Обложка
пщется

Обложка
ищется

XVI Сем. 15-го марта 1894 г. № 7.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 187.

ОЧЕРКЪ
ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛОБАЧЕВСКАГО.

(Продолженіе).*

III. Элементы сферической геометріи.

Кругъ, опредѣляемый пересѣченіемъ сферы съ плоскостью, проходящей черезъ центръ, называется большимъ кругомъ сферы. Положеніе плоскости вполнѣ опредѣляется тремя точками, не лежащими на одной прямой; поэтому двѣ точки на сферѣ вполнѣ опредѣляютъ собой окружность большого круга,— но только при условіи, что прямая, ихъ соединяющая, не проходитъ чрезъ центръ; въ противномъ случаѣ положеніе плоскости большого круга опредѣлено только одной прямой, и мы можемъ поэтому провести по сферѣ черезъ эти двѣ точки безчисленное множество окружностей большихъ круговъ. Такія двѣ точки называются взаимно полярными. Всѣ окружности большихъ круговъ, проходящія чрезъ нѣкоторую точку на сферѣ, неизбѣжно проходятъ чрезъ другую точку, полярную первой, потому что ихъ плоскости, проходя черезъ центръ и данную точку, заключаютъ соединяющую ихъ прямую, а слѣ-

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики" №№ 174, 178, 179 и 183.

довательно и противоположный полюсъ. Кромѣ того, всякія двѣ окружности большихъ круговъ пересѣкаются въ двухъ полярныхъ точкахъ, ибо плоскости ихъ пересѣкаются по діаметру сферы, конечныя точки котораго принадлежатъ, какъ одной, такъ и другой окружности. Непосредственнымъ наложеніемъ мы убѣждаемся въ томъ, что всѣ окружности большихъ круговъ тождественны и дѣлятся двумя полюсами пополамъ. Какъ мы уже упоминали во введеніи, окружность большого круга служитъ основнымъ линейнымъ образомъ сферической геометріи, замѣняющимъ прямую плоской геометріи; проведемъ поэтому параллель между однимъ и другимъ образомъ:

a) Всѣ прямыя тождественны.

Всѣ окружности большихъ круговъ тождественны.

b) Двѣ прямыя могутъ пересѣкаться только въ одной точкѣ.

Двѣ окружности большихъ круговъ всегда пересѣкаются въ двухъ точкахъ.

c) Прямолинейный отрѣзокъ можетъ быть продолженъ безпредѣльно, не возвращаясь въ точку исхода.

Дуга большаго круга можетъ быть продолжена безпредѣльно, но при этомъ всегда приводить въ точку исхода.

Различіемъ этихъ принциповъ обусловливается и опредѣляется различіе между плоской геометріей и сферической. Мы сохранимъ указанное въ предыдущей главѣ обозначеніе Лобачевскаго 2π, какъ для всей окружности, такъ и для всей сферы,—но позволимъ себѣ напомнить читателю, что это не болѣе, какъ символъ, подъ которымъ не слѣдуетъ разумѣть числа. Такъ какъ однѣ дуги большихъ круговъ могутъ быть приведены въ совмѣщеніе съ другими, то является возможность измѣрять дуги большихъ круговъ одной изъ нихъ, принятой за единицу. Мы будемъ принимать за единицу полуокружность, и поэтому всякая дуга выразится въ частяхъ π.*) Именованное число, являющееся результатомъ такого измѣренія, мы будемъ называть *длиной* дуги. Длина кратчайшей изъ двухъ дугъ, соединяющихъ двѣ точки на сферѣ, называется *разстояніемъ* между этими точками на сферѣ. Поэтому разстояніе между двумя точками на сферѣ не превышаетъ π. Точно также возможно измѣреніе площади сферической фигуры при помощи какой нибудь сферической площадки, принятой за единицу. Мы пріимемъ за единицу полусферу и будемъ такимъ образомъ выражать площадь всякой сферической фигуры въ частяхъ π.

---

*) Мы могли бы принять за единицу другую дугу σ, заключающуюся въ полуокружности, скажемъ, m разъ,—такъ что $\pi = m\sigma$; можно было-бы множителя σ, выражающаго собой наименованіе единицы, не писать; иначе говоря, можно выразить π числомъ m; но это значило-бы только, что полуокружность заключаетъ m дугъ, принятыхъ за единицу. Такимъ образомъ можно выразить π любымъ числомъ, между прочимъ и извѣстнымъ трансцендентнымъ числомъ 3,14159.... При этомъ за единицу будетъ принята нѣкоторая дуга, несоизмѣримая со всей окружностью. Въ Евклидовой геометріи эта дуга равна радіусу круга. Но такъ какъ мы тщательно избѣгаемъ всякого соприкосновенія съ Евклидовымъ постулатомъ, то является наиболѣе цѣлесообразнымъ, во избѣжаніе всякихъ недоразумѣній, разумѣть подъ π символъ, обозначающій полуокружность, совершенно независимо отъ того, какимъ числомъ мы найдемъ удобнымъ ее выразить въ томъ или другомъ частномъ случаѣ.

Угломъ между двумя окружностями большихъ круговъ называютъ двугранный уголъ между плоскостями этихъ круговъ. Если мы проведемъ касательныя къ окружностямъ въ точкѣ ихъ пересѣченія, то онѣ образуютъ линейный уголъ этого двуграннаго угла. Такъ какъ двугранный уголъ равенъ своему линейному *), то можно опредѣлить уголъ между двумя окружностями, какъ уголъ между касательными къ нимъ въ общей точкѣ. Смежные и вертикальные углы на сферѣ опредѣляются по соотвѣтствующимъ двуграннымъ угламъ и обладаютъ тѣми же свойствами. Прямымъ угломъ на сферѣ называется также одинъ изъ двухъ равныхъ смежныхъ угловъ. Слѣдовательно, чтобы провести черезъ данную точку на сферѣ перпендикуляръ къ данной окружности большого круга, нужно черезъ данную точку и центръ, или иначе—черезъ прямую, соединяющую эту точку съ центромъ,—провести плоскость, перпендикулярную къ плоскости даннаго круга. Извѣстно, что можно провести только одну такую плоскость, если прямая не перпендикулярна къ данной плоскости, и безчисленное множество ихъ—въ противоположномъ случаѣ. Поэтому, если возставимъ перпендикуляръ къ плоскости даннаго большого круга изъ центра, то въ пересѣченіи со сферой получимъ двѣ точки, черезъ которыя можно провести безчисленное множество перпендикуляровъ къ этой окружности. Эти точки называются полюсами даннаго большого круга. Такъ какъ дуга перпендикуляра отъ полюса до основанія стягиваетъ прямой уголъ въ центрѣ сферы, то она равна $^1/_2\ \pi$. Черезъ всякую другую точку на сферѣ можно провести только одинъ перпендикуляръ къ данной окружности большого круга; для этого достаточно соединить данную точку съ полюсомъ окружности.

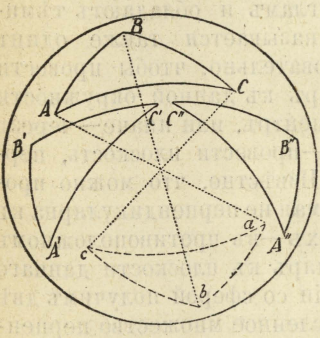
Двѣ полуокружности, пересѣкающіяся въ двухъ полюсахъ подъ нѣкоторымъ угломъ, дѣлятъ сферу на двѣ части, которыя называются сферическими вырѣзками или двусторонниками; тотъ изъ двухъ двусторонниковъ, которому соотвѣтствуетъ уголъ меньшій π, называется выпуклымъ, второй —вогнутымъ. Если соединимъ дугой двѣ точки на сторонахъ двусторонника, то раздѣлимъ его на двѣ части, называемыя сферическими треугольниками. Изъ этого слѣдуетъ, что во всякомъ сферическомъ треугольникѣ двѣ стороны не превышаютъ π, третья же сторона можетъ превышать π; въ этомъ случаѣ треугольникъ называется вогнутымъ; въ выпукломъ же треугольникѣ всѣ три стороны меньше π. Каждому выпуклому треугольнику соотвѣтствуетъ трегранный уголъ, вершина котораго совпадаетъ съ центромъ сферы. Разсмотримъ условія конгруэнтности сферическихъ треугольниковъ.

Если въ двухъ сферическихъ треугольникахъ двѣ стороны одного равны двумъ сторонамъ другого и углы между ними равны, то могутъ представиться два случая, смотря по тому, расположены ли стороны въ двухъ треугольникахъ по отношенію другъ къ другу одинаково или различно. Это нужно понимать слѣдующимъ образомъ: если мы себѣ представимъ наблюдателя, который стоитъ въ вершинѣ разсматриваемаго угла, причемъ его корпусъ направленъ по внѣшней нормали къ

*) Понимая это утвержденіе въ томъ смыслѣ, въ какомъ его понимаетъ Лобачевскій. См. предыдущую главу.

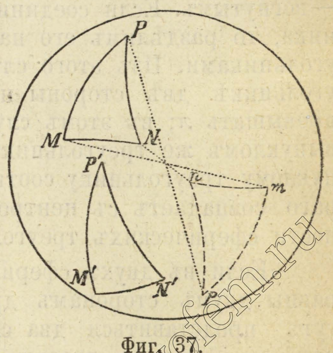
сферѣ,—и смотритъ на одну сторону треугольника, то другая лежитъ направо или налѣво отъ него; если онъ затѣмъ перейдетъ въ соотвѣтствующую вершину другого треугольника и, ставъ, какъ прежде, обратится лицомъ къ сторонѣ, равной той, на которую онъ смотрѣлъ раньше,—то другая сторона треугольника можетъ оказаться съ той же стороны, или съ противоположной.

Въ первомъ случаѣ треугольники ($\triangle$ ABC и $\triangle$ A$'$B$'$C$'$ на фиг. 36)



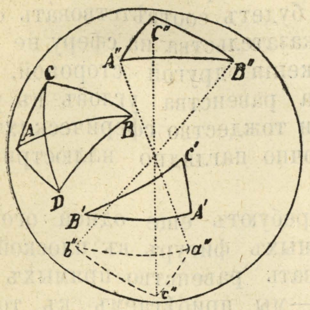
Фиг. 36.

конгруэнтны, потому что мы можемъ привести ихъ въ совмѣщенiе наложенiемъ; во второмъ случаѣ ($\triangle$ ABC и $\triangle$ A$''$B$''$C$''$) этого сдѣлать нельзя, потому что сфера не допускаетъ наложенiя на себя самое другой стороной. Въ этомъ случаѣ построимъ треугольникъ abc, вершины котораго суть полюсы вершинъ треугольника ABC. Стороны и углы этого треугольника равны сторонамъ и угламъ даннаго, потому что они соотвѣтственно принадлежатъ вертикальнымъ линейнымъ и двуграннымъ угламъ; но они расположены въ обратномъ порядкѣ; поэтому треугольники, A$''$B$''$C$''$ и abc конгруэнтны. Треугольникъ abc называютъ симметричнымъ по отношенiю къ треугольнику ABC; это же названiе присваивается треугольникамъ вида A$''$B$''$C$''$, конгруэнтнымъ съ abc. Итакъ, мы видимъ, что два сферическихъ треугольника, въ которыхъ двѣ стороны одного равны двумъ сторонамъ другого и углы между ними также равны, — либо конгруэнтны, либо симметричны. Это различiе однако исчезаетъ, когда треугольники равновебренны и при этомъ соотвѣтственно равны бока треугольниковъ и углы при вершинѣ (см. $\triangle$ MPN и $\triangle$ M$'$P$'$N$'$ на фиг. 37). Въ этомъ случаѣ мы можемъ любой бокъ треугольника M$'$P$'$N$'$ считать отвѣтствующимъ боку MP даннаго треугольника, и слѣдовательно, треугольники всегда конгруэнтны. Если бы мы наложили тр. M$'$P$'$N$'$ и на тр. MPN, то оказалось бы, что $\angle M = \angle M'$ и $\angle N = \angle N'$. Представимъ себѣ теперь $\triangle$ mnp, симметричный $\triangle$ MNP; онъ будетъ конгруэнтенъ $\triangle$ M$'$P$'$N$'$, но, когда мы теперь произведемъ наложенiе, то окажется, что $\angle M' = \angle n$ и $\angle N' = \angle m$; принимая же во вниманiе предыдущее равенство и замѣчая, что $\angle n = \angle N$ и $\angle m = \angle M$, находимъ что въ равнобедренныхъ треугольникахъ $\angle M = \angle N$ и $\angle M' = \angle N'$, т. е. углы при основанiи равны.



