CE = f; пусть D″ есть пересѣченіе медіаны CG этого тр-ка съ перпендикуляромъ въ D′ къ прямой BE; проведемъ черезъ D″ параллель къ CE до пересѣченія въ O съ BC и построимъ тр-къ BOD, у котораго BD = BD′ и OD = OD″; отложивъ въ направленіи DO отрѣзокъ DA = f, получимъ искомую трапецію ABCD.

Доказательство этого построенія предоставляемъ читателю.

Exercices divers. Par M. *Boutin*. (Suite). №№ 320 и 321 относятся къ коническимъ сѣченіямъ.

№ 322. Если каждый членъ ряда $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ получается изъ двухъ предыдущихъ по формулѣ:

$$u_n=xu_{n-1}+yu_{n-2},$$

то общій членъ u_n выражается черезъ u_0 и u_1 формулой

$$u_n=x^{n-1}u_1+x^{n-2}yu_0+(n-2)x^{n-3}yu_1+(n-3)x^{n-4}y^2u_0+$$
$$+\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}x^{n-5}y^2u_1+\frac{(n-4)(n-5)}{1.2}x^{n-6}y^3u_0+\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}x^{n-7}y^3u_1+$$
$$+\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3}x^{n-8}y^4u_0+\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1.2.3.4}x^{n-9}y^4u_1+\cdots$$

Baccalauréats (Juillet 1893).

Solutions des questions. №№ 382, 442, 465, 508, 510, 511, 519.

Questions proposées. №№ 552—553.

Д. Е.

L'ASTRONOMIE

№ 8.—1894.

Comment on a mesuré la terre. *C. Flammarion*. Разсказавъ о тѣхъ представленіяхъ о землѣ, которыя были у древнихъ народовъ, Flammarion переходитъ къ изложенію попытокъ опредѣлить размѣры земного шара. Эратосѳенъ первый (2144 года тому назадъ) измѣрилъ дугу меридіана между Александріей и Сіенной (которыя собственно лежатъ не на одномъ меридіанѣ, а разнятся по долготѣ на 3°); сравнивъ зенитныя разстоянія солнца въ полдень во время лѣтняго солнцестоянія и зная разстояніе между Александріей и Сіенной, онъ нашелъ, что длина меридіана = 250000 стадій (40500 килом.). Второе измѣреніе произведено Fernel'емъ въ 1550 г. Онъ измѣрилъ дугу меридіана между Парижемъ и Амьеномъ (разстояніе между этими городами онъ нашелъ, умноживъ число оборотовъ колесъ своего экипажа на длину окружности колеса). Цифра, найденная имъ для длины 1°, есть 57070 туазовъ.

Обложка
ищется

Обложка
ищется