Обложка
ищется

Обложка
ищется

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

XV Сем. № 178. № 10.

ОЧЕРКЪ
ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛОБАЧЕВСКАГО.

(Продолженіе)*

I. Начала геометріи до Лобачевскаго.

Способность къ отвлеченному мышленію развивается крайне медленно и постепенно. Вотъ почему нужны были тысячелѣтія для того, чтобы значеніе формальной науки сдѣлалось яснымъ для спеціалистовъ, чтобы за ней было признано право гражданства. Мы смотримъ съ ироніей на геометрическія доказательства восточныхъ памятниковъ, заключающія въ себѣ одно краснорѣчивое слово: „смотри". А между тѣмъ переходъ отъ этой аргументаціи къ формальной системѣ совершается непрерывно, и глубокій анализъ обнаруживаетъ, что и теперь мы далеко еще не чужды этого убѣдительнаго „смотри". Мы хотимъ сказать, что изслѣдованіе самыхъ лучшихъ современныхъ системъ синтетической геометріи убѣждаетъ насъ, что онѣ не свободны отъ положеній, которыя мы принимаемъ на вѣру только по ихъ наглядности. Но попытки уяснить себѣ ту послѣдовательность, въ которой одни геометрическія положенія вытекаютъ изъ другихъ,—принадлежатъ глубокой древности. Перенесенная на греческую почву изъ Египта, геометрія была развита и обработана греческимъ геніемъ,—и въ концѣ III вѣка до Р. Х. вылилась въ строгую и глубоко продуманную систему подъ стилемъ Евклида. Его безсмертныя „Начала" сдѣлались катехизисомъ геометріи; они были

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики" № 174.

переведены на всѣ языки; ихъ изучали юноши и философы; ихъ разбирали многочисленные комментаторы; словомъ эта книга сдѣлалась исходнымъ пунктомъ всѣхъ дальнѣйшихъ попытокъ развить и систематизировать геометрію. Само собой разумѣется, что трактатъ Евклида далекъ отъ всякаго формализма. О какомъ формализмѣ можетъ быть рѣчь въ сочиненіи греческаго философа, который мыслилъ образами, для котораго математическія дѣйствія только и существовали, какъ операціи надъ геометрическими элементами? Мы уже встрѣчали выше образное опредѣленіе прямой линіи, принадлежащее Евклиду, и обратили вниманіе читателя на то обстоятельство, что оно не имѣетъ цѣны для геометра. Такой же характеръ имѣютъ и остальныя основныя опредѣленія Евклида. Линія является у него „длиной безъ ширины", поверхность есть „то, что имѣетъ только длину и ширину". Въ частности, плоскость есть такая поверхность, „которая одинаково расположена по отношенію ко всѣмъ прямымъ, на ней лежащимъ". Этимъ въ сущности ничего не опредѣляется и потому эти опредѣленія остаются безъ примѣненія. Даже опредѣленіе угла, какъ взаимнаго наклоненія двухъ линій, не имѣетъ подъ собою почвы уже потому, что понятіе о наклоненіи не заключаетъ въ себѣ ничего опредѣленнаго. Само собой разумѣется, что серьезную трудность представляетъ только опредѣленіе основыхъ элементовъ. Когда это сдѣлано, остальное само собой укладывается въ опредѣленныя рамки. Поэтому остальныя опредѣленія Евклида мало отличаются отъ тѣхъ, которыя приняты въ большей части современныхъ сочиненій по геометріи. Двадцать три опредѣленія, предпосланныя первой книгѣ, устанавливаютъ понятія о плоской фигурѣ, о кругѣ и его частяхъ, классифицируютъ углы, многоугольники вообще, треугольники и четыреугольники въ частности. Послѣднее опредѣленіе устанавливаетъ понятіе о параллельныхъ линіяхъ, какъ прямыхъ, „которыя, находясь въ одной плоскости и будучи продолжены до безконечности въ обѣ стороны, не совпадаютъ ни въ какихъ частяхъ". Вслѣдствіе недостаточной опредѣленности, съ которой установлены основныя понятія геометріи, Евклидъ нуждается въ большомъ количествѣ аксіомъ для построенія своей системы. Какъ число, такъ и распредѣленіе ихъ измѣняется отъ изданія къ изданію. Мы будемъ придерживаться изданія Heiberg'а и Menge, которое принадлежитъ къ числу самыхъ лучшихъ.

Евклидъ отличаетъ постулаты (*αἰτήματα*) и собственно аксіомы (*κοιναὶ ἔννοιαι*). Въ указанномъ изданіи Евклида послѣднихъ имѣется девять; но изъ нихъ только двѣ представляютъ собой дѣйствительно геометрическія аксіомы, а именно: „если двѣ величины могутъ быть приведены въ совмѣщеніе, то онѣ равны" и „двѣ прямыя не могутъ заключать пространства". Мы видѣли въ прошлой главѣ, что первая изъ этихъ аксіомъ можетъ быть разсматриваема, какъ опредѣленіе геометрическаго тождества,—вторая, какъ формальное опредѣленіе прямой. Постулаты носятъ всѣ геометрическій характеръ; они формулируются въ дословномъ переводѣ слѣдующимъ образомъ:

I. Требуется, чтобы отъ всякой точки ко всякой другой можно было провести прямую линію.

II. И чтобы ограниченную прямую можно было продолжить неопредѣленно.

III. И чтобы около всякаго центра можно было провести окружность произвольнымъ радіусомъ.

IV. И чтобы всѣ прямые углы были равны.

V. И чтобы обѣ прямыя, которыя при пересѣченіи съ третьей образуютъ внутренніе односторонніе углы, составляющіе въ суммѣ менѣе $2d$,—пересѣклись, если ихъ продолжить въ ту сторону, гдѣ сумма угловъ меньше $2d$.

Совершенно непонятно, почему Евклидъ помѣстилъ предложеніе о равенствѣ прямыхъ угловъ въ число недоказываемыхъ положеній; доказательство его столь просто, столь естественно вытекаетъ изъ опредѣленія, что кажется страннымъ, какимъ образомъ оно могло ускользнуть отъ такого опытнаго геометра. Ввиду того, что мы даже не имѣемъ возможности точно установить, какія именно изъ основныхъ своихъ положеній Евклидъ считалъ постулатами, трудно опредѣлить, какое онъ приписывалъ имъ значеніе; отказываясь совершенно отъ этой задачи, мы постараемся выяснить современную точку зрѣнія на этотъ вопросъ. Вѣрнѣе сказать, изъ различныхъ взглядовъ на значеніе постулатовъ, мы изложимъ тотъ, который представляется намъ наиболѣе правильнымъ. Для формальной науки постулаты I и III совершенно не нужны. Мы старались выяснить въ прошлой главѣ, что мы совершенно свободны при выборѣ основныхъ положеній, если только они не противорѣчатъ другъ другу. Если бы не существовало образовъ, реализирующихъ опредѣленія круга и прямой, формальная наука отъ этого ничего-бы не потеряла. Въ худшемъ случаѣ она была бы наукой словъ и отвлеченныхъ понятій *). Но какъ ни важенъ формализмъ для построенія научной системы, было бы грустно, если бы геометрія не заключала ничего, кромѣ этого формализма. Постулаты I и III перебрасываютъ мостъ отъ отвлеченнаго формализма на реальную почву. Они утверждаютъ, что въ реальномъ мірѣ существуютъ образы, къ которымъ примѣнимы отвлеченныя опредѣленія абстрактной науки. И слѣдовательно, если теорія геометріи зиждется на положеніяхъ, о которыхъ мы говорили выше,—то всѣ ея приложенія къ реальному міру основываются на послѣднихъ постулатахъ **). На сколько мы имѣемъ здѣсь дѣло съ практикой, а не съ теоріей,—видно уже изъ того, что эти постулаты отнюдь не безусловно справедливы. Въ дѣйствительности вовсе не существуетъ образовъ, которые обладали бы свойствами, выраженными въ формальныхъ опредѣленіяхъ, въ такой мѣрѣ, какъ этого тре-

---

*) Быть можетъ слѣдующія слова Милля послужатъ къ лучшему уясненію этого взгляда: „Мы можемъ предположить воображаемое животное и на основаніи извѣстныхъ законовъ физіологіи дать его зоологическую характеристику; можемъ предположить воображаемое общество и изъ входящихъ въ него началъ доказать, какова была бы его судьба. И заключенія, которыя мы такимъ образомъ выводили бы изъ совершенно произвольныхъ гипотезъ, могли бы представлять чрезвычайно полезное умственное упражненіе... Когда гипотеза только обнажаетъ реальный предметъ отъ нѣкоторой части его свойствъ, но не облекаетъ его въ ложныя,—то заключенія подъ извѣстнымъ условіемъ поправокъ будутъ всегда выражать дѣйствительныя истины“.

Д. С. Милль. Система Логики. Кн. II, гл. V, § 2.

**) Это замѣчаніе не исключаетъ возможности, чтобы число этихъ постулатовъ оказалось недостаточнымъ.

буетъ теорія; и къ геометрическимъ элементамъ, съ которыми намъ приходится сталкиваться, наша геометрія приложима только по приближенію. Не будемъ на этомъ останавливаться; это слишкомъ общеизвѣстныя вещи.