Фиг. 37.

Буквально такимъ же разсужденiемъ мы обнаружимъ, что два треугольника, имѣющiе по равной сторонѣ съ соотвѣтственно равными прилежащими углами, конгруэнтны или семметричны, смотря по взаимному расположенiю угловъ; и какъ слѣдствiе отсюда выведемъ, что въ треугольникѣ противъ равныхъ угловъ лежатъ равныя стороны. Предоставляя читателю провести это доказательство, мы остановимся на слѣдующемъ случаѣ,—когда три стороны одного треугольника равны тремъ сторонамъ другого (фиг. 38). Если въ треугольникѣ ABC стороны AC и BC расположены въ другомъ порядкѣ относительно стороны AB (считаемъ излишнимъ останавливаться на разъясненіи этого термина), нежели соотвѣтствующіе стороны $A'C'$ и $B'C'$ относительно стороны $A'B'$, то мы можемъ приложить треугольники другъ къ другу такъ, чтобы точка A' совпала съ A, B', а вершина C' упала бы по другую сторону прямой AB въ точку D; соединивъ точки C и D дугой большаго круга, получимъ два равнобедренныхъ треугольника CAD и CBD; слѣдовательно,



Фиг. 38.

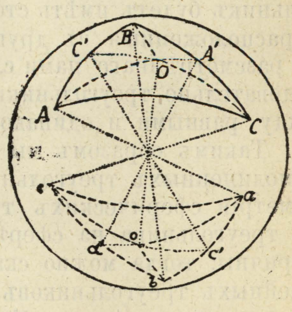
$$\angle ACD = \angle ADC, \quad \angle DCB = \angle CDB, \quad \angle ACB = \angle ADB.$$

Такъ какъ $\angle ADB$ есть $\angle A'C'B'$ передвинутый по сферѣ, то $\angle A'C'B' = \angle ACB$, откуда заключаемъ, что треугольники ABC и $A'B'C'$, имѣющіе равные углы C и C', заключенные между равными, но различно расположенными сторонами,—симметричны. Положимъ теперь, что стороны $\triangle$-ка $A''B''C''$ равны сторонамъ $\triangle$-ка ABC и одинаково расположены; построимъ тогда треугольникъ $a''b''c''$, симметричный $\triangle$-ку $A''B''C''$; этотъ треугольникъ будетъ имѣть стороны, равныя сторонамъ треугольника $A'B'C'$, но расположенныя въ другомъ порядкѣ; поэтому $\angle c'' = \angle C$ на основаніи разсмотрѣннаго нами случая; и такъ какъ $\angle c'' = \angle C''$, то $\angle C = \angle C''$, слѣдовательно треугольники ABC и $A''C''B''$, имѣющіе по равному углу между равными и одинаково расположенными сторонами, конгруэнтны.

Такимъ образомъ мы убѣждаемся, что каждому случаю тождества прямолинейныхъ треугольниковъ отвѣчаетъ случай конгруэнтности или симметріи сферическихъ треугольниковъ. Условимся теперь называть два треугольника на сферѣ тождественными, если они равны или симметричны; тогда можно сказать, что каждому случаю тождества прямолинейныхъ треугольниковъ соотвѣтствуетъ случай тождества сферическихъ треугольниковъ. При этомъ въ тождественныхъ сферическихъ треугольникахъ стороны и углы равны, противъ равныхъ угловъ лежатъ равныя стороны и наоборотъ; но съ понятіемъ о тождествѣ сферическихъ фигуръ не всегда связано то представленіе, которое соотвѣтствуетъ понятію о тождествѣ прямолинейныхъ фигуръ. Идея симметріи вполнѣ замѣняетъ собой способность плоскости покрывать себя самое другой стороной. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что мы доказываемъ при помощи наложенія другой стороной тождество прямолинейныхъ образовъ, (α) и (β) состоящихъ изъ ряда треугольниковъ. Это значитъ въ соотвѣтствующихъ треугольникахъ, которые входятъ въ составъ этихъ образовъ, стороны равны, но различно расположены. Пусть (A) и (B) соотвѣтствующіе сферическіе образы. Построимъ образъ (a), симметричный (A); тогда образы (a) и (B) окажутся конгруэнтными, такъ какъ въ соотвѣтствующихъ треугольникахъ этихъ фугуръ стороны равны и одинаково расположены; поэтому (A) и (B) симметричны, а, слѣдовательно, согласно нашему опредѣленію, тождественны. Такимъ образомъ то обстоятельство, что сфера не допускаетъ наложенія другой стороной, не отражается по формальной геометріи этой поверхности. Каждому случаю тождества прямолинейныхъ фигуръ будетъ соотвѣтствовать случай тождества на сферѣ, если перенесеніе доказательства на сферу не встрѣчаетъ другихъ затрудненій кромѣ наложенія другой стороной. Намъ кажется, что изложенныя доказательства равенства угловъ въ равнобедренномъ сферическомъ треугольникѣ и тождество сферическихъ треугольниковъ по тремъ сторонамъ достаточно наглядно иллюстрируютъ эту мысль.

Впрочемъ, всѣ эти соображенія требуютъ еще одной оговорки. Мы пользуемся наложеніемъ тождественныхъ фигуръ въ плоской геометріи не только для того, чтобы доказать равенство прямыхъ и угловъ или тождество другихъ фигуръ;—мы прибѣгаемъ къ тому же пріему для доказательства равновеликости фигуръ; а это существенно основано на томъ свойствѣ тождественныхъ плоскихъ фигуръ, что ихъ площади равны. Намъ необходимо поэтому обнаружить, что площади тождественныхъ сферическихъ фигуръ также равны; это очевидно для фигуръ конгруэнтныхъ, и намъ остается слѣдовательно доказать, что симметричныя фигуры равновелики. Очевидно, что для этого достаточно доказать равновеликость симметричныхъ треугольниковъ, — къ чему мы теперь и приступаемъ.

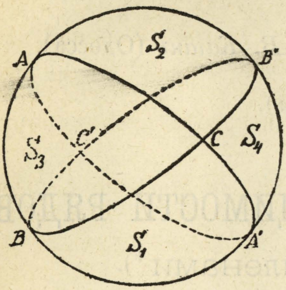
Проведемъ чрезъ средину C' стороны AB (фиг. 39) перпендикуляръ къ сторонѣ AB; для этого нужно чрезъ точку C' провести большой кругъ, перпендикулярный къ кругу $ABab$. Продолженіе этого круга $c'o$ пересѣчетъ дугу ab въ точкѣ c', которая служитъ полюсомъ точки C'. Такъ какъ $AC' = ac'$ и $BC' = bc'$, то дуга ab дѣлится въ точкѣ c' пополамъ, и $c'o$ представляетъ собой, слѣдовательно, перпендикуляръ, возставленный изъ середины стороны ab треугольника abc. Точно такъ-же перпендикуляръ $A'O$ возставленный изъ средины стороны BC дѣлитъ по достаточномъ продолженіи пополамъ сторону bc и перпендикуляренъ къ ней. Проведенныя нами окружности большихъ круговъ пересѣкаются въ двухъ полюсахъ O и o. Соединивъ каждую изъ нихъ съ вершинами соотвѣтствующаго треугольника, разбиваемъ каждый треугольникъ на три равнобедренныхъ треугольника. Чтобы въ этомъ убѣдиться, замѣтимъ, что прямоугольные треугольники AOC' и BOC', имѣющіе равные, но различно расположенные катеты, симметричны, а потому $AO = BO$ и треугольникъ AOB равнобедренный. Такъ какъ далѣе равнобедренные симметричные треугольники конгруэнтны, то части AOB, BOC, COA и aob, boc, coa, изъ которыхъ состоятъ треугольники ABC abc, попарно конгруэнтны; слѣдовательно, площади симметричныхъ треугольниковъ равны.



Фиг. 39

Изъ этой теоремы вытекаетъ чрезвычайно характерное для сферической геометріи предложеніе, заключающееся въ томъ, что площадь сферическаго треугольника равна половинѣ разности между двумя прямыми и суммой угловъ треугольника *).

Продолжимъ сторону AB сферическаго треугольника до полнаго круга (фиг. 40) стороны же AC и BC до пересѣченія съ этимъ кругомъ въ точкахъ B' и A', съ одной стороны, — до пересѣченія между собой въ точкѣ C', съ другой стороны. Тогда мы получимъ пять сферическихъ треугольниковъ. По опредѣленію двуграннаго угла имѣемъ:



Фиг. 40.

$$A = S + S_1$$
$$B = S + S_2$$
$$C = S + S_3$$

гдѣ S означаетъ площадь треугольника ABC. Отсюда

$$A + B + C = 2S + (S + S_1 + S_2 + S_3)$$

Замѣчая же, что треугольники S_3 и S_4 симметричны, а слѣдовательно, равновелики, мы находимъ

$$S_1 + S_2 + S_3 + S = S_1 + S_2 + S_4 + S = \pi$$

откуда непосредственно вытекаетъ доказываемое предложеніе.

Эти соотношенія приводятъ къ чрезвычайно любопытнымъ соображеніямъ. Сумма угловъ сферическаго треугольника ($A + B + C = \pi + 2S$) всегда больше π, но приближается къ двумъ прямымъ съ уменьшеніемъ площади треугольника. Если бы мы стали разсматривать фигуры, имѣющія не только весьма малую площадь, но и весьма малыя стороны, то можно было бы сказать, что дуги большихъ круговъ вполнѣ опредѣляются двумя точками. Мы уже говорили въ I-ой главѣ, что при изслѣдованіи такихъ фигуръ можно допустить также II-ой постулатъ Евклида (о продолженіи прямолинейнаго отрѣзка). Слѣдовательно всѣ принципы сферической геометріи безконечно малыхъ совпадаютъ съ принципами Евклидовой геометріи; поэтому *геометрія безконечно малыхъ на сферѣ совпадаетъ съ геометріей Евклида*. Правда, для точнаго обоснованія этого утвержденія нужно было бы разсмотрѣть порядокъ безконечно малыхъ, которыми мы при этомъ пренебрегаемъ; но такое изслѣдованіе выходитъ за предѣлы настоящей статьи. Возвращаясь къ сферическимъ математикамъ Гельмгольца, о которыхъ мы говорили въ первой главѣ, мы приходимъ къ убѣжденію, что они—при весьма малой способности къ передвиженію—создали бы геометрію Евклида. Только способность передвиженія по всему пространству, въ которомъ они

*) Предложеніе это конечно не представляется страннымъ, если мы имѣемъ въ виду, что подъ двуграннымъ угломъ мы условились разумѣть, слѣдуя Лобачевскому, площадь соотвѣтствующаго ему сферическаго двусторонника, выраженную въ частяхъ всей сферы. Внѣ такого соглашенія на эту теорему слѣдуетъ, конечно, смотрѣть, какъ на извѣстное соотношеніе между отвлеченными числами, выражающими отношеніе тѣхъ и другихъ образовъ къ соотвѣтствующей единицѣ. Замѣтимъ еще, что обыкновенно формулируютъ это предложеніе такимъ образомъ: $S = \pi - (A + B + C)$, тогда какъ у насъ $S = \frac{1}{2}(\pi - A - B - C)$. Это обусловливается тѣмъ, что площадь сферы обыкновенно обозначается символомъ 4π, тогда какъ мы, въ видахъ единства обозначенія, сохранили и въ этой главѣ для всей сферы символъ, принятый Лобачевскимъ, 2π. Естественно, что каждая площадь на сферѣ выразится при этомъ вдвое меньшимъ числомъ.

