Обложка
ищется

Обложка
пщется

ВѢСТНИКЪ
ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

XV Сем. № 175. № 7.

ЛОГИЧЕСКАЯ МАШИНА ДЖЕВОНСА.

Сообщеніе, читанное въ засѣданіи математическаго отдѣленія Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей по вопросамъ элементарной математики и физики 24-го сентября 1893 года.

Stanley Jevons въ докладѣ *), читанномъ въ Лондонскомъ Королевскомъ Обществѣ 20-го января 1870 года, описалъ машину, построенную по его плану и предназначенную для производства умозаключеній изъ данныхъ посылокъ. Машина по виду представляетъ ящикъ формы шкапа около аршина высотой, стоящій на небольшомъ пьедесталѣ, снабженномъ клавіатурой. Ударяя по клавишамъ сообразно съ требованіемъ посылокъ, мы получаемъ на передней доскѣ ящика, въ условныхъ знакахъ, всѣ слѣдствія, вытекающія изъ данныхъ посылокъ. Въ машинѣ совершается процессъ умозаключенія!

Чтобы понять ея устройство, познакомимся нѣсколько съ математической логикой **). Математическая логика исходитъ изъ понятія о равенствѣ $A = B$, выражающемъ, что два класса понятій A и B, не смотря на различіе ихъ опредѣленій, представляютъ одинъ и тотъ-же классъ. Напр. равносторонній треугольникъ = равноугольный треугольникъ. Общность требуетъ принять, какъ частный случай, $A = A$. Это

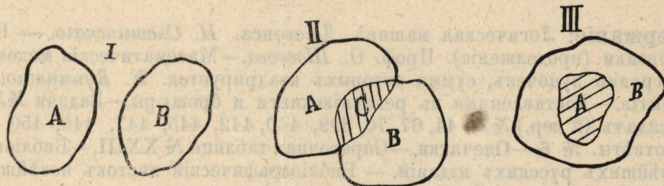
---

*) Philosophical transactions of the royal society of London. 1870. Стр. 497—518.

**) Stanley Jevons. The principles of science. 1892. Стр. 1—153.

Giuseppe Peano. Calcolo geometrico, preceduto delle operazioni della logica deduttiva. 1888. Стр. 1—21.

называется закономъ тождества. Логика имѣетъ дѣло съ двоякимъ сочетанiемъ понятiй, изъ коихъ одно называется логическимъ сложенiемъ, другое логическимъ умноженiемъ. Если А и В два класса понятiй, то А+В изображаетъ наименьшiй классъ, въ которомъ содержится каждый изъ данныхъ, т. е. А+В представляетъ классъ, содержащiй всякое понятiе, входящее или въ А, или въ В (независимо отъ того, имѣютъ ли эти классы общiя понятiя или нѣтъ) и не содержащiй ни одного понятiя больше. Далѣе АВ представляетъ наибольшiй классъ, который содержится въ каждомъ изъ данныхъ, т. е. АВ выражаетъ классъ, содержащiй всѣ понятiя, общiя классамъ А и В. Для поясненiя выдѣлимъ классы понятiй замкнутыми контурами. Возможны три случая:



Фиг. 30.

Въ первомъ случаѣ классы А и В не имѣютъ общихъ понятiй. Напр. человѣкъ и дерево. Здѣсь сумма представляетъ совокупность всѣхъ понятiй, входящихъ въ эти классы, а произведенiе ихъ есть ничто. Во второмъ случаѣ классы имѣютъ общiя понятiя, составляющiя классъ С. Напр. солдатъ и герой. Здѣсь сумма представляетъ совокупность всѣхъ различныхъ элементовъ, т. е. равна суммѣ понятiй солдатъ и герой-не солдатъ, или суммѣ понятiй герой и солдатъ-не герой; а произведенiе есть понятiе солдатъ-герой. Въ третьемъ случаѣ одинъ классъ заключается въ другомъ. Напр. чиновникъ и человѣкъ. Здѣсь сумма равна понятiю человѣкъ, а произведенiе есть понятiе чиновникъ. Результатъ умноженiя въ третьемъ случаѣ изобразится символически такъ АВ=А. Это равенство Jevons называетъ частнымъ тождествомъ. Оно важно въ томъ отношенiи, что позволяетъ выразить равенствомъ сужденiе: А есть нѣкоторое В.

Изъ опредѣленiй логическихъ дѣйствiй вытекаютъ слѣдующiя замѣчательныя тождества

$A+A=A$	$AA=A$
$A+B=B+A$	$AB=BA$
$A+(B+C)=A+B+C$	$A(BC)=ABC$

$$(A+B)C=AC+BC.$$

Равенства первой строки показываютъ, какъ различны, по существу, логическiя дѣйствiя отъ ариѳметическихъ. Остальныя-же равенства показываютъ, что логическiя сложенiе и умноженiе перемѣстительны и сочетательны и умноженiе связано съ сложенiемъ распредѣлительнымъ свойствомъ. Извѣстно, что изъ этихъ свойствъ выводятся въ ариѳметикѣ, замѣной равныхъ равными, всѣ преобразованiя выраженiй, относящихся къ сложенiю и умноженiю. Такъ какъ эти свойства справедливы для логическихъ дѣйствій, то логическія выраженія преобразуются, какъ ариѳметическія. Введемъ теперь понятія не A, не B,..., которыя будемъ обозначать чрезъ a, b,..... Если обозначимъ чрезъ T совокупность всѣхъ разсматриваемыхъ понятій, а чрезъ 0 (нуль) несуществованіе понятія, то будетъ для всякаго A, по опредѣленію дѣйствій:

$$A+0=A \tag{1}$$

$$A.0=0 \tag{2}$$

$$A+T=T$$

$$AT=A \tag{3}$$

$$A+a=T \tag{4}$$

$$Aa=0 \tag{5}.$$

Послѣднее равенство представляетъ законъ противорѣчія и выражаетъ, что A, которое есть не A, есть ничто. Иначе говоря, оно выражаетъ, что классы A и не A не имѣютъ общихъ понятій. Вмѣстѣ съ (4) оно можетъ служить формальнымъ опредѣленіемъ понятія не A. Интересна связь между сложеніемъ и умноженіемъ, раскрываемая при помощи отрицательныхъ понятій, а именно: если $A=B+C$, то $a=bc$ и наоборотъ. Въ самомъ дѣлѣ, если A есть сумма B и C, то каждое понятіе, входящее или въ B, или въ C, входитъ въ A. Поэтому a, т. е. не A, должно быть совокупностью понятій, которыя не входятъ ни въ B, ни въ C, т. е. входятъ и въ b, и въ c.

При помощи равенствъ (3) и (4) выводится равенство, которое назовемъ основнымъ. Изъ (3) слѣдуетъ, что $TT=T$. Отсюда

$$T.T... \; T=T.$$

Поэтому изъ (3)

$$A=AT=A(TT...T),$$

т. е.

$$A=ATT...T.$$

Отсюда, замѣняя на основаніи (4) одного сомножителя T чрезъ $B+b$, другого—чрезъ $C+c$ и т. д., находимъ:

$$A=A(B+b)\,(C+c)....(K+k). \tag{6}$$

Въ частности, ограничиваясь двумя понятіями, имѣемъ:

$$A=A(B+b),$$

что, по законамъ дѣйствій, даетъ

$$A=AB+Ab.$$

Это законъ исключеннаго средняго или законъ двойственности, какъ называетъ его Jevons. Пусть для примѣра A означаетъ подарокъ, а B—книга. Тогда равенство выражаетъ, что подарокъ есть подарокъ книга или подарокъ не книга.

Возвратимся къ равенству (6) и сравнимъ правую часть его съ произведеніемъ

$$(A+a)\,(B+b)\,(C+c)...(K+k).$$

Такъ какъ это произведеніе равно

$$A(B+b)(C+c)\ldots(K+k)+a(B+b)(C+c)\ldots(K+k),$$

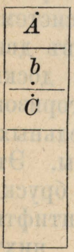
то можно сказать, что правая часть равенства (6) есть сумма всѣхъ тѣхъ членовъ произведенія

$$(A+a)(B+b)\ldots(K+k),$$

въ которые входитъ A. Совокупность членовъ этого произведенія Jevons называетъ логическимъ алфавитомъ. Поэтому равенство (6) показываетъ, что понятіе A равно суммѣ всѣхъ членовъ логическаго алфавита, содержащихъ его. Формула (6) даетъ возможность выполнять умозаключенія замѣной равныхъ равными. Такимъ образомъ рѣшается общая задача дедукціи: изъ данныхъ посылокъ вывести всѣ слѣдствія, вытекающія изъ нихъ относительно даннаго понятія. Чтобы показать это, начнемъ съ простого примѣра. Пусть имѣемъ посылку: золото есть металлъ, которая символически выражается такъ $A=AB$, гдѣ A — означаетъ золото, B — металлъ. Желаемъ имѣть заключеніе о понятіи b. Такъ какъ $b=b(A+a)=bA+ba$, то, внося сюда $A=AB$, находимъ $b=bAB+ab$. Но $bAB=bB.A=0\ A=0$. Слѣдовательно $b=ab$, т. е. не металлъ есть не золото. Перейдемъ теперь къ болѣе сложному примѣру. Возьмемъ задачу Venn'a: извѣстно, что въ засѣданіи совѣта, состоящаго изъ владѣльцевъ акцій и облигацій, не было ни одного лица, имѣющаго и акціи и облигаціи; далѣе извѣстно, что всѣ владѣльцы облигацій были въ засѣданіи совѣта. Спрашивается, что отсюда слѣдуетъ? Отвѣтъ: ни одинъ изъ владѣльцевъ акцій не имѣлъ облигацій. Когда выводъ извѣстенъ, то доказать его справедливость легко. Въ сам. д. если бы существовалъ владѣлецъ акцій, имѣющій облигаціи, то онъ не могъ бы, по первому условію, присутствовать въ засѣданіи; но, съ другой стороны, какъ владѣлецъ облигацій, онъ долженъ былъ бы, по второму условію, присутствовать въ этомъ засѣданіи. Одно противорѣчитъ другому. Отсюда слѣдуетъ, что такихъ лицъ вовсе не было. При помощи формулъ получаемъ не только доказательство, но и самый выводъ. Пусть A=членъ, присутствующій въ засѣданіи совѣта, B=владѣлецъ облигацій, C=владѣлецъ акцій. Тогда посылки выразятся такъ: $A=ABc+ACb$ и $B=AB$. Для C имѣемъ $C=C(A+a)(B+b)=ABC+aBC+AbC+abC$, что, вслѣдствіе замѣны лѣвыхъ частей посылокъ правыми, обращается въ $C=(ABc+ACb).(AB).C+a(AB).C+(ABc+ACb)bC+abC$. Раскрывъ скобки, уничтоживъ члены, содержащіе противорѣчія, и упростивъ остальные члены при помощи свойства $AA=A$, найдемъ $C=ACb+abC$ или $C=Cb(A+a)=CbT=Cb$, т. е. требуемый отвѣтъ.

