Обложка
ищется

Обложка
ищется

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

XV Сем. **№ 177.** № 9.

Содержаніе: Отъ редакціи. — Свойства поверхностей жидкихъ тѣлъ, (продолженіе). *К. Чернышева.* — По поводу парадоксальной формулы для π проф. Никольсона, (окончаніе). *С. Кричевскаго.* — Простая задача и отдѣльное дѣйствіе въ ариѳметикѣ, (продолженіе). *И. Синскаго.* — Разныя извѣстія. — Задачи №№ 568 — 573. — Рѣшенія задачъ (2 сер.) №№ 131, 281, 336, 351, 353, 358. — Открытые вопросы и отвѣты. № 7. — Справочная таблица № XXV. — Библіографическій листокъ новѣйшихъ русскихъ изданій. — Отвѣты редакціи. — Объявленія. — Въ приложеніи портретъ Н. И. Лобачевскаго.

ОТЪ РЕДАКЦІИ: Прилагаемъ къ настоящему № „Вѣстника" портретъ Н. И. Лобачевскаго, который, по независящимъ отъ редакціи обстоятельствамъ, не могъ быть разосланъ, какъ предполагалось, при № 173, гдѣ помѣщена біографія великаго геометра.

СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТЕЙ ЖИДКИХЪ ТѢЛЪ.

Опыты и наблюденія.

(Продолженіе)*

VII. Строеніе струи.

1. На дно высокаго (15—25 цм.) стакана нальемъ немного воды, подкрашенной въ синій цвѣтъ, а поверхъ воды наполнимъ стаканъ нѣсколько болѣе легкой жидкостью—смѣсью жидкаго парафина съ сѣроуглеродомъ (приготовляется какъ для опытовъ Плато; смѣсь должна быть немного плотнѣе внизу; уплотняется она сѣроуглеродомъ).

Возьмемъ стеклянную трубку (1—2 цм. діаметромъ), закроемъ верхній конецъ ея рукой и опустимъ другимъ концомъ до дна стакана со смѣсью. Если открыть верхній конецъ трубки, то она сейчасъ же заполнится подкрашенной водой со дна стакана. Вынемъ теперь открытую трубку изъ жидкости быстро и вертикально; цилиндръ окрашенной воды останется внутри смѣси парафина съ сѣроуглеродомъ и медлен-

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики" №№ 163, 165, 171, 173, 174 и 176.

но раздѣлится на капли; причемъ между каждыми двумя большими образуется еще маленькая капля *).

Пузырь и пленка, заполненная жидкостью, должны обладать одинаковыми свойствами. Если мы имѣемъ жидкій цилиндръ, быстро образовавшійся, длина котораго превосходитъ его окружность, то такая неустойчивая форма его пленки должна разрушить его на капли, что и происходитъ въ дѣйствительности; но быстрота явленія обыкновенно мѣшаетъ наблюдать его. Для водяного цилиндра внутри смѣси парафина съ сѣроуглеродомъ дѣйствіе тяжести настолько мало, что оказывается возможнымъ наблюдать его разрушеніе совершенно такъ, какъ это происходило съ мыльнымъ пузыремъ того-же вида: тамъ явленіе замедлялось перемѣщеніемъ частицъ воздуха—здѣсь—воды.

2. Если поднять изъ смѣси закрытую трубку съ водой и, понемногу пріоткрывая, впускать въ нее воздухъ, то можно наблюдать интересное явленіе—образованіе и отдѣленіе капли (подкрашенной воды внутри смѣси), происходящее такъ медленно, что отлично видны всѣ послѣдовательныя переходныя формы образующейся капли.

3. Есть возможность получить жидкій цилиндръ еще слѣдующимъ образомъ. Небольшой кусокъ какой-нибудь стеклянной трубки хорошо разогрѣемъ на лампѣ по срединѣ его и быстро растянемъ въ обѣ стороны, отнявъ отъ огня. Такимъ образомъ мы получимъ тонкую стеклянную нить (собственно говоря трубочку). Смочимъ теперь два пальца въ какомъ-нибудь густомъ маслѣ (напр. касторовомъ) и проведемъ между ними нашу нить. Жидкаго цилиндра на ней мы не успѣемъ увидѣть, но глазамъ нашимъ представится бисеръ, нанизанный на нить: это капли, на которыя распался цилиндръ. Разсматривая въ лупу, мы увидимъ между каждыми двумя большими каплями по одной маленькой.

4. По тѣмъ же причинамъ струя падающей воды не сохраняетъ начальной цилиндрической формы, а раздѣляется на отдѣльныя капли. Для того, чтобы ихъ увидѣть, нужно освѣтить струю только на одно мгновеніе, напр. искрой отъ лейденской банки; тогда мы увидимъ какъ бы остановившійся рядъ большихъ и маленькихъ капель, чередующихся такимъ же образомъ, какъ и въ случаѣ разрушенія цилиндра въ предыдущемъ опытѣ (фиг. 40). Въ верхней, еще не раздѣлившейся части струи видно постепенное образованіе капель: въ началѣ едва замѣтно небольшое съуженіе, а когда частицы воды, его несущія, достигаютъ конца не раздѣлившейся части струи, съуженіе настолько велико, что этотъ конецъ представляетъ каплю въ моментъ, предшествующій ея отдѣленію. Такимъ образомъ для полнаго образованія капли изъ цилиндра нужно столько времени, во сколько вода успѣваетъ упасть отъ отверстія до мѣста отдѣленія капель. Время это можно вычислить по формулѣ свободнаго паденія тѣлъ:

$$S = {}^1/_2\, g t^2,\; t = \sqrt{S : {}^1/_2 g}.$$

Фиг. 40.

Положимъ, что длина не раздѣлившейся части струи равна 20 цм., и что вода падаетъ безъ начальной скорости, (этого

*) Условія удачи опыта: малая разница плотностей воды и смѣси; высота смѣси должна превосходить не менѣе какъ въ 10 разъ діаметръ трубки; вертикальное движеніе трубки.

можно приблизительно достигнуть, если взять плоскій сосудъ съ отверстіемъ во днѣ и поддерживать въ немъ постоянный и низкій уровень). Тогда

$$t = \sqrt{20/{}^{1}/_{2}.\ 980}.$$

Получимъ около $^1/_5$ части секунды (если положить $g = 1000$ цм.). Время образованія капель зависитъ отъ толщины струи; тонкая струя скорѣе раздѣляется на капли. Лордъ Рэлей (Rayleigh) вычислилъ, что при толщинѣ струи въ 1 mm., начальное съуженіе увеличивается въ 1000 разъ по происшествіи $^1/_{40}$ секунды.

5. Можно получить моментальную фотографію капель въ струѣ безъ помощи камеры. Для этого струю заставляемъ падать возможно близко предъ очень чувствительной сухой пластинкой, и съ разстоянія 2—3 m. освѣщаемъ пластинку короткой искрой отъ лейденской баттареи. Отпечатокъ тѣни отъ струи при такихъ условіяхъ не оставляетъ желать ничего лучшаго (способъ Chich. Bell'я).

Разсматривая фотографію струи, можно замѣтить, что нѣкоторыя капли круглы, тогда какъ большинство изъ нихъ или сжаты, или расширены по направленію ихъ движенія. Въ дѣйствительности каждая капля принимаетъ послѣдовательно: продолговатую форму (въ моментъ образованія), затѣмъ круглую, сжатую, снова круглую, снова продолговатую и т. д.: другими словами—каждая капля вибрируетъ подъ дѣйствіемъ упругой пленки, прежде чѣмъ установится ея шарообразная форма.

Лордъ Рэлей (Rayleigh) показалъ, что капля въ 1 mm. въ діаметрѣ совершаетъ 125 полныхъ колебаній въ 1 секунду, а чтобы капля успѣвала сдѣлать въ одну секунду только одно колебаніе, нужно, чтобы діаметръ ея равнялся 50 mm.

6. Въ предыдущемъ опытѣ мы наблюдали струю, падающую внизъ. Обратимъ теперь вниманіе на струю, идущую наклонно по параболѣ. Такая струя обыкновенно раздѣляется на множество отдѣльныхъ струекъ и падаетъ широкой кистью. Каждая струйка представляетъ, конечно, рядъ капель, быстро слѣдующихъ одна за другою.