живутъ, привело-бы ихъ къ сферической геометріи. Но двумѣрные жители сферы, вѣроятно, были-бы не менѣе консервативны, нежели мы,— и осыпали бы насмѣшками философа, который сталъ бы à priori увѣрять, что въ такомъ измѣненіи пространственныхъ представленій онъ не усматриваетъ логическаго абсурда.

В. Каганъ (Одесса).

(Продолженіе слѣдуетъ).

ОБЪ ОДНОМЪ ПРИЗНАКѢ СХОДИМОСТИ РЯДОВЪ

съ положительными членами*).

Обозначая черезъ s_n сумму n первыхъ членовъ ряда

$$s = u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots + u_{2^n} + \ldots.$$

съ положительными убывающими членами и черезъ σ_n сумму n первыхъ членовъ ряда

$$\sigma = 2u_2 + 4n_4 + \ldots\ldots + 2^n u_{2^n} + \ldots\ldots,$$

найдемъ, что

$$(1). \quad \ldots\ldots \quad \sigma_n > s_{2^{n+1}} - (u_1 + u_2)$$

$$(2). \quad \ldots\ldots \quad 2s_{2^n} - 2u_1 > \sigma_n.$$

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ

$$s-(u_1+u_2)=(u_3+u_4)+(u_5+u_6+u_7+u_8)+\ldots.+\left(u_{2^n+1}+u_{2^n+2}+\ldots+u_{2^{n+1}}\right)+\ldots,$$

$$2s-2u_1=2u_2+2(u_3+u_4)+2(u_5+u_6+u_7+u_8)+\ldots+2\left(u_{2^{n-1}+1}+u_{2^{n-1}+2}+\ldots+u_{2^n}\right)+\ldots,$$

то выраженія

$$p_n = u_{2^n+1} + u_{2^n+2} + \ldots. + u_{2^{n+1}}\,; \quad q_n = 2\left(u_{2^{n-1}+1} + u_{2^{n-1}+2} + \ldots. + u_{2^n}\right)$$

могутъ быть разсматриваемы какъ общіе члены рядовъ $s-(u_1+u_2)$ и $2s-2u_1$. Но p_n есть сумма 2^n слагаемыхъ, изъ коихъ каждое меньше u_{2^n}, а $\frac{1}{2}q_n$ есть сумма 2^{n-1} слагаемыхъ, изъ коихъ каждое не меньше u_{2^n}, поэтому

$$2^n u_{2^n} > p_n; \quad q_n > 2^n u_{2^n},$$

т. е. общій членъ ряда σ заключается между общими членами p_n и q_n рядовъ $s-(u_1+u_2)$ и $2s-2u_1$, а потому и сумма σ_n первыхъ n членовъ

*) Настоящая статья представляетъ въ сущности переводъ моей статьи, „Sur une règle de convergence des séries á termes positifs", помѣщенной въ „Journal de Mathématiques spéciales". 1894. № 2.

ряда σ содержится между суммами $\sum\limits_n p_n$ и $\sum\limits_n q_n$ первыхъ n членовъ рядовъ $s-(u_1+u_2)$ и $2s-2u_1$, а такъ какъ $\sum\limits_n p_n = s_{2^n+1} - (u_1+u_2)$ и $\sum\limits_n q_n = 2s_{2^n} - 2u_1$, то неравенства (1) и (2) справедливы.

Обыкновенно пользуются неравенствами (1) и (2), или имъ подобными, для того, чтобы показать, что ряды s и σ сопряженные, т. е., что они оба сходящіеся или оба расходящіеся; но можно придти къ гораздо болѣе важнымъ результатамъ, соединяя неравенства (1) и (2) съ неравенствами, которыя могутъ быть получены изъ разсмотрѣнія отношенія общихъ членовъ $2^n u_{2^n}$ и u_n рядовъ σ и s.

Пусть, въ самомъ дѣлѣ, будетъ

$$l = \lim\left[\frac{2^n u_{2^n}}{u_n}\right] \text{ для } n = \infty.$$

Если l конечное число, то можно назначить два такихъ конечныхъ положительныхъ числа a и b, чтобы было

$$a > l > b.$$

Когда $l = 0$, то найдется одно только число a, а, при $l = \infty$, существуетъ одно только число b. Во всякомъ случаѣ, для достаточно большихъ значеній n, отношеніе $\frac{2^n u_{2^n}}{u_n}$ удовлетворитъ по крайней мѣрѣ одному изъ двухъ неравенствъ

$$a > \frac{2^n u_{2^n}}{u_n} > b.$$

Можно даже сказать, что одно изъ этихъ неравенствъ, или оба существуютъ, начиная уже съ $n = 1$, потому что любой членъ ряда можно считать первымъ, когда изучаютъ только сходимость ряда, и ничто не мѣшаетъ принять за первый членъ тотъ, начиная съ котораго предыдущія неравенства существуютъ.

Неравенство

$$a > \frac{2^n u_{2^n}}{u_n} \text{ или } au_n > 2^n u_{2^n}$$

даетъ намъ

$$as_n > \sigma_n,$$

откуда, сообразуясь съ неравенствомъ (1), будемъ имѣть

$$as_n > s_{2^n+1} - (u_1 + u_2)$$

и, a fortiori,

$$as_n > s_n - (u_1 + u_2),$$

откуда, полагая $a < 1$, имѣемъ

$$s_n < \frac{u_1 + u_2}{1 - a}$$

для всѣхъ цѣлыхъ положительныхъ значеній n; слѣдовательно, рядъ s сходящійся, когда $a < 1$; но если $l < 1$, то можно взять и $a < 1$, поэтому **рядъ s сходящійся, если $l < 1$.**

Подобнымъ же образомъ помощью неравенствъ (2) и

$$\frac{2^n u_{2^n}}{u_n} > b$$

докажемъ, что

$$2s_{2^n} - 2u_1 > bs_n.$$

Допуская, что s есть сходящійся рядъ, и полагая $n = \infty$, получимъ

$$2s - 2u_1 \geqslant bs,$$

что невозможно, когда $b > 2$. Рядъ s не можетъ такимъ образомъ быть сходящимся, когда $b > 2$; но, если $l > 2$, то можно взять и $b > 2$, слѣдовательно, **рядъ s расходящійся, когда $l > 2$.**

Итакъ, всегда можно узнать, будетъ ли рядъ $s = \Sigma u_n$ съ положительными убывающими членами сходящимся или расходящимся, если предѣлъ отношенія $2^n u_{2^n} : u^n$, для $n = \infty$, не заключается между 1-цей и 2-мя. *Но до сихъ поръ не могли составить ряда съ положительными убывающими членами, для котораго разсматриваемый предѣлъ былъ бы отличенъ отъ нуля или отъ ∞.*

По признаку, указанному въ первый разъ профессоромъ Ермаковымъ *), рядъ Σu_n съ положительными убывающими членами будетъ сходящійся или расходящійся, смотря потому, будетъ ли предѣлъ выраженія $2^n u_{2^n} : u^n$, для $n = \infty$, меньше или больше $\frac{1}{\lg 2}$, гдѣ lg есть неперовъ логариѳмъ. Но доказательство профессора Ермакова, основанное на извѣстномъ признакѣ Коши и на свойствахъ опредѣленныхъ интеграловъ, требуетъ, чтобы функція u_n оставалась убывающей и непрерывной для всѣхъ значеній n, превосходящихъ опредѣленный предѣлъ, чего мы не предполагали въ нашемъ элементарномъ доказательствѣ.

С. Шатуновскій (Одесса).

ПРАКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

Объ опредѣленіи неприступныхъ разстояній.

При рѣшеніи нѣкоторыхъ вопросовъ землемѣрной практики, а также иногда и въ обыденной жизни, встрѣчается надобность въ опредѣ-

*) См. статью „Caractère de convergence des séries“ (*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, 1871. См. также извлеченіе изъ письма профессора Коркина къ Эрмиту въ томъ же журналѣ, 1882.

леніи такихъ разстояній между предметами, которыя не допускаютъ непосредственнаго измѣренія. Такъ, напр., желая измѣрить разстояніе между крестами двухъ колоколенъ, разстояніе между точкой на островѣ и точкой на берегу и т. п., мы не можемъ произвести непосредственнаго сравненія опредѣляемой длины съ длиной, выбранной за единицу, или, иначе говоря, непосредственно измѣрить опредѣляемую длину.

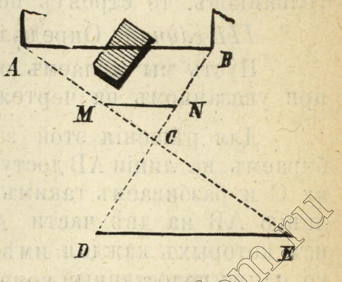
Вопросъ объ опредѣленіи длины линіи, недопускающей непосредственнаго измѣренія или, какъ говорятъ, вопросъ объ опредѣленіи неприступнаго разстоянія можетъ быть рѣшенъ съ помощію геодезическихъ угломѣрныхъ инструментовъ весьма точно—по крайней мѣрѣ полученный такимъ образомъ результатъ будетъ немногимъ хуже того, который получился бы изъ непосредственнаго измѣренія. Но надо замѣтить, что употребленіе хорошихъ угломѣрныхъ инструментовъ, уже не говоря о значительной ихъ стоимости, требуетъ спеціальной подготовки и, слѣдовательно, является такимъ образомъ недоступнымъ большинству.

Нельзя, однако, того же сказать про измѣреніе самихъ неприступныхъ разстояній. Цѣль нашей статьи—показать, какимъ образомъ каждый, имѣющій въ своемъ распоряженіи десятокъ прямыхъ кольевъ (вѣхъ) и какой нибудь мѣрительный снарядъ — шнуръ опредѣленной длины, землемѣрную цѣпь, рулетку (снаряды недорогіе) и т. п., можетъ, при помощи самихъ незначительныхъ построеній и измѣреній, опредѣлить длину всякой неприступной прямой.

Сообразно съ различными случаями недоступности прямой, рѣшеніе вопроса объ ея измѣреніи видоизмѣняется и мы разсмотримъ эти случаи отдѣльно.

I случай. Опредѣлить длину прямой въ томъ случаѣ, когда на ней находится препятствіе, недопускающее непосредственнаго измѣренія.

Пусть мы желаемъ найти разстояніе AB (фиг. 41), на которомъ находится строеніе. Для рѣшенія этого вопроса, поставивъ въ точкахъ A и B по вѣхѣ, выбираемъ такую точку C, изъ которой были бы видны точки A и B и измѣреніе линій AC и CB не представляло бы затрудненій. Измѣривъ тщательно AC и BC, откладываемъ на продолженіяхъ AC и BC, части EC=AC и CD=BC. По равенству тр-въ ABC и CDE мы заключаемъ, что линія DE = AB. Измѣривъ эту линію, мы и найдемъ длину линіи AB.



Фиг. 41.

Если мѣстныя условія не позволяютъ сдѣлать построеніе треугольника CDE, то задача можетъ быть рѣшена слѣдующимъ образомъ: выбравъ точку C подъ тѣми же условіями, измѣряемъ линіи AC и BC; затѣмъ откладываемъ отъ точки C по направленіямъ къ точкамъ A и B длину $CM = \frac{1}{n}$ AC и длину $CN = \frac{1}{n}$ BC, гдѣ n можетъ быть любымъ цѣлымъ числомъ (2, 3, 4, 5, . . .).

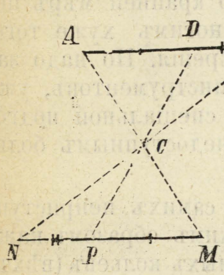
Изъ подобныхъ треугольниковъ ABC и MNC имѣемъ:

$$MN = \frac{1}{n} AB \text{ или } AB = n.MN.$$

Слѣдовательно, измѣривъ длину MN и умноживъ ее на n, мы получимъ длину неприступной прямой AB. Не трудно видѣть, что это рѣшеніе по точности значительно уступаетъ первому и къ нему можно прибѣгать только въ случаяхъ крайней необходимости.

II случай. Опредѣлить длину прямой, одинъ конецъ которой недоступенъ.