Эти примѣры указываютъ методъ рѣшенія общей задачи дедукціи. Для этого нужно въ разложеніи опредѣляемаго понятія уничтожить члены, противорѣчащіе посылкамъ. Въ предыдущихъ примѣрахъ это достигалось замѣной во всѣхъ членахъ терминовъ, представляющихъ лѣвыя части посылокъ, ихъ выраженіями, представляющими правыя части посылокъ. Всякій разъ когда посылка выражается частнымъ тождествомъ, лѣвая часть котораго одночленна, такая замѣна возможна. Если-же въ посылкѣ, выражаемой частнымъ тождествомъ, лѣвая часть состоитъ изъ нѣсколькихъ членовъ, то посылка эквивалентна нѣсколькимъ посылкамъ, лѣвыя части которыхъ одночленны. Такъ если $A+B+C=(A+B+C)D$, то это значитъ, что $A+B+C$ заключается въ D; поэтому каждое изъ слагаемыхъ также заключается въ D, т. е. $A=AD$, $B=BD$, C=CD. Наоборотъ, складывая эти три равенства, находимъ первоначальное. Остается разсмотрѣть случай, когда посылка выражается полнымъ тождествомъ. Этотъ случай приводится къ предыдущему, потому что всякое полное тождество A=B равносильно двумъ частнымъ A=AB и B=AB. Такимъ образомъ убѣждаемся, что посылкамъ всегда можно придать такой видъ, что задача дедукціи будетъ рѣшена замѣной лѣвыхъ частей посылокъ правыми въ разложеніи опредѣляемаго понятія. Вспомнимъ, что сумма членовъ, получаемыхъ по выполненіи умноженій въ равенствѣ (6), т. е. сумма членовъ, составляющихъ понятіе A, есть совокупность всѣхъ членовъ логическаго алфавита, содержащихъ разсматриваемое понятіе. Тогда будетъ ясно, что для вывода заключеній, вытекающихъ изъ данныхъ посылокъ по отношенію къ данному понятію, должно взять изъ логическаго алфавита всѣ члены, содержащіе данное понятіе, и исключить изъ числа ихъ члены, уничтожающіеся вслѣдствіе посылокъ.

Единственное затрудненіе въ приложеніи этого метода заключается въ большомъ количествѣ членовъ логическаго алфавита (при n понятіяхъ число членовъ равно числу членовъ въ произведеніи n выраженій вида $A+a$, т. е. равно 2^n), что обусловливаетъ значительную затрату времени и увеличиваетъ вѣроятность ошибокъ. Для устраненія этихъ неудобствъ можетъ служить логическій абакусъ, состоящій изъ наклонной классной доски, на которой прибиты горизонтальныя планки въ достаточныхъ разстояніяхъ одна отъ другой. Комбинаціи логическаго алфавита написаны въ вертикальномъ направленіи, каждая на отдѣльной дощечкѣ. Дощечки помѣщаются на планкахъ. Въ дощечки

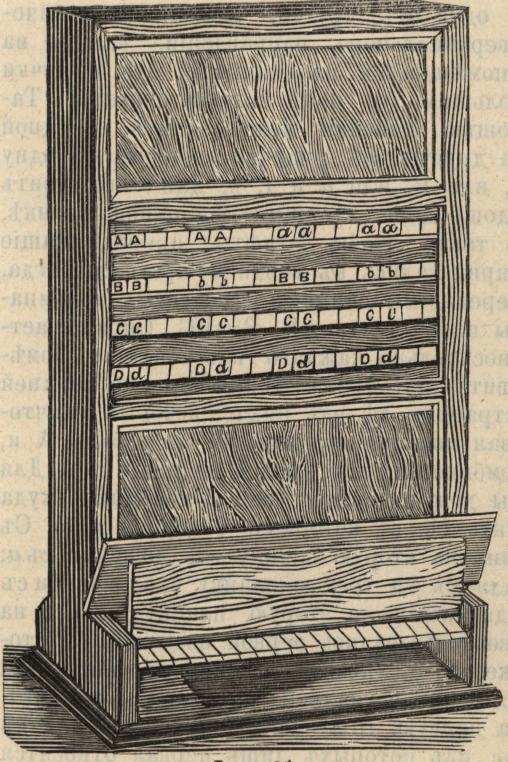


вбиты штифты надъ большими и подъ малыми буквами. Такимъ образомъ съ помощью линейки можно снять съ одной планки и поставить на другую всѣ дощечки, содержащія одну и ту же букву, т. е. A, или B, или a и т. д. Для этого стоитъ только приложить къ дощечкамъ, стоящимъ на одной планкѣ, линейку горизонтально такъ, чтобы штифты, принадлежащіе снимаемымъ буквамъ, прикасались къ верхнему краю ея. Тогда, выдвинувъ линейку впередъ, мы снимемъ требуемыя комбинаціи. Пусть теперь даны посылки A=AB, B=BC. Спрашивается, что изъ нихъ слѣдуетъ относительно каждаго изъ понятій? Помѣщаемъ всѣ 8 комбинацій алфавита изъ трехъ терминовъ на верхней планкѣ. Мы должны теперь устранить тѣ изъ нихъ, которыя уничтожаются первой посылкой. Первая посылка вводитъ B, гдѣ было A и, слѣдовательно, уничтожаетъ комбинаціи, гдѣ было b на ряду съ A. Для удаленія этихъ комбинацій, мы должны взять всѣ комбинаціи, куда входитъ A и изъ нихъ устранить тѣ, въ которыхъ содержится b. Съ этой цѣлью переносимъ временно на вторую планку всѣ дощечки съ a; изъ оставшихся на первой удаляемъ на третью планку всѣ дощечки съ b и возвращаемъ временно удаленныя на вторую планку назадъ на первую. Такимъ образомъ мы воспользовались первой посылкой. Со второй посылкой поступаемъ также, т. е. уносимъ съ первой планки на вторую временно всѣ b; изъ оставшихся удаляемъ на третью c, а со второй возвращаемъ удаленныя на первую. Получаются на первой планкѣ комбинаціи ABC, aBC, abC, abc, изъ которыхъ лишь первая относится къ A. Чтобы получить описаніе A должно, какъ сказано выше, уравнять A суммѣ членовъ, содержащихъ его. Получимъ A=ABC. Этотъ результатъ можно упростить. По свойству CC=C можемъ результатъ записать такъ A=ABC.C. Но A=ABC и, слѣдовательно, замѣнивъ въ правой части предыдущаго равенства ABC чрезъ A, найдемъ A=AC. Это значитъ, что изъ посылокъ A есть нѣкоторое B и B есть нѣкоторое C вытекаетъ, что A есть нѣкоторое C, что составляетъ силлогизмъ, извѣстный въ логикѣ подъ именемъ Barbara.

Но на логическомъ абакусѣ возможны ошибки. Желательно свести умозаключеніе всецѣло къ акту механическому. Это достигается съ помощью логической машины, въ которой комбинаціи алфавита прикрѣплены къ вертикальнымъ брускамъ, перемѣщающимся вверхъ и внизъ и могущимъ вслѣдствіе этого принимать, подъ дѣйствіемъ клавишей, 4 различныхъ положенія. Буквы алфавита при извѣстномъ положеніи брусковъ становятся видимыми чрезъ горизонтальные прорѣзы въ передней доскѣ машины; при другихъ положеніяхъ онѣ исчезаютъ. Клавіатура машины имѣетъ слѣдующій видъ.

	лѣвая часть посылки										правая часть посылки									
конецъ	+	*d*	*D*	*c*	*C*	*b*	*B*	*a*	*A*	=	*A*	*a*	*B*	*b*	*C*	*c*	*D*	*d*	+	остановка

Каждый брусокъ въ машинѣ можетъ, какъ сказано выше, принимать 4 различныхъ положенія, которыя, считая сверху внизъ, будемъ называть четвертымъ, третьимъ, первымъ и вторымъ. Клавиши съ помощью системы рычаговъ приводятъ въ движеніе горизонтальныя доски, вращающіяся около горизонтальныхъ осей, параллельныхъ передней доскѣ машины. Эти доски захватываютъ тѣ бруски, на которыхъ есть штифты, находящіеся противъ нихъ. Каждая клавиша лѣвой стороны, обозначенная буквою, перемѣщаетъ всѣ бруски, содержащіе другую букву, выражающую тотъ же звукъ, и находящіеся въ первомъ положеніи, во второе положеніе. Каждая клавиша правой стороны, обозначенная буквой, перемѣщаетъ всѣ бруски, содержащіе другую букву, выражающую тотъ же звукъ, и находящіеся въ первомъ положеніи, въ третье положеніе. Клавиша, помѣченная знакомъ =, пере-



Фиг. 31.