Въ чемъ же заключается причина раздѣленія струи на отдѣльныя струйки? Всѣ частицы воды имѣютъ одинаковую начальную скорость и направленіе, одинаково подвержены дѣйствію тяжести и, повидимому, должны были бы сохранить скорость и направленіе, утерявъ только подъ дѣйствіемъ пленки первоначальную аггрегацію и собравшись въ капли одинаковой величины. На самомъ дѣлѣ, однако, жидкій цилиндръ разрушается на капли неодинаковой величины по той причинѣ, что разрушеніе его носитъ случайный характеръ и съуженія образуются не въ одинаковыхъ разстояніяхъ одно отъ другого; кромѣ того, каждая капля въ моментъ своего образованія задерживается нѣсколько сокращеніемъ и разрывомъ пленки, что замедляетъ ея движеніе и ускоряетъ движеніе капли, за ней слѣдующей. Вслѣдствіе же неравенства капель, (массы неравны), ускоренія и замедленія различныхъ капель также не могутъ быть равны. Въ результатѣ—неравныя капли движутся съ различными скоростями и потому, подъ дѣйствіемъ силы тяжести, капли идутъ по различнымъ путямъ.

Въ началѣ движенія капель пути ихъ чрезвычайно близки одинъ къ другому и потому неизбѣжны столкновенія капель, имѣющихъ различныя скорости; но, какъ покажетъ одинъ изъ слѣдующихъ опытовъ, сталкивающіяся капли не соединяются, а, напротивъ, разсыпаются или отскакиваютъ одна отъ другой.

Слѣдующій опытъ покажетъ намъ, что если устранить неравенство капель, то струя будетъ состоять только изъ одного ряда капель.

7. Пусть снова струя воды идетъ почти вертикально вверхъ и падаетъ, раздѣлившись на струйки. Въ нѣкоторомъ разстояніи отъ нея приведемъ въ дрожаніе камертонъ на резонансовомъ ящикѣ и простой палкой соединимъ ящикъ съ отверстіемъ, изъ котораго выходитъ струя. Явленіе быстро измѣняется: всѣ капли одинаковой величины слѣдуютъ одна за другой и струя не раздѣляется болѣе на отдѣльныя струйки. Принимаемъ палку и струя снова распадается.

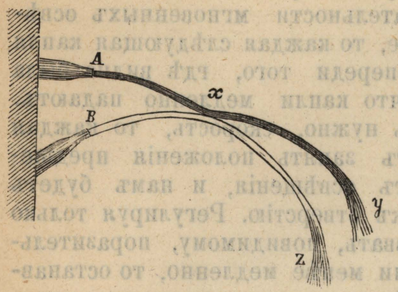
Въ этомъ опытѣ дрожанія камертона по палкѣ передаются отверстію; вибраціи этого послѣдняго состоятъ въ томъ, что періодически (съ быстротой колебаній камертона) нарушается и возстановляется круглая форма отверстія. Эти нарушенія весьма малы, но совершенно достаточны для того, чтобы струя выходила съ намѣченными уже на ней на равныхъ разстояніяхъ съуженіями.

Регулируя скорость истеченія струи или величину отверстія, мы достигаемъ того, что зачаточныя съуженія струи будутъ на разстояніяхъ, превышающихъ ея окружность, а при такихъ условіяхъ малѣйшее нарушеніе формы цилиндра, какъ мы уже знаемъ, получаетъ свое дальнѣйшее развитіе (съуженіе). Такимъ образомъ струя должна разбиться на капли одинаковой величины и это устраняетъ, какъ видно изъ опыта, раздѣленіе на отдѣльныя струйки. Въ этомъ и подобныхъ этому опытахъ необходимо, во-первыхъ, равномѣрное истеченіе струи, во-вторыхъ, регулированіе скорости истеченія струи. Первое достигается съ помощью устройства, подобнаго тому, какое мы напр. имѣемъ въ сосудѣ Маріотта; второе дѣлается возможнымъ, если соединить длинной каучуковой трубкой неподвижное отверстіе съ сосудомъ, который можно поднимать и опускать.

8. Подставимъ листъ плотной бумаги (положенный напр. на края банки) подъ падающую струю: отъ такого приспособленія мы получимъ ту же самую ноту, какую даетъ комертонъ. Это доказываетъ, что число капель одинаково съ числомъ колебаній камертона и что, слѣдовательно, капли обязаны своимъ образованіемъ вибраціямъ камертона.

9. Если отверстіе вибрируетъ въ зависимости отъ двухъ или болѣе нотъ, то струя разбивается на двѣ или болѣе струй съ каплями различной величины; двѣ капли различной величины, пріобрѣтая въ моментъ образованія неравныя скорости, идутъ по различнымъ путямъ; онѣ могутъ сталкиваться, но раздѣленіе путей и сталкиваніе повторяется въ одинаковомъ порядкѣ для послѣдующихъ капель и потому равныя капли слѣдуютъ другъ за другомъ по одному и тому же пути.

10. Соединенію сталкивающихся капель мѣшаетъ пленка, подобно тому, какъ то же свойство пленки было обнаружено на соприкасающихся пузыряхъ (Ѵ, 14): пленки можно нажимать одну на другую, или ударять, безъ того, чтобы вызвать ихъ соединеніе. Слѣдующій опытъ наглядно подтверждаетъ эти соображенія.



Фиг. 14.

Изъ отверстія A (фиг. 41) выходитъ струя Ax подкрашенной воды и въ точкѣ x встрѣчаетъ подъ острымъ угломъ прозрачную струю BZ, вытекающую изъ отверстія B. Различный цвѣтъ струй наглядно показываетъ, что первая струя не соединяется со второй, а отражается отъ нея въ точкѣ x, принимая направленіе xy *).

11. Повторимъ предыдущій опытъ и около мѣста соединенія струй помѣстимъ бутылку съ эфиромъ. Едва пары эфира достигнутъ воды и, сгустившись на ея поверхности, уменьшатъ прочность пленки, какъ обѣ струи соединяются въ точкѣ x и даютъ одноцвѣтную струю, выбирающую нѣкоторое среднее направленіе.

То же можно сдѣлать со струей, распадающейся на отдѣльныя струйки: если надъ ней держать бумагу, смоченную эфиромъ, то струйки соединяются въ одинъ рядъ капель. Въ этомъ опытѣ неравныя капли, пріобрѣвшія неравныя скорости, прежде чѣмъ разойтись по разнымъ путямъ, какъ всегда это бываетъ—сталкиваются; но въ данномъ случаѣ, столкнувшіяся капли, поверхностное натяженію которыхъ уменьшено, не отскакиваютъ одна отъ другой, а соединяются и избираютъ нѣкоторый средній путь.

Получающаяся струя по виду сходна съ той, которая получается дѣйствіемъ камертона; но, въ противоположность послѣдней, во первыхъ, она состоитъ изъ неравныхъ капель, идущихъ съ неравными скоростями, во вторыхъ, въ ней пути капель не тожественны и въ третьихъ, съ ея каплями случаются столкновенія, необходимо ведущія къ соединенію.

12. Если струю освѣщать перемежающимся свѣтомъ или разсматривать въ стробоскопъ (вращающійся картонный кружокъ съ отверстіями), то можно непрерывно видѣть отдѣльныя капли и ихъ вибрацію.

Перемежающійся свѣтъ долженъ быть съ такими промежутками, чтобы каждое мгновенное освѣщеніе посылалось въ тотъ моментъ, когда каждая капля успѣваетъ занять положеніе, въ которомъ находилась предшествующая ей въ моментъ предыдущаго освѣщенія.

Такой свѣтъ можно получить, если расходящійся пучекъ лучей отъ сильнаго источника свѣта пропускать сквозь отверстія вращающа-

---

*) Трубки для отверстій лучше всего приготовить изъ одной, растянувъ ее на лампѣ до 3 mm. въ узкомъ мѣстѣ и распиливъ здѣсь на двѣ половины; такимъ образомъ оба отверстія получаются совершенно одинаковыми. Соединивъ эти трубочки каучуковыми трубками съ двумя отдѣльными сосудами, ихъ зажимаютъ (въ частяхъ закрытыхъ каучуковыми) между двумя параллельными пластинками съ винтомъ, устанавливаютъ такимъ образомъ въ одной вертикальной плоскости и уже потомъ наклоняютъ одну къ другой подъ острымъ угломъ. Воду нужно взять хорошо профильтрованную. Подкрашивать можно любой краской, которая, вполнѣ растворяясь, не оставляетъ крупинокъ; въ противномъ случаѣ вода послѣ окрашиванія должна быть снова профильтрована. Пузырьки въ водѣ, пыль въ воздухѣ, недостаточно чистая вода—все это легко можетъ соединить обѣ струи. Чтобы снова разъединить ихъ, нужно закрыть рукой на время одно отверстіе и послѣ осторожно открыть его.