Пусть мы желаемъ опредѣлить разстояніе отъ какой нибудь точки мѣстности A (фиг. 42) до колокольни B, т. е до той точки на землѣ, въ которую проэктируется крестъ этой колокольни. Отмѣривъ по линіи AB отъ точки A нѣкоторое разстояніе (возможно большое) AD и поставивъ въ точкахъ A и D вѣхи, выбираемъ такую точку C, гдѣ были бы видны точки B, A и D и, кромѣ того, двѣ послѣднія доступны. Измѣривъ далѣе разстоянія AC и DC, откладываемъ по продолженію линій AC и DC линію $CM = AC$ и линію $CP = CD$. Укрѣпивъ затѣмъ вѣхи въ точкахъ P, M и C, ищемъ на продолженіи линіи PM такую точку N, которая въ то же время находилась бы на продолженіи линіи CB. Это дѣйствіе обыкновенно выполняется такъ: переставляютъ вѣху по продолженію линіи PM до тѣхъ поръ, пока не замѣтятъ, что она находится на одной линіи съ точками B и C. Найдя такую точку, измѣряютъ линію NP, которая, по равенству треугольниковъ CNP и CDB, равна DB. Опредѣляемая длина AB найдется по формулѣ:



Фиг. 42.

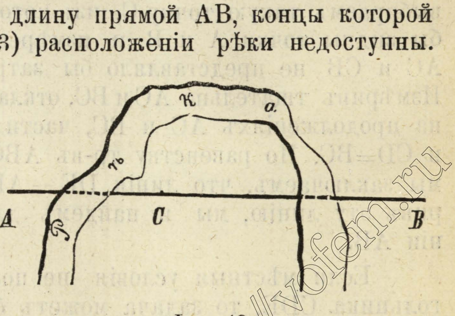
$$AB = AD + NP.$$

Если мѣстность не позволяетъ сдѣлать построеніе равныхъ треугольниковъ, то строятъ подобные.

III случай. Опредѣлить длину прямой, концы которой недоступны.

Пусть мы желаемъ опредѣлить длину прямой AB, концы которой при указанномъ на чертежѣ (фиг. 43) расположеніи рѣки недоступны.

Для рѣшенія этой задачи выбираемъ на линіи AB доступную точку C и разбиваемъ такимъ образомъ линію AB на двѣ части AC и CB, изъ которыхъ каждая имѣетъ только одинъ недоступный конецъ. Опредѣленіе длинъ такихъ линій можетъ быть сдѣлано согласно предыдущей задачѣ, а сумма ихъ дастъ длину всей линіи AB.



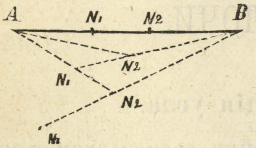
Фиг. 43.

Но теперь возникаетъ другой вопросъ—какъ найти точку C, лежащую въ точности на линіи AB? Если бы точки A и B, или по крайней мѣрѣ одна изъ нихъ, напр., A была доступна, то рѣшеніе вопроса о постановкѣ вѣхи C на линіи AB не представляло бы затрудненій. Для этого, вставъ за вѣхой A и расположивъ глазъ такимъ образомъ, чтобы лучъ зрѣнія касался *съ одной стороны* вѣхъ, поставленныхъ въ А и В, нужно было бы передвигать вѣху, предназначенную для постановки въ С, до тѣхъ поръ, пока она не коснулось бы упомянутаго луча зрѣнія. Ясно, что въ это время центръ вѣхи, который въ сущности и обозначаетъ точку мѣстности, лежитъ какъ разъ на линіи АВ.

Совсѣмъ иное дѣло, когда точки А и В недоступны. При значительномъ разстояніи между точками А и В, можно найти множество точекъ вблизи линіи АВ, которыя будутъ казаться на глазъ въ точности находящимися на линіи. При разстояніи АВ около 3 верстъ, вѣха, поставленная въ сторонѣ отъ примѣрной средины линіи АВ саженъ на 50, кажется на глазъ стоящей въ точности на линіи АВ.

Чтобы рѣшить вопросъ объ отысканіи точки, лежащей на прямой, концы которой недоступны, находятъ сразу двѣ приступныя точки, лежащія на данной прямой.

Измѣненная задача рѣшается такъ. Пусть А и В (фиг. 44) двѣ неприступныя точки; ставятъ вблизи линіи вѣху N1 и на линіи, соединяющей поставленную вѣху съ точкой В, — вѣху N2. Затѣмъ переноситъ вѣху N1 на линію N2A, далѣе вѣху N2 на линію N1B и т. д. продолжаютъ до тѣхъ поръ, пока не увидятъ одновременно, глядя черезъ вѣху N1, что вѣха N2 стоитъ на линіи N1B, а, глядя черезъ вѣху N2, что вѣха N1 стоитъ на линіи N2A.

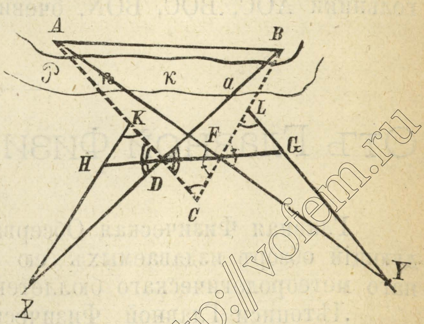


Фиг. 44.

Ясно, что въ этомъ положеніи какъ вѣха N1, такъ и вѣха N2 стоятъ на линіи АВ и, слѣдовательно, любая изъ нихъ можетъ быть выбрана для рѣшенія предыдущей задачи.

IV случай. Опредѣлить длину прямой, неприступной на всемъ протяженіи.

Пусть имѣемъ на мѣстности линію АВ, расположенную на другомъ берегу рѣки. Для опредѣленія ея длины, не имѣя возможности переѣхать рѣку, можно поступить слѣдующимъ образомъ. Выбираемъ точку С (фиг. 45), изъ которой видны точки А и В и около которой можно производить измѣренія. Отложимъ отъ точки С по направленію къ точкамъ А и В равныя длины CD = = DK = CF = FL. Величина этихъ линій, въ зависимости отъ мѣстныхъ условій и отъ длины линіи АВ, обыкновенно берется 10—20 саж.



Фиг. 45.

Измѣривъ далѣе линію DF, откладываемъ влѣво и вправо по линіи HD=DF и FG=DF. Выставивъ вѣхи въ точкахъ K, H, D, F, L, и G, находимъ по объясненному пересѣченіе линій НК и BD въ точкѣ X, и линій LG и AF — въ точкѣ У.

Обращаясь къ треугольникамъ HKD, DCF и FLG, не трудно видѣть, что они равны, откуда слѣдуетъ, что уголъ XKD = углу АСВ=

=углу FLУ. Переходя теперь къ треугольникамъ XKD и DCB, а также ACF и FLУ, видимъ, что они также равны и, слѣдовательно, AC=LУ и BC=KX. Измѣривъ длины KX и LУ, мы можемъ рѣшить задачу, такъ какъ она свелась на первый, уже разсмотрѣнный, случай.

Послѣднее рѣшеніе, представляя нѣкоторую сложность, не даетъ вмѣстѣ съ тѣмъ хорошаго опредѣленія длины неприступной прямой, что зависитъ отъ невозможности опредѣлить надежно точки X и У, получающіяся отъ пересѣченія линій подъ острыми углами.

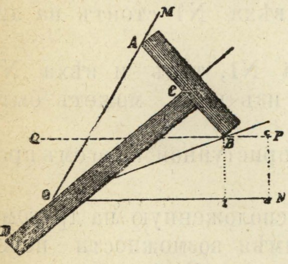
При употребленіи вспомогательнаго снаряда—экера, рѣшеніе послѣдней задачи можетъ быть сдѣлано несравненно точнѣе. Подробное разсмотрѣніе пріемовъ рѣшеній задачъ при помощи экера составитъ предметъ нашей слѣдующей статьи.

Н. С. (Тифлисъ).

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ МЕЛОЧИ.

Простѣйшій приборъ для трисекціи угла.

Для рѣшенія задачи кромѣ циркуля и линейки воспользуемся еще особою линейкою въ видѣ буквы T, состоящею изъ короткой линейки AB и перпендикулярной къ ней длинной линейки CD, прикрѣпленной къ первой такъ, что AC = CB. Проведемъ прямую QP || ON на разстояніи ac = AC. Будемъ двигать линейку ABD такъ, чтобы точка A скользила по боку MO и прямая CD всегда проходила черезъ вершину O. Когда при такомъ движеніи линейки точка B придетъ на прямую QP, то прямыя OC и OB раздѣлятъ уголъ на три равныя части, ибо треугольники AOC, BOC, BON, очевидно, равны.



Фиг. 46.

А. Свѣчинъ (Спб.).

Отъ Главной Физической Обсерваторіи.

Главная Физическая Обсерваторія проситъ насъ напечатать слѣдующій обзоръ издаваемыхъ ею лѣтописей, ежедневнаго и ежемѣсячнаго метеорологическаго бюллетеней:

Лѣтописи Главной Физической Обсерваторіи, не смотря, на то, что онѣ обнимаютъ метеорологическія данныя по наблюденіямъ 4-хъ станцій I разряда, и около 600 станцій II разряда и почти 1400 станцій III разряда, разсѣянныхъ по всему обширному пространству Имперіи, издаются раньше или въ крайнемъ случаѣ одновременно съ публикаціями другихъ большихъ государствъ, выпускающихъ, какъ и мы, одинъ общій сводъ наблюденій за весь годъ. Конечно, мы не говоримъ здѣсь о такихъ изданіяхъ, какъ напр. Сѣверо-Американскихъ Соединенныхъ Штатовъ, публикующихъ наблюденія отдѣльными мѣсячными выпусками. Если наши Лѣтописи появляются все таки лишь въ концѣ слѣдующаго наблюдательнаго года, то это объясняется, какъ и въ другихъ странахъ, тѣмъ обстоятельствомъ, что не только печатаемый въ Лѣтописяхъ матеріалъ, предназначенный между прочимъ и для научныхъ цѣлей, долженъ быть предварительно подвергнутъ тщательному контролю и большею частью заново вычисленъ, но и что печатаніе и чтеніе корректуръ такого большого числа цифровыхъ данныхъ отнимаетъ много времени*). Къ этому надобно еще замѣтить, что отдаленность многихъ наблюдательныхъ пунктовъ отъ С.-Петербурга и невполнѣ удовлетворительное состояніе путей сообщеній въ нѣкоторыхъ частяхъ Имперіи, весьма затрудняютъ и замедляютъ своевременное собираніе наблюденій и необходимую для контроля переписку съ наблюдателями.

Издаваемый Императорскою Академіею Наукъ Метеорологическій Сборникъ, появляющійся съ давнихъ поръ ежегодно по одному тому, обнимаетъ научную обработку печатаемаго въ Лѣтописяхъ матеріала. Эти изслѣдованія производятся почти исключительно личнымъ составомъ Главной Физической Обсерваторіи, такъ что и Метеорологическій Сборникъ можно считать въ нѣкоторомъ родѣ изданіемъ Главной Физической Обсерваторіи. Врядъ ли нужно упоминать, что большинство статей Сборника (въ особенности климатологическаго характера) имѣетъ практическій интересъ для сельскаго хозяйства, мореплаванія, техники, гигіены и проч.

Издаваемый Главною Физическою Обсерваторіею тоже въ теченіе многихъ лѣтъ ежедневный метеорологическій бюллетень съ синоптическими картами служитъ главнымъ образомъ для предсказаній погоды и вмѣстѣ съ тѣмъ предназначается для другихъ практическихъ потребностей, давая ежедневный обзоръ состоянія погоды не только въ Имперіи, но и на всемъ Европейскомъ материкѣ. Такъ какъ этотъ бюллетень основанъ только на данныхъ о погодѣ, сообщаемыхъ по телеграфу, то число наблюдательныхъ пунктовъ, входящихъ въ его составъ, можетъ быть лишь весьма ограниченное. Обсерваторія получаетъ утромъ 174 и вечеромъ 79 метеорологическихъ телеграммъ изъ Имперіи и изъ за границы, по которымъ въ ежедневномъ бюллетенѣ публикуются данныя для главныхъ элементовъ погоды за 7 ч. утра, 1 ч. дня и 9 ч. вечера для 144 пунктовъ внутри Имперіи и за границею. То обстоятельство, что при передачѣ по телеграфу вкрадываются не рѣдко ошибки въ числовыя данныя ежедневнаго бюллетеня и что при спѣшномъ его изготовленіи могутъ тоже произойти погрѣшности и со стороны Обсерваторіи, не уменьшаетъ значенія этого изданія для упомянутыхъ практическихъ цѣлей. При пользованіи же числовыми данными ежедневнаго бюллетеня для научныхъ изслѣдованій слѣдуетъ всегда справляться еще по Лѣтописямъ.