мѣщаетъ всѣ бруски, находящіеся въ третьемъ положеніи, въ первое. Клавиша „остановка“ перемѣщаетъ всѣ бруски, находящіеся во второмъ положеніи въ первое, а находящіеся въ третьемъ положеніи, въ четвертое, т. е. поднимаетъ вторую и третью горизонталь. Клавиша + лѣвой стороны перемѣщаетъ бруски, находящіеся во второмъ положеніи, въ первое; а бруски, находящіеся въ первомъ положеніи,—въ третье, т. е. поднимаетъ вторую и первую линіи. Клавиша + правой стороны перемѣщаетъ бруски, находящіеся въ третьемъ положеніи, въ первое, а бруски, находящіеся въ первомъ положеніи,—во второе, т. е. опускаетъ первую и третью линіи. Клавиша „конецъ“ возвращаетъ бруски, находящіеся въ положеніяхъ второмъ, третьемъ и четвертомъ, въ первое. Чтобы уяснить себѣ дѣйствіе машины должно взять 16 бумажекъ, написать на нихъ 16 комбинацій логическаго алфавита изъ 4 терминовъ и, начертивъ на листѣ бумаги 4 горизонтальныхъ прямыхъ, отвѣчающихъ четыремъ положеніямъ брусковъ, перемѣщать бумажки съ одной прямой на другую, сообразно съ только что указаннымъ дѣйствіемъ клавишей.

Прослѣдимъ дѣйствіе машины на примѣрахъ. Пусть лѣвая часть посылки будетъ ABC. Дѣйствіе посылки должно заключаться въ замѣнѣ ABC во всѣхъ комбинаціяхъ алфавита, въ которыя оно входитъ, правою частью посылки. Для этого машина должна выбрать тѣ комбинаціи, куда входитъ ABC. Это достигается прикосновеніемъ къ клавишамъ A лѣвое, B лѣвое, C лѣвое. Всѣ комбинаціи вначалѣ находятся на первой горизонтали (которая отвѣчаетъ прорѣзамъ въ передней доскѣ машины). Первое прикосновеніе опускаетъ на вторую горизонталь всѣ комбинаціи съ *a*, такъ что на первой остаются лишь комбинаціи, содержащія A. Второе прикосновеніе опускаетъ на вторую горизонталь всѣ комбинаціи съ *b*, оставшіяся на первой горизонтали, т. е. оставляетъ на первой горизонтали изъ всѣхъ комбинацій съ A только тѣ, которыя содержатъ также B. Третье прикосновеніе опускаетъ всѣ *c*, оставшіяся на первой горизонтали, т. е. изъ всѣхъ комбинацій, содержащихъ A и B, оставляетъ на первой горизонтали лишь тѣ, которыя содержатъ C. Итакъ, въ результатѣ на первой горизонтали остаются лишь всѣ комбинаціи, содержащія ABC, остальныя же комбинаціи находятся на второй горизонтали. Такимъ образомъ сообщена машинѣ лѣвая часть посылки. Теперь должно сообщить ей знакъ равенства. Прикосновеніе къ клавишѣ = не производитъ въ этомъ случаѣ никакого дѣйствія, ибо на третьей горизонтали нѣтъ ни одной комбинаціи. Пусть теперь лѣвая часть посылки будетъ многочленна, наприм. A+B+C. Въ такомъ случаѣ дѣйствіе посылки, какъ объяснено выше, должно заключаться въ замѣнѣ каждаго члена лѣвой части. Для этого машина должна выбрать всѣ комбинаціи, въ которыя входитъ или A, или B, или C, т. е. удалить лишь тѣ комбинаціи, въ которыя не входитъ ни A, ни B, ни C. Этого достигаемъ, ударяя послѣдовательно клавиши: A лѣвое, + лѣвый, B лѣвое, + лѣвый, C лѣвое. Первый ударъ опускаетъ на вторую горизонталь всѣ *a*, второй поднимаетъ комбинаціи, оставшіяся на первой горизонтали, на третью, а унесенныя на вторую поднимаетъ на первую. Второй ударъ изъ этихъ послѣднихъ удаляетъ на вторую всѣ *b*. Такимъ образомъ на второй будутъ всѣ тѣ комбинаціи, которыя содержатъ и *a*, и *b*. Четвертый ударъ опять поднимаетъ оставшіяся на первой горизонтали комбинаціи на третью, а находящіяся на второй—на первую. Пятый ударъ изъ этихъ послѣднихъ опускаетъ всѣ *c* на вторую. Такимъ образомъ на второй горизонтали оказываются всѣ комбинаціи, содержащія и *a*, и *b*, и *c*, т. е. не содержащія ни A, ни B, ни C. Это какъ разъ тѣ комбинаціи, которыя должны быть удалены. На первой и третьей остаются всѣ комбинаціи, гдѣ есть или A, или B, или C. Теперь должно сообщить машинѣ знакъ равенства. Ударяя клавишу =, переносимъ комбинаціи съ 3-ей на 1-ую горизонталь. Такимъ образомъ на первой горизонтали остаются всѣ комбинаціи, въ которыя входятъ или A, или B, или C, т. е. всѣ тѣ комбинаціи, въ которыхъ должно каждую изъ этихъ трехъ буквъ замѣнить. Итакъ, какова-бы ни была лѣвая часть посылки — одночленна или многочленна, передавъ ее и слѣдующій за ней знакъ равенства машинѣ, раздѣлимъ всѣ комбинаціи на двѣ группы: одну, гдѣ нѣтъ выраженій, вмѣсто которыхъ вводится правая часть посылки; т. е. нѣтъ комбинацій, на которыя посылка можетъ оказать вліяніе; и другую, содержащую такія комбинаціи. Первая часть временно устранена на вторую горизонталь, вторая остается на первой горизонтали для того, чтобы введеніемъ въ нее первой части посылки удалить комбинаціи, содержащія противорѣчія. — Переходимъ теперь къ передачѣ правой части посылки. Здѣсь прежде всего замѣтимъ, что, такъ какъ полное тождество равносильно двумъ частнымъ, мы можемъ ограничиться предположеніемъ, что имѣемъ дѣло съ передачей частнаго тождества. Въ такомъ случаѣ правая часть содержитъ во первыхъ повтореніе лѣвой части. Это не передается машинѣ вовсе. Затѣмъ должно различать случай одночленнаго и многочленнаго выраженія. Положимъ, что остальная часть правой стороны посылки будетъ ABC. Это значитъ, что во всѣ комбинаціи, оставшіяся послѣ передачи лѣвой части посылки на первой горизонтали, должно ввести ABC. Дѣйствіе посылки должно заключаться въ удаленіи членовъ, которые вслѣдствіе введенія ABC дѣлаются содержащими противорѣчія. Такими станутъ члены, гдѣ есть какая либо изъ буквъ *a*, *b* и *c*. Поэтому всѣ такія комбинаціи должно удалить. Этого достигаемъ, ударяя клавиши: A правое, B правое, C правое, остановка. Первый ударъ уноситъ всѣ *a* съ первой горизонтали на третью, второй уноситъ туда-же всѣ *b*, третій—всѣ *c*. Такимъ образомъ на первой горизонтали остаются лишь члены, гдѣ нѣтъ ни *a*, ни *b*, ни *c*, т. е. члены, не содержащіе противорѣчій. Теперь четвертый ударъ удаляетъ на четвертую горизонталь противорѣчивыя комбинаціи, уводя ихъ совершенно съ поля дѣйствія до конца, и возвращаетъ временно удаленныя на вторую горизонталь комбинаціи, тоже не содержащія противорѣчій, какъ не подвергавшіяся вовсе дѣйствію посылки. Такимъ образомъ на первой горизонтали остаются лишь комбинаціи, согласныя съ посылкой. Пусть теперь разсматриваемая часть посылки будетъ многочленна, напр. A+B+C. Тогда дѣйствіе посылки должно заключаться въ введеніи во всѣ комбинаціи, оставшіяся послѣ передачи лѣвой части посылки на первой горизонтали, выраженія A+B+C и удаленія комбинацій, которыя должны исчезнуть въ силу противорѣчія. Но такими будутъ лишь тѣ, въ которыхъ есть и *a*, и *b*, и *c*. Въ самомъ дѣлѣ, вводя въ извѣстную комбинацію A+B+C, получимъ изъ нея три отдѣльныхъ комбинаціи: одна, которая получилась бы отъ введенія А, другая отъ введенія В, третья—С. Чтобы всѣ три исчезли, необходимо, чтобы первоначальная содержала и a, и b, и c. Итакъ, машина должна удалить всѣ комбинаціи, содержащія и a, и b, и c. Этого достигаемъ, ударяя клавиши: А правое,+правый, В правое,+правый, С правое, остановка. Первый ударъ уноситъ съ первой горизонтали на третью всѣ a, второй опускаетъ комбинаціи съ третьей на первую, а находившіяся на первой—на вторую. Третій ударъ уноситъ съ первой на третью всѣ b. Такимъ образомъ на третьей оказываются всѣ содержащія и a, и b. Четвертый ударъ опять опускаетъ эти комбинаціи на первую, унося въ то-же время комбинаціи, находившіяся на первой, на вторую. Пятый ударъ поднимаетъ съ первой на третью всѣ комбинаціи, содержащія c. Такимъ образомъ на третьей оказываются всѣ комбинаціи, содержащія и a, и b, и c, т. е. подлежащія удаленію; а на второй и первой—комбинаціи, не содержащія противорѣчій. Шестой ударъ поднимаетъ исключенныя комбинаціи на четвертую горизонталь, а комбинаціи, оставшіяся на второй, присоединяетъ къ комбинаціямъ, оставшимся на первой. Такимъ образомъ всѣ комбинаціи, согласныя съ посылкой, остаются на первой горизонтали.