гося (картоннаго) кружка; регулируя скорость вращенія этого кружка, легко достигнуть необходимой послѣдовательности мгновенныхъ освѣщеній. Если кружокъ вращать медленнѣе, то каждая слѣдующая капля успѣетъ занять положеніе нѣсколько впереди того, гдѣ видна была предыдущая, и намъ будетъ казаться, что капли медленно падаютъ. Если кружокъ получитъ большую, чѣмъ нужно, скорость, то каждая капля въ моментъ освѣщенія не успѣетъ занять положенія предшествующей капли въ предыдущій моментъ освѣщенія, и намъ будетъ казаться, что капли движутся обратно, къ отверстію. Регулируя только скорость картоннаго кружка, можно вызвать, повидимому, поразительныя явленія: струя то падаетъ болѣе или менѣе медленно, то останавливается какъ бы по мановенію волшебнаго жезла, то вдругъ начинаетъ течь вверхъ и обратно въ свое отверстіе *).

13. Если струю, бьющую противъ хорошо освѣщеннаго экрана, освѣтить непрерывнымъ свѣтомъ и разсматривать въ отверстія того же кружка, бѣгущія предъ глазомъ, то предъ нами повторятся совершенно тѣ же явленія: мы увидимъ и медленное движеніе струи, и ея остановку, и ея теченіе обратно, въ отверстіе. Это самый простой и легкій способъ получить предъ глазами эти интереснѣйшія явленія.

Наиболѣе подходящи слѣдующіе размѣры картоннаго кружка: діаметръ—15 цм., діаметръ отверстій—3 mm., такихъ отверстій можно сдѣлать 6, на разстояніи 1 цм. отъ края.

Нужно еще замѣтить, что во всѣхъ этихъ опытахъ много удобства доставляетъ камертонъ, приводимый въ движеніе электромагнитомъ и электродвигатель для картоннаго кружка.

К. Чернышевъ (Юрьевъ).

(*Окончаніе слѣдуетъ*).

По поводу парадоксальной формулы для π проф. Никольсона.

(*Окончаніе* **).

8. *Теорема. Рядъ* (2) *сходится только для* $\infty > m > 0$.

Пусть въ этомъ ряду сначала $m > 0$.

Можемъ и здѣсь положить $p+1 > m > p$; тогда рядъ (2) представится въ видѣ

*) Чтобы такіе опыты были хорошо видны для многихъ, нуженъ электрическій фонарь. Отъ него надо получить сходящійся пучекъ лучей, который дальше фокуса дѣлается расходящимся, въ фокусѣ его проходятъ отверстія кружка. Струя помѣщается предъ экраномъ, такъ что можно также наблюдать ея тѣнь въ увеличенномъ видѣ; правильное разрушеніе ея достигается какимъ-нибудь камертономъ. Послѣдній можно расположить такимъ образомъ, чтобы и его тѣнь получалась на экранѣ: при перемежающемся свѣтѣ одновременно со струей онъ будетъ казаться или неподвижнымъ, или совершающимъ медленныя колебанія.

**) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“ № 176.

$$S_{p+1}+S_n,$$

где $S_{p+1}=1-\frac{m}{1}+\cdots+(-1)^{p+1}\cdot\frac{m(m-1)\ldots.(m-p)}{(p+1)!}$,

$$S_n=(-1)^{p+2}\cdot\frac{m\ldots\ldots(m-p-1)}{(p+2)!}+\ldots..+(-1)^{n+p+1}\cdot\frac{m\ldots\ldots(m-n-p)}{(p+n+1)!}$$

или

$$S_n=-(-1)^{p+2}\cdot\frac{m\ldots(p+1-m)}{(p+2)!}+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{2n+p+1}\cdot\frac{m\ldots(m-p)}{(p+1)!}\cdot\frac{(p+1-m)\ldots.(p+n-m)}{(p+2)\ldots.(p+n+1)}.$$

Послѣднiй рядъ аналогиченъ ряду (n) § 5 и, слѣдов., при $\infty> m>0$ онъ сходится. Если же въ ряду (2) $m=-m'$, гдѣ $m'>0$, то его можно написать въ видѣ

$$1+\frac{m'}{1}+\frac{m'(m'+1)}{1.2}+\ldots..+\frac{m'(m'+1)\ldots(m'+n-1)}{n!}+\ldots.=$$

$$\frac{m'+1}{1}\cdot\frac{m'+2}{2}\cdot\frac{m'+3}{3}\ldots..\frac{m'+\mu-1}{\mu-1}=\left(1+\frac{m'}{1}\right)\left(1+\frac{m'}{2}\right)\left(1+\frac{m'}{3}\right)\ldots..\left(1+\frac{m'}{\mu-1}\right),$$

гдѣ $\lim\mu=\infty$; это же произведенiе растетъ вмѣстѣ съ μ (л. II). Итакъ теорема доказана.

9. Доказанныя теоремы имѣютъ слѣдующiй смыслъ. Равенство

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\ldots\ldots$$

имѣетъ мѣсто при какомъ угодно m, если только $1>x>-1$. Только при этомъ условiи можно одну часть предыд. равенства замѣнить другою, только при этомъ условiи можно вводить въ разсужденiя строку Ньютона. Въ этомъ же смыслѣ можно пользоваться и равенствами

$$2^m=1+\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}+\ldots\ldots..\ (1')$$

$$0=1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}-\ldots\ldots..\ (2')$$

если только m въ первомъ рав. удовлетворяетъ условiю $\infty>m>-1$, а во второмъ—условiю $\infty>m>0$.

Не обращая на эти условiя вниманiя, мы рискуемъ придти къ нелѣпостямъ и парадоксамъ.

10. Если послѣ всего сказаннаго читатель обратится къ названной статьѣ г. Клейбера, то онъ увидитъ, что всѣ разсужденiя пр. Никольсона вѣрны до введенiя имъ равенства

$$(1-1)^{-n}=\frac{1+n}{1}\cdot\frac{2+n}{2}\cdot\frac{3+n}{3}\cdot\ \ldots\ldots\ (\alpha)$$

которое при этомъ умножается на рав.

$$(1-1)^n = \frac{1-n}{1}\cdot\frac{2-n}{2}\cdot\frac{3-n}{3}\cdot \ldots\ldots\ldots \quad (\beta).$$

Рядъ (α) расходится, а въ такомъ случаѣ, какъ это было впервые замѣчено Абелемъ*), теорема объ умноженіи рядовъ не можетъ быть примѣнима. Причина формулы пр. Никольсона

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{(1-1)^{1/2}(1-1)^{-1/2}}$$

именно въ этомъ и заключается.

11. Здѣсь, мнѣ кажется, удобно привести мысли, высказанныя Абелемъ въ 1826 г. въ названной въ предш. подстр. примѣч. работѣ, въ которой молодой авторъ суммируетъ строку Ньютона, положивъ m и x мнимыми.

Указавъ, что обыкновенныя операціи не должны примѣняться къ безконечнымъ рядамъ, если предварительно не убѣдились, что они сходятся, Абель продолжаетъ: „Другое заблужденіе, на которое часто наталкиваешься въ анализѣ, и которое часто ведетъ къ противорѣчіямъ, происходитъ отъ того, что расходящіеся ряды употребляютъ для нахожденія численнаго значенія рядовъ. Расходящійся рядъ никогда не можетъ равняться опредѣленной величинѣ: онъ есть только выраженіе съ извѣстными свойствами относительно дѣйствій, которому онъ подчиненъ. Такіе ряды могутъ иногда употребляться съ пользой какъ символы для сокращеннаго выраженія того или другого закона, но ихъ отнюдь нельзя ставить на мѣсто опредѣленныхъ величинъ. Поступая такъ, думаютъ намѣренно невозможное достигнуть какъ возможное"**). (Untersuchungen etc. стр. 311 — 312). Пусть, напримѣръ, въ равенствѣ (2′) § 9 $m = 0$. Не зная, что это рав. для этого случая не имѣетъ мѣста, мы бы получили $0=1$.

Если въ рав. (1′) того же § 9 положимъ $m = -1$, то получимъ, что $1-1+1- \ldots\ldots\ldots = \frac{1}{2}$.

12. Удивительно, что Эйлеръ не считалъ этого рав. нелѣпостью и въ своей „Алгебрѣ" даетъ ему слѣдующее толкованіе: „.......... Такъ

---

*) N. H. Abel: „Untersuchungen über die Reihe $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots$", журн. Крелля Т. I (1826 г.), стр. 311. Эта же статья помѣщена однимъ изъ переводчиковъ „Алгебраическаго анализа" Коши, А. Ильинымъ, въ его „Приложеніяхъ и примѣчаніяхъ" къ этому творенію Коши. Въ Oevres complètes d'Abel изданныхъ въ Христіании L. Sylow и S. Lie, эта статья напечатана въ I томѣ.

**) Насколько видно изъ этой цитаты и изъ опредѣленія расход. ряда, кот. Абель даетъ на стр. 313, онъ подъ расходящимися рядами подразумѣвалъ такіе, которые имѣютъ неопредѣленную, но *конечную* сумму. Такіе ряды, по предложенію Оливье (Journal Crelle'a), лучше называть неопредѣленными, разумѣя подъ расходящимся рядомъ такой, сумма n первыхъ членовъ котораго растетъ вмѣстѣ съ n.