Совершенно другой харектеръ носятъ постулаты II и V. Остановимся сначала на II-омъ. Въ той формулировкѣ, какую ему даетъ Евклидъ, этотъ постулатъ еще ничего не выражаетъ, такъ какъ ему не предшествуетъ опредѣленіе термина „продолжить прямую". Представимъ себѣ, что мы имѣемъ прямую, опредѣляемую двумя конечными точками A, B. Пусть C середина этой прямой. Перемѣстимъ прямую AB такимъ образомъ, чтобы точка A совмѣстилась съ прежнимъ положеніемъ точки C, а точка C упала въ первоначальное положеніе точки B. Положеніе, которое займетъ отрѣзокъ CB, называется продолженіемъ прямой AB въ ея первоначальномъ положеніи. Уже изъ самаго этого опредѣленія вытекаетъ, что этотъ процессъ можетъ продолжаться неопредѣленно, и если бы мы представили себѣ точку, непрерывно перемѣщающуюся вдоль по этимъ послѣдовательнымъ продолженіямъ, то ей предстоялъ бы безпредѣльный путь. Но въ постулатѣ, о которомъ идетъ рѣчь, все-же заключается два утвержденія, совершенно не вытекающихъ изъ опредѣленія прямой и ея продолженія. Во первыхъ, мы безмолвно утверждаемъ, что линія, которая получается отъ присоединенія къ прямолинейному отрѣзку ея продолженія, остается прямой, т. е. по прежнему вполнѣ опредѣляется двумя точками. Во вторыхъ, мы утверждаемъ, что при движеніи по послѣдовательнымъ продолженіямъ, мы никогда не возвратимся въ точку исхода. Чтобы выяснить значеніе этихъ положеній и причину, по которой ихъ нельзя считать логическимъ слѣдствіемъ опредѣленій, мы воспользуемся изящной идеей Гельмгольца, къ которой онъ прибѣгаетъ для аналогичной цѣли *). Правда эти вещи уже немного избиты; но мы не считаемъ нужнымъ отказываться отъ старой идеи, если она ярко освѣщаетъ вопросъ.

Представимъ себѣ существа, которыя по физіологическому своему устройству, обладаютъ способностію къ передвиженію только въ предѣлахъ двухъ измѣреній; допустимъ, что они живутъ на поверхности сферы; внѣ этой поверхности міръ для нихъ не существовалъ бы. Тѣмъ не менѣе, если бы они были одарены разсудкомъ, у нихъ могли бы выработаться пространственныя представленія, хотя все ихъ пространство ограничивалось бы поверхностью сферы, къ которой они пригвождены. Дуга большого круга играла бы для нихъ роль нашего прямолинейнаго отрѣзка,—и аналогія представляется настолько полной, что между нашимъ и ихъ представленіемъ о прямой нельзя усмотрѣть разницы. Если допустить, что способность къ передвиженію у нихъ ограничена на столько, что обойти свою сферу является для нихъ столь же невыполнимой задачей, какъ для насъ пронестись по безпредѣльному пространству,— то аналогія шла бы дальше. Понятіе о продолженіи прямолинейнаго отрѣзка, какъ мы его опредѣлили, существовало бы также у нихъ; но

---

*) *H. v. Helmholtz.* Populäre wissenschaftliche Aufträge. „Ueber den Ursprung und die Bedeutung der Geometrischen Axiome".

двумѣрные жители сферы и не подозрѣвали бы, что ихъ прямолинейный отрѣзокъ можетъ потерять способность вполнѣ опредѣляться двумя точками, что при движеніи по продолженію прямой они могли бы возвратиться въ точку исхода. А между тѣмъ это было бы именно такъ; и обстоятельство это обусловливалось бы специфическимъ свойствомъ, самимъ устройствомъ того пространства, въ которомъ они живутъ. Итакъ, если основныя аксіомы Евклида представляютъ собой только предикаты формальныхъ опредѣленій, если постулаты I и III представляютъ собой связь между абстрактной наукой и реальными образами,—то постулатъ о продолженіи прямолинейнаго отрѣзка, въ послѣдней своей формулировкѣ, заключаетъ въ себѣ характеристику пространства. Но и здѣсь нужно отличать формальную сторону отъ реальной: съ точки зрѣнія формальной мы вправѣ приписать пространству это свойство безъ дальнѣйшихъ оговорокъ; съ точки зрѣнія реальной здѣсь содержится еще допущеніе, что наше представленіе о пространствѣ не обусловливается тѣмъ обстоятельствомъ, что мы пригвождены къ нашему геоиду; и если бы, напримѣръ, со временемъ намъ сдѣлалось доступнымъ передвиженіе въ міровомъ пространствѣ, то могло бы оказаться, что передвиженіе но той линіи, которую мы считаемъ прямой, привело бы насъ въ точку исхода. Правда это измѣнило-бы наше представленіе о пространствѣ,—подобно тому, какъ развитіе идеи о шарообразности земли измѣнило представленіе о горизонтѣ и о меридіанальной линіи. Но въ такомъ предположеніи a priori логическаго абсурда не заключается. И если бы это оказалось такъ, то наша геометрія была бы примѣнима только къ фигурамъ небольшихъ размѣровъ, къ которымъ мы привыкли, и то по приближенію, оцѣнки которому теперь, конечно, невозможно дать.

Совершенно такую-же роль играетъ и знаменитый постулатъ о параллельныхъ линіяхъ. Но выяснить это гораздо труднѣе. Нужна была цѣлая литература, которой Лобачевскій положилъ начало, для того чтобы обнаружить значеніе этого положенія. Не будемъ поэтому забѣгать впередъ, а обратимся къ тому геометрическому матеріалу, который разработанъ Евклидомъ помимо этого постулата.

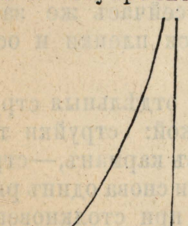
Первыя 28 предложеній его „Началъ", какъ извѣстно, не опираются на постулатъ о параллельныхъ. Они содержатъ свойства смежныхъ и вертикальныхъ угловъ; условія равенства треугольниковъ въ связи со свойствами равнобедреннаго треугольника; предложеніе XVI доказываетъ, что внѣшній уголъ треугольника больше каждаго изъ внутреннихъ, съ нимъ не смежныхъ, откуда вытекаетъ очень важное для насъ предложеніе XVII:—сумма двухъ внутреннихъ угловъ треугольника не можетъ превышать двухъ прямыхъ; изъ предложенія о внѣшнемъ углѣ вытекаютъ также соотношенія между сторонами и углами треугольника, свойства перпендикуляра и наклонныхъ. На этомъ предложеніи основывается также первая часть теоріи параллельныхъ линій (предложенія XXVII и XXVIII); она доказываетъ, что прямыя, образующія при пересѣченіи съ третьей равные углы наклоненія, или внутренніе односторонніе, которые въ суммѣ даютъ $2d$, никогда не пересѣкаются, сколько бы мы ихъ ни продолжали. Обратное предложеніе составляетъ знаменитый постулатъ Евклида.

Являются ли аксіомы и постулаты, предпосланные Евклидомъ этой теоріи, достаточными для ея обоснованія? На этотъ вопросъ можно категорически отвѣтить отрицательно. Если число аксіомъ Евклида и превышаетъ минимумъ, то въ то же время у него несомнѣнно имѣются недочеты; мы не станемъ теперь заполнять этихъ пробѣловъ; школа Лобачевскаго установила принципы, которые даютъ возможность оріентироваться въ этомъ вопросѣ. Поскольку это будетъ возможно на элементарной почвѣ, мы постараемся познакомить читателя съ этими изслѣдованіями, и тогда обнаружится, насколько можно считать этотъ вопросъ рѣшеннымъ. Теперь мы обратимъ вниманіе только на два пробѣла, которые играютъ въ теоріи Лобачевскаго на столько важную роль, что ихъ рѣшительно невозможно обойти молчаніемъ. Во первыхъ, Евклидъ ни однимъ словомъ не упоминаетъ о томъ свойствѣ плоскости, на которомъ основывается методъ наложенія; этотъ вопросъ былъ нами подробно разобранъ въ прошлой главѣ. Во вторыхъ, Евклидъ не обосновываетъ факта пересѣченія линій. Такъ, напримѣръ, въ первомъ же предложеніи, рѣшая задачу о построеніи равносторонняго треугольника на данномъ основаніи, Евклидъ не задается вопросомъ, почему пересѣкутся тѣ окружности, которыя онъ проводитъ. Фактически у него подразумѣвается постулатъ: если непрерывная линія имѣетъ одну точку внутри, а другую внѣ замкнутой фигуры, то она пересѣкаетъ периферію между этими точками. Но Евклидъ этого не оговариваетъ, потому, вѣроятно, что фактъ пересѣченія представляется ему уже слишкомъ очевиднымъ. Но когда въ 29-мъ предложеніи оказалось необходимымъ доказать пересѣченіе прямыхъ, которыя при пересѣченіи съ третьей образуютъ внутренніе односторонніе углы, составляющіе въ суммѣ менѣе $2d$,—то фактъ пересѣченія уже не билъ въ глаза съ такою ощутительною очевидностью. И если Евклидъ и принялъ его на вѣру, — то онъ во всякомъ случаѣ считалъ нужнымъ это оговорить и выдѣлить въ особый постулатъ. Комментаторы и продолжатели Евклида не удовольствовались и этимъ. Потому ли, что этотъ постулатъ по самому содержанію своему значительно сложнѣе остальныхъ аксіомъ Евклида и не представляетъ собой простой элементарной истины; или потому, что опредѣленіе параллельныхъ, казалось, должно было заключать въ себѣ всѣ ихъ свойства; или наконецъ, математическое чутье подсказывало геометрамъ, что здѣсь кроется болѣе глубокій вопросъ;—такъ или иначе, постулатъ о параллельныхъ занялъ видное мѣсто среди немногихъ проблемъ, которыя по своей трудности передавались изъ столѣтія въ столѣтіе, отъ поколѣнія къ поколѣнію. Задача заключалась конечно въ томъ, чтобы доказать XXIX предложеніе, не вводя новаго постулата. Было предложено множество доказательствъ этого принципа, но всѣ они опирались либо на доказываемую теорему, либо на предложеніе, ему эквивалентное. Въ спеціальномъ сочиненіи, посвященномъ этому вопросу *), академикъ В. Буняковскій собралъ наиболѣе типичныя изъ этихъ доказательствъ. Онъ дѣлитъ ихъ на четыре категоріи. Къ первой категоріи онъ относитъ доказательства, которыя имѣютъ въ виду рядомъ непосредственныхъ построеній доказать постулатъ Евклида или эквивалентное ему предложеніе. Ко второй категоріи принадлежатъ доказательства, основанныя на теоріи безконечно

*) В. Буняковскій. „Параллельныя линіи". С.-Петербургъ. 1853.