Замѣтимъ при этомъ, что въ случаѣ, когда лѣвая или правая часть посылки содержитъ скобки умноженія, должно скобки предварительно раскрыть, ибо для передачи скобокъ въ машинѣ нѣтъ приспособленія.

Для упражненія предлагаемъ убѣдиться (при помощи бумажекъ съ 8 комбинаціями алфавита изъ трехъ терминовъ), что посылки $A=BC$ и $a=b+c$ равносильны. Для этого должно передать машинѣ посылку $A=BC$. Такъ какъ это полное тождество, то нужно передать его въ видѣ двухъ частныхъ; $A=ABC$ и $BC=BCA$, т. е. такъ: А лѣвое, =, В правое, С правое, остановка. Затѣмъ: В лѣвое, С лѣвое, =, А правое, остановка. Въ результатѣ на первой горизонтали останутся: ABC, aBc, abC, abc. Теперь, приведя машину въ первоначальное состояніе прикосновеніемъ къ клавишѣ „конецъ", передадимъ ей посылку $a=b+c$ въ формѣ $a=a(b+c)$ и $b+c=(b+c)\,a$, т. е. такъ: a лѣвое, =, b правое,+правый, c правое, остановка. Затѣмъ b лѣвое,+лѣвый, c лѣвое, =, a правое, остановка. Послѣ этого на первой горизонтали останутся тѣ же комбинаціи ABC, aBc, abC, abc. Такимъ образомъ убѣждаемся въ эквивалентности нашихъ посылокъ.—Другимъ упражненіемъ можетъ служить рѣшеніе (съ помощью бумажекъ съ 16-ью комбинаціями алфавита изъ четырехъ терминовъ) слѣдующей задачи, которую предложилъ Boole. Извѣстно, что во 1) гдѣ есть вмѣстѣ А и В, тамъ есть или С, или D, но не вмѣстѣ; во 2) гдѣ есть вмѣстѣ В и С, тамъ или есть вмѣстѣ А и D, или нѣтъ ни одного изъ нихъ; въ 3) гдѣ нѣтъ ни А, ни В, тамъ нѣтъ ни С, ни D, и наоборотъ. Посылки будутъ, $AB=AB\,(Cd+cD)$; $BC=BC\ (AD+ad)$; $ab=cd$. Машинѣ передаются такъ: А лѣвое, В лѣвое,=, С правое, d правое, + правый, c правое, D правое, остановка. В лѣвое, С лѣвое, =, А правое, D правое,+правый, a правое, d правое, остановка. a лѣвое, b лѣвое,=, c правое, d правое. c лѣвое, d лѣвое,=, a правое, b правое. При этомъ послѣдняя посылка, какъ полное тождество, передается дважды. Остаются послѣ этого на машинѣ комбинаціи $ABcD$, $AbCD$, $AbCd$, $AbcD$, $aBCd$, $aBcD$, $abcd$. Отсюда можно получить заключенiе относительно каждаго термина или комбинацiи терминовъ. Такъ напримѣръ для aB имѣемъ $aB=aBCd+aBcD$. Для ABC находимъ $ABC=0$, ибо нѣтъ ни одного члена, содержащаго ABC. Замѣтимъ еще, что послѣднее заключенiе можно вывести прямо изъ посылокъ слѣдующимъ образомъ. Умноживъ обѣ части первой посылки на C, а второй на A, находимъ $ABC=ABCd$ и $ABC=ABCD$. Внося-же выраженiе для ABC изъ перваго равенства во вторую часть второго равенства, находимъ: $ABC=ABCdD=0$.

И. Слешинскiй (Одесса).

ВВЕДЕНІЕ
въ
МЕТОДИКУ ФИЗИКИ.

(*Продолженiе* *))

§ 7. *Пространство и время.* Никто не сомнѣвается теперь въ томъ, что представленiя о физическихъ дѣятеляхъ,—свѣтѣ, звукѣ, теплотѣ и т. д.—суть понятiя *чувственныя*, не прирожденныя, возникающiя въ сознанiи благодаря органамъ чувствъ, приспособленныхъ къ ихъ воспрiятiю. Но относительно *пространства* и *времени* существуетъ еще мнѣнiе, что эти понятiя присущи нашему уму независимо отъ внѣшняго мiра, что это—готовыя формы, въ которыя укладывается матерiалъ, почерпаемый сознанiемъ изъ внѣшняго мiра.

Не трудно однако убѣдиться, что и понятiя о пространствѣ и времени, какъ бы абстрактны они ни казались, усваиваются умомъ постепенно, чрезъ воспитанiе его на ощущенiяхъ, т. е. путемъ опыта.

Какъ сказано выше, понятiе о силѣ соотвѣтствуетъ ощущенiю усилiя. Ощущенiе же это мы получаемъ при участiи особеннаго органа, мускуловъ или мышцъ, которые способны сокращаться и уплотняться при противодѣйствiи ихъ внѣшней силѣ. Но мы можемъ сокращать мышцы также по произволу, при отсутствiи всякой внѣшней силы; при этомъ мы не чувствуемъ того, что называется усилiемъ. Тѣмъ не менѣе мы сознаемъ, что сокращаемъ мышцы, т. е. испытываемъ особенное ощущенiе. И такъ какъ это ощущенiе отличается отъ усилiя, а тѣмъ более отличается отъ ощущенiй свѣтовыхъ, тепловыхъ и т. д., то и представленiе ему соотвѣтствующее, принимаетъ своеобразный характеръ. Мы называемъ его представленiемъ о *перемѣщенiи*. Мускулъ есть единственный источникъ понятiя о пространствѣ, а элементарная форма этого понятiя есть перемѣщенiе.

На основанiи сказаннаго, только тѣ органы чувствъ помогаютъ намъ судить о свойствахъ пространства, которые снабжены мышцами или непосредственно, или посредствомъ сочлененiй. Много говорилось

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики" № 172.

о томъ, почему мы видимъ предметы въ прямомъ положенiи, несмотря на обратное положенiе изображенiй на сѣтчатой оболочкѣ глаза. Дѣло въ томъ, что глазная ретина не даетъ намъ понятiя ни о верхѣ, ни о низѣ изображенiя, подобно тому, какъ кожа нашей спины, къ которой мы прижимаемъ монету, не даетъ намъ отчета о положенiи буквъ на монетѣ. Основой для сужденiя о верхѣ или низѣ служитъ не ретина, а мышцы, управляющiя глазнымъ яблокомъ и дѣйствующiя попеременно и попарно. Органъ слуха помогаетъ въ сужденiи о пространствѣ только въ слабой мѣрѣ, и то потому, что ушная раковина можетъ обращаться въ разныя стороны вмѣстѣ съ головой, а у нѣкоторыхъ животныхъ и самостоятельно, чрезъ сокращенiе соотвѣтственныхъ мускуловъ. Самый же органъ слуха, т. е. внутреннее ухо, укрѣпленъ неподвижно въ костяхъ черепа. Наиболѣе отчетливыя представленiя о пространствѣ даетъ намъ органъ осязанiя, и притомъ та его часть, которая помѣщается на поверхности пальцевъ. Это потому, что пальцы представляютъ крайнiя оконечности очень сложныхъ сочлененiй, управляемыхъ большимъ числомъ мускуловъ. Осязанiе, не сопровождающееся игрой мускуловъ, не даетъ намъ отчета о формѣ пространствѣ. Органъ ощущенiя теплоты, по своему расположенiю, сливается съ органомъ осязанiя, и потому играетъ значительную роль въ доставленiи уму пространственныхъ представленiй.

Соотвѣтственно указанной роли мускуловъ, мы представляемъ себѣ пространственныя свойства физическихъ дѣятелей тѣмъ съ большей отчетливостью, чѣмъ большее участiе принимаютъ мускулы въ усиленiи или ослабленiи впечатлѣнiй, производимыхъ этими дѣятелями на органы ощущенiй. Поэтому представленiе о веществѣ неразрывно связано съ представленiемъ о его пространственности. Мы не можемъ представить себѣ вещества, не занимающаго въ пространствѣ опредѣленнаго мѣста. Представленiе о пространственности силы выражается въ томъ, что мы не можемъ вообразить себѣ силы, не имѣющей направленiя. Менѣе слитны представленiя о свѣтѣ и пространствѣ. Что же касается запаха и вкуса, то мысль о нихъ не вызываетъ никакого пространственнаго представленiя. Мы едва ли могли бы понять, что́ значило бы „направленiе вкуса“ или „объемъ запаха“. Это потому, что органы соотвѣтствующихъ ощущенiй не снабжены мускулами, содѣйствующими усиленiю или ослабленiю этихъ ощущенiй.

Понятiе о времени тоже не есть понятiе прирожденное, существующее въ сознанiи, какъ готовая форма. Оно тоже прiобрѣтается опытомъ, при участiи ощущенiй.

Каждый изъ нашихъ органовъ чувствъ подверженъ особенному состоянiю—*утомленiю*. Это состоянiе зависитъ отъ того, что чувствительность органа, при постоянствѣ причины, его раздражающей, а также при продолжительномъ отсутствiи раздраженiя, или усиливается до ощущенiя боли, или ослабляется до степени полной нечувствительности. Утомленiе можетъ быть вызвано и постоянной смѣной ощущенiй. Во всякомъ случаѣ, утомленiе придаетъ ощущенiю особенный оттѣнокъ, который можно только испытать, но который не подлежитъ опредѣленiю, какъ и само ощущенiе. Вотъ это-то свойство органовъ чувствъ и служитъ основой для составленiя понятiя о времени. Нѣтъ надобности, чтобы утомленіе производилось непремѣнно внѣшнимъ или физическимъ дѣятелемъ: оно можетъ относиться и ко внутреннимъ ощущеніямъ— жаждѣ, голоду и т. п. Нѣтъ тоже надобности, чтобы мы испытывали его въ данный моментъ: мы можемъ представлять его при помощи памяти. Но и тогда для оцѣнки продолжительности служитъ представленіе о степени утомленія, нѣкогда нами испытаннаго. Безъ этого представленія, т. е. при абсолютномъ однообразіи или отсутствіи ощущеній, мы не могли бы отличить минуты отъ вѣчности.