Такимъ образомъ рядъ $1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots+\cos(n-1)\alpha$ есть неопр., ибо для него

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sin{\alpha/2}} < \lim S_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sin{\alpha/2}}.$$

какъ должно продолжать суммированіе до безконечности, не останавливаясь ни на $+1$, ни на -1, то ясно, что сумма будетъ ни 0, ни 1, что результатъ долженъ заключаться между ними, и что, слѣдов., онъ будетъ $= 1/2$" *).

А вотъ какъ объясняетъ то же неравенство Яковъ Бернулли. Показавъ, что при $m > n$ всегда

$$\frac{l}{m+n} = \frac{l}{m} - \frac{ln}{m^2} + \frac{ln^2}{m^3} - \ldots\ldots$$

онъ продолжаетъ: „Причина же парадокса

$$\frac{l}{2m} = \frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \ldots\ldots$$

заключается въ томъ, что при дѣленіи l на $m+n$ остатокъ отъ дѣленія не уменьшается, а остается постоянно равенъ самому l; поэтому частное отъ дѣленія не есть собственно рядъ

$$\frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \ldots\ldots \text{ но } \frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \ldots \pm \frac{l}{2m}\text{" **}).$$

13. Въ заключеніе считаю не лишнимъ замѣтить, что доказанныя въ предлагаемой статьѣ теоремы мнѣ, кромѣ упомянутой уже работы Абеля, приходилось читать въ слѣдующихъ сочиненіяхъ: 1) въ „Traité de calc. differ. et de calc. intégr." par. J. Betrand T. I, 2) въ „Курсѣ анализа" Серре T. I. и 3) въ „Курсѣ анализа" Штурма T. II, статья M. E. Каталана. Эта же статья напечатана въ „Comptes R." за 1857 г. Въ нашихъ учебникахъ алгебры такого дополненія теоріи бинома Ньютона мнѣ не приходилось видѣть.

Студ.-техн. *С. Кричевскій* (Харьковъ).

ПРОСТАЯ ЗАДАЧА
и отдѣльное дѣйствіе въ ариѳметикѣ.

(*Продолженіе****)

Наконецъ, весьма важны въ указанномъ отношеніи такъ называемые сокращенные способы производства дѣйствій. Подъ этимъ названіемъ извѣстны въ ариѳметикѣ весьма разнообразные, неподчиняющіеся никакому общему принципу пріемы, большая часть которыхъ, однако, основывается на зависимости между измѣненіями данныхъ и результатовъ дѣйствій. Сокращеніе, вносимое ими въ вычисленія, обусловливается чаще всего тѣмъ, что по крайней мѣрѣ одно изъ данныхъ должно сто-

*) Цитирую по „Примѣч. и прилож." А. Ильина къ „Алг. анал." Коши. Стр. 64.

**) Ор., стр. 752. Цит. по тому же источнику.

***) См. „Вѣстникъ Оп. Физики" № 176.

ять въ простомъ отношенiи (ариѳметическомъ или геометрическомъ) къ одной или нѣсколькимъ разряднымъ единицамъ. Такъ сокращенное дѣленiе числа 3675 на 25, удовлетворяющее равенству $3675:25=\frac{3675\times 4}{100}$, основывается на томъ, что размѣръ частнаго не измѣняется при увеличенiи дѣлимаго и дѣлителя въ одинаковое число разъ, и стоитъ въ неразрывной связи съ тѣмъ обстоятельствомъ, что $25:100=1:4$. При подобныхъ вычисленiяхъ ариѳметическихъ результатовъ, дѣйствiе, постулируемое логическимъ смысломъ простой задачи, съ цѣлью облегченiя производства, замѣняется тою или другою комбинацiей дѣйствiй. Какъ смотрѣть на такую замѣну? Принимать ли ее за особый способъ выполненiя того же дѣйствiя, или только за одинъ изъ нѣсколькихъ возможныхъ способовъ рѣшенiя данной простой задачи? Въ первомъ случаѣ рядъ различныхъ дѣйствiй условно принимается за одно дѣйствiе, смыслъ котораго выражается цѣлью вычисленiя,—искомымъ задачи. Во второмъ-же предполагается, что данная простая задача, обыкновенно рѣшаемая однимъ извѣстнымъ дѣйствiемъ, можетъ быть, когда это цѣлесообразно, рѣшена рядомъ другихъ дѣйствiй,—слѣдовательно, подобно сложнымъ задачамъ, допускаетъ разнообразiе способовъ рѣшенiя. Нетрудно видѣть, однако, что послѣднее предположенiе, если его принять безъ ограниченiй, является весьма рискованнымъ, такъ какъ уничтожаетъ неразрывную связь между условiями простой задачи и дѣйствiемъ, составляющимъ ея рѣшенiе. Пусть дана, для примѣра, задача: „Ремесленникъ имѣетъ 2325 рублей при себѣ и 997 рублей въ сберегательной кассѣ. Сколько у него всего денегъ?“ Такъ какъ цѣлое (капиталъ ремесленника) есть совокупность своихъ частей: (денегъ, имѣющихся при немъ и въ сберегательной кассѣ), то очевидно, что данныя числа—слагаемыя, а искомое всегда будетъ ихъ суммою, какимъ бы способомъ его ни опредѣляли, и, слѣдовательно, сущность дѣйствiя, его логическiй смыслъ останется безъ измѣненiя. Поэтому, для оправданiя разсматриваемаго взгляда, необходимо допустить, въ случаѣ употребленiя сокращенныхъ способовъ производства дѣйствiй, предварительное преобразованiе задачи чрезъ введенiе въ нее нужныхъ данныхъ. Такъ наша задача должна быть представлена въ слѣдующемъ видѣ: „Ремесленникъ имѣетъ 2325 р. при себѣ и тысячу безъ трехъ рублей въ сберегательной кассѣ. Сколько у него всего денегъ?“ Послѣ этого ее можно разсматривать, какъ сложную. Мы видѣли, однако, что такого рода преобразованiя простыя задачи допускаютъ и въ томъ случаѣ, если рѣшаются общими прiемами, что не мѣшаетъ признанiю этихъ послѣднихъ за логически-цѣльные процессы. Слѣдовательно, никакое истолкованiе сокращенныхъ методовъ выполненiя дѣйствiй не можетъ пошатнуть положенiя, что эти методы служатъ доказательствомъ условности различiя между рядомъ дѣйствiй и отдѣльнымъ дѣйствiемъ.