малыхъ. Слѣдующая группа опирается на такъ называемый принципъ однородности; наконецъ имѣются доказательства, основанныя на представленіяхъ, заимствованныхъ изъ механики.

Обратимъ прежде всего вниманіе на тѣ предложенія, которыя явно эквивалентны постулату Евклида. Всѣмъ извѣстно, что вся теорія параллельныхъ линій можетъ быть основана на болѣе частномъ допущеніи, что перпендикуляръ и наклонная къ одной и той-же сѣкущей встрѣчаются по достаточномъ продолженіи въ сторону остраго угла. Если принять, что чрезъ данную точку можно провести только одну прямую, параллельную данной, то предыдущее допущеніе явится слѣдствіемъ этого послѣдняго. Въ самомъ дѣлѣ, два перпендикуляра, возставленные изъ двухъ точекъ одной и той-же сѣкущей параллельны; и такъ какъ къ данной прямой изъ данной точки можно провести только одну параллель, то всякая наклонная, проведенная чрезъ основаніе одного изъ перпендикуляровъ, неизбѣжно пересѣкаетъ другой. Предложеніе, утверждающее, что прямая, пересѣкающая одну изъ параллельныхъ линій, непремѣнно пересѣкаетъ и другую является перефразировкой предыдущаго. Комментаторъ Евклида Проклъ (V вѣкъ по Р. Х.) старается однако доказать это предложеніе, основываясь на слѣдующихъ соображеніяхъ: прямая, пересѣкающая одну изъ параллельныхъ, образуетъ съ ней нѣкоторый уголъ, разстояніе между сторонами котораго, конечно, *можетъ быть сдѣлано сколь угодно большимъ*; а такъ какъ разстояніе между параллельными *остается конечнымъ*, то сѣкущая неизбѣжно перейдетъ на другую сторону второй параллели и, слѣдовательно, пересѣчетъ ее предварительно. Какъ одно, такъ и другое утвержденіе, на которыя опирается доказательство, голословны. Но первое изъ нихъ, какъ читатель увидитъ впослѣдствіи, не зависитъ отъ постулата и можетъ быть доказано. Утвержденіе же, что разстояніе между двумя непересѣкающимися прямыми остается конечнымъ,—явно основывается на томъ образѣ, съ которымъ связано представленіе о параллельныхъ линіяхъ,—и рѣшительно не вытекаетъ изъ формальнаго опредѣленія. Персидскій математикъ и комментаторъ Евклида Нассиръ Эдинъ Атъ-Туси (XIII в.) основываетъ свое доказательство на допущеніи, что если одна изъ двухъ прямыхъ перпендикулярна къ сѣкущей, а другая къ ней наклонена, то она со стороны остраго угла приближается къ первой, со стороны тупого—удаляется отъ нея. Довольно сложными, хотя и безупречно правильными разсужденіями геометръ выводитъ отсюда постулатъ Евклида; — но имѣетъ ли онъ право утверждать, что прямая не можетъ сначала приближаться къ другой прямой, пока разстояніе не достигаетъ minimum'а а затѣмъ удаляться отъ нея,—какъ парабола относительно своей директрисы? Принципъ, на которомъ основано доказательство Клавія, мало отличается отъ предыдущаго. Мы не станемъ проводить цѣлаго ряда геометровъ, доказывавшихъ постулатъ Евклида на основаніи аналогичныхъ допущеній,—напримѣръ, что перпендикуляръ, возставленный къ одной изъ сторонъ угла (фиг. 42), неизбѣжно встрѣчаетъ другую; что черезъ точку, взятую



Фиг. 42.

внутри угла, всегда возможно провести прямую, пересѣкающую, какъ одну такъ и другую сторону его*).

В. Каганъ (Одесса).

(Продолженіе слѣдуетъ).

СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТЕЙ ЖИДКИХЪ ТѢЛЪ.

Опыты и наблюденія.

(*Окончаніе* **).

VIII. Приложенія.

А. Пленка и электричество. 1. Два мыльныхъ пузыря помѣстимъ рядомъ до полнаго прикосновенія. Мы уже видѣли (V, 14), что пузыри остаются раздѣльными. Возьмемъ теперь наэлектризованную палочку (изъ сургуча, или каучука, или стекла) и будемъ подходить съ нею издали къ пузырямъ. На нѣкоторомъ разстояніи отъ нея пленки вдругъ соединяются и образуютъ одинъ общій пузырь.

Такимъ образомъ электрическаго притяженія между пленками достаточно для ихъ соединенія.

2. Подвергнемъ вліянію наэлектризованной палочки пузырь, внутри котораго заключается другой (V, 15). Въ этомъ случаѣ палочку возможно поднести настолько близко, что внѣшній пузырь сильно отклоняется, и тѣмъ не менѣе не соединяется съ внутреннимъ. Слѣдовательно, послѣдній и внутренняя поверхность внѣшняго пузыря остаются не наэлектризованными. Такимъ образомъ доказывается важная теорема объ электризаціи только поверхности проводника. Изъ предлагаемаго опыта очевидно, что электризація не проникаетъ даже на такую глубину, какъ толщина пленки, т. е. на дробь отъ тысячной части миллиметра.

3. Если рядомъ съ этими двумя пузырями, находящимися одинъ въ другомъ, помѣстимъ до прикосновенія третій, то подъ вліяніемъ палочки, третій и внѣшній соединяются, а внутренній сейчасъ же занимаетъ самое высокое мѣсто внутри вновь образовавшейся пленки и остается, по прежнему, цѣлымъ.

4. Заставимъ падать струю, раздѣляющуюся на отдѣльныя струйки, и подойдемъ къ ней съ нашей волшебной палочкой: струйки тотчасъ соединятся въ одну общую. Кладемъ палочку въ карманъ,—струя снова падаетъ кистью; вынимаемъ палочку—и предъ нами снова одинъ рядъ капель. Электризація заставляетъ капли соединяться при столкновеніи,

*) Изъ опредѣленія прямой нельзя вывести, что она не приближается къ одному изъ такихъ перпендикуляровъ ассимптотически какъ это изображаетъ фиг. 42.

**) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“ №№ 163, 165, 171, 173, 174, 176 и 177.

и что дѣйствительно въ этомъ заключается дѣйствіе волшебной палочки, лучше всего видно изъ слѣдующаго опыта.

5. Повторимъ опытъ отраженія струй (VII, 10). Въ такомъ случаѣ обыкновенно бываетъ достаточно въ другомъ концѣ комнаты вынуть изъ шерстяного кармана не наэлектризованную предварительно палочку, чтобы обѣ струи мгновенно соединились. Этимъ способомъ можно открыть существованіе слабѣйшаго электрическаго поля.

6. Если однако провести наэлектризованнымъ сургучемъ по трубочкѣ, изъ которой бьетъ струя, то отдѣльныя струйки не соединяются. Очевидно, что въ этомъ случаѣ капли, наэлектризованныя не черезъ вліяніе, слѣдовательно одноименно, отталкиваются и идутъ по разнымъ путямъ.

В. Пленка и магнитизмъ. 7. Если между полюсами сильнаго электромагнита помѣстить мыльный пузырь съ кислородомъ, то при замыканіи тока можно замѣтить легкое движеніе пузыря. Движеніе это чрезвычайно слабо; такъ какъ мы знаемъ, что достаточно ничтожной силы для того, чтобы заставить пузырь сильно вибрировать, то отсюда можно уже заключить, на сколько слабо дѣйствіе магнита на кислородъ.

8. Тѣмъ не менѣе есть возможность легко и наглядно обнаружить магнитизмъ кислорода. Для этого нужно только пузырь растянуть между двумя кольцами въ цилиндръ, длина котораго почти равнялась бы его окружности. Между полюсами нужно помѣстить нижнюю часть этого цилиндра; тогда при замыканіи тока неустойчивый цилиндръ мгновенно распадается на два шара—меньшій вверху и большій внизу.

Такъ какъ въ такомъ опытѣ необходимо получить наиболѣе легко разрушаемый цилиндръ, то кольца нужно раздвигать съ помощью кремальерки, измѣряя разстояніе между ними полоской бумаги, длина которой равна окружности колецъ.

С. Тауматропъ, показывающій паденіе капли. 9. Прилагаемая таблица можетъ послужить для воспроизведенія картины паденія капель безъ помощи всякой жидкости. Таблица наклеивается (мучнымъ клейстеромъ) на картонъ и держится подъ прессомъ, пока совершенно высохнетъ, иначе она покоробится и такимъ образомъ будетъ непоправимо испорчена.