Можетъ возникнуть вопросъ такого рода: если даже допустить, что понятіе о пространствѣ и времени мы получаемъ не иначе, какъ при помощи ощущеній, то существуютъ ли время и пространство въ природѣ какъ готовая реальность, и если существуютъ, то обнимаетъ ли наша мысль всѣ ихъ свойства, или только нѣкоторыя, нашимъ ощущеніямъ доступныя? Я думаю, что, задаваясь разрѣшеніемъ подобнаго вопроса, мы вдались бы въ метафизику, т. е. въ изслѣдованіе логически-возможнаго на основаніи чувственно-извѣстнаго. Оставаясь въ рамкѣ физики, мы остановимся на положеніи, которое мы только что вывели, а именно, что идея о пространствѣ и времени имѣетъ чувственное происхожденіе. А такъ какъ понятіе о физическихъ дѣятеляхъ мы получаемъ при помощи тѣхъ же органовъ чувствъ, то поэтому, и только поэтому, мы относимъ представленіе о пространствѣ и времени къ категоріи чувственныхъ, а не психическихъ понятій. Только на этомъ основаніи все созерцаніе чувственнаго міра вращается въ рамкахъ пространства и времени. Наоборотъ, психическій міръ остается внѣ этихъ рамокъ.

§ 8. *Производныя физическія понятія.* Изъ сочетанія основныхъ понятій о физическихъ дѣятеляхъ, пространствѣ и времени, образуются понятія физическія *производныя.* Ту часть пространства, которую наше воображеніе связываетъ съ существованіемъ физическаго дѣятеля, мы называемъ физическимъ тѣломъ. И такъ какъ въ извѣстномъ объемѣ немыслимо помѣстить болѣе такого же объема, то совмѣщеніе двухъ физическихъ тѣлъ въ одной и той же части пространства *логически* невозможно. Отсюда понятіе о *непроницаемости* физическихъ тѣлъ. Непроницаемость не есть *свойство* тѣлъ, а тѣмъ менѣе оно есть „общее свойство тѣлъ“. Это — логическое слѣдствіе, вытекающее изъ связи между дѣятелемъ и пространствомъ, установленной апріористически. Дѣйствительность, напротивъ, показываетъ, что въ одномъ объемѣ можно помѣстить два физическихъ тѣла, занимающихъ въ суммѣ болѣе этого объема. Отсюда вытекаетъ представленіе о *скважности* тѣлъ, т. е. о прерывности пространства, дѣйствительно ими занимаемаго. Скважность тоже не есть общее свойство тѣлъ, а необходимая поправка къ апріористическому представленію о непрерывности физическихъ тѣлъ. Замѣтимъ кстати, что непроницаемость и скважность уже потому не могутъ быть одновременно общими свойствами тѣлъ, что они представляютъ антитезу.

Первоначальное представленіе о физическомъ тѣлѣ не связано необходимо съ его осязаемостью, т. е. вещественностью. Солнце, и пламя, и облака производятъ на насъ впечатлѣніе физическихъ тѣлъ, несмотря на то, что они недоступны осязанію: достаточно, что они занимаютъ извѣстную часть пространства и дѣйствуютъ на органъ зрѣнія. Но ежедневный опытъ научаетъ насъ, что всякое физическое тѣло, къ какому бы роду дѣятеля мы его не относили, оказывается способнымъ дѣйствовать на осязаніе, коль скоро мы получаемъ возможность прикоснуться къ нему. Отсюда *аналогія*, что всѣ физическія тѣла осязаемы, т. е. *вещественны*, и что вещество есть общій источникъ всѣхъ физическихъ дѣятелей.

Все, что связывается въ нашемъ умѣ съ идеей о времени, называется *явленіемъ*. Явленіе и тѣло суть двѣ простѣйшія формы всего чувственнаго. Явленіе, которое обнаруживается при посредствѣ физическаго дѣятеля, называется физическимъ. Въ частныхъ случаяхъ, явленія называются свѣтовыми, тепловыми и т. д. Явленія, происходящія при участіи силы, носятъ названіе *механическихъ*. Паденіе камня есть явленіе механическое. По отношенію ко времени, явленія бываютъ мгновенныя, періодическія, непрерывныя. Примѣрами могутъ служить: стукъ, качаніе маятника, теченіе рѣки. Явленіе, сохраняющее свой характеръ извѣстное время, опредѣляетъ *состояніе* тѣла, къ которому оно относится. Совокупность явленій, слѣдующихъ другъ за другомъ въ неизмѣнномъ порядкѣ, составляетъ *физическій процессъ*. Примѣръ: процессъ кипѣнія воды.

Явленія бываютъ простыя и сложныя, смотря по количеству участвующихъ дѣятелей. Простѣйшее явленіе есть такое, въ которомъ участвуетъ одинъ дѣятель, и въ которомъ все остается неизмѣннымъ, за исключеніемъ мѣста, занимаемаго дѣятелемъ. Подобное явленіе, по отношенію къ веществу называется *движеніемъ*; по отношенію къ силѣ —*передачей;* по отношенію къ свѣту, звуку и теплотѣ—*распространеніемъ*. Что касается запаха и вкуса, то мы не имѣемъ представленія о ихъ пространственныхъ свойствахъ, независимо отъ вещества, которое служитъ ихъ источникомъ, и потому относимъ къ веществу перенесеніе ихъ изъ одного мѣста въ другое.

То явленіе, которое производится даннымъ дѣятелемъ, есть его дѣйствіе или *эфектъ*. Движеніе камня есть эфектъ силы. Совокупность всѣхъ эфектовъ, которые можетъ произвести данный дѣятель, опредѣляетъ его производительную способность или *энергію*. Энергія есть способность, а не эфектъ. Тѣло, съ которымъ мы связываемъ существованіе дѣятеля, называется *источникомъ энергіи*. Энергія получаетъ названіе, соотвѣтственно дѣятелю, за исключеніемъ энергіи силовой, которая называется *механической*. Натянутая пружина есть источникъ механической энергіи.

Съ понятіемъ объ энергіи сливаются представленія о ея *напряженіи* и о *количествѣ*. Понятіе о напряженіи возникаетъ тогда, когда мы сравниваемъ эфекты двухъ однородныхъ дѣятелей при одинаковыхъ условіяхъ продолжительности и пространства. Понятіе о количествѣ образуется при сравненіи эфектовъ въ различныхъ условіяхъ времени или пространства.

Эфекты бываютъ *субъективные* и *объективные*. Субъективные эфекты суть сами ощущенія, вызываемыя соотвѣтственными дѣятелями. Усиліе есть субъективный эфектъ силы. Ощущеніе жара—такой же эфектъ теплоты. Объективные эфекты хотя и воспринимаются органами чувствъ, но не тѣми, которые соотвѣтствуютъ данному дѣятелю. Расширеніе тѣлъ есть объективный эфектъ теплоты. Удлиненіе пружины—такой же эфектъ силы.

§ 9. *Классификація дѣятелей природы.* Соотвѣтственно способности дѣятелей природы производить эфекты или субъективные, или объективные, или и тѣ и другіе, представленіе, составляемое нами о дѣятелѣ, можетъ быть или субъективно, или относительно, или объективно. Субъективно представленіе о тѣхъ дѣятеляхъ, которые не способны ни къ какимъ объективнымъ эфектамъ. Сюда относятся вкусъ и запахъ. Каждому изъ нихъ, а также каждому изъ ихъ оттѣнковъ соотвѣтствуетъ ощущеніе постоянное, устойчивое. Въ такой же мѣрѣ устойчиво соотвѣтствующее имъ представленіе. Относительное представленіе мы имѣемъ о дѣятеляхъ, способныхъ какъ къ субъективнымъ, такъ и къ объективнымъ эфектамъ. Такъ, теплоту мы представляемъ себѣ или какъ возбудителя ощущенія жара, или какъ причину расширенія тѣлъ, плавленія, кипяченія и т. п. Представленіе о дѣятелѣ такого рода можетъ быть или субъективно, или объективно, смотря по роду эфектовъ, какіе мы имѣемъ въ данный моментъ въ виду.

Но есть въ природѣ дѣятели, которые производятъ множество объективныхъ эфектовъ и тѣмъ не менѣе не могутъ проявляться въ спеціальныхъ ощущеніяхъ или субъективно. О такихъ дѣятеляхъ мы не можемъ имѣть ни въ какомъ случаѣ устойчиваго представленія, не въ состояніи даже опредѣлить, зависятъ ли они отъ сочетанія многихъ самостоятельныхъ дѣятелей, или обладаютъ индивидуальностью. Къ такого рода дѣятелямъ относятся: *химическое сродство, способность кристаллизаціи* и *жизнь.* Такъ напр., имѣя кусокъ сѣры и баллонъ съ кислородомъ, мы можемъ изслѣдовать ихъ всѣми органами чувствъ, и тѣмъ не менѣе не угадаемъ присутствія въ нихъ того *нѣчто*, которое порождаетъ цѣлый рядъ объективныхъ эфектовъ въ моментъ ихъ соединенія. Мы называемъ это *нѣчто* химическимъ сродствомъ, а способность его производить извѣстные объективные эфекты — *химической энергіей.* По отношенію къ этому дѣятелю мы находимся въ такомъ же положеніи, въ какомъ очутился бы глухой отъ рожденія, попавшій на представленіе оперы. Онъ видѣлъ бы, что артисты долгое время держатъ ротъ открытымъ, и когда закрываютъ его, то зрители въ свою очередь открываютъ ротъ и начинаютъ ударять одну ладонь о другую; онъ могъ-бы найти извѣстную постоянную связь между дѣйствіями на сценѣ и поведеніемъ людей, сидящихъ въ залѣ; можетъ быть, открылъ бы даже законъ, связывающій то и другое,—и все таки остался бы въ недоумѣніи относительно того *нѣчто*, которымъ этотъ законъ обусловливается и которое мы чувствуемъ, какъ звукъ. Представленіе о причинѣ связи осталось бы для него объективнымъ, т. е. связаннымъ съ тѣми объективными эфектами, которые ему извѣстны.