Если, такимъ образомъ, несомнѣнно, что отдѣльныя дѣйствiя нерѣдко съ полнымъ основанiемъ можно принимать за совокупности нѣсколькихъ дѣйствiй, то съ другой стороны въ нѣкоторыхъ случаяхъ ряды дѣйствiй представляютъ особенности, свойственныя отдѣльнымъ ариѳметическимъ дѣйствiямъ. Именно, часто оказывается возможнымъ слитiе ихъ въ общемъ процессѣ производства—прежде всего—по законамъ сочетательному и распредѣлительному, играющимъ здѣсь ту же роль, какъ и при выполненiи сложенiя, вычитанiя, умноженiя и дѣленiя многозначныхъ чиселъ. Одинъ изъ случаевъ этого рода настолько приглядѣлся, что его логическiя отличiя рѣдко обращаютъ на себя вниманiе: мы разумѣемъ сложенiе нѣсколькихъ (болѣе двухъ) многозначныхъ чиселъ. „Во время лѣсного пожара сгорѣло 786 елей, 435 сосенъ и 576 березъ. Сколько деревьевъ истребилъ пожаръ?“. Наиболѣе удобный способъ рѣшенiя этой задачи состоитъ въ поразрядномъ соединенiи данныхъ чиселъ, которыя съ логической стороны представляются, такъ сказать, равноправными. Но психологическiй анализъ соединенiя данныхъ сознанiя вноситъ въ этотъ способъ представленiя важную поправку. Изъ трехъ объективно возможныхъ способовъ соединенiя двухъ произвольно взятыхъ однородныхъ величинъ или совокупностей a и b (прибавленiя b къ a, прибавленiя a къ b и одновременнаго сближенiя a и b) для нашей мысли, вслѣдствiе факта узкости сознанiя, вообще возможны только два первые: дѣятельность сознанiя не можетъ имѣть двѣ исходныхъ точки, вниманiю не можетъ быть дано сразу два направленiя. Поэтому изъ двухъ слагаемыхъ одно неизбѣжно есть пассивное, увеличиваемое, другое—активное, прибавляемое; въ случаѣ же трехъ и болѣе слагаемыхъ соединенiе необходимо понимается, какъ послѣдовательное прибавленiе второго слагаемаго къ первому, третьяго къ ихъ суммѣ и т. д., въ любомъ порядкѣ. Что въ вычисленiяхъ истинный характеръ дѣйствiя лишь маскируется примѣненіемъ принциповъ сочетанія и распредѣленія данныхъ и выводовъ,— въ этомъ легко убѣдиться, взявъ *однозначныя* слагаемыя; тогда сложеніе даже и съ внѣшней стороны будетъ послѣдовательнымъ прибавленіемъ. Къ тому же выводу приводитъ, наконецъ, и обращеніе вопроса задачи. Всѣ задачи, требующія для разрѣшенія одно только дѣйствіе, сохраняютъ этотъ свой отличительный признакъ и тогда, когда искомымъ станетъ одно изъ чиселъ, бывшихъ данными. Исключеніе составляли бы лишь задачи на сложеніе трехъ и болѣе чиселъ, если бы ихъ признать за простыя. Въ самомъ дѣлѣ, опредѣленіе одного изъ слагаемыхъ по данной суммѣ и размѣрамъ всѣхъ прочихъ слагаемыхъ есть сложное вычисленіе, потому что каждое слагаемое равно суммѣ всѣхъ слагаемыхъ безъ суммы остальныхъ. Еще очевиднѣе станетъ справедливость сказаннаго, если взять для рѣшенія задачу, допускающую, какъ слитный, такъ и не слитный способъ рѣшенія. — „Куплено 4 цыбика чаю; въ первомъ было 2 п. 10 ф. 8 лот.; во второмъ 3 п. 5 ф.; въ третьемъ столько, сколько въ первыхъ двухъ вмѣстѣ; въ четвертомъ на 1 п. 5 ф. 8 л. больше, чѣмъ въ третьемъ. Сколько всего куплено чаю?“.—Ученикъ, неискусившійся въ разнообразныхъ методахъ рѣшенія и привыкшій къ синтетическому пріему разбора условій, навѣрно рѣшитъ предложенную задачу тремя дѣйствіями, поставивъ частные вопросы: 1) сколько чаю было въ третьемъ цыбикѣ? 2) сколько чаю было въ четвертомъ цыбикѣ? и 3) сколько всего чаю было куплено? Между тѣмъ гораздо удобнѣе рѣшить ее однимъ дѣйствіемъ, найдя сумму 2 п. 10ф. 8 лот.+3п. 5 ф.+ +2 п. 10ф. 8 л.+3 п. 5ф.+2 п. 10ф, 8 л.+3 п. 5ф.+1 п. 5ф. 8 л. Въ этомъ случаѣ принципъ сочетанія и распредѣленія примѣненъ въ совершенно отдѣльныхъ и даже имѣющихъ различный смыслъ актахъ сложенія, слившихся такимъ образомъ въ цѣлое, вполнѣ аналогичное по своему строенію съ производствомъ четырехъ дѣйствій ариѳметики. Впрочемъ, не только однородныя, но и разнородныя дѣйствія въ извѣстныхъ случаяхъ могутъ быть подчинены тѣмъ же законамъ. Такъ, напримѣръ, рядъ дѣйствій $36 \times 5 - 142$ съ относительнымъ удобствомъ и съ полнымъ правомъ можетъ быть произведенъ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{r} 36 \times 5 \\ -142 \\ \hline 38 \end{array}$$

5-ю 6—30, 30 безъ 2-хъ 28; 8 пишу, а 2 замѣчаю. 5-ю 3—15, да 2—17; 17 безъ 4-хъ 13; 3 пишу, 1 замѣчаю. Одинъ изъ одного—0. При этомъ умноженіе и вычитаніе произведено по отдѣльнымъ разрядамъ, а подъ чертою представленъ окончательный результатъ. Вычисленіе

$$\begin{array}{r} \dot{1}385 \\ -\ 157 \\ +\ 784 \\ -1222 \\ \hline 790 \end{array}$$

получаетъ объясненіе, сходное съ предыдущимъ: 7 изъ 15-ти 8; 8 да 4—12; 2 изъ 12-ти 10; 0 пишу, 1 отношу къ десяткамъ; 5 изъ 8-ми 3; 3 да 8—11 и т. д. Подобный же пріемъ имѣетъ мѣсто не только при вычисленіяхъ $(762-235)\times 8=4216$ и $(342+597)\times 5=4695$, но даже и въ примѣрѣ

$$\begin{array}{l} \quad 485 \\ +\ \ 52 \times 9 \\ -\ 913 \\ +\ \ 19 \times 300 \\ -\ 742 \\ \hline 4998. \end{array}$$

Значеніе всѣхъ подобныхъ пріемовъ заключается не въ достигаемой посредствомъ ихъ быстротѣ и легкости выполненія, которыя по меньшей мѣрѣ сомнительны, а въ свѣтѣ, проливаемомъ ими на сущность общеупотребительныхъ способовъ производства ариѳметическихъ дѣйствій; въ этомъ смыслѣ за ними нельзя не признать даже и дидактическаго значенія. Весьма употребительное въ ариѳметикѣ сокращеніе дѣленія также служитъ къ слитію нѣсколькихъ актовъ умноженія и дѣленія въ одно сложное производство, потому что послѣ упрощенія формулы становится невозможнымъ указать въ ней дѣйствія, соотвѣтствующія отдѣльнымъ вопросамъ задачи. То же самое можно сказать и относительно неупотребительнаго, но возможнаго сокращенія при вычитаніи одной суммы изъ другой, когда встрѣчаются равныя слагаемыя въ активѣ и въ пассивѣ *).

Итакъ, производство дѣйствій не даетъ твердой опоры для различенія отдѣльнаго дѣйствія отъ ряда дѣйствій и обратно. Поэтому является естественнымъ заключеніе, что это различіе стоитъ въ зависимости отъ содержанія рѣшаемой задачи,—что отдѣльное дѣйствіе есть рѣшеніе простой задачи, а рядъ дѣйствій—рѣшеніе задачи сложной. Дѣйствительно, если предположить, что понятіе простой задачи совершенно опредѣленно, то, повидимому, мы имѣемъ въ немъ ясный и безошибочный критерій для занесенія извѣстныхъ вычисленій въ тотъ или другой классъ. Но если оно и оказывается несравненно менѣе относительнымъ, чѣмъ понятіе объ отдѣльномъ дѣйствіи, то, съ другой стороны, въ его приложеніи къ ариѳметическому матеріалу все же несомнѣнно есть извѣстная степень условности. Говоря опредѣленнѣе, есть простыя задачи, въ содержаніи которыхъ заключаются черты, свойственныя сложнымъ, равно какъ существуетъ множество сложныхъ задачъ, представляющихъ въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ довольно близкую аналогію съ простыми.

Подъ чертами, сближающими условія нѣкоторыхъ простыхъ задачъ съ условіями задачъ сложныхъ, мы разумѣемъ вовсе не разложеніе данной простой по содержанію задачи въ рядъ не болѣе простыхъ вопросовъ—на основаніи десятичнаго или иного состава чиселъ, входящихъ въ условіе. Такое разложеніе, какъ видно изъ приведенныхъ выше примѣровъ, обнаруживая сложность дѣйствія, не можетъ, однако, служить доказательствомъ сложности самой задачи, въ чемъ легко убѣдиться, прибѣгнувъ къ буквенному обозначенію данныхъ или къ замѣнѣ числа, послужившаго поводомъ къ разложенію дѣйствія, цѣлымъ и однозначнымъ. Задача. „Сколько стоитъ $^3/_4$ ф. сахару, если фунтъ стоитъ 26 коп.?"—рѣшеніе которой сводится къ рѣшенію вопросовъ: „сколько стоитъ одна четвертая доля фунта сахару?" и „сколько стоятъ 3 такихъ доли?"—есть тѣмъ не менѣе простая по характеру условій, потому что при замѣнѣ даннаго „$^3/_4$" цѣлымъ числомъ приводитъ къ умноженію.