Потомъ острымъ ножемъ вырѣзаются 43 черныхъ полоски, находящіяся между каплями, и эти вырѣзы продолжаются до внѣшняго края большого чернаго кольца. Такимъ образомъ нужно получить тщательные прорѣзы приблизительно въ 1 mm. шириною. Затѣмъ обрѣзаются края картона нѣсколько выше вырѣзокъ, такъ чтобы получился кружокъ.

Теперь остается сдѣлать приспособленія для вращанія этого кружка. Для этого сзади кружка, и тщательно въ центрѣ, на картонъ приклеивается катушка отъ нитокъ. Потомъ устанавливается крѣпко въ горизонтальномъ направленіи карандашъ ими какая либо другая палочка, долженствующая служить осью; катушка надѣвается на ось, а противъ кружка, и строго параллельно ему, устанавливается зеркало.

Чтобы пользоваться этимъ приборомъ нужно вращать кружокъ; тогда, смотря въ щели, бѣгущія предъ глазами, мы увидимъ всѣ детали медленнаго паденія и вибраціи капель.

Для большаго удобства слѣдуетъ помѣстить между глазомъ и бѣгущими щелями неподвижную щель такой же величины; а для того, чтобы видѣть паденіе одной только капли, нужно зеркало ограничить узкой вертикальной полоской.

D. Поющая струя. 10. Мы видѣли, что струя воды, падая на натянутую перепонку, повторяетъ звукъ камертона, съ которымъ соединено отверстіе. Вмѣсто камертона для той же цѣли могутъ служить часы или музыкальный ящикъ: струя будетъ повторять тѣ же звуки и даже усиливать ихъ.

Имѣя въ виду усиленіе звука Chichester Bell (братъ извѣстнаго Грагама Белля) сдѣлалъ такія приспособленія, что его приборъ можно назвать гидравлическимъ микрофономъ.

Приспособленія эти состоятъ въ слѣдующемъ: *Во первыхъ*, струя воды выходитъ изъ узкаго (0,3 mm. діаметр.) отверстія, соединеннаго длинною (5 метр.) трубкой съ высоко поднятымъ сосудомъ. Узкое отверстіе можно получить такимъ образомъ: конецъ стекляной трубки оплавляютъ (съ помощью паяльной трубки), непрерывно поворачивая, почти до полнаго закрытія; затѣмъ вдругъ дуютъ въ трубку и такимъ образомъ получаютъ отверстіе съ тонкими стѣнками. Приготовивъ нѣсколько такихъ трубочекъ, выбираютъ подходящую. Можно, конечно, сдѣлать металлическое отверстіе; для этого конецъ трубки запаивается тонкой пластинкой съ проверченнымъ въ ней отверстіемъ любой величины.

Вода должна быть безусловно свободна отъ всякихъ пылинокъ и пузырьковъ; для этого слѣдуетъ воду пропускать сквозь вату, помѣстивъ такой фильтръ на разстояніи одного метра отъ отверстія. Фильтръ слѣдуетъ соединить съ отверстіемъ узкой (3 mm. діаметр.) каучуковой трубкой.

Во вторыхъ вода должна падать на тонкую каучуковую (какъ въ дѣтскихъ воздушныхъ шарахъ) перепонку, натянутую на конецъ стекляной трубки въ 1 цм. діаметромъ. Трубка укрѣпляется на штативѣ и можетъ быть открыта внизу или имѣть отверстіе (тубулусъ) сбоку; въ послѣднемъ случаѣ въ это отверстіе вклеивается большой конусъ изъ картона для многихъ слушателей, или надѣвается каучуковая трубка, приставляемая къ уху. Струя должна вертикально падать на перепонку. Держа отверстіе близко къ перепонкѣ, мы не получимъ звука, потому что цилиндрическая часть струи производитъ однообразное давленіе на перепонку и не вызываетъ ея дрожанія. Если поднять отверстіе нѣсколько выше, то перепонка начинаетъ дрожать прежде, чѣмъ ея будутъ достигать капли: ибо съуженныя мѣста производятъ на нее меньшее давленіе, чѣмъ широкія, подъ ударами которыхъ въ ней образуются бóльшія углубленія.

Такимъ образомъ всякая послѣдовательность какихъ либо неровностей на струѣ сопровождается соотвѣтствующимъ ей звукомъ.

11. Карманные часы, приложенные къ отверстію даютъ оглушительное тикъ-такъ, если слушать съ помощью каучуковой трубки, проводящей звукъ отъ бокового тубулуса къ уху.

12. Музыкальный ящикъ, завернутый въ двойной рядъ войлока, дѣлается ясно слышнымъ для цѣлой аудиторіи, какъ только онъ будетъ соединенъ (помощью длинной палки) съ отверстіемъ.

13. Если держать отверстіе на столько близко къ перепонкѣ, чтобы струя не производила никакого звука, и приложить къ отверстію какую-нибудь досточку, то мы услышимъ звукъ. Дѣло въ томъ, что отъ различныхъ звуковъ и случайнаго шума частички доски не могутъ находиться въ покоѣ и ихъ дрожаніе передается отверстію; такимъ образомъ получаются неровности струи, сопровождающіяся соотвѣтствующимъ звукомъ перепонки.

E. Паутина. 14. Давно уже былъ извѣстенъ, но недавно объясненъ тотъ фактъ, что паутина бываетъ большею частью покрыта рядомъ клейкихъ капель, правильно чередующихся съ очень маленькими капельками. Насѣкомыя, которыми кормится паукъ, прежде чѣмъ запутаться въ сѣти, остаются въ ней просто потому, что пристаютъ къ этимъ клейкимъ каплямъ. Всего лучше выйти осенью въ садъ съ картоннымъ кольцомъ, намазаннымъ какимъ-либо густымъ клеемъ и снять съ помощью его часть паутины, (минуя центръ), натянутой между вѣтвями кустовъ. Съ помощью микроскопа или сильной лупы мы увидимъ на концентрическихъ нитяхъ клейкія капли. У молодыхъ пауковъ онѣ чередуются менѣе правильно съ маленькими капельками. Иногда на паутинѣ утромъ можно видѣть капли простымъ глазомъ—но эти капли не обязаны своимъ происхожденіемъ паукамъ: тѣ капли не замѣтны, видимыя же капли есть простая роса.

Невозможно допустить, чтобы каждую каплю образовалъ такъ или иначе самъ паукъ: въ хорошей паутинѣ такихъ капель болѣе $1/4$ милліона, а животное на приготовленіе всей своей сѣти употребляетъ не болѣе часу времени. Но обращая вниманіе на опытъ VII, 3, легко придти къ заключенію, что паукъ и не заботится объ этихъ капляхъ: онъ ограничивается тѣмъ, что, пробѣгая по нитямъ, покрываетъ ихъ кругомъ клейкой жидкостью, а получающійся жидкій цилиндръ распадается на отдѣльныя капли силою поверхностнаго натяженія.

F. Дѣйствіе масла на волны. 15. Van-der-Mensbrugghe далъ слѣдующее объясненіе хорошо извѣстному явленію—укрощенію волнъ масломъ. Подъ дѣйствіемъ вѣтра въ морѣ образуются два рода движенія: во первыхъ, зыбь, или волненіе, въ которомъ, какъ извѣстно, верхнія массы воды то поднимаются, то опускаются, не имѣя поступательнаго движенія. (Что масса воды не переносится вмѣстѣ съ бѣгущей волной, въ этомъ легко убѣдиться: стоитъ только бросить кусокъ дерева на воду, чтобы видѣть, какъ волны, пробѣгая одна за другой, поднимаютъ и опускаютъ дерево, оставляя его *почти* на томъ же мѣстѣ; это «почти» зависитъ отъ второго рода движенія). Второй родъ движенія — есть скольженіе поверхностныхъ частицъ воды, гонимыхъ вѣтромъ, по поверхности слоя подъ ними лежащаго. Такъ какъ элементы волнующейся водной поверхности расположены разнообразно по отношенію къ направленію вѣтра, то поверхностныя частицы воды получаютъ различныя скорости; быстрѣе двигающіяся покрываютъ сосѣднія, скользятъ по нимъ въ то время, какъ послѣднія продолжаютъ свое болѣе медленное движеніе подъ верхними. Такимъ образомъ движеніе, начавшееся на поверхности, распространяется на нѣкоторую глубину и достигаетъ наибольшей скорости на вершинѣ волны; въ результатѣ образуется гребень, низвергающійся съ большой силой внизъ, по другую сторону волны, гдѣ поверхностныя частицы, защищенныя отъ вѣтра волной, не получили движенія.

Жидкая пленка въ этомъ случаѣ усиливаетъ поверхностное движеніе, такъ какъ покрываемый поверхностный слой, сокращаясь, увеличиваетъ еще болѣе скорость набѣгающаго на него слоя. Гребни волнъ представляютъ наибольшую опасность для моряковъ. Безъ гребня—корабль будетъ опускаться, или подниматься, или наклоняться на бокъ; но ударъ волны, разбивающій судно, будетъ невозможнымъ. Такимъ образомъ можно сдѣлать безопаснымъ движеніе судна по волнамъ, если уничтожить ихъ гребни, или то, чему они обязаны своимъ происхожденіемъ, т. е. поверхностное скольженіе. Теперь легко понять, что масло, образующее поверхностный слой, затрудняетъ это скольженіе, а потому препятствуетъ развитію второго рода движенія на волнующейся водной поверхности. И не только пропадаютъ гребни волнъ, но даже самыя волны дѣлаются болѣе низкими и покойными, ибо, пріобрѣтая правильность движенія, онѣ теряютъ свой бурный характеръ и часть тѣхъ силъ, которыя такъ высоко вздымаютъ волны.