§ 10. *Подраздѣленіе физическихъ дѣятелей.* Одинъ и тотъ же дѣятель можетъ представляться намъ въ различныхъ формахъ. Однако условія воспріятія чувствами этихъ формъ въ такой мѣрѣ различны для разныхъ дѣятелей, что это различіе необходимо отмѣтить соотвѣтствующими терминами. Мы назовемъ *оттѣнками* такія формы одного и того же дѣятеля, которыя различаются нами субъективно, т. е.

которымъ соотвѣтствуютъ варіанты ощущенія. Съ другой стороны, мы назовемъ *видами* такія формы дѣятеля, для различенія которыхъ не существуетъ варіантовъ ощущенія и о существованіи которыхъ мы догадываемся по объективнымъ условіямъ.

При такомъ опредѣленіи, физическіе дѣятели распадаются на двѣ характерныя группы. Первая, группа оттѣнковъ, заключаетъ свѣтъ звукъ, теплоту, вкусъ, запахъ. Вторая — группа видовъ — заключаетъ силу и матерію.

Уяснимъ сказанное примѣрами. Различные тоны звука, тембры, шумъ, стукъ суть оттѣнки звука. Мы ихъ различаемъ слуховымъ ощущеніемъ. Субъективно они различны, но объективное представленіе о всѣхъ этихъ формахъ звука одно и то же: это періодическое сжатіе и расширеніе воздуха. Цвѣта голубой, синій, зеленый, сѣрый и т. д.—оттѣнки свѣта, потому что мы для каждаго изъ нихъ имѣемъ отдѣльное субъективное представленіе, соотвѣтствующее варіанту въ ощущеніи. Объективное же представленіе о свѣтѣ всякого рода тожественно: колебательное движеніе упругой среды. Оттѣнки вкуса суть: кислый, горькій, сладкій и т. д. Объективнаго представленія о вкусѣ не существуетъ, за отсутствіемъ объективныхъ эфектовъ. Съ другой стороны дѣятель *сила* подраздѣляется не на оттѣнки, а на виды, потому что мы не можемъ угадать усиліемъ, т. е. субъективно, съ какого рода силой имѣемъ дѣло. Натягивая пружину, поддерживая камень, управляя парусомъ, мы употребляемъ усиліе и испытываемъ извѣстное ощущеніе. Однако мы ощущаемъ эти три вида силы—упругость, тяжесть, дѣйствіе вѣтра,—не потому, что каждому изъ нихъ соотвѣтствуетъ особенный варіантъ усилія, а потому, что наблюдаемъ зрѣніемъ или осязаніемъ особыя условія проявленія силы. Ощущеніе же усилія качественно остается тожественнымъ для всѣхъ указанныхъ случаевъ. Сказанное можно резюмировать такъ: виды дѣятеля субъективно тожественны, но объективно различны; оттѣнки дѣятеля субъективно различны, хотя объективно могутъ быть тожественны.

Проф. *Ѳ. Шведовъ*.

(Продолженіе слѣдуетъ).

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ МЕЛОЧИ.

Способъ построенія группы луночекъ, сумма которыхъ квадрируется.

I. Назовемъ *подобными* сегменты, вмѣщающіе равные углы. Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ:

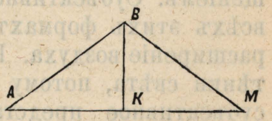
1. На данномъ отрѣзкѣ всегда можно построить сегментъ, подобный данному сегменту.

2. Площади подобныхъ сегментовъ относятся, какъ квадраты ихъ радіусовъ, или, какъ квадраты ихъ хордъ. Это легко доказать, разсматривая площадь сегмента, какъ разность площадей сектора и треугольника.

II. *Въ данномъ кругѣ можно построить безчисленное множество вписанныхъ многоугольниковъ, въ каждомъ изъ которыхъ квадратъ наибольшей стороны равенъ суммѣ квадратовъ остальныхъ его сторонъ.*

Къ этому приводятъ слѣдующія соображенія.

1. *Геометрическое мѣсто точки* B, (фиг. 32), *разность квадратовъ разстояній которой отъ двухъ данныхъ точекъ* A *и* M постоянна, есть прямая, перпендикулярная къ прямой AM и проходящая отъ A на разстояніи $\frac{AM}{2}+\frac{a^2}{2AM}$, гдѣ a^2 — постоянное значеніе AB^2-BM^2.

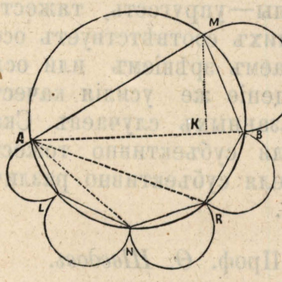


Фиг. 32.

Доказ. Проведемъ $BK \perp AM$. Такъ какъ $\angle A$ острый, то $\overline{BM}^2 = \overline{AM}^2+\overline{AB}^2-2AM.AK$, откуда $AK=\frac{AB^2+AM^2-BM^2}{2AM}=\frac{AM}{2}+\frac{a^2}{2AM}$, что и служитъ доказательствомъ теоремы.

2. Дана ломанная AL...RB. (Фиг. 33). Пусть a^2 сумма квадратовъ ея сторонъ. Геометрическое мѣсто точки M, для которой $AM^2=AL^2+LN^2...+RB^2+BM^2$, есть прямая, перпендикулярная къ прямой AB и построенная на разстояніи

$$\frac{AB}{2}+\frac{a^2}{2AB} \text{ отъ } A.$$



Фиг. 33.

Доказ. Дѣйствительно, изъ условія теоремы имѣемъ: $AM^2-BM^2=a^2$.

3. Впишемъ какую-нибудь ломанную ALN...B въ дугу окружности, не большую 180^0. Пусть a^2 сумма квадратовъ сторонъ ломанной ALN...B.

Проведемъ изъ вершины A діагонали многоугольника ALN . . B. $\angle ARB \leqslant d$, а углы ALN, ANR, ... всѣ — тупые. Слѣдовательно $AR^2+RB^2 \leqslant AB^2$, $AN^2+NR^2 < AR^2$, $AL^2+NL^2 < AN^2$, а потому $a^2 < AB^2$, и равно лишь въ случаѣ, когда ломанная состоитъ изъ двухъ прямыхъ, а AB есть діаметръ. Построимъ $MK \perp AB$ на разстояніи $AK=\frac{AB}{2}+\frac{a^2}{2AB}$. Такъ какъ $a^2 \leqslant AB^2$, то $AK \leqslant AB$, такъ что построенная прямая всегда встрѣтитъ окружность. Она коснется окружности въ точкѣ B, если ломанная состоитъ изъ двухъ прямыхъ и AB есть діаметръ; въ остальныхъ случаяхъ, когда или число сторонъ ломанной >2, или дуга, вмѣщающая ее $< 180^0$, мы будемъ имѣть двѣ точки встрѣчи M и M_1. Пусть M та изъ нихъ, которая лежитъ по другую сторону AB, чѣмъ сама ломанная. Соединимъ M съ A и B. Такимъ образомъ мы построили многоугольникъ ALN . . . BM, въ которомъ $AM^2=AL^2+LN^2+....+RB^2+BM^2$.

III. *Построеніе группы луночекъ, сумма которыхъ квадрируется.* Построимъ вписанный многоугольникъ, въ которомъ квадратъ наибольшей стороны равенъ суммѣ квадратовъ остальныхъ сторонъ. На сторонахъ его, кромѣ наибольшей, построимъ сегменты, подобные тому, въ которомъ лежитъ весь многоугольникъ. Сумма площадей луночекъ, образовавшихся при построеніи сегментовъ, равна площади самого многоугольника.

Доказ. Назвавъ площадь мн. ALN..BM черезъ Q, площадь сегмента AL...M черезъ Q_n, а площади сегментовъ, построенныхъ соотвѣтственно на хордахъ AL,LN,...BM черезъ q_1, q_2,...q_{n-1}, будемъ имѣть:

$$\frac{q_1}{Q_n}=\frac{AL^2}{AM^2};\ \frac{q^2}{Q_n}=\frac{LN^2}{AM^2};\ \ldots;\ \frac{q_{n-1}}{Q_n}=\frac{BM^2}{AM^2}.$$

Сложивъ эти равенства, получимъ:

$$\frac{q_1+q_2+\ldots+q_{n-1}}{Q_n}=\frac{AL^2+LN^2+\ldots+BM^2}{AM^2}=1$$

по условію теоремы. Отсюда $Q_n=q_1+q_2+\ldots+q_{n-1}$, а потому $Q=(q_1+q_2+\ldots+qn-1)-Q_n$, что и доказываетъ теорему.

IV. Если разсмотримъ случаи, когда многоугольникъ, служащій для построенія луночекъ, обращается въ треугольникъ (въ частности, равнобедренный) и въ трапецію съ тремя равными сторонами, то придемъ къ извѣстнымъ предложеніямъ Гиппократа.

Е. Буницкій (Одесса).

ИЗОБРѢТЕНІЯ и ОТКРЫТІЯ.