Напротивъ, обширный и весьма важный классъ задачъ, принимаемыхъ по употребленію въ нихъ дѣйствій за простыя, обнаруживаетъ при ближайшемъ разсмотрѣніи чисто логическую сложность. Это задачи, приводящія къ умноженію и дѣленію. Въ объясненіе сказаннаго замѣтимъ прежде всего, что отличительный признакъ ихъ содержанія составляетъ пропорціональность (прямая или обратная) входящихъ въ ихъ составъ чиселъ. Такъ, существенную особенность задачи: „Рабочій купилъ на рубашку 5 арш. ситцу, по 15 коп. за аршинъ. Сколько заплатилъ онъ за ситецъ?"—представляетъ прямая зависимость между двумя величинами: количествомъ купленнаго матеріала и его стоимостью, позволяющая составить изъ данныхъ чиселъ пропорцію $x : 15 = 5 : 1$. Слѣдовательно, единственное различіе между такими задачами и задачами на простое тройное правило состоитъ не въ самомъ ихъ содержаніи, а въ величинѣ одного изъ данныхъ чиселъ: одно изъ двухъ численныхъ значеній количества купленнаго ситца равно единицѣ. Поэтому изъ всякой задачи на простое тройное правило легко получить задачу на умноженіе или дѣленіе чрезъ замѣну одного изъ данныхъ чиселъ единицею, съ соотвѣтствующимъ исправленіемъ другихъ числовыхъ данныхъ. Пусть, напримѣръ, предложена задача: „Вертикальный шестъ въ 8 футовъ длиною отбрасываетъ въ извѣстное время дня тѣнь длиною въ 15,4 ф., а тѣнь башни въ то же время равна 308 ф. Опредѣлить высоту башни". Взявъ вмѣсто данной въ ней длины вертикальнаго столба—одинъ футъ, имѣемъ задачу на дѣленіе (по содержанію): „Вертикальный шесть въ одинъ футъ длиною отбрасываетъ въ извѣстное время дня тѣнь длиною въ 1,925 ф., а тѣнь башни въ то же время равна 308 ф. Опредѣлить высоту башни". Точно также, приведя къ единицѣ значеніе длины тѣни отъ шеста, превращаемъ данную задачу въ задачу на умноженіе. Очевидно, что, произведя обратную перемѣну, изъ любой задачи на умноженіе или дѣленіе получимъ задачу на простое тройное правило. Но въ основѣ многихъ ученій математики лежитъ общій принципъ, по которому родъ дѣйствія не измѣняется при измѣненіи величины даннаго числа. Согласно съ этимъ именно

---

*) Здѣсь было бы неумѣстно вести рѣчь о преобразованіяхъ формулъ, отличающихся искючительно алгебраическимъ характеромъ.

принципомъ рѣшеніе задачи на отысканіе дроби числа принимается за умноженіе на дробь, а дѣйствіе $a+(--b)$—за сложеніе, причемъ во второмъ случаѣ отрицательному числу придается величина (=размѣръ), меньшая нуля. Не въ правѣ ли мы распространить этотъ способъ разсужденія и на тѣ случаи, когда множителемъ, дѣлителемъ или частнымъ является единица? Если такъ, то задачи на умноженіе и дѣленіе несомнѣнно имѣютъ и въ содержаніи, и въ рѣшеніи своемъ элементы сложности и, какъ таковыя, должны разлагаться на простѣйшія. И дѣйствительно, процессъ рѣшенія приведенной выше задачи на умноженіе скрыто, implicite, заключаетъ въ себѣ приблизительно такого рода сложное умозаключеніе: Одинъ аршинъ ситцу стоитъ 15 к. Рабочій купилъ 5 арш. такого ситцу. Но во сколько разъ больше число аршинъ ситцу, во столько разъ больше и его стоимость. Слѣдовательно, стоимость 5 арш. въ 5 разъ больше 15 к., потому что 5 аршинъ именно во столько разъ болѣе одного аршина, и равна 75 к. Очевидно, это разсужденіе приводитъ къ послѣдовательному рѣшенію двухъ вопросовъ: 1) Сколько разъ одинъ аршинъ содержится въ пяти аршинахъ? 5 арш.: 1 арш.$=5$. 2) Сколько стоятъ пять аршинъ ситца? 15 к.$\times 5=75$ коп. Возможно доказать, что первый вопросъ ускользаетъ отъ контроля сознанія только по чрезвычайной легкости своего рѣшенія, не требующаго вычисленій ни на какой ступени усвоенія ариѳметическихъ знаній, если только имѣется понятіе о числѣ 5. Возьмемъ для этого задачу съ составными именованными числами: „Куплено 17 пуд. 35 фун. желѣза по 6 коп. за фунтъ. Сколько денегъ заплочено за желѣзо?“ Умноженію въ данномъ случаѣ должно предшествовать раздробленіе, необходимое для выполненія дѣйствія, „17 пуд. 35 ф.: 1 ф.“ которое отвѣчаетъ на вопросъ, сколько фунтовъ заключается въ 17 пуд. 35 ф. желѣза. Далѣе, логическая необходимость его постановки ясна уже изъ того обстоятельства, что множитель, который при выполненіи дѣйствія долженъ быть числомъ существенно-отвлеченнымъ, въ задачѣ наоборотъ является почти всегда числомъ конкретнымъ: лишь опредѣливъ, сколько разъ въ данномъ числѣ содержится однородная съ нимъ единица, мы получаемъ отвлеченнаго множителя. Mutatis mutandis, сказанное справедливо относительно частнаго при рѣшеніи задачъ на дѣленіе по содержанію и относительно дѣлителя при дѣленіи на равныя части. Наконецъ, въ наиболѣе общихъ опредѣленіяхъ умноженія и дѣленія находятся очевидные слѣды выясненной нами особенности простыхъ задачъ, требующихъ примѣненія названныхъ дѣйствій. Напримѣръ, въ умноженіи искомое такъ составляется изъ одного даннаго числа, какъ другое составлено изъ единицы; при этомъ предполагается, конечно, что послѣднее число уже измѣрено соотвѣтствующею единицею.

И. Синскій (Орша).

(*Окончаніе слѣдуетъ*).

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Заимствуемъ изъ недавно изданнаго перваго отчета распорядительнаго комитета, организованнаго Казанскимъ Физико-Математическимъ Обществомъ для составленія капитала имени Н. И. Лобачевскаго, слѣдующія свѣдѣнія. Въ особый комитетъ, составленный для болѣе успѣшнаго сбора пожертвованій, вошли многіе русскіе и иностранные ученые: Чебышевъ, Гельмгольцъ, Пуанкаре, Эрмитъ, Бельтрами, Ли, Сильвестръ, Кэли и др.; нѣкоторые изъ этихъ ученыхъ прислали Физико-Математическому Обществу и свои сочиненія. Рѣшено основать при библіотекѣ Общества особый отдѣлъ: „Bibliotheka Lobatchevskiana“, въ который, кромѣ сочиненій самого Лобачевскаго, войдутъ труды, вызванные его работами и вообще стоящіе съ ними въ связи, а также всякія статьи и замѣтки, касающіяся самаго Лобачевскаго и его геометріи. Подписка до дня юбилея (22 октября) дала всего 3039 р. 55 к., въ томъ числѣ 144 р. за проданныя сочиненія Лобачевскаго и 508 р. 57 к., собранные за границею. Слѣдуетъ ожидать, что сумма эта еще значительно увеличится.

Первая электрическая желѣзная дорога въ Азіи, въ столицѣ Сіама Бангкокѣ уже открыта. Она имѣетъ всего 5 км. длины. Скоро будетъ закончена и вторая—въ Мадрасѣ.

Электрическое освѣщеніе деревни.—Недавно открыто электрическое освѣщеніе въ одномъ изъ селъ сѣв. Франціи, Авенъ-лезъ-Оберъ, гдѣ имѣются 300 калильныхъ лампъ.

ЗАДАЧИ.

№ 568. У меня въ лѣсу 813 деревьевъ: дубы, липы, березы и сосны. Если трое примутся рубить дубы, то двое успѣютъ срубить въ то же время липы, а если пятеро возьмутся рубить липы, то чтобы срубить въ то же время всѣ березы понадобятся шесть человѣкъ; наконецъ если бы семеро стали рубить березы, то одинъ успѣлъ бы срубить за то же время всѣ сосны. Сколько въ моемъ лѣсу дубовъ, липъ, березъ и сосенъ?—Предполагается, что всѣ рабочіе одинаковой силы и что для срубки каждаго дерева требуется одно и то же время.

NB. Рѣшить задачу ариѳметически, не прибѣгая къ отношеніямъ и пропорціямъ.

С. Адамовичъ (Курскъ).

№ 569. Рѣшить неравенство

$$(1.\ 2.\ 3....b)^a > (1.\ 2.\ 3....a)^b$$

относительно b.

С. Ш. (Одесса).

№ 570. Въ окружности дана хорда AB. Въ извѣстномъ направленіи провести хорду CD, дѣлящуюся хордою AB въ данномъ отношеніи.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 571. Въ окружности дана хорда AB. Провести хорду ED данной длины такъ, чтобы она раздѣлилась хордою AB въ данномъ отношеніи.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 572. Показать, что произведеніе

$$(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

можетъ быть представлено въ видѣ суммы трехъ квадратовъ.

(Заимств.) *Д. Е.* (Ив.-Вознес.).

№ 573. Черезъ концы гипотенузы BC прямоугольнаго треугольника ABC проведены параллельныя прямыя BX и CY и на нихъ изъ A опущенъ перпендикуляръ, пересѣкающій BX въ точкѣ M и CY въ точкѣ N. Показать, что уголъ MDN прямой (гдѣ черезъ D обозначено основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ вершины A прямого угла на гипотенузу).