К. Чернышевъ (Юрьевъ).

ПРОСТАЯ ЗАДАЧА
и отдѣльное дѣйствіе въ ариѳметикѣ.

(*Окончаніе* *).

Переходя теперь къ вопросу о сложныхъ задачахъ, представляющихъ сходство съ простыми, замѣтимъ прежде всего, что—разсматриваемая à priori—эта аналогія можетъ простираться на слѣдующіе признаки.

1. Простыя задачи вовсе или почти не разлагаются на простѣйшія; аналогичныя съ ними сложныя должны съ трудомъ выдѣлять изъ своего состава содержаніе простыхъ задачъ.

2. Простыя задачи, входя въ составъ сложной, представляютъ большею частію ея легко различимые элементы; аналогичныя съ ними сложныя, входя въ составъ еще болѣе сложныхъ задачъ, должны легко выдѣляться изъ ихъ содержанія.

3. Простыя задачи по общимъ чертамъ условій представляютъ группу рѣзко разграниченныхъ типовъ; аналогичныя имъ сложныя и въ этомъ отношеніи не должны съ ними расходиться.

4. Цѣль рѣшенія каждой простой задачи должна въ существенныхъ чертахъ совпадать съ результатомъ какого нибудь изъ ариѳметическихъ дѣйствій; совокупность дѣйствій, нужная для рѣшенія задачи, если послѣдняя аналогична простой, должна по своей цѣли и логическому смыслу представлять параллель отдѣльному дѣйствію.

Значительная часть употребительнѣйшихъ ариѳметическихъ задачъ отвѣчаетъ всѣмъ или нѣкоторымъ изъ поставленныхъ требованій; это въ особенности относится къ тѣмъ вопросамъ, рѣшеніе которыхъ въ алгебрѣ приводится къ рѣшенію системы уравненій съ двумя и болѣе неизвѣстными.

Прежде всего при рѣшеніи многихъ сложныхъ задачъ составленіе одного или нѣсколькихъ второстепенныхъ вопросовъ часто встрѣчаетъ затрудненіе въ недо-

---

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“ №№ 176 и 177.

статкѣ краткихъ и точныхъ выраженій; составленный вопросъ въ подобныхъ случаяхъ отличается нерѣдко отвлеченнымъ содержаніемъ и крайне растянутою, запутанною формою. Пусть будетъ дана, напримѣръ, задача: „При волостномъ правленіи былъ сходъ изъ жителей двухъ селъ—А и В; жителей села А было втрое болѣе жителей села В. Когда же 16 человѣкъ изъ общества А и 16 человѣкъ изъ общества В оставили сходъ, то число душъ села А стало въ пять разъ болѣе числа душъ села В. Сколько жителей того и другаго села было первоначально на сходѣ?“ Рѣшеніе этой въ сущности не слишкомъ запутанной задачи мало облегчается разложеніемъ ея на второстепенныя задачи. Напротивъ, допуская легкое разрѣшеніе при помощи алгебраическихъ и даже ариѳметическихъ пріемовъ (но безъ полнаго словеснаго указанія искомыхъ каждаго дѣйствія), она можетъ выдѣлить изъ своего содержанія лишь такого рода вопросы: 1) Насколько пять такихъ чиселъ, какъ первоначальное число представителей села В, больше, чѣмъ число представителей села А, уменьшенное на 16? ($16 \times 5 = 80$). 2) На сколько пять такихъ чиселъ, какъ число бывшихъ сначала на сходкѣ жителей села В, больше, чѣмъ первоначальное число представителей села А? ($80 - 16 = 64$). 3) На сколько чиселъ, равныхъ первоначальному числу бывшихъ на сходкѣ жителей села В, упятеренное такое число больше утроеннаго? ($5 - 3 = 2$). 4) Сколько жителей села В было сначала на сходкѣ? ($64 : 2 = 32$). Сколько жителей села А было сначала на сходкѣ? ($32 \times 3 = 96$). Излишне доказывать темноту и неестественность такого способа выдѣленія искомыхъ изъ содержанія задачи.

Далѣе, при томъ же процессѣ разложенія сложной задачи на простыя замѣчается иногда явленіе повидимому противоположнаго характера: нерѣдко въ данномъ рядѣ вопросовъ нѣкоторые изъ нихъ соединяются въ одну или нѣсколько группъ, замѣтно выдѣляющихся изъ общаго содержанія задачи. Вотъ одна изъ подобныхъ задачъ, которыя можно назвать задачами двойной сложности. „На прибыль съ капитала 18000 р., отданнаго въ ростъ на 3 года по 5%, купленъ чай, цѣною по 2 р. за фунтъ; чай этотъ положенъ въ три ящика, такъ что во второмъ ящикѣ было на 250 фунтовъ, а въ третьемъ—втрое болѣе чая, чѣмъ въ первомъ. Сколько фунтовъ было въ каждомъ ящикѣ?“. Главный вопросъ задачи—„сколько фунтовъ чаю было въ каждомъ ящикѣ?“, но мы не можемъ его рѣшить, не зная, сколько было куплено фунтовъ чаю; для чего нужно въ свою очередь вычислить сначала процентныя деньги съ капитала, отданнаго въ ростъ, потому что именно на эти деньги былъ купленъ чай. Такимъ образомъ, первый въ порядкѣ рѣшенія вопросъ—сложный и рѣшается при помощи нѣсколькихъ дѣйствій по такъ называемому правилу вычисленія процентовъ; второй есть простая задача (на дѣленіе); третій, также сложный, требующій опредѣленія трехъ чиселъ по ихъ суммѣ и по системѣ ихъ отношеній другъ къ другу, обладаетъ своеобразнымъ типическимъ содержаніемъ и выдѣляется изъ состава задачи почти столь же рѣзко, какъ и предшествующій.

Относительно третьяго пункта возможнаго сходства между простыми задачами и нѣкоторыми изъ сложныхъ должно замѣтить, что систематическое распредѣленіе сложныхъ задачъ, какъ алгебраическаго, такъ и—въ тѣсномъ смыслѣ слова—ариѳметическаго характера, въ группы, различающіяся по основнымъ логическимъ признакамъ,—составляетъ злобу дня въ современной методикѣ ариѳметики. Каждый новый годъ плодитъ все новыя изданія, частію или вполнѣ посвященныя разработкѣ этого вопроса. Въ сборникахъ и руководствахъ г.г. Воронова, Гика, Гольденберга, Конашевича, Шохоръ-Троцкаго, Шапошникова, Лубенца, Александрова, Комарова, Павлова и Терешкевича мы встрѣчаемъ болѣе или менѣе остроумныя попытки систематизаціи ариѳметическаго матеріала и разнообразныхъ пріемовъ пользованія имъ. Такимъ образомъ, тотъ фактъ, что весьма часто сложная задача представляетъ собою не простой, безхарактерный, механическій аггломератъ условій, а напротивъ—связное, отмѣченное индивидуальностью цѣлое, получилъ полную оцѣнку. Поэтому, можетъ быть, неизлишне обратить вниманіе на его другую сторону. Во первыхъ, до сихъ поръ не удалось, да едва ли и удастся когда нибудь, дать точную классификацію, полный и критически провѣренный перечень всѣхъ типовъ сложныхъ задачъ. Даже самый принципъ систематизаціи еще не уясненъ. Одни стараются дать систему ариѳметическихъ методовъ рѣщенія (Александровъ), другіе группируютъ самыя задачи на основаніи сходства методовъ ихъ разрѣшенія, третьи дѣлаютъ то же на основаніи какой нибудь логической схемы (Конашевичъ), четвертые—на основаніи различія уравненій, которыя могутъбыть выведены изъ условій данной задачи (Шохоръ-Троцкій), иные, какъ Гика, стараются найти идею группировки въ содержаніи теоретическаго курса, и т. д. Во вторыхъ, границы между отдѣльными типами крайне сбивчивы, благодаря множеству типовъ переходныхъ, которые различными сторонами своего содержанія примыкаютъ нерѣдко къ совершенно разнороднымъ группамъ. Впрочемъ, сказанное, очевидно, лишь ограничиваетъ сходство между типическою сложною задачею и простою, но вовсе его не уничтожаетъ.