Новое примѣненіе воздушныхъ шаровъ. 4-го августа сего года въ Варшавѣ на рѣкѣ Вислѣ были произведены опыты примѣненія воздушныхъ шаровъ къ поднятію тяжестей изъ подъ воды. На глубинѣ 12-и арш. была затоплена лодка съ балластомъ въ 100 пудовъ. При помощи грузовъ на дно опущены были два шара эллипсоидальной формы, наполненныхъ воздухомъ, вѣсомъ въ 16 фунт. каждый, и объемомъ въ 5³/₄ куб. арш. и прикрѣплены къ обоимъ концамъ лодки. По удаленіи груза, державшаго шары на днѣ, лодка всплыла на поверхность. Шары были сдѣланы изъ непромокаемаго брезентнаго холста и лакированы. Для значительныхъ глубинъ изобрѣтатели придумали слѣдующій способъ. Изъ подходящаго матеріала, способнаго вынести давленіе атмосферъ въ 20, дѣлается ящикъ соотвѣтствующихъ размѣровъ, въ которомъ опускается на дно человѣкъ. Рядомъ съ этимъ ящикомъ опускается на дно и шаръ. При помощи особаго механизма рабочій, не выходя изъ своего герметически закрытаго ящика, зацѣпляетъ крюкъ шара за предметъ, который нужно поднять, и послѣдній выплываетъ на поверхность. Такой герметически закрытый ящикъ необходимъ, такъ какъ ни одинъ изъ водолазныхъ снарядовъ не годится для глубинъ больше 25 саженъ, т. е. для давленій больше 5-и атмосферъ.

В. Г.

Телавтографъ. Такъ названъ изобрѣтенный недавно американцемъ Греемъ аппаратъ, представляющій ничто иное, какъ усовершенствованный пишущій телеграфъ-факсимиле. Въ этомъ аппаратѣ достаточно написать или нарисовать, что требуется, на развертывающейся лентѣ и на другой станціи на такой же лентѣ получается точная копія письма или рисунка. Полагаясь на эту легкость обращенія съ приборомъ, Грей думаетъ устроить цѣлую телавтографическую сѣть, по образцу телефонныхъ сѣтей, причемъ аппараты будутъ установлены въ домахъ абонентовъ. Если эта затѣя осуществится, то телавтографъ явится весьма полезнымъ приборомъ, особенно при дѣловыхъ сношеніяхъ въ большихъ городахъ. *В. Г.*

ДОСТАВЛЕННЫЯ ВЪ РЕДАКЦІЮ КНИГИ И БРОШЮРЫ.

Начальный учебникъ физики и химіи. Составили *А. Л. Корольковъ* и *Т. Матюшенко.* Съ 294 рис. въ текстѣ. Изданіе второе. Спб. 1893. Ц. 1 р. 50 к.

Cennik wyrobów slusarskich fabryki i skladu *L. Odórkiewicza* i *J. Zagórnego* w Warszawie. Warszawa. 1892.

Климатъ Одессы по наблюденіямъ метеорологической обсерваторіи Императорскаго Новороссійскаго университета. *А. Клсссвскаго.* Одесса. 1893. Ц. 1 р. 50 к.

Счетъ и измѣреніе. *Г. фонъ-Гельмгольца.* **Понятіе о числѣ.** *Л. Кронекера.* Казань. 1893.

Объ основаніяхъ геометріи. *Гауссъ, Бельтрами, Риманнъ, Гельмгольцъ, Ли, Пуанкаре.* Изданіе Физико-математическаго Общества къ столѣтнему юбилею Н. И. Лобачевскаго. Казань. 1893. Ц. 1 р.

Кое-что о бензинѣ, толуэнѣ и антраценѣ. *М. Н. Теплова.* Спб. 1893. Ц. 75 к.

ЗАДАЧИ.

№ 555. Въ данный кругъ вписать прямоугольникъ, въ которомъ основаніе длиннѣе трети (вообще n-ой части) высоты на данную прямую d.

NB. Рѣшеніе требуется чисто геометрическое.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 556. Показать, что сумма треугольнаго числа и квадрата всегда можетъ быть представлена въ видѣ суммы двухъ треугольныхъ чиселъ.

(Заимств.) *В. Г.* (Одесса).

№ 557. Провести линію, перпендикулярную къ сторонѣ BC даннаго треугольника ABC и пересѣкающую сторону AC въ C' и AB въ B' такъ, что $B'C'=B'B-C'C$.

(Заимств.) *Д. Е.* (Ив.-Вознес.).

№ 558. Вписать квадратъ въ данный правильный пятиугольникъ.

В. Россовская (Курскъ).

№ 559. Показать, что медіана какой либо стороны треугольника проходитъ черезъ двѣ точки пересѣченія терціанъ двухъ прочихъ сторонъ и дѣлится въ этихъ точкахъ въ отношеніи 1:2:3.

И. Бѣлянкинъ (Кіевъ).

№ 560. Рѣшить систему:

$$ax^2+by^2=cxy,$$
$$a_1x^2+b_1z^2=c_1xz,$$
$$a_2y^2+b_2z^2=c_2yz.$$

В. Захаровъ (Саратовъ).

№ 561. Во время новолунія (особенно въ моментъ кольцеобразнаго солнечнаго затменія) на луну дѣйствуютъ двѣ противоположно направленныя силы: притяженіе солнца и притяженіе земли. Простое вычисленіе показываетъ, что притяженіе солнца больше притяженія земли. Отсюда слѣдуетъ, что луна должна начать падать по направленію къ солнцу. Какъ объяснить (по возможности ясно и просто), что луна все таки продолжаетъ вращаться около земли и даже переходитъ на другую ея сторону?

Проф. *О. Хвольсонъ* (Спб.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 44 (2 сер.). На діаметрѣ круга AB возьмемъ произвольную точку C и черезъ нее проведемъ перпендикулярную къ діаметру прямую MN и двѣ произвольныя хорды DE и FG. Требуется доказать, что прямыя, соединяющія соотвѣтственные концы этихъ хордъ (DG и FE или DF и EG), пересѣкутъ перпендикуляръ MN въ точкахъ, равноудаленныхъ отъ діаметра AB.

Пусть DG пересѣкаетъ MN въ K, а FE въ L. Требуется доказать, что $KC=LC$. Проводимъ $EE'\|MN$ и, соединивъ E' съ K и съ C, продолжаемъ $E'K$ до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ F', а $E'C$ — въ точкѣ D'. Очевидно, что $EC=E'C$, $\angle F'E'D'=\angle FED$ и $\angle MCE'=\angle NCE$, откуда и слѣдуетъ, что $KC=CL$.

И. Бискъ (Кіевъ); *В. Россовская* (Курскъ).

№ 67 (2 сер.). Найти сумму ряда

$$S=1+3a^3+5a^5+7a^7+\ldots+(2n-1)a^{2n-1}.$$

Умноживъ обѣ части этого равенства на a^2 и вычтя изъ полученнаго произведенія данный рядъ, получимъ

$$S(a^2-1)=a^2-1-3a^3-2(a^5+a^7+a^9+\ldots+a^{2n-1})+(2n-1)a^{2n+1}=$$

$$=(2n-1)a^{2n+1}+a^2-1-3a^3+\frac{2(a^{2n+1}-a^5)}{a^2-1},$$

откуда

$$S=\frac{1-2a^2+3a^3+a^4-a^5-(2n+1)a^{2n+1}+(2n-1)a^{2n+3}}{(a^2-1)^2}.$$

Л. Лебедевъ, Л. Карагодинъ, В. Россовская (Курскъ); *Я. Марморъ* (Кам.-Под.); *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ); *А Даниловъ* (Казань); *И. Вонсикъ* (Воронежъ).

№ 70 (2 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}+\frac{1}{x-b-c+a}=0$$

и показать, что всѣ его корни дѣйствительны.

Данное уравненіе легко представить въ такомъ видѣ:

$$\frac{2x-b-c}{x^2-x(b+c)+bc}+\frac{2x-b-c}{x^2-x(b+c)+ab+ac-a^2}=0.$$

Отсюда

1) $2x-b-c=0$ и $x_1=\dfrac{b+c}{2}$

$$2)\ \frac{1}{y+bc}+\frac{1}{y+a(b+c-a)}=0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

гдѣ

$$y=x^2-x(b+c) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Изъ ур. (1) опредѣляемъ y и подставляемъ его значеніе въ ур. (2). Тогда получимъ

$$x=\frac{b+c\pm\sqrt{(b+c)^2-2a(b+c-a)-2bc}}{2}=\frac{b+c\pm\sqrt{(a-b)^2+(a-c)^2}}{2}.$$

Послѣднее выраженіе всегда дѣйствительно, такъ какъ подъ корнемъ положительная величина. Поэтому, если a, b и c дѣйствительны, то всѣ три корня дѣйствительны.

И. Вонсикъ (Воронежъ); *Л. Лебедевъ* (Курскъ).

№ 399 (2 сер.) Если желаете, чтобы я угадалъ, когда вы родились, напишите подъ рядъ число мѣсяца, въ которое вы родились, и число, обозначающее, какой это былъ мѣсяцъ въ году по порядку. Полученное такимъ образомъ 2-хъ, 3-хъ или 4-значное число умножьте на 2 и отнимите отъ произведенія 5. Остатокъ умножьте на 50 и прибавьте къ произведенію сперва число, обозначающее сколько вамъ лѣтъ, а потомъ число 365. Сообщите мнѣ результатъ такого вычисленія, и если кромѣ того вы мнѣ скажете, родились вы въ первой или второй половинѣ года, то я тотчасъ же вамъ отвѣчу, какого числа, мѣсяца и года вы родились. Опредѣлите же, какое простое дѣйствіе я долженъ совершить въ умѣ надъ сообщеннымъ мнѣ вами числомъ, чтобы найти въ немъ отвѣтъ на эти три вопроса.

Отвѣтъ. Отнять отъ него 115.

А. Васильева (Тифлисъ); *О. Озаровская* (Спб.); *П. Мироновъ* (Уфа); *П. Ивановъ* (Одесса); *К. Щиголевъ* (Курскъ); *А. Рѣзновъ* (Самара); *В. Шишаловъ* (с. Середа).

№ 440 (2 сер.). На радикальной оси двухъ данныхъ пересѣкающихся окружностей найти такую точку, чтобы касательныя, проведенныя изъ нея къ обѣимъ окружностямъ, составляли данный уголъ. Сколько рѣшеній?