---

*) Въ обѣихъ частяхъ Лѣтописей сверхъ обширныхъ введеній съ объясненіями имѣется около $2^1/_2$ милліоновъ цифръ и разныхъ условныхъ знаковъ.

Незначительное число наблюдательныхъ пунктовъ, входящихъ въ составъ этого бюллетеня (лишь 80 въ Европейской Россіи), недостаточно для практическихъ нуждъ сельскаго хозяйства и государственной экономіи. Для этихъ цѣлей необходимо получать возможно подробныя свѣдѣнія въ особенности о температурѣ воздуха и объ атмосферныхъ осадкахъ раньше появленія въ свѣтъ Лѣтописей. Для удовлетворенія этимъ именно потребностямъ возникли съ недавнихъ поръ два новыя изданія Главной Физической Обсерваторіи, дополняющія такъ сказать ежедневно издающійся бюллетень и появляющіяся одинъ разъ въ годъ Лѣтописи.

Въ еженедѣльномъ бюллетенѣ, печатаемомъ каждое воскресенье въ „Вѣстникѣ Финансовъ“, Обсерваторія сообщаетъ за время съ четверга по четвергъ истекшей недѣли данныя о температурѣ и осадкахъ въ связи съ нѣкоторыми другими свѣдѣніями для 96 пунктовъ въ Европейской Россіи (исключая сѣверныя губернія и Финляндію, имѣющія меньшее значеніе въ сельско-хозяйственномъ отношеніи) и на Кавказѣ. Всѣ эти данныя получаются исключительно телеграфнымъ путемъ.

Ежемѣсячный бюллетень, появляющійся всегда въ концѣ слѣдующаго мѣсяца, заключаетъ въ себѣ, рядомъ съ данными, получаемыми по телеграфу, еще и наблюденія 320 пунктовъ, доставленныя по почтѣ. Само собою разумѣется, что вслѣдствіе этого бюллетень нѣсколько запаздываетъ, но за то даетъ возможность пользоваться наблюденіями съ такого значительнаго числа пунктовъ, удовлетворяя такимъ образомъ практическимъ потребностямъ и дозволяя даже составлять карты ежемѣсячнаго распредѣленія температуры и осадковъ. Каждому понятно, что и здѣсь, въ виду спѣшной публикаціи, нельзя производить достаточно строгаго контроля наблюдательнаго матеріала, вслѣдствіе чего данныя въ ежемѣсячномъ бюллетенѣ уступаютъ въ точности даннымъ Лѣтописей. *Такимъ образомъ цѣль ежемѣсячнаго бюллетеня дать надлежащимъ учрежденіямъ и отдѣльнымъ лицамъ, а въ особенности сельскимъ хозяевамъ возможно быстрыя, наглядныя, достаточно полныя и надежныя свѣдѣнія о состояніи погоды за истекшій мѣсяцъ въ Европейской Россіи.* Для научныхъ изслѣдованій и практическихъ примѣненій, неприуроченныхъ къ извѣстному сроку и основывающихся на подробныхъ метеорологическихъ данныхъ, необходимо всегда пользоваться исключительно Лѣтописями.

Директоръ Обсерваторіи *Г. Вильдъ.*

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Скорость распространенія землетрясеній. 5-го ноября (н. с.) 1893 г. въ 4 ч. 13 м. 40 сек. сейсмографъ въ Греноблѣ отмѣтилъ землетрясеніе; въ тотъ же день за 4 м. 26 сек. землетрясеніе было замѣчено въ Ташкентѣ, откуда слѣдуетъ, что оно распространялось со скоростью 3150 метр. въ секунду. То же землетрясеніе было замѣчено въ Потсдамѣ, Самаркандѣ и Маргеланѣ.

Землетрясеніе въ Кумамато (28 іюля 1889 г.) было отмѣчено въ Потсдамѣ и въ Вильгельмсгавенѣ въ видѣ двухъ толчковъ, между которыми прошло 2 ч. 6 мин. Одинъ изъ этихъ толчковъ дошелъ по кратчайшему пути, черезъ Азію, и прошелъ 9000 км. въ 68 мин., другой—обошелъ вокругъ земли, пройдя 30000 км. въ 225 мин., откуда слѣдуетъ, что землетрясеніе распространялось со средней скоростью 2,3 км. въ секунду. („Astr.“). *В. Г.*

Необычайная скорость вѣтра наблюдалась во время бури 20 дек. (н. с.) на вершинѣ эйфелевой башни въ Парижѣ, въ 11 ч. 45 м. Скорость эта достигла 44 метровъ въ секунду. *В. Г.*

Вліяніе луны на высоту барометра. Bouquet de la Grye, пользуясь наблюденіями, произведенными главнымъ образомъ въ Brest'ѣ, пришелъ къ слѣдующимъ результатамъ:

1) Группируя наблюденія по луннымъ часамъ, онъ нашелъ двойную періодичность съ суточнымъ и полусуточнымъ періодами. Maximum совпадаетъ съ нижней кульминаціей луны. Амплитуда колебанія барометра = 1,3 mm водяного столба. Она доходитъ до 3,8 mm, когда перигей совпадаетъ съ max. южнаго склоненія луны. Подобные же результаты получились изъ наблюденій на м. Горнъ (амплитуда = 3,92 mm.), на о. Св. Елены (1,15 mm), въ Сингапурѣ (2,15 mm), Батавіи (1,61 mm).

2) Группируя наблюденія (въ Brest'ѣ) по возрасту луны, онъ обнаружилъ также двойную періодичность съ мѣсячнымъ и полумѣсячнымъ періодами. Maximum имѣетъ мѣсто чрезъ два дня послѣ послѣдней четверти; второй (меньшій) maximum около первой четверти. Minimum—на третій день послѣ полнолунія. На м. Горнъ барометрическая кривая имѣетъ подобный-же видъ — разница только въ амплитудѣ. Склоненіе луны имѣетъ большое вліяніе на давленіе: на м. Горнъ разница достигаетъ 70 mm. смотря по тому, находится-ли луна на экваторѣ или-же имѣетъ наибольшую сѣверную элонгацію.

К. Смоличъ (Умань).

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Землетрясеніе на югѣ Россіи наблюдалось во многихъ мѣстахъ 20-го февраля между 8-ью и 9-ю часами утра. Горизонтальный маятникъ Реберъ-Пашвица, установленный въ подвалѣ Николаевской обсерваторіи, показалъ, что колебаніе почвы произошло въ 8 час. 37 мин. утра. Въ деревнѣ Зарудницѣ Кіевской губ., Бердичевскаго уѣзда землетрясеніе чувствовалось въ 8 ч. 33 м. утра и продолжалось около 3 секундъ, въ гор. Липовцѣ—въ 8 час. 35 мин. и ощущалось около 10-и минутъ. Въ Николаевѣ многіе слышали дребезжаніе стеколъ, замѣтили колебаніе воды въ сосудахъ, качаніе висячихъ предметовъ. Землетрясеніе это многими было замѣчено и въ Одессѣ.

Медаль королевскаго астрономическаго общества въ Англіи присуждена въ настоящемъ году извѣстному американскому астроному Шербёрну Уэсли Бёрнгаму. Онъ составилъ себѣ имя наблюденіями надъ двойными звѣздами. Число открытыхъ имъ двойныхъ звѣздъ превышаетъ число звѣздъ, открытыхъ Уильямомъ и Джономъ Гершелями, Вильгельмомъ и Отто Струве. Кромѣ того онъ тщательно провѣрилъ прежнія открытія собственными наблюденіями и точно вычислилъ орбиты видимаго движенія для главнѣйшихъ двойныхъ звѣздъ.—Родился Бёрнгамъ въ 1840 году въ штатѣ Вермонтъ, въ Тетфордѣ. Одно время онъ работалъ въ обсерваторіи Ликъ, но два года тому назадъ оставилъ эту обсерваторію и въ настоящее время приглашенъ занять мѣсто главнаго астронома въ Іеркисовой обсерваторіи, которая строится нынѣ въ 70-и верстахъ отъ Чикаго на средства богача-американца Іеркиса и будетъ располагать величайшимъ въ мірѣ телескопомъ съ 40-дюймовымъ объективомъ.

Величайшая въ мірѣ дамба устроена въ устьѣ рѣки Колумбіи для предохраненія небольшихъ судовъ отъ волненія и для сообщенія берега съ большими океанскими судами. Дамба эта имѣетъ около 6-и верстъ въ длину и до 2 саженъ ширины, построена изъ кусковъ лавы, связанныхъ цементомъ и обошлась въ 17 милліоновъ франковъ.

Въ Саратовѣ скончался на дняхъ извѣстный электротехникъ **П. Н. Яблочковъ.**

ДОСТАВЛЕННЫЯ ВЪ РЕДАКЦІЮ КНИГИ И БРОШЮРЫ.

Опредѣленіе одночлена въ алгебрѣ. *В. Ермакова.*

Два направленія въ школьной математикѣ. *В. Ермакова.*

Линейныя дифференціальныя уравненія второго порядка съ алгебраическими интегралами. *В. П. Ермакова.* Москва. 1894. Ц. 20 к.

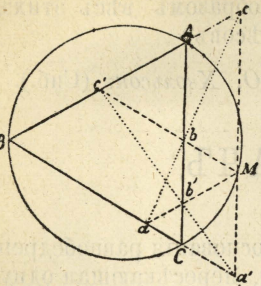
ЗАДАЧИ.

№ 38. На одной десятинѣ луга паслись 32 быка. Они въ 180 дней поѣли всю бывшую первоначально на лугѣ траву, а равно и ту, которая вновь выростала на немъ въ эти 180 дней. На другомъ лугу въ $^1/_2$ десятины паслись 20 быковъ, которые въ 108 дней поѣли всю первоначально бывшую на немъ траву, а равно и ту, которая вновь выростала на немъ въ эти 108 дней. Сколько быковъ въ 270 дней съѣдятъ съ луга въ 600 кв. саженей траву, на немъ находящуюся, а равно и ту, которая будетъ выростать на немъ въ эти 270 дней? — Предполагается, что на всѣхъ трехъ лугахъ трава растетъ съ одинаковой силой и что каждый быкъ съѣдаетъ одно и то же количество въ одинаковое время.

NB. Рѣшить задачу ариѳметически, безъ помощи отношеній и пропорцій.

(Заимств.) *П. Бѣловъ* (с. Знаменка).

№ 39. Въ окружность вписанъ равносторонній треугольникъ ABC (фиг. 47). Черезъ точку M окружности проведены три прямыя, параллельныя сторонамъ треугольника, до встрѣчи съ каждой изъ непараллельныхъ сторонъ или съ ея продолженіемъ. Показать, что три точки a, b, c изъ шести полученныхъ такимъ образомъ лежатъ на одной прямой, а три другія (a', b', c') — на другой.



Фиг. 47.

Е. Буницкій (Одесса).

№ 40. Показать, что выраженіе

$$3^{2n+1}+40n-67$$

дѣлится на 64 безъ остатка.

(Заимств.) *В. Г.* (Одесса).

№ 41. Рѣшить систему:

$$xy=(a-b)(x-y)$$

$$ab(x+y)^2=(a^2-b^2)(bx-ay).$$

(Заимств.) *Д. Е.* (Ив.-Вознес.).

№ 42. Построить треугольникъ по даннымъ сторонѣ, противулежащему углу и разности квадратовъ медіанъ двухъ другихъ сторонъ.

М. Добровольскій (Воронежъ).