Наконецъ, вычисленія, нужныя для рѣшенія задачъ алгебраическаго характера, въ зависимости отъ ихъ типичности и отъ особенно тѣсной связи ихъ элементовъ между собою, естественнымъ образомъ получаютъ видъ акта логически-цѣльнаго, подобнаго отдѣльному дѣйствію. Въ самомъ дѣлѣ, что другое, если не это обстоятельство, создало и до извѣстной степени оправдывало въ старыхъ курсахъ ариѳметики стремленіе давать для рѣшенія чуть не каждаго класса типическихъ задачъ особое „правило"? Такъ существовали не только простое и сложное тройное правила, правило вычисленія процентовъ, правило учета векселей, правило товарищества, правило срочныхъ уплатъ, цѣпное правило, правило смѣшенія „обоего рода", но также „*фальшивое*" и даже—въ учебникѣ одного автора, написанномъ „для дѣвицъ"—„*дѣвичье*" правило!*). Еще яснѣе та же логическая основа проглядываетъ въ странной попыткѣ одного изъ новѣйшихъ авторовъ по методикѣ предмета **) увеличить число извѣстныхъ уже ариѳметическихъ дѣйствій, дополнивъ его 5) сложеніемъ неравныхъ чиселъ *a*) по разности и *b*) по кратному отношенію между ними, 6) дѣленіемъ числа на неравныя части *a*) по разности и *b*) по кратному отношенію между ними, 7) сложеніемъ произведеній, имѣющихъ: *a*) одинаковыя множимыя, *b*) одинаковые множители и *c*) разные множимыя и множители, и наконецъ, 8) разложеніемъ числа на произведенія, имѣющія: *a*) одинаковыя множимыя, *b*) одинаковые множители и *c*) разные множимыя и множители. Конечно, названія этихъ мнимыхъ дѣйствій обозначаютъ въ сущности лишь содержаніе типическихъ задачъ, притомъ, далеко не всѣхъ, но все же нельзя отрицать довольно яснаго логическаго параллелизма между совокупностью дѣйствій, нужныхъ для рѣшенія какой либо изъ подобныхъ задачъ, и тѣмъ или другимъ изъ основныхъ дѣйствій. Такъ въ результатѣ вычитанія одно изъ данныхъ чиселъ оказывается разложеннымъ на части, между которыми не установлено никакого отношенія; въ рѣшеніи задачъ на отысканіе двухъ чиселъ по ихъ суммѣ и разности имѣемъ разложеніе на части, между которыми установлено ариѳметическое отношеніе; при дѣленіи на части пропорціональныя дано геометрическое отношеніе; между искомыми частями; при обыкновенномъ дѣленіи дано ихъ равенство, представляющее спеціальный случай геометрическихъ отношеній (когда знаменатель равенъ единицѣ); наконецъ, существуютъ задачи, въ которыхъ части числа ищутся на основаніи отношенія ихъ степеней, хотя способы рѣшенія такихъ задачъ и не входятъ въ область ариѳметики.

Приведенныя нами соображенія, при всей своей справедливости, имѣли бы весьма малое практическое значеніе, если бы только доказывали относительность изслѣдуемыхъ понятій: въ мірѣ знанія едва-ли не все относительно. Но, проливая нѣкоторое освѣщеніе на господствующее въ литературѣ пониманіе задачъ преподаванія ариѳметики, они пріобрѣтаютъ въ извѣстной мѣрѣ и жизненный интересъ. Согласно общепринятому нынѣ взгляду, преподаваніе начальнаго счисленія „имѣетъ цѣлью научить дѣтей сознательно производить дѣйствія надъ числами и развить въ дѣтяхъ навыкъ прилагать эти дѣйствія къ рѣшенію задачъ общежитейскаго содержанія" ***). Такое опредѣленіе безспорно правильно и дѣйствительно „не встрѣтитъ возраженій". Но является вопросъ: въ какомъ отношеніи другъ къ другу должны стоять двѣ указанныя въ немъ стороны обученія? Вообще говоря, отношеніе это мыслимо въ трехъ видахъ: 1) изученіе дѣйствій равноправно съ умѣніемъ разрѣшать при ихъ помощи практическіе вопросы, 2) изученіе дѣйствій — средство, а рѣшеніе задачъ—цѣль, 3) изученіе дѣйствій первенствуетъ по важности сравнительно съ рѣшеніемъ задачъ. Хотя, какъ можно было бы ожидать заранѣе, теоретическія разсужденія авторовъ методикъ согласуются скорѣе всего съ пер-

---

*) Нѣкоторыя изъ этихъ правилъ давно уже и безслѣдно погрузились въ Лету, а отъ другихъ остались одни названія, пріуроченныя къ соотвѣтствующимъ группамъ задачъ, рѣшаемыхъ уже безъ всякихъ особыхъ правилъ.

**) Мартыновъ. Ариѳметика. М. 1890. 4-е изд.

***) Гольденбергъ. Методика нач. ариѳм. 5-е изд. IX стр.

вою формулою, однако ихъ заявленія въ этомъ случаѣ должно принимать cum grano salis. Порожденное реакціей противъ увлеченія системою „изученія чиселъ“, современное направленіе методологической литературы нашего предмета изученію дѣйствій придало повидимому чрезмѣрное, почти исключительное значеніе, почему въ курсѣ начальной ариѳметики рѣшеніе задачъ получило сомнительный смыслъ. Въ самомъ дѣлѣ, современная методика особенно сильно налегаетъ на рѣшеніе простыхъ задачъ *), что же касается задачъ сложныхъ, то объ ихъ правѣ на мѣсто въ элементарномъ курсѣ выражаются двусмысленно и противорѣчиво. Значеніе тѣхъ сложныхъ задачъ, которыя обыкновенно называются чисто-ариѳметическими или синтетическими, „заключается въ томъ, что дѣтямъ представляется случай прилагать свое умѣнье производить ариѳметическія дѣйствія и научиться *въ порядкѣ располагать* болѣе или менѣе длинныя *вычисленія*“ **), т. е. въ сущности непонятно, какое онѣ имѣютъ преимущество предъ сложными численными примѣрами и во всякомъ случаѣ,—если счесть нѣкоторыя изъ приведенныхъ выраженій за lapsus calami,—имъ суждено довольствоваться крайне блѣдною ролью въ преподаваніи предмета. Къ задачамъ изъ класса алгебраическихъ принято относиться еще строже. „Ученія ариѳметики не оказываютъ особенныхъ услугъ при разрѣшеніи задачъ этого рода: они только необходимы для рѣшенія, но для того не достаточны, и обученію ариѳметикѣ, какъ таковой, задачи алгебраическія въ свою очередь не оказываютъ никакихъ услугъ, такъ какъ не относятся ни къ теоріи, ни къ практикѣ ариѳметическихъ дѣйствій“ ***). Вполнѣ ясно, что столь крайнія мнѣнія—прямое слѣдствіе вѣры въ единоспасающую формулу, по которой ариѳметика есть только ученіе о четырехъ дѣйствіяхъ. Такъ какъ простыя задачи однѣ лишь могутъ выяснить цѣль дѣйствій, то ихъ рѣшеніе и даже изученіе ихъ типовъ несомнѣнно важно въ начальномъ курсѣ предмета. Сложныя изъ класса чисто-ариѳметическихъ, хотя и могутъ быть рѣшаемы при одномъ только знаніи дѣйствій, но не раскрываютъ никакихъ новыхъ сторонъ въ понятіяхъ о нихъ, слѣдовательно, полезны лишь какъ матеріалъ для повторенія. Наконецъ, задачи изъ ряда алгебраическихъ кромѣ того представляютъ трудности, преодолѣніе которыхъ не приноситъ пользы въ смыслѣ изученія дѣйствій; поэтому ихъ рѣшеніе въ элементарной школѣ скорѣе вредно, чѣмъ полезно. Такова логическая связь излагаемыхъ мнѣній съ моднымъ воззрѣніемъ на цѣль преподаванія счисленія. Въ интересахъ справедливости должно замѣтить, что талантливые и образованные писатели, которымъ принадлежатъ эти мнѣнія, не могли, конечно, держаться ихъ съ полной послѣдовательностью; подъ вліяніемъ педагогическихъ принциповъ и требованій школьнаго дѣла они значительно уклонялись отъ такихъ одностороннихъ представленій при построеніи нормальнаго плана задачника. Но уже самая сбивчивость изложенія не могла не оказать вреднаго вліянія на плодотворность ихъ работъ, тѣмъ болѣе, что въ сознаніи такъ называемыхъ „практиковъ“ школы подобныя идеи, развиваясь ad absurdum, кажутся оправданіемъ бумажной и мѣловой ариѳметики добраго стараго времени. Пишущему эти строки, раньше чѣмъ ему пришлось близко познакомиться съ дѣломъ, самому случалось слышать, что „теперь педагоги рѣшили вернуться къ прежнему методу обученія ариѳметикѣ“. Вообще, по отзывамъ нѣкоторыхъ внимательныхъ и компетентныхъ наблюдателей, слѣдованіе новой методикѣ въ школахъ нерѣдко сказывается поклоненіемъ механизму дѣйствій, хотя главная доля отвѣтственности за то падаетъ, разумѣется, не на методику. Въ виду указанныхъ обстоятельствъ представляются далеко не безполезными мысли, что понятіе объ отдѣльномъ ариѳметическомъ дѣйствіи не имѣетъ безусловной опредѣленности, что оно стоитъ въ зависимости отъ понятія о простой задачѣ, а не обратно, что—наконецъ—и это послѣднее не можетъ быть всегда и во всѣхъ отношеніяхъ противополагаемо понятію о задачѣ сложной: совершенно ясна ихъ рѣшительная несовмѣстимость съ изложенными односторонними и неправильными сужденіями.

И. Синскій (Орша).

---

*) Шохоръ-Троцкій. Методика ариѳм. М. 1886. 98 стр.
**) Гольденбергъ. Методика ариѳметики. § 131.
— Шохоръ-Троцкій. Методика ариѳметики. 99 и др. стр.
***) Шохоръ-Троцкій. Ibid. 102 стр.

ПИСЬМО ВЪ РЕДАКЦІЮ.

Въ № 174 „В. О. Ф." помѣщена замѣтка: „Къ выводу формулы длины окружности", въ которой авторъ даетъ прямую зависимость разности между радіусомъ круга R и апоѳемой a прав. вписаннаго многоугольника, отъ числа его сторонъ n, пользуясь при этомъ теоремой: „Если изъ какой-нибудь точки, лежащей внутри правильнаго многоугольника, опустимъ перпендикуляры на всѣ его стороны, то сумма этихъ перпендикуляровъ, дѣленная на число сторонъ многоугольника, равняется апоѳемѣ".