Н. Николаевъ (Пенза).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 131 (2 сер.). Вывести формулу объема треугольной, усѣченной параллельно основанію, пирамиды

$$V=(B+b+\sqrt{Bb})\frac{h}{3},$$

дополняя пирамиду до призмы, имѣющей съ ней общія—основаніе, одно изъ боковыхъ реберъ и высоту.

Пусть ABC и $A'B'C'$ суть соотвѣтственно верхнее и нижнее основанія усѣченной пирамиды. Дополнимъ пирамиду до призмы $AB''C''A'B'C$ и проведемъ плоскость $CC''B'$. Тогда

$$V=Bh-(\text{об. } B'CC''B''B+\text{об. } CC'C''B')=Bh-(B-b)\frac{h}{3}-\text{об. } CC'C''B'.$$

$$\text{Но об. } CC'C''B'=\text{об. } CC''B'B''=\text{об. } B'AB''C''-\text{об. } B'ACB''=$$
$$=B\frac{h}{3}-\text{об. } B'ACB''.$$

Легко доказать, что

$$Bb=(\text{пл. } ACB'')^2;$$

поэтому

$$V=Bh-(B-b)\frac{h}{3}-B\frac{h}{3}+\sqrt{Bb}\,\frac{h}{3}=(B+b+\sqrt{Bb})\frac{h}{3}.$$

С. Ржаницынъ (Троицкъ); *Г. Ширинкинъ* (Воронежъ).

№ 281 (2 сер.). На сторонахъ произвольнаго треугольника ABC построены (внѣшніе или внутренніе) равносторонніе треугольники ABL, BCM, CAN. Показать, что, соединивъ центры этихъ треугольниковъ O_1, O_2, O_3 получимъ всегда равносторонній треугольникъ $O_1O_2O_3$.

Опишемъ около $\triangle$-овъ ABL, BCM окружности; онѣ пересѣкутся въ точкѣ K. Очевидно, что $\angle AKB=\angle BKC=120^0$; тогда и $\angle AKC=$ $=120^0$, т. е. окружность, описанная около $\triangle ANC$, пройдетъ черезъ точку K. Соединимъ K съ O_1, O_2, O_3 и продолжимъ эти прямыя до пересѣченія съ окружностями, описанными около $\triangle$-овъ ABL, BCM, CAN въ точкахъ A_1, B_1, C_1. Легко доказать, что прямыя A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 пройдутъ черезъ точки B, C, A. Отсюда слѣдуетъ, что $\triangle A_1B_1C_1$ равносторонній, а такъ какъ $\triangle O_1 O_2 O_3 \infty \triangle A_1 B_1 C_1$, то и онъ будетъ равносторонній.

В. Буханцевъ (Борисоглѣбскъ).

№ 336 (2 сер.). Даны двѣ параллельныя прямыя X и $У$, и на первой изъ нихъ—точка A. Черезъ A проводимъ произвольную сѣкущую до пересѣченія съ $У$ въ точкѣ B; къ прямой AB возставляемъ перпендикуляръ изъ B, который пусть пересѣкаетъ X въ точкѣ C, и изъ средины BC—перпендикуляръ, который продолжаемъ до пересѣченія съ $У$ въ точкѣ D. Соединивъ D и C, опускаемъ на прямую DC изъ данной точки A перпендикуляръ AM. Найти геометрическое мѣсто точки M.

Такъ какъ продолженіе перпендикуляра, возставленнаго въ срединѣ BC пересѣкаетъ AC въ срединѣ O, то $AM=2OP$, гдѣ P есть основаніе перпендикуляра изъ O на DC. Проведя $DQ \perp X$, найдемъ, что $DC=CO$ и слѣд. $DQ=PO$, а $AM=2DQ$. Поэтому геометрическимъ мѣстомъ точки M служитъ окружность, описанная изъ точки A радіусомъ, равнымъ двойному разстоянію между X и $У$.

К. Щиголевъ (Курскъ); *В. Перельцвейгъ* (Полтава).

№ 351 (2 сер.). Изъ двухъ треугольниковъ ABC и MNP съ соотвѣтственно параллельными сторонами, разстоянія между которыми суть m, n, p, одинъ лежитъ внутри другого. Требуется по даннымъ сторонамъ одного изъ нихъ опредѣлить стороны и площадъ другого, а также разстоянія между соотв. ихъ вершинами.

Пусть даны стороны a, b, c $\triangle$-а ABC, лежащаго внутри $\triangle$-а MNP.

1) Проведя прямыя AM, BN, PC, которыя, какъ извѣстно, пересѣкутся въ одной точкѣ O (центръ подобія), опустимъ изъ O перпендикуляры OD, OE, OF соотвѣтственно на a, b, c и продолжимъ ихъ до пересѣченія со сторонами NP, MP, MN въ точкахъ Q, R, S. Пусть $DQ=m$, $ER=n$, $FS=p$. Легко доказать, что $OD:OE:OF=m:n:p$, откуда

$$OE=\frac{n}{m}OD \text{ и } OF=\frac{p}{m}\cdot OD;$$

очевидно кромѣ того, что

$$OD.BC+OE.AC+OF.AB=2\triangle$$

(гдѣ $\triangle$ есть площадь ABC), или

$$a.OD+\frac{bn}{m}OD+\frac{cp}{m}OD=2\triangle,$$

откуда

$$OD=\frac{2m\triangle}{am+bn+cp},$$

а слѣдовательно

$$OE=\frac{2n\triangle}{am+bn+cp} \text{ и } OF=\frac{2p\triangle}{am+bn+cp}.$$

По OD изъ подобныхъ треугольниковъ OBC и OPN найдемъ

$$PN = a + \frac{a(am+bn+cp)}{2\triangle},$$

а такъ какъ площади подобныхъ треугольниковъ пропорціональны квадратамъ сходственныхъ сторонъ, то

$$\text{пл. } MNP = \triangle\left[1 + \frac{am+bn+cp}{2\triangle}\right]^2.$$

2) Проведя $OK \| CB$ и $OL \| AC$, изъ A и K опустимъ перпендикуляры AX и KY на BC. Изъ подобныхъ треуг. AXC и KYC найдемъ:

$$KC = \frac{amb}{am+bn+cp}, \text{ и точно также } CL = \frac{anb}{am+bn+cp}.$$

Изъ тр. OCL найдемъ $\overline{OC}^2 = \overline{OL}^2 + \overline{CL}^2 + 2CL.LD$, гдѣ $LD = \sqrt{\overline{OL}^2 - \overline{OD}^2}$. Замѣчая, что $OL = KC$ и подставляя сюда найденныя значенія, опредѣлимъ $\overline{OC}^2$, а такъ какъ $\overline{PC}^2 : \overline{OC}^2 = \overline{DQ}^2 : \overline{OD}^2$, то найдемъ и

$$\overline{PC}^2 = \frac{a^2b^2m^2 + a^2b^2n^2 + 2abmn\sqrt{a^2b^2 - 4\triangle^2}}{4\triangle^2}.$$

Задача рѣшается такъ же при всякомъ относительномъ положеніи двухъ треугольниковъ съ параллельными сторонами.

К. Щиголевъ (Курскъ); *В. Буханцевъ* (Борисоглѣбскъ); *А. П.* (Пенза); *В. Шидловскій* (Полоцкъ); *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *П. Ивановъ* (Одесса).

№ 353 (2 сер.). Радіусы трехъ концентрическихъ окружностей относятся какъ $1 : n\sqrt{2} : (n+1)\sqrt{2}$. Опредѣлить стороны прямоугольнаго равнобедреннаго треугольника, у котораго вершина прямого угла лежитъ на первой окружности, а двѣ остальныя вершины на другихъ окружностяхъ.

Обозначимъ общій центръ окружностей черезъ O, вершину прямого угла черезъ A, вершину угла, лежащую на окружности радіуса r_2—черезъ B, третью вершину—черезъ C. Изъ треуг. AOB и AOC находимъ:

$$\overline{OB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AO}^2 - 2AB.AO.\cos\varphi \text{ (гдѣ } \angle\varphi = \angle OAB);$$

$$\overline{OC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AO}^2 + 2AC.AO.\operatorname{sn}\varphi,$$

или

$$2r_1^2n^2 = x^2 + r_1^2 - 2xr_1.\cos\varphi, \ldots (1)\ 2r_1^2(n+1)^2 = x^2 + r_1^2 + 2xr_1\operatorname{sn}\varphi \ldots (2).$$

Изъ ур. (1), находимъ

$$\cos\varphi = \frac{x^2 + r_1^2 - 2r_1^2n^2}{2xr_1},$$

слѣдовательно

$$\operatorname{sn}\varphi = \frac{\sqrt{4x^2r_1^2 - (x^2 + r_1^2 - 2r_1^2n^2)^2}}{2xr_1}.$$

Подставляя это выраженіе вмѣсто $\operatorname{sn}\varphi$ въ ур. (2) и оредѣляя изъ него x, послѣ преобразованій получимъ

$$x = r_1 \sqrt{1+2n+2n^2}.$$

К. Щиголевъ (Курскъ); *А. П.* (Пенза).