№ 43. Подвижной шарикъ B однонитныхъ вѣсовъ Кулона отклоняется отъ неподвижнаго шарика A на 20^0, если сообщить A и B равное число электрическихъ единицъ. Пусть зарядъ A уменьшенъ въ 3 раза, а B—въ 2 раза. Какъ станетъ шарикъ B? Насколько придется закрутить нить, чтобы показать уменьшеніе отталкивательной силы въ 6 разъ?

И. Александровъ (Тамбовъ).

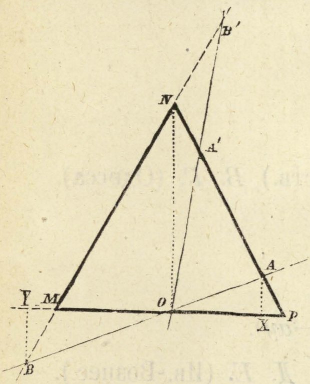
МАЛЕНЬКІЕ ВОПРОСЫ.

№ 7. На одну чашку вѣсовъ поставленъ стеклянный закрытый цилиндръ, наполненный газомъ; на другую — совершенно такой же цилиндръ, но пустой, и гиря p, необходимая для уравновѣшиванія вѣсовъ. Вѣсъ газа въ первомъ цилиндрѣ считается равнымъ p. Однако по кинетической теоріи газовъ мы допускаемъ, что частицы газа свободно летятъ внутри сосуда во всѣхъ направленіяхъ, сталкиваясь между собою и со стѣнками сосуда. Какимъ же образомъ вѣсъ этихъ частицъ обнаруживается давленіемъ на чашку вѣсовъ?

Проф. *О. Хвольсонъ* (Спб.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 502 (2 сер). Изъ точки O, средины основанія равнобедреннаго треугольника, проведена произвольная прямая, пересѣкающая одну изъ равныхъ сторонъ въ точкѣ A и продолженіе другой въ точкѣ B. Изъ точекъ A и B опущены перпендикуляры AX и $BУ$ на основаніе. Показать, что



Фиг. 48.

$$\frac{1}{OX}+\frac{1}{OУ}=\frac{2}{a},$$

гдѣ a есть половина основанія равнобедреннаго треугольника.

Пусть MNP есть равнобедренный треугольникъ (фиг. 48). Очевидно имѣемъ:

$$\frac{AX}{NO}=\frac{a-OX}{a} \text{ и } \frac{BУ}{NO}=\frac{OУ-a}{a}.$$

Дѣля почленно эти двѣ пропорціи и замѣчая, что $AX{:}BУ=OX{:}OУ$, получимъ

$$\frac{a-OX}{OУ-a}=\frac{OX}{OУ},$$

откуда уже не трудно получить требуемое соотношеніе.

Легко показать, что если точки A_1 и B_1 лежатъ по одну сторону отъ высоты NO, то

$$\frac{1}{OX}-\frac{1}{OУ}=\frac{2}{a}.$$

К. Щиголевъ, Е. Краснитская, С. Адамовичъ (Курскъ); *С. Бабанская, К. Исаковъ* (Тифлисъ); *М. Окасъ* (Мерьяма); *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *Я. Тепляковъ* (Радомысль); *П. Ивановъ* (Одесса); *Л. Заржецкій* (Обольцы).

NB. М. Окасъ (Мерьяма) обобщаетъ задачу слѣдующимъ образомъ: *Если чрезъ средину основанія треугольника, провести прямую, пересѣкающую одну изъ его сторонъ въ точкѣ* A, *а другую въ точкѣ* B, *изъ точекъ* A *и* B *провести прямыя, параллельныя медіанѣ основанія, до пересѣченія съ основаніемъ соотвѣтственно въ точкахъ* X *и* У, *то*

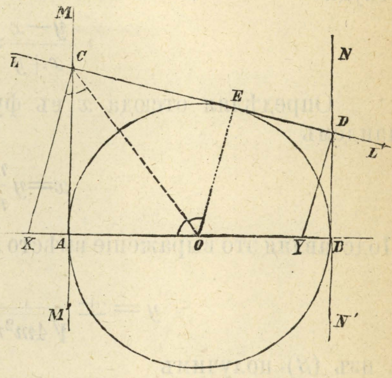
$$\frac{1}{OX}\pm\frac{1}{OУ}=\frac{2}{a},$$

гдѣ a *есть половина основанія треугольника.*

№ 504 (2 сер.). Дана окружность съ центромъ въ точкѣ O и съ радіусомъ r. Въ концахъ діаметра AB проведены касательныя MM' и

NN' и еще проведена перемѣнная касательная LL', пересѣкающая ихъ соотвѣтственно въ точкахъ C и D. Изъ этихъ точекъ возставлены перпендикуляры CX и $DУ$ къ касательной LL' и продолжены до пересѣченія съ діаметромъ AB въ точкахъ X и $У$. Показать, что

$$\frac{1}{OX}+\frac{1}{OУ}=\frac{2}{r}.$$



Фиг. 49.

1. Соединивъ центръ O (фиг. 49) съ точкою касанія E, получимъ:

$$\frac{OX}{OУ}=\frac{CE}{DE}=\frac{AC}{BD}=\frac{AX}{BУ}=\frac{OX-r}{r-OУ},$$

откуда

$$r.OX-OX.OУ=OX.OУ-r.OУ;$$

дѣля это равенство на $r.OX.OУ$, получаемъ требуемое соотношеніе.

2. Легко доказать, что $CX=OX$ и $DУ=OУ$, а такъ какъ

$$\frac{CX}{DУ}=\frac{AX}{BУ}, \text{ то } \frac{OX}{OУ}=\frac{OX-r}{r-OУ}.$$

К. Исаковъ, С. Бабанская (Тифлисъ); *К. Щиголевъ, С. Адамовичъ* (Курскъ); *А. Шантыръ* (Полоцкъ); *Л. Заржецкій* (Обольцы); *П. Ивановъ* (Одесса); *М. Окасъ* (Мерьяма); *Я. Тепляковъ* (Радомысль).

№ 524 (2 сер.). Нѣкто купилъ вексель за 3 мѣсяца до срока съ учетомъ (математическимъ) по 8%, но должникъ въ срокъ денегъ не уплатилъ. Получивъ деньги по суду черезъ полгода, владѣлецъ векселя нажилъ отъ всей операціи 101 р. 20 к. Найти валюту векселя, если извѣстно, что за просроченное время взыскано было 6% (годовыхъ). — Рѣшеніе требуется ариѳметическое.

При учетѣ за 3 мѣс. до срока по 8% владѣлецъ векселя удерживаетъ въ свою пользу 2 р. съ каждыхъ 102 р. валюты; при взысканіи же по суду, онъ получаетъ съ 102 р. валюты $\frac{3.102}{100}=3{,}06$ р., а всего со 102 р. валюты онъ получаетъ $2+3{,}06$ р. $=5{,}06$ р. Поэтому валюта векселя равна

$$\frac{101{,}20\times 102}{5{,}06}=2040 \text{ р.}$$

Б. Богдановичъ (Кременчугъ); *И. Шакъ* (Могилевъ); *К. Щиголевъ, А. Сахарова* (Курскъ); *А. Полозовъ* (Симбирскъ).

NB. Въ рѣшеніи *А. В.* (Рост. н. Д.) принятъ коммерческій учетъ.

№ 535 (2 сер.). Рѣшить систему

$$\frac{x+y}{\sqrt{1+y^2}}=m;\ \frac{x+y}{\sqrt{1+x^2}}=n.$$

Изъ данныхъ уравненій получаемъ:

$$\frac{1+y^2}{(x+y)^2}=\frac{1}{m^2} \text{ и } \frac{1+x^2}{(x+y)^2}=\frac{1}{n^2}, \quad . \; . \; . \; . \quad (\alpha)$$

откуда

$$\frac{y-x}{x+y}=\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}.$$

Опредѣляя отсюда x въ функціи y и коэффиціентовъ уравненій, найдемъ

$$x=y\frac{m^2n^2+m^2-n^2}{m^2n^2-m^2+n^2}. \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\beta)$$

Подставляя это выраженіе вмѣсто x въ первое изъ уравненій (α), опредѣлимъ

$$y=\pm\frac{m^2n^2-m^2+n^2}{\sqrt{4m^2n^4-(m^2n^2-m^2+n^2)^2}},$$

а изъ (β) получимъ

$$x=\pm\frac{m^2n^2+m^2-n^2}{\sqrt{4m^2n^4-(m^2n^2-m^2+n^2)^2}}.$$

С. Окуличъ (Варшава); *В. Шидловскій* (Полоцкъ); *А. Варенцовъ* (Ростовъ н. Д.); *П. Михайловъ* (Борисоглѣбскъ); *С. Бабанская* (Тифлисъ); *П. Ивановъ* (Одесса); *П. Бѣловъ* (с. Знаменка); *К. Щиголевъ*, *К. Геншель* (Курскъ); *В. Баскаковъ* (Ив.-Вознес.).

№ 542 (2 сер.). Медіаны катетовъ относятся, какъ $m:n$. Опредѣлить острые углы треугольника.

Если M медіана катета b, а N—катета c, то очевидно

$$M=\sqrt{c^2+\frac{b^2}{4}}={}^b/_2\sqrt{4\operatorname{tg}^2C+1};\; N=\sqrt{b^2+\frac{c^2}{4}}={}^b/_2\sqrt{4+\operatorname{tg}^2C};$$

отсюда

$$\frac{M^2}{N^2}=\frac{m^2}{n^2}=\frac{4\operatorname{tg}^2C+1}{4+\operatorname{tg}^2C};\operatorname{tg}C=\sqrt{\frac{n^2-4m^2}{m^2-4n^2}};\angle B=90^0-C.$$

К. Исаковъ (Тифлисъ); *А. Полозовъ* (Симбирскъ); *В. Баскаковъ* (Ив.-Вознес.); *П. Ивановъ* (Одесса); *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *К. Щиголевъ* (Курскъ).

№ 549 (2 сер.). Биссекторъ угла C въ треугольникѣ ABC пересѣкаетъ AB въ точкѣ D. Опредѣлить уголъ A, если извѣстно, что

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BC-AC}{AD}.$$

Если CD есть биссекторъ угла C, то

$$\frac{BC}{AC}=\frac{BD}{AD}, \text{ откуда } \frac{BC+AC}{AC}=\frac{BD+AD}{AD}.$$

Дѣля почленнно это равенство на данное, получимъ

$$\frac{BC+AC}{AB}=\frac{AB}{BC-AC}, \text{ откуда } \overline{AB}^2=\overline{BC}^2-\overline{AC}^2,$$

т. е. $\angle A=90^0$.

В. Абрамовичъ (Сѣдлецъ); *С. Адамовичъ, К. Щиголевъ* (Курскъ); *П. Ивановъ* (Одесса).

№ 551 (2 сер.). Рѣшить систему

$$x^3+y^3=(x+y)^2;\ x^2+y^2=x+y+a.$$

Дѣля первое ур. на $x+y$, находимъ:

$$x+y=0;\ x=-y\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

$$x^2-xy+y^2=x+y=x^2+y^2-a,$$

откуда

$$xy=a\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2).$$

Подставляя $-y$ вмѣсто x во 2-е изъ данныхъ ур., находимъ

$$2y^2=a,\ y_1=\sqrt{a/2} \text{ и, слѣдовательно, } x_1=-\sqrt{a/2}.$$

Такъ какъ $xy=a$, то второе изъ данныхъ уравненій обращается въ

$$(x+y)^2=x+y+3a,$$

откуда опредѣляемъ $x+y$. Зная xy и $x+y$ найдемъ x и y.

В. Баскаковъ, Н. Кузнецовъ (Ив.-Вознес.); *И. Радашевичъ* (Выборгъ); *Л. Калишевъ, П. Хлѣбниковъ* (Тула); *А. Варенцовъ* (Рост. н. Д.); *К. Щиголевъ, П. Писаревъ, С. Адамовичъ* (Курскъ); *П. Ивановъ* (Одесса); *С. Окуличъ* (Варшава); *К. Исаковъ* (Тифлисъ); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка).