Называя перпендикуляры на стороны описаннаго многоугольника черезъ H_1, $H_2 \ldots H_n$, а перпендикуляры на стороны вписаннаго черезъ $h_1, h_2, h_3 \ldots h_n$, онъ пишетъ:

$$R = \frac{H_1 + H_2 + \ldots H_n}{n};\ a = \frac{h_1 + h_2 + \ldots + h_n}{n};$$

откуда

$$R - a = \frac{H_1}{n} + \frac{H_2}{n} + \ldots + \frac{H_n}{n} - \frac{h_1}{n} - \frac{h_2}{n} - \ldots - \frac{h_n}{n}.$$

Затѣмъ авторъ говоритъ: „Такъ какъ $H_1, H_2 \ldots H_n, h_1, h_2 \ldots h_n$ при увеличеніи n не обращаются ни въ 0, ни въ ∞, то для безконечно большого n разность $R - a$ стремится къ 0".

Авторъ желаетъ этимъ разсужденіемъ доказать теорему: $\lim(a) = R$, „отступая отъ обычнаго способа разсужденія, состоящаго въ доказательствѣ того, что разность $R - a$ меньше половины стороны прав. впис. въ кругъ многоугольника".

Если авторъ думаетъ, что написанное равенство самостоятельно доказываетъ разсматриваемую имъ теорему, то, очевидно, онъ допускаетъ здѣсь неправильное разсужденіе, что алгебраическая сумма $\frac{H_1}{n} + \frac{H_2}{n} + \ldots + \frac{H_n}{n} - \frac{h_1}{n} - \frac{h_2}{n} - \ldots - \frac{h_n}{n}$ стремится къ 0 потому лишь, что всѣ ея члены стремятся къ 0; между тѣмъ

$$\sum \frac{H}{n} = R, \text{ а не } 0 \text{ и } \sum \frac{h}{n} = a, \text{ а не нулю.}$$

Если же $\lim \left[\sum \frac{H}{n} - \sum \frac{h}{n} \right]_{n=\infty} = 0$, то именно потому, что $\lim \left[\sum \frac{h}{n} \right]_{n=\infty} = R$, то есть потому, что $\lim(a) = R$. Слѣдовательно, надо раньше доказать какимъ-нибудь способомъ (только не тѣмъ, какой предлагаетъ авторъ замѣтки), что $\lim(a) = R$, и тогда уже можно утверждать, что $\frac{H_1}{n} + \frac{H_2}{n} + \ldots + \frac{H_n}{n} - \frac{h_1}{n} - \frac{h_2}{n} - \ldots - \frac{h_n}{n}$ стремится къ 0 съ увеличеніемъ n до ∞.

П. Андреяновъ (Москва).

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Джонъ Тиндалль скончался 4-го декабря (н. с.) въ Лондонѣ. Имя это хорошо извѣстно всякому, кто только держалъ въ рукахъ учебникъ физики. Тиндалль былъ больше популяризаторомъ, чѣмъ ученымъ спеціалистомъ, но популяризаторомъ, которому нѣтъ равнаго. Его способность ясно и просто говорить о труднѣйшихъ отдѣлахъ физики, мастерски пользоваться опытомъ, обходить математическія выкладки безъ ущерба для точности пониманія, увлекательность его изложенія, наконецъ, умѣніе возбудить интересъ къ предмету, — все это дѣлаетъ его книги одинаково доступными ученику, спеціалисту и просто образованному человѣку. Книги эти—„Теплота, какъ родъ движенія“, „Звукъ“, „Тепло и холодъ“, „Матерія и сила“, „6 лекцій о свѣтѣ“, „Лекціи объ электричествѣ“, „Альпійскіе ледники“, „Физика въ простыхъ урокахъ“, „Устройство вселенной“, „Фарадей и его открытія“, „Вещества, носящіяся въ воздухѣ“, и другія были и, конечно, долго еще будутъ любимыми популярными сочиненіями по физикѣ.

Тиндалль работалъ въ самыхъ разнообразныхъ областяхъ естествознанія. Въ концѣ 50-хъ годовъ онъ едва не погибъ во льду, изучая Швейцарскіе глетчеры. Его классическіе опыты по теплотѣ слишкомъ извѣстны, чтобы говорить о нихъ. Звукъ, электричество, магнитизмъ, молекулярная физика—во всѣ эти отдѣлы онъ внесъ крупные вклады. На работы Пастера, затронувшія вопросъ о самопроизвольномъ зарожденіи, онъ откликнулся массой (тысячами) опытовъ, изложенныхъ въ его книгѣ: „Вещества, носящіяся въ воздухѣ, и ихъ отношеніе къ гніенію и заразѣ“.

Родился Тиндалль въ Ирландіи, въ 1820 году, былъ ученикомъ великаго Фарадея, а съ 1853 г. занялъ его каѳедру въ Королевскомъ Институтѣ. Каѳедру эту онъ оставилъ нѣсколько лѣтъ тому назадъ по болѣзни.

И. Б. (Цюрихъ).

Рудольфъ Вольфъ, директоръ Цюрихской Обсерваторіи, профессоръ астрономіи въ Цюрихскомъ университетѣ и политехникумѣ, родившійся въ 1816 г., скончался 6-го декабря (н. с.) въ Цюрихѣ. Изъ его трудовъ наиболѣе извѣстны: „Die Sonne und ihre Flecken“, „Geschichte der Astronomie“. Онъ былъ большимъ знатокомъ исторіи математики и астрономіи и отличался изумительной памятью.

И. Б. (Цюрихъ).

ЗАДАЧИ.

№ 574. Данъ уголъ A и на сторонахъ его двѣ точки B и C. Найти на сторонѣ AB точку M и на сторонѣ AC точку N, удовлетворяющія условію $BM=MN=NC$.

А. Петровъ (Красноярскъ).

№ 575. Показать, что ортоцентры четырехъ треугольниковъ, составленныхъ каждый діагональю и двумя сторонами вписаннаго въ данный кругъ четыреугольника, лежатъ на окружности, равной данной.

В. Россовская (Курскъ).

№ 576. Показать, что всякое цѣлое число, представляющее сумму трехъ квадратовъ, можетъ быть представлено въ видѣ суммы квадратовъ четырехъ дробей. (Теорема Bachwitz'а).

(Заимств.) *В. Г.* (Одесса).

№ 577. Построить треугольникъ, когда даны суммы (или разности), каждой изъ его сторонъ и высоты, на нее опущенной, т. е. $a+h_a$, $b+h_b$, $c+h_c$ или $a-h_a$, $b-h_b$, $c-h_c$.

П. Хлѣбниковъ (Тула).

№ 578. Найти формулу, выражающую взаимную зависимость двухъ любыхъ корней даннаго уравненія

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots + a_n = 0.$$

А. Охитовичъ (Сарапулъ).

№ 579. Черезъ точку пересѣченія двухъ окружностей проведена хорда подъ угломъ въ 60^0 къ линіи центровъ. Показать, что длина этой хорды, заключенная между обѣими окружностями, равна разстоянію между ихъ центрами.

(Заимств.) *Д. Е.* (Ив.-Вознес.).

МАЛЕНЬКІЕ ВОПРОСЫ*).

№ 1. Какъ тремя прямыми раздѣлить треугольникъ на четыре равные треугольника?

К. Исаковъ (Манглисъ).

№ 2. Какимъ образомъ можно зимою опредѣлить при помощи термометра влажность воздуха въ комнатѣ, окна которой имѣютъ двойныя рамы?

А. Рѣзновъ (Спб.).

№ 3. На чувствительныхъ вѣсахъ точно уравновѣшена стеклянная колбочка съ узкимъ горломъ. Въ колбочкѣ на стѣнкѣ сидитъ муха. Нарушится ли равновѣсіе, если муха станетъ летать внутри колбочки?

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 278 (2 сер.). Вершина прямого угла A прямоугольнаго треугольника ABC, его центръ тяжести G и центръ O круга въ него вписаннаго образуютъ треугольникъ AGO. Показать, что площадь этого треугольника равна $(b-c)r:6$, гдѣ b и c—катеты даннаго треугольника и r—радіусъ круга вписаннаго.

Продолжимъ AO до пересѣченія съ BC въ точкѣ H и AG—до пересѣченія съ BC въ точкѣ J и проведемъ $AD \perp BC$.

Имѣемъ:

*) На эти вопросы будутъ помѣщены лишь краткіе отвѣты.

$$AD=\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}};\ HJ=CJ-CH=\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{2}-\frac{b\sqrt{b^2+c^2}}{b+c};$$

$$AH=\frac{bc\sqrt{2}}{b+c};\ AJ=\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{2};\ AG=\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{3};\ AO=r\sqrt{2}.$$

Такъ какъ $\triangle AHJ$ и $\triangle AOG$ имѣютъ общій уголъ, то

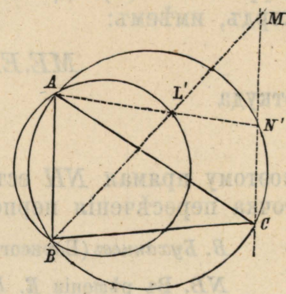
$$\frac{HJ.AD}{2\,\text{пл.}\,AOG}=\frac{AH.AJ}{AO.AG},\ \text{откуда пл.}\ AOG=\frac{AO.AG.HJ.AD}{2AH.AJ}.$$

Подставляя найденныя выше значенія входящихъ сюда отрѣзковъ, найдемъ:

$$\text{пл.}\ AOG=\frac{(b-c)r}{6}.$$

В. Россовская, К. Александровъ, К. Щиголевъ, П. Писаревъ (Курскъ); *А. Бѣляевъ* (Пермь); *Х. Едлинъ* (Кременчугъ); *В. Буханцевъ* (Борисоглѣбскъ).