№ 358 (2 сер.). Опредѣлить сторону равносторонняго треугольника, вершины коего расположены на трехъ данныхъ концентрическихъ окружностяхъ радіусовъ r_1, r_2, r_3.

Пусть вершина A искомаго треугольника лежитъ на большей окружности радіуса r_1, вершина B—на средней радіуса r_2, вершина C—на меньшей радіуса r_3, а общій центръ данныхъ окружностей пусть будетъ O. Тогда изъ треугольниковъ BOC и AOC получимъ:

$$\overline{BO}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{OC}^2 - 2BC.OC.\cos\varphi, \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\overline{AO}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{OC}^2 - 2AC.OC.\cos(60^0+\varphi), \quad \ldots\ldots (2)$$

гдѣ $\angle BCO = \angle\varphi$. Обозначивъ сторону искомаго $\triangle$-а черезъ x, можемъ написать ур. (1) и (2) такъ:

$$r_2^2 = x^2 + r_3^2 - 2x.r_3.\cos\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$r_1^2 = x^2 + r_3^2 - 2x.r_3.\cos(60^0+\varphi) \quad \ldots\ldots (4).$$

Изъ (3) ур.

$$\cos\varphi = \frac{x^2+r_3^2-r_2^2}{2xr_3};\ \text{слѣдов.}\ \operatorname{sn}\varphi = \frac{\sqrt{4x^2r_3^2-(x^2+r_3^2-r_2^2)^2}}{2xr_3}.$$

А такъ какъ

$$\cos(60^0+\varphi) = \frac{\cos\varphi - \sqrt{3}\,\operatorname{sn}\varphi}{2} = \frac{x^2+r_3^2-r_2^2-\sqrt{3}\sqrt{4x^2r_3^2-(x^2+r_3^2-r_2^2)^2}}{4xr_3},$$

то ур. (4) можетъ быть легко преобразовано въ такое

$$x^4 - x^2(r_1^2+r_2^2+r_3^2) + r_1^4+r_2^4+r_3^4 - (r_1^2r_2^2+r_1^2r_3^2+r_2^2r_3^2) = 0,$$

откуда

$$x = \sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2+r_3^2 \pm \sqrt{3(2r_1^2r_2^2+2r_2^2r_3^2+2r_1^2r_3^2-r_1^4-r_2^4-r_3^4)}}{2}}.$$

Выраженіе, стоящее подъ вторымъ радикаломъ, можетъ быть преобразовано такъ:

$$2r_1^2r_2^2+2r_1^2r_3^2+2r_2^2r_3^2-r_1^4-r_2^4-r_3^4 = 4r_1^2r_2^2 - \left\{(r_1^2+r_2^2)^2 - 2r_3^2(r_1^2+r_2^2)+r_3^4\right\} =$$

$$=(2r_1r_2)^2-(r_1^2+r_2^2-r_3^2)^2 = (r_1+r_2+r_3)(r_1+r_2-r_3)(r_1+r_3-r_2)(r_2+r_3-r_1).$$

Если $r_1+r_2+r_3=2p$, то

$$x = \sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2+r_3^2 \pm 4\sqrt{3p(p-r_1)(p-r_2)(p-r_3)}}{2}}.$$

Отсюда очевидно, что для возможности задачи каждый изъ радіусовъ долженъ быть меньше суммы двухъ другихъ радіусовъ.

К. Геншель (Курскъ); *А. П.* (Пенза).

ОТКРЫТЫЕ ВОПРОСЫ и ОТВѢТЫ.

7. *Еще къ вопросу о волшебныхъ квадратахъ.* Означимъ квадраты:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & 3n-a-b \\ \hline 4n-2a-b & n & 2a+b-2n \\ \hline a+b-n & 2n-b & 2n-a \\ \hline \end{array} = \square\, S(a, b, n)$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & \frac{n^3}{ab} \\ \hline \frac{n^4}{a^2b} & n & \frac{a^2b}{n^2} \\ \hline \frac{ab}{n} & \frac{n^2}{b} & \frac{n^2}{a} \\ \hline \end{array} = \square\, P(a, b, n)$$

и будемъ постепенно на мѣсто b ставить крайніе члены второго горизонтальнаго ряда; получимъ ряды квадратовъ:

$$\square\, S(a, b, n), \square\, S(a, 2a+b-2n, n), \square\, S(a, 4a+b-4n, n), \ldots$$

$$\ldots \square\, S(a, 2ka+b-2kn, n);$$

$$\square\, P(a, b, n), \square\, P\left(a, \frac{a^2b}{n^2}, n\right), \square\, P\left(a, \frac{a^4b}{n^4}, n\right) \ldots \square\, P\left(a, \frac{a^{2k}b}{n^{2k}}, n\right),$$

въ которыхъ члены, расположенные по діагонали, т. е. первый, второй и третій въ горизонтальныхъ рядахъ, будутъ одни и тѣ-же:

$$a, n, 2n-a; \quad a, n, \frac{n^2}{a},$$

а остальные соотвѣтствующіе члены будутъ представлять ряды ариѳметическихъ и геометрическихъ прогрессій; напр., крайніе члены перваго горизонтальнаго ряда дадутъ:

$$\div\, 3n-a-b,\ 5n-3a-b,\ 7n-5a-b, \ldots (2k+3)n-(2k+1)a-b;$$

$$\because\, \frac{n^3}{ab}, \frac{n^5}{a^3b}, \frac{n^7}{a^5b}, \ldots\ldots\ldots \frac{n^{2k+3}}{a^{2k+1}b}.$$

Подобные же ряды убывающихъ квадратовъ можно составить, если на мѣсто b мы будемъ ставить первые члены второго горизонтальнаго ряда:

$$4n-2a-b \text{ и } \frac{n^4}{a^2b}.$$

Если даны два какія либо количества a и b и если для нихъ требуется составить такой квадратъ, который превращается въ волшебный тогда, когда надъ всѣми его членами производится одно дѣйствіе $f(x)$, то такой квадратъ будетъ:

$$\square S[a, b, \varphi(n)] \text{ или } \square P[a, b, \varphi(n)]$$

гдѣ $\varphi(n)$ есть обратная функція $f(n)$. Напр. квадраты:

a	b	$\sqrt[k]{3n-a^k-b^k}$
$\sqrt[k]{4n-2a^k-b^k}$	$\sqrt[k]{n}$	$\sqrt[k]{2a^k+b^k-2n}$
$\sqrt[k]{a^k+b^k-n}$	$\sqrt[k]{2n-b^k}$	$\sqrt[k]{2n-a^k}$

a	b	$\frac{n^3}{(a+k)(b+k)}-k$
$\frac{n^4}{(a+k)^2(b+k)}-k$	$n-k$	$\frac{(a+k)^2(b+k)}{n^2}-k$
$\frac{(a+k)(b+k)}{n}-k$	$\frac{n^2}{b+k}-k$	$\frac{n^2}{(a+k)}-k$

обратятся въ волшебные $\square S(a^k, b^k, n)$, $\square P(a+k, b+k, n)$, когда всѣ члены перваго будутъ возвышены въ степень k, а къ членамъ второго будетъ прибавлено по k.

Возьмемъ волшебный квадратъ:

$$\square P\left(T(m+r+1), \frac{1}{T(n+r+1)}, r^{\frac{m-n}{3}}\right),$$

въ которомъ (по означенію Лагранжа):

$$T(n+r+1)=1.2.3.4.5\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ n+r,$$

$$T(m+r+1)=1.2.3.4.5\ .\ .\ .\ .\ .\ m+r,$$

и, по доказанному Лобачевскимъ, для какихъ бы то ни было m и n:

$$\frac{T(m+r+1)}{T(n+r+1)}=r^{m-n}$$

или, по означенію Лобачевскаго:

$$\frac{(m+r)^{\sim m+r}}{(n+r)^{\sim n+r}}=r^{m-n}.$$

Спрашивается, какая зависимость получится между этими функціями, когда мы изъ даннаго составимъ послѣдовательный рядъ квадратовъ, соотвѣтствующіе члены которыхъ будутъ одни равны между собой, а другіе расположатся въ геометрическихъ прогрессіяхъ?

Износковъ.

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Одесса, 2-го Декабря 1893 г.

„Центральная типо-литографія", уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. Болгарова.

Обложка
ищется

Обложка
пщется