№ 562 (2 сер.). Въ 1892—93 году запасной темой по ариѳметикѣ въ Варшавскомъ реальномъ училищѣ служила слѣдующая задача:

„Нѣкто продалъ вексель въ 742,5 руб. съ математическимъ учетомъ за 2,0833... года до срока по стольку процентовъ, по скольку надо отдать 3200 рублей, чтобы имѣть черезъ 3 года 4 мѣсяца 24 дня прибыли 652 руб. 80 коп. Вырученныя отъ продажи деньги были раздѣлены на 3 части, изъ которыхъ первая относилась ко второй, какъ $^{13}/_{44}:0,(81)$, а вторая къ третьей, какъ $^1/_{17}:0,02(7)$. На первую изъ этихъ частей былъ купленъ чай въ 52 руб. пудъ, а на вторую — въ 1,6 руб. фунтъ, и весь этотъ чай былъ смѣшанъ. Спрашивается, за сколько рублей должно продавать фунтъ смѣси, чтобы получить на затраченныя на всю эту покупку деньги 30% прибыли. Проценты простые. Годъ принимать въ 360 дней, мѣсяцъ—въ 30 дней“.

Показать, какія условія въ этой задачѣ лишнія.

Такъ какъ цѣна фунта чаю перваго сорта относится къ цѣнѣ фунта втораго, какъ $^{52}/_{40}:16=13:16$, а стоимость всего чая 1-го сорта относится къ стоимости всего чая 2-го сорта, какъ $^{13}/_{44}:0,(81)=13:36$, то количества чаю 1-го и 2-го сорта относятся, какъ $^{13}/_{13}:{}^{36}/_{16}=4:9$. Отсюда легко найти, что 1 ф. смѣси стоитъ $^{196}/_{130}$ руб. Чтобы получить при продажѣ 30% прибыли, слѣдуетъ продавать фунтъ смѣси по

$$\frac{196\times130}{130\times100}=1{,}96 \text{ руб.}$$

Такимъ образомъ большая половина условій задачи лишняя.

Чаганъ (Уральскъ).

№ 565. (2 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^3+3ax+a^3=1.$$

Такъ какъ (см. рѣш. зад. № 432 въ № 176 „Вѣстника")

$$(x+a-1)(x^2+a^2-ax+x+a+1)=0,$$

то

$$x_1=1-a,\ x_{2,3}=\frac{a-1\pm(a+1)\sqrt{-3}}{2}.$$

І. Ѳеодоровъ (Тамбовъ); *С. Бабанская, К. Исаковъ, О. Шахъ-Азизовъ, Кулиджановъ* (Тифлисъ); *С. Адамовичъ* (с. Спасское); *П. Бѣловъ* (с. Знаменка); *А. Варенцовъ* (Ростовъ на Д.); *Я. Тепляковъ* (Радомысль); *С. Окуличъ* (Варшава); *П. Ивановъ* (Одесса); *Н. Кузнецовъ, В. Баскаковъ, А. Треумовъ* (Ив.-Вознесенскъ).

№ 156 (1 сер.). Даны на плоскости четыре точки. Черезъ двѣ изъ нихъ (C, D) должны проходить діагонали, а черезъ двѣ другія (A, B) —двѣ стороны квадрата. Построить квадратъ.

Если точки A и B должны лежать на смежныхъ сторонахъ квадрата, то на прямую AB опирается прямой уголъ, вершина котораго лежитъ на окружности, имѣющей AB діаметромъ. Діагональ, проходящая черезъ вершину этого угла, дѣлитъ пополамъ или этотъ, или смежный съ нимъ уголъ. Въ обоихъ случаяхъ эта діагональ дѣлитъ пополамъ полуокружность, имѣющую AB діаметромъ; поэтому вершина квадрата опредѣлится, какъ пересѣченіе круга, описаннаго на AB, съ прямою, проходящею черезъ одну изъ точекъ C и D и черезъ средину одного изъ полукруговъ, стягиваемыхъ діаметромъ AB. Задача имѣетъ 4 рѣшенія.

Если точки A и B должны лежать на параллельныхъ сторонахъ, то прямая, проходящая черезъ средину M прямой AB и черезъ центръ квадрата, будучи параллельна этимъ сторонамъ, дѣлитъ пополамъ прямой уголъ между діагоналями. Посему центръ квадрата опредѣлится какъ пересѣченіе круга, описаннаго на CD, какъ на діаметрѣ, съ прямою, проходящею черезъ точку M и черезъ средину одного изъ полукруговъ, стягиваемыхъ діаметромъ CD. Задача имѣетъ два рѣшенія.

С. Шатуновскій (Екатеринославъ).

ПОЛУЧЕНЫ РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ отъ слѣдующихъ лицъ: *А. Варона* (Полтава)—№ 6 (Маленьк. вопр.); *Р. Хмѣлевскаго* (Полтава) — № 529 (2 сер.); *Б. Дзѣчковскаго* (Винница)—№№ 7, 8 (3 сер.); *А. Варенцова* (Рост. н. Д.)—№№ 538, 564, 579 (2 сер.) и 2, 10, 14 (3 сер.); *С. Адамовича* (с. Спасское)—№№ 564, 572, 576, 588 (2 сер.) и 2, 10 (3 сер.); *А. Треумова* — (Ив.-Вознез.) — №№ 531, 541, 565, 581, 582, 588 (2 сер.) и мат. шутка № 2; *В. Ахматова* (Тула) — №№ 436, 482, 517 (2 сер.) и 17 (3 сер.); *В. Лѣсковца* (Винница) — № 8 (3 сер.); *К.* и *Ѳ.* (Тамбовъ) — №№ 19, 22, 23, 25 (3 сер.); *А. Иваницкаго* (Винница)—№ 7 (3 сер.); *С. Д—цева* (Москва) —№№ 1, 7 (3 сер.) и 6 (мал. вопр.): *В. Поповича* (Винница) —№ 7 (3 сер.); *В. Рюмина* (Николаевъ)—№ 19 (3 сер.); *Я. Полушкина* (с. Знаменка)—№ 22 (3 сер.); *К.* и *Ѳ.* (Тамбовъ)—№ 11 (3 сер.); *С. Косьцюшко* (Винница)—№№ 7, 8 (3 сер.); *Н. Кузнецова* (Ив.-Воз.)—№№ 588 (2 сер.), 1, 3, (мал. вопр.) и 2 (мат. шутка); *Л. Заржецкаго* (Спб.)—№№ 532, 537 (2 сер.); *О. Ривоша* (Вильна) —№№ 1, 6 (3 сер.).

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса, 26-го Марта 1894 г.

„Центральная типо-литографія", уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. Болгарова.

БИБЛІОГРАФИЧЕСКІЙ ЛИСТОКЪ
НОВѢЙШИХЪ РУССКИХЪ ИЗДАНІЙ.

Дневникъ IX съѣзда русскихъ естествоиспытателей и врачей, издаваемый распорядительнымъ комитетомъ съѣзда подъ ред. Д. Н. Зернова №№ 1—10. Москва. 1894.

Дубровинъ Н. Ѳ., акад. Отчетъ о дѣятельности Имп. академіи наукъ по физико-математическому и историко-филологическому отдѣленіямъ за 1893 годъ, читанный въ публичномъ засѣданіи 29-го декабря 1893. Спб.

Пашковъ, I. И. Силы природы. Москва. 1893.

Соколовъ, А. П. и *Столѣтовъ, А. Г.* По поводу „Изслѣдованій" кн. Б. Голицына (Изъ „Ученыхъ Записокъ" Имп. моск. унив., отдѣлъ физ.—мат.). Москва 1893.

Сѣченовъ, И. М. О предметномъ мышленіи съ физіологической точки зрѣнія. Рѣчь, произнесенная въ общемъ собраніи IX съѣзда русскихъ естествоиспытателей и врачей 4-го января 1894 года. Москва. 1894.

Торопов, К. Краткій курсъ прямолинейной тригонометріи. Пермь. 1894. Ц. 75 коп.

Умовъ, Н. А., проф. Вопросы познанія въ области физическихъ наукъ. Рѣчь, произнесенная въ общемъ собраніи съѣзда русскихъ естествоиспытателей и врачей 4-го января 1894 г. Москва.

Чернышевъ, К. Опыты и наблюденія. Свойства поверхностей жидкихъ тѣлъ. (Отд. отт. изъ популярно-научнаго журнала „Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики"). Одесса. 1893.

Верещагинъ, И. Сборникъ ариѳметическихъ задачъ для среднихъ учебныхъ заведеній, мужскихъ и женскихъ. Изд. 8-е. Спб. 1894. Ц. 80 к.

Кисилевъ, А. Элементарная алгебра. 5-е улучшенное изданіе, содержащее курсъ классическихъ гимназій и 6-ти классовъ реальныхъ училищъ. Изд. книжн. магазина В. Думнова. Москва. 1894. Ц. 1 р. 25 к.

БИБЛІОГРАФИЧЕСКІЙ ЛИСТОКЪ
НОВѢЙШИХЪ АНГЛІЙСКИХЪ ИЗДАНІЙ.

Математика.

Chittenden, J. Brace, A. M. a presantation of the theory of Hermite's from of Lamé's equation, with a determination of the explicit forms in terms of the p function for the case n equal to three. London. 1894. M. 2,80.

Harkness, J. and *Morley, F.* A Treatise on the Theory of Functions. Macmillan. 1894. 18 s.

Skerry, G. E. Practical Papers on Higher Arithmetic, adapted to the Requirements of Candidates for all Public Examinations. 1894 2 s. 6 d.

Weld, L. G. A Short Course of the Theory of Determinants. Macmillan. 1894. 7 s. 6 d.

Ball, W. W. Rouse.—An Essay on Newton's Principia. Post 8vo. Macmillan. 1894. 3. 8 s.

Briggs, W., and *Edmondson, T. W.* The Geometrical Properties of the Sphere. Cr. 8vo. (Univ. Corr. Coll. Tutorial Series). 1894. 1 s. 6 d.

Howarth, H. The Specific Euclid for Schools and Science Classes. With copious Exercises Selected and Graduated. Post 8vo. (Manchester, Sedham) 1894. d. 8.

Klein, F. On Reimann's Theory of Algebraic Functions and their Integrals. Translated by Frances Hardcastle. 8vo. Macmillan. 1894. 4 s. 6 d.

Mukhopadhyay, A. An Elementary Treatise on the Geometry of Conics. Crown 8vo. Macmillan. 1894. 4 s. 6 d.

Wilcocks, H. C. The Practical Guide to Geometry. For Standard V. With Instructions and Explanations. Royal 8vo. Philip. 1894. 1 s. sewed.

Woodward, C. I. ABC Five Figure Logarithms for General Use: containing Mantissae of Numbers to 10,000, Log. Sines, Tangents, Cotangents, and Cosines to 10′ of Arc, together with full explanations and simple exercises showing use of the Tables. 12 mo. Spon. 1894. 4 s.

Briggs, *W.* and *Edmondson*, *T. W.* Mensuration of the Simpler Figures, inclu-the Elements of the Geometry of the Rectilinear Solids. Post 8vo. pp. 170. (Univ. Corr. Coll. Tutorial Series). 1894. 3 s. 6 d.

Carroll's Key to Geometry: consisting of Selections to the Exercises in Orthographic Projection and Solid Geometry: Post 8vo. pp. 48. Burns & O. 1894. 1 s. 6 d.

Loney, *S. L.* Plane Trigonometry. Post 8vo. pp. 506. Camb. Warehouse. 1894. 7 s. 6 d.

Физика, астрономія, физ. географія, метеорологія.

Gillespie, *I.* The Triumph of Philosophy; or, the True System of the Universe. New edit. roy. 16mo. Sutton. 1894. 2 s. 6 d.

Barnes, *C. L.* Sound: an Elementary Treatise. 12mo. pp. 88. (Nisbet's Elementary Science Manuals). Nisbet. 1894. 1 s.

Besant, *W. H.* A Treatise on Dynamics. 2nd. edit. cr. 8vo. (Cambridge, Deighton) pp. 456. Bell. 1894. 10 s. 6 d.

Burch, *G. I.* A Manual of Electrical Science. With 39 Jllustrations. Post 8vo. pp. 260. (University Extension Series). Methuen. 1894. 3 s.