№ 279 (2 сер.). Даны три прямыя и треугольникъ. Построить треугольникъ, равный данному, такъ чтобы его вершины лежали на данныхъ прямыхъ.



Фиг. 43.

Пусть данныя прямыя образуютъ $\triangle LMN$, а $\triangle ABC$—данный. На сторонахъ AB и AC (фиг. 43) описываемъ дуги, вмѣщающія соотвѣтственно $\angle L$ и внѣшній уголъ при N. Черезъ точку A проводимъ сѣкую AN' такъ, чтобы $L'N'=LN$ (см. задачникъ Александрова, 382, II, изд. 4-е). Очевидно, что $\triangle L'M'N'=\triangle LMN$. Теперь переносимъ $\triangle ABC$ на $\triangle LMN$.—Если точки A, B, C придутся между L' и N', L' и M', M' и N', тогда надо будетъ провести черезъ A сѣкущую такъ, чтобы сумма хордъ $L'A$ и AN' равнялась LN.

В. Россовская, М. Цыбульскій, К. Щиголевъ (Курскъ); *Х. Едлинъ* (Кременчугъ); *В. Буханцевъ* (Борисоглѣбскъ).

№ 324 (2 сер.). Въ треугольникѣ ABC проведена высота AD и раздѣлена въ точкѣ O пополамъ. Изъ вершины B проведена черезъ точку O прямая BM, пересѣкающая сторону AC въ точкѣ M. По даннымъ сторонамъ треугольника опредѣлить длину прямой BM.

Проведемъ $AP \| BM$. Тогда $BP=BD$. Такъ какъ $\triangle APC \backsim \triangle MBC$, то

$$MB=\frac{BC.AP}{CP}.$$

Если Δ—площадь ABC, то

$$AP=\sqrt{\overline{AD}^2+4\overline{BD}^2}=\frac{\sqrt{4\Delta^2+(a^2+c^2-b^2)^2}}{a}$$

и $CP=a+BD=\dfrac{3a^2+c^2-b^2}{2a}$, а $\Delta=\frac{1}{4}\sqrt{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}$.

Подстановка этихъ величинъ въ выраженіе для BM даетъ

$$BM=\frac{a\sqrt{4a^2c^2+3(a^2+c^2-b^2)^2}}{3a^2-b^2+c^2}.$$

К. Щиголевъ (Курскъ); *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *А. П.* (Пенза); *В. Буханцевъ* (Борисоглѣбскъ); *В. Шишаловъ* (Ив.-Вознес.); *П. Ивановъ* (Одесса).

№ 357 (2 сер.). На сторонахъ треугольника ABC строимъ внѣшніе треугольники: ABM, BCN и CAP такъ, чтобы $AM=AP$, $MB=BN$ и $NC=CP$. Требуется доказать, что перпендикуляры, опущенные изъ M, N и P соотв. на AB, BC и CA, пересѣкутся въ одной точкѣ.

Изъ вершинъ даннаго $\triangle$-а опишемъ окружности радіусами AM, BN, CP. Пусть окружности (A) и (B) пересѣкутся въ точкѣ F, (A) и (C)—въ точкѣ G. Обозначимъ пересѣченіе хордъ MF и PG черезъ E. Соединимъ N и E и продолжимъ прямую NE до пересѣченія съ окружностью (C) въ точкѣ H. Докажемъ, что точка H принадлежитъ также окружности (B). Дѣйствительно, на основаніи извѣстнаго свойства хордъ, имѣемъ:

$$ME.EF=PE.EG;\quad PE.EG=NE.EH,$$

откуда

$$ME.EF=NE.EH;$$

поэтому прямая NH есть хорда окружности (B) и точка E есть общая точка пересѣченія перпендикуляровъ.

В. Буханцевъ (Борисоглѣбскъ); *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ).

NB. Въ рѣшеніи *К. Щиголева* (Курскъ) разсмотрѣнъ частный случай, когда точки P, A, M; M, B, N; N, C, P лежатъ на одной прямой.

№ 359 (2 сер.). Вписать въ данную окружность равнобедренный треугольникъ, когда извѣстна сумма высоты и основанія.

Проведя въ данной окружности діаметръ BN, откладываемъ на немъ отъ точки B данную сумму до точки D. Въ произвольной точкѣ E этого діаметра возставляемъ къ нему перпендикуляръ и, отложивъ на немъ $EF=ED:2$, соединяемъ точки F и D. Прямая FD пересѣчетъ окружность вообще въ двухъ точкахъ C и C_1; опуская изъ этихъ точекъ перпендикуляры на діаметръ и продолжая ихъ до пересѣченія съ окружностью въ точкахъ A и A_1, получимъ два треугольника ABC и A_1BC_1, удовлетворяющихъ требованію задачи. Доказательство очевидно.

В. Баскаковъ (Ив.-Вознес.); *К. Щиголевъ* (Курскъ); *В. Буханцевъ* (Борисоглѣбскъ); *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *А. Васильева* (Тифлисъ).

№ 373 (2 сер.). Въ треугольникѣ ABC сторона AB въ точкахъ M и N раздѣлена на три равныя части. Точки M и N соединены съ противоположной сторонѣ AB вершиной C. По даннымъ $CM=a$, $CN=b$ и высотѣ $BD=h$ построить треугольникъ и вычислить его стороны.

1. Изъ произвольной точки C на произвольной прямой PQ возставляемъ перпендикуляръ CE, дѣлимъ его на 3 равныя части въ точкахъ F и G и черезъ точки дѣленія проводимъ прямыя, параллельныя PQ. Радіусомъ a изъ точки C пересѣкаемъ ближайшую къ PQ параллель въ точкѣ M, а радіусомъ b—слѣдующую въточкѣ N. Черезъ точки M и N проводимъ прямую, пересѣкающую PQ въ точкѣ A, а параллель PQ, проведенную черезъ E,— въ точкѣ B. $\triangle ABC$ есть искомый.

2. Обозначимъ AM черезъ y, AC черезъ x и BC черезъ z. Имѣемъ изъ $\triangle ACN$:

$$x^2+b^2=2a^2+2y^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1).$$

Опустивъ изъ N перпендикуляръ NR на AC, найдемъ:

$$NR={}^2/_3h,\ CR=\sqrt{b^2-{}^4/_9h^2},\ AR=\sqrt{4y^2-{}^4/_9h^2},\ CR+AR=x.$$

$$\sqrt{b^2-{}^4/_9h^2}+\sqrt{4y^2-{}^4/_9h^2}=x \quad . \ . \ . \ . \ . \ (2).$$

Изъ ур. (2) получимъ:

$$4y^2=x^2-2x\sqrt{b^2-{}^4/_9h^2}+b^2, \quad . \ . \ . \ . \ . \ (3)$$

а изъ ур. (1),

$$4y^2=2x^2+2b^2-4a^2. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (4).$$

Изъ ур. (3) и (4) получимъ:

$$x=AC={}^1/_3(2\sqrt{9a^2-h^2}-\sqrt{9b^2-4h^2}).$$

Подстановкой этого выраженія въ ур. (1), найдемъ:

$$3y=AB=\sqrt{9(a^2+b^2)-4h^2-2\sqrt{(9a^2-h^2)(9b^2-4h^2)}}.$$

Чтобы опредѣлить z, слѣдуетъ взять $\triangle MCB$.

К. Щиголевъ, Н. Щекинъ (Курскъ); *А. П.* (Пенза); *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *К. Капріелли* (Одесса).

№ 433 (2 сер.), Шаръ наполненъ угольной кислотой и парами воды, давленіе которыхъ равно f; вѣсъ смѣси равенъ p, а упругость ея h.—Вычислить вѣсъ x угольной кислоты, которая наполнила бы тотъ же шаръ при тѣхъ же условіяхъ давленія и температуры.

Если объемъ шара V, плотность углекислоты d, плотность воздуха δ, коэффиціентъ расширенія углекислоты α, температура t, то очевидно

$$x=\frac{V.d.\delta.h}{(1+\alpha t).760} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1).$$

Пусть въ данной смѣси вѣсъ угольной кислоты p', а вѣсъ паровъ воды p''. Тогда очевидно имѣемъ:

$$p=p'+p'',$$
$$p'=\frac{Vd\delta(h-f)}{(1+\alpha t).760},\ p''=\frac{V\delta\triangle f}{(1+\alpha t).760},$$

гдѣ $\triangle$ плотность водяного пара. Поэтому

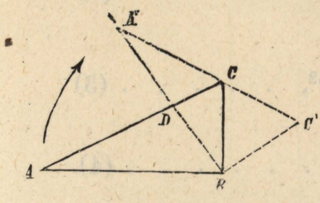
$$p=\frac{Vd\delta(h-f)+V\delta\triangle f}{(1+\alpha t).760}\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ (2).$$

Дѣля почленно (1) на (2), найдемъ

$$\frac{x}{p}=\frac{dh}{d(h-f)+\triangle f},\ x=\frac{pdh}{d(h-f)+\triangle f}.$$

NB. Ни одного удовлетворительнаго рѣшенія.

№ 452 (2 сер.). Будемъ вращать прямоугольный треугольникъ ABC въ его плоскости, около вершины прямого угла B до тѣхъ поръ, пока гипотенуза не пройдетъ черезъ вершину большаго изъ острыхъ угловъ C. Пусть въ этомъ новомъ положеніи треугольника его большій катетъ пересѣкаетъ прежнее положеніе