На отрѣзкѣ линіи центровъ, отъ центра большей окружности O до внѣшняго центра подобія S описываемъ дугу, вмѣщающую половину даннаго угла. Дуга эта пересѣчетъ большую окружность въ точкѣ касанія T. Проведя въ этой точкѣ касательную, найдемъ на пересѣченіи ея съ радикальной осью искомую точку (A). Доказательство легко: $\angle ATS = 90^0 - \varphi/_2$; если касательная изъ A касается второй окружности въ точкѣ T', то $AT' = AT$ и $\angle AT'T = 90^0 - \varphi/2$, слѣдовательно $\angle TAT' = \varphi$.

Рѣшеній вообще 4, такъ какъ окружность, часть которой, лежащая надъ линіей центровъ, вмѣщаетъ половину даннаго угла, пересѣкаетъ большую окружность вообще въ двухъ точкахъ, служащихъ каждая точкой касанія.

П. Писаревъ (Курскъ); *В. Баскаковъ* (Ив.-Вознесенскъ); *В. Буханцевъ* (Борисоглѣбскъ); *П. Хлѣбниковъ* (Тула).

№ 442 (2 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\sqrt[2pq]{x^{p+q}} - \frac{1}{2c}\left(\sqrt[p]{x} + \sqrt[q]{x}\right) = 0.$$

Раздѣливъ данное уравненіе на

$$\sqrt[2pq]{x^{p+q}},$$

приведемъ его легко къ виду:

$$2c - \sqrt[2pq]{x^{q-p}} - \sqrt[2pq]{x^{p-q}} = 0.$$

Если

$$\sqrt[2pq]{x^{q-p}}=y, \text{ то } \sqrt[2pq]{x^{p-q}}=\frac{1}{y}$$

и данное уравненіе обращается въ такое:

$$2c-y-\frac{1}{y}=0,$$

что даетъ

$$x_1=0;\ x_2=\sqrt[q-p]{(c\pm\sqrt{c^2-1})^{2pq}}.$$

С. Бабанская, А. Васильева (Тифлисъ); *Я. Тепляковъ* (Радомысль); *В. Баскаковъ* (Ив.-Вознес.); *В. Шишаловъ* (с. Середа); *П. Ивановъ* (Одесса); *А. Рѣзновъ* (Самара); *С. Адамовичъ, К. Щиголевъ, П. Писаревъ* (Курскъ); *К. Исаковъ* (Манглисъ); *А. П.* (Пенза); *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *А. П.* (Ломжа); *А. Варенцовъ* (Ростовъ н. Д.); *Г. Легошинъ* (с. Знаменка).

№ 445 (2 сер.). Часы съ маятникомъ спѣшатъ при 0° на 7 секундъ въ сутки, а при температурѣ въ 20° отстаютъ на 9 сек. въ сутки. Вычислить коэффиціентъ линейнаго расширенія маятника.

Пусть x искомый коэффиціентъ, l_0—длина маятника при 0°, l_{20}—при 20°. По закону Гэ-Люссака

$$l_0(1+20x)=l_{20},$$

откуда

$$x=\left(\frac{l_{20}}{l_0}-1\right):20.$$

Такъ какъ въ суткахъ 86400 секундъ, то маятникъ l_0 дѣлаетъ въ сутки 86407 качаній, а маятникъ l_{20} въ то же время—86391 качаніе, откуда

$$\sqrt{\frac{l_{20}}{l_0}}=\frac{86407}{86391}.$$

Слѣдовательно

$$x=\left[\left(\frac{86407}{86391}\right)^2-1\right]:20 \text{ или приблиз. } 0{,}000018.$$

К. Щиголевъ (Курскъ); *О. Озаровская* (Спб.).

№ 447 (2 сер.). Показать, что многочленъ

$$a^5-2a^4b+a^3b^2+a^2x^3-2abx^3+b^2x^3$$

дѣлится на $ax+a^2-bx-ab$, не выполняя дѣленія на самомъ дѣлѣ.

$$a^5-2a^4b+a^3b^2+a^2x^3-2abx^3+b^2x^3=(a^3+x^3)(a-b)^2$$

$$ax+a^2-bx-ab=(a+x)(a-b).$$

С. Проскуряковъ (Пермь); *С. Бабанская, А. Васильева, С. Херодиновъ* (Тифлисъ); *К. Исаковъ* (Манглисъ); *Я. Тепляковъ* (Радомысль); *С. Адамовичъ* (Спасское);

Е. Пригоровскій (Попова Гора); *В. Шишаловъ* (с. Середа); *А. П.* (Пенза); *В. Шидловскій* (Полоцкъ); *А. Кондури* (Симферополь); *Н. Рынинъ* (Симбирскъ); *К. Щиголевъ*, *К. Геншель* (Курскъ); *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *П. Ивановъ* (Одесса); *О. Озаровская* (Спб.); *В. Баскаковъ* (Ив.-Вознес.); *А. Варенцовъ* (Ростовъ н. Д.); *Г. Легошинъ* (с. Знаменка).

№ 448 (2 сер.). Изъ точки O, взятой на гипотенузѣ BC прямоугольнаго треугольника ABC, проведена произвольная сѣкущая, пересѣкающая катеты CA и AB соотвѣтственно въ точкахъ B' и C'. Показать, что

$$\left(\frac{\beta}{OB'}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{OC'}\right)^2=1,$$

гдѣ β и γ суть длины перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точки O на катеты CA и AB.

1. Пусть перпендикуляръ β встрѣчаетъ AC въ точкѣ P, а перпендикуляръ γ встрѣчаетъ AB въ Q. Тогда изъ $\triangle$-овъ $OB'P$ и $OC'Q$ имѣемъ

$$\frac{\beta}{OB'}=\frac{QC'}{OC'} \text{ и } \overline{QC'}^2=\overline{OC'}^2-\gamma^2;$$

слѣдовательно

$$\left(\frac{\beta}{OB'}\right)^2=\frac{\overline{OC'}^2-\gamma^2}{\overline{OC'}^2}, \text{ или } \left(\frac{\beta}{OB'}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{OC'}\right)^2=1.$$

2. Такъ $\angle OBC=\angle B'OQ$ и

$$\frac{\beta}{OB'}=\operatorname{sn} OBC', \text{ а } \frac{\gamma}{OC'}=\cos BOQ,$$

то

$$\left(\frac{\beta}{OB'}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{OC'}\right)^2=\operatorname{sn}^2 OB'C+\cos^2 OB'C=1.$$

О. Озаровская (Спб.); *С. Бабанская*, *С. Херодиновъ* (Тифлисъ); *А. Полозовъ* (Симбирскъ); *С. Проскуряковъ* (Пермь); *К. Щиголевъ* (Курскъ); *К. Исаковъ* (Манглисъ); *А. П.* (Пенза); *А. Рѣзновъ* (Самара); *Е. Пригоровскій* (Попова Гора); *П. Ивановъ* (Одесса); *Я. Тепляковъ* (Радомысль); *В. Шишаловъ* (с. Середа); *В. Баскаковъ* (Ив.-Вознесенскъ); *А. Варенцовъ* (Ростовъ н. Д.).

№ 450 (2 сер.). Дана прямая и точка, лежащая внѣ прямой. Называя растоянія отъ данной точки до точекъ, въ которыхъ прямая дѣлится на равныя части, по порядку черезъ $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$, показать, что

$$a_1^2+2a_4^2=a_5^2+2a_2^2;\ a_2^2+2a_5^2=a_6^2+2a_3^2;$$

$$a_{n-4}^2+2a_{n-1}^2=a_n^2+2a_{n-3}^2.$$

Обозначимъ каждый изъ отрѣзковъ, на которые раздѣлена данная прямая, черезъ x; тогда, на основаніи извѣстной теоремы о медіанѣ треугольника, будемъ имѣть:

$$a_1^2+a_3^2=2a_2^2+2x^2;\ 2a_4^2+2x^2=a_3^2+a_5^2.$$

Складывая эти два равенства получимъ:

$$a_1^2+2a_4^2=a_5^2+2a_2^2.$$

Остальныя равенства получаются такъ же.

К. Щиголевъ (Курскъ); *С. Бабанская* (Тифлисъ); *А. П.* (Пенза); *П. Ивановъ* (Одесса).

ОТКРЫТЫЕ ВОПРОСЫ и ОТВѢТЫ.

6. Не можетъ ли кто нибудь изъ читателей „Вѣстника" сообщить, какая существуетъ на англійскомъ, французскомъ и русскомъ языкахъ литература по исторіи ариѳметики. Если можно, то прошу указать и цѣну. *В. Б.*

ОПЕЧАТКИ: Въ № 173, въ задачѣ на премію проф. О Хвольсона, на стран. 117, стр. 11 сверху напечатано: „*поверхностямъ*", слѣдуетъ читать: „*способностямъ*".

Въ № 166, въ рецензію на „Сборникъ геометрическихъ задачъ" Н. Сорокина вкрались слѣдующія опечатки:

стран.	*строка*	*напечатано*	*должно быть*
220	7 сверху	$\frac{2a}{\sin \alpha/2}\sqrt{\frac{2\operatorname{cotg}\alpha/2}{\sqrt{3}}}$	$2a\sqrt{\frac{2\operatorname{cotg}\alpha/2}{\sqrt{3}}}$
„	4 снизу	CDE, $\frac{OCD}{CDE}$	ODE, $\frac{OCD}{ODE}$
221	8 снизу	$\pi a^3 \operatorname{cosec}^2 \alpha/2$	$\frac{\pi^2 a^3}{2}\operatorname{cosec}^3 \alpha/2$
222	5 снизу	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса, 17-го Ноября 1893 г.
„Центральная типо-литографія", уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. Болгарова

Обложка
ищется

Обложка
ищется