Carhart, *H. S.* Elements of Physics. 12mo. (Boston). London. 1894. 5 s. 6 d.

Cavendisch, *H.* Experiments on Air: Papers published in the Philosophical Transactions. Post 8vo. (Edinburg, Clay). pp. 520. (Alembic Club Reprints). Simpkin. 1894. 1 s. 6 d. net.

БИБЛІОГРАФИЧЕСКІЙ ЛИСТОКЪ

НОВѢЙШИХЪ ФРАНЦУЗСКИХЪ ИЗДАНІЙ.

Физика, астрономія, физ. географія, метеорологія.

Reydellet, Leçons élémentaires de cosmographie rédigées conformément aux programmes officiels du baccalauréat ès sciences et du baccalauréat ès lettres. 8-e édition, revue, corrigée et augmentée de plusieurs notes. In—18 jésus, 286 pages avec fig. Paris. Delagrave. 1894.

Banet-Rivet, *P.* Cours de physique, à l'usage des candidats à l'Ecole spéciale militaire de Saint-Cyr, rédigé conformément au dernier programme d'admission à cette Ecole. In—16,568 pages avec fig. Paris. Hachette et Ce 1894 fr. 5,00.

Regodt, *H.* Notions de physique applicables aux usages de la vie (programmes officiels). 41-e édition, revue et complétée par un professeur agrégé de l'Université. In—16, VII—385 pages avec 231 grav. Paris. Delalain frères, 1894, fr. 2,25.

Connaissance des temps ou des mouvements célestes pour le mériden de Paris, à l'usage des astronomes et des navigateurs, pour l'an 1896, publié par le Bureau des longitudes. In—8⁰, VI—854 pages et planches. Paris. Gauthier-Villars et fils. 1894. fr. 4,00.

Du Gourcq, *I.* L'Astronomie chez les Incas. In—8⁰, 24 p. Paris. 1894.

Dinichert, *Rob.* Etude des courants faradiques à l'aide du galvanomètre et de l'électrodynamomètre. Diss. gr. 8⁰. (56 S. m. Fig.) Bern. H. Körber. M. 1,20.

Congrès international de photographie. Première et deuxième sessions. (Paris, 1889—Bruxelles, 1891.) Voeux, Résolutions et Documets, publiés par les soins de la commission permanente, d'après le travail de M. le général Sebert, inséré dans le Bulletin de la Société française de photographie. In—8⁰, 48 p. avec fig. Paris. Gauthier-Villars et fils. 1894. fr. 1,50.

Montillot, *C. I.* et *L.* La maison électrique. Applications de l'électricité à la ville et à la campagne. Grand in—8⁰, II—494 pages avec 250 grav. Paris. Grelot. 1894.

Химія.

Bruel, *G.* De l'éther amyl-valérianique (principe actif des pommes), de son action sur la cholestérine, de sa superiorité sur le chloroforme comme dissolvant des calculs hépatiques et des ses actions thérapeutiques. In—8⁰. 12 p. Paris. 1894.

Приложеніе къ „Вѣстнику Опытной Физики и Элементарной Математики“.

Хронологическій указатель по физико-математическимъ наукамъ.

(Продолженіе).*

— 150(?) *Гиппархъ Родосскій*, родившійся въ Никеѣ, извѣстнѣйшій астрономъ древности. Жилъ и наблюдалъ въ Родосѣ, быть можетъ былъ и въ Александріи. Изъ многочисленныхъ его трудовъ до насъ дошелъ комментарій его поэмы Арата (см. — 320). Остальныя его сочиненія цитируютъ Птоломей, Теонъ Александрійскій и Плиній Старшій. Гиппархъ принимаетъ планетныя орбиты за круги, внѣ центра которыхъ находится земля, и даетъ для эксцентрицитета $1/24$. Онъ опредѣлилъ длину года въ 365 дней 5 час. 55 мин., открылъ прецессію равноденствій, замѣтивъ, что одна изъ звѣздъ въ созвѣздіи Дѣвы измѣнила свою долготу на 2^0 въ 122 года или на $59''$ въ годъ, и составилъ каталогъ 1080 неподвижныхъ звѣздъ, которымъ пользовался Птоломей. Онъ составилъ „таблицу хордъ“, въ которой даны численные множители для выраженія сторонъ правильныхъ многоугольниковъ по радіусу описаннаго круга, и такимъ образомъ положилъ основаніе тригонометріи.

— 135(?) — 49. Жизнь *Поссидонія*, философа-стоика. Родился онъ въ Апамеѣ (Сирія), былъ въ Аѳинахъ и основалъ школу въ Родосѣ. Два раза былъ онъ въ Римѣ, познакомился тамъ съ Цицерономъ, который называетъ его „familiaris noster, a quo instituti fuimus“, и находился въ близкихъ отношеніяхъ съ Помпеемъ, бывшимъ у него въ Родосѣ. Его попытка опредѣлить отношеніе діаметровъ солнца, луны и земли не дала хорошихъ результатовъ. Онъ опредѣлилъ земной радіусъ по способу Эратосфена, но не точнѣе, чѣмъ Эратосфенъ (см. — 276). Сочиненія утеряны; уцѣлѣвшіе отрывки см. Possidonii Rhodii reliquae doctrinae, Лейденъ, 1810.

ок. — 100 *Филонъ Византійскій*, механикъ, и *Никомедъ*, изобрѣтатель конхоиды. Никомедъ показалъ, что конхоида неопредѣленно приближается къ постоянной прямой, что всякая прямая, проведенная между постоянной прямой, и конхоидой, пересѣкаетъ послѣднюю, и что помощью конхоиды рѣшается задача объ удвоеніи куба.

— 96 — 55. *Лукрецій*. De rerum natura.

— 95(?) — ?. *Геминій*, родился на Родосѣ и вѣроятно былъ римскимъ вольноотпущенникомъ. Сохранилось его „Введеніе въ астрономію“ (*εἰσαγωγὴ εἰσ τὰ φαινόμενα*), въ которомъ много старыхъ ошибокъ, исправленныхъ въ свое время Гиппархомъ. Его сочиненіе по геометріи неизвѣстнаго содержанія до насъ не дошло.

— 85 — 26 Жизнь *Витрувія* (Марка Поллiона), римскаго военнаго инженера, современника Цезаря и Августа. Онъ былъ съ Цезаремъ въ Галліи. Отъ него остались 10 книгъ De Architectura, въ которыхъ трактуется объ архитектурѣ, механикѣ, физикѣ, физической географіи. Книги I—VII —архитектура, VIII—вода и водопроводы, IX—измѣреніе времени, X—механическія сооруженія. Въ VIII книгѣ звуковыя волны въ воздухѣ сравниваются съ водяными, а вѣтеръ объясняется напряженіемъ водяныхъ паровъ. Описаніе полиспаста, водяныхъ мельницъ, солнечныхъ часовъ. Первое изданіе въ Венеціи въ 1497 г., лучшее Шнейдера въ Лейпцигѣ (1808).

— 80(?) *Клеомедъ*, авторъ сочиненія: „Циклическая теорія метеоровъ“. Клеомедъ первый научно разработалъ теорію преломленія свѣта. Связь между явленіемъ приливовъ и движеніемъ луны. *В. Г.*

*) См. Справ. Табл. №№ XXI, XXIII, XXIV и XXVI.

БИБЛІОГРАФИЧЕСКІЙ ЛИСТОКЪ

НОВѢЙШИХЪ РУССКИХЪ ИЗДАНІЙ

Мензбиръ, М. А. Современное направленіе въ біологіи. Рѣчь. Читана въ общемъ собраніи IX съѣзда русскихъ естествоиспытателей и врачей въ Москвѣ 11-го января 1894 г. Москва.

Семиколѣновъ, Гавріилъ, инж. Этюды по геометріи Лобачевскаго. Этюдъ 1-ый. Теорема Пиѳагора въ геометріи Лобачевскаго. Либава. 1893.

Тимирязевъ, К. А. Праздникъ русской науки. Рѣчь. Читана на первомъ общемъ засѣданіи IX съѣзда русскихъ естествоиспытателей и врачей въ Москвѣ. Москва.

Цингеръ, В. Я. Недоразумѣнія во взглядахъ на основанія геометріи. Рѣчь. Читана на общемъ засѣданіи IX съѣзда русскихъ естествоиспытателей и врачей въ Москвѣ 11-го января 1894 г. Москва.

Бекетовъ, Н. Н., акад. Химическая энергія въ природѣ. Рѣчь. Читана въ общемъ собраніи IX съѣзда русскихъ естествоиспытателей и врачей въ Москвѣ, 11 января 1894 года. Москва.

Вишневскій, Г. Ариѳметическій задачникъ для начальныхъ училищъ и приготовительныхъ классовъ гимназій и реальныхъ училищъ. Часть I. Ариѳметическія задачи. Часть II. Примѣры для вычисленій и самостоятельныхъ упражненій учащихся. Изд. 4-е, исправленное и дополненное, книжн. магазина бр. Башмаковыхъ. Казань. 1894. Ц. 35 коп., съ перес. 45 коп.

Любимовъ Н. Экспериментальная наука въ прошедшемъ и будущемъ. Спб.

Попруженко, М. Начала космографіи (математическая географія), учебникъ для среднихъ учебныхъ заведеній. Изд. книжн. магазина В. Думнова. Москва. 1894. Ц. 1 р.

Славнинъ, К. Сборникъ ариѳметическихъ задачъ. Выпускъ II. Задачи на числа любой величины. Пособіе для сельскихъ и другихъ начальныхъ школъ. Изд. составителя. Екатеринбургъ. 1894.

Эльбсъ, Карлъ, д-ръ, проф. фрейб. унив. Аккумуляторы. Общедоступное описаніе ихъ дѣйствія, работоспособности и уходъ за ними. Переводъ съ нѣмецкаго. Съ 4-мя рис. въ текстѣ. Изд. книжн. магазина В. Эриксонъ. Спб. 1894.

Борзаковскій, Н. Вспомогательныя таблицы при умноженіи простыхъ чиселъ съ однимъ, двумя и болѣе знаками. Спб. 1894. Ц. 25 к.

Гольденбергъ, А. И. Сборникъ задачъ и примѣровъ для обученія начальной ариѳметикѣ, въ 2-хъ выпускахъ. Выпускъ I: Задачи и примѣры на числа первой сотни и на простѣйшія дроби. Изд. 19-е, Полубояринова. Спб. 1894. Ц. 15 к.

— Выпускъ II: Задачи и примѣры на числа любой величины. Изд. 17-е, Д. Полубояринова. Спб. 1894. Ц. 15 к.

Гурьевъ, А. Н. О привилегіяхъ на изобрѣтенія. Къ реформѣ законодательства. Спб. 1894. Ц. 50 коп.

Дедюлинъ, И. А. Показатель колебанія температуры и осадковъ въ С.-Петербургѣ. Спб.

— Объясненія показателя колебанія температуры и осадковъ въ С.-Петербургѣ. Спб.

Малининъ, А. и *Егоровъ, Ѳ.* Геометрія и собраніе геометрическихъ задачъ. Руководство для женскихъ учебныхъ заведеній и для учительскихъ семинарій. Изд. 3-е, книжн. магазина В. Думнова. Москва. 1894. Ц. 1 р.

Наблюденія метеорологической обсерваторіи университета св. Владиміра въ Кіевѣ, издаваемыя проф. П. И. Броуновымъ. Августъ 1893 г. (Отт. изъ „Университетскихъ Извѣстій" за 1893 годъ). Кіевъ. 1893.

Вильке, А. Электричество, его источники и примѣненія въ промышленности. Вып. VIII. Перев. и дополнилъ Д. Головъ. Изд. Ф. Щепанскаго.

Городисскій, П. М. Справочная книга для химиковъ и технологовъ. Выпускъ I. Кіевъ. 1894. Ц. 3 р. 75 к.

Ермаковъ, В. П. Линейныя дифференціальныя уравненія второго порядка съ алгебраическими интегралами. Изд. московскаго математическаго общества, состоящаго при Имп. моск. университетѣ. Москва. 1894. Ц. 20 к.

Обложка
ищется

Обложка
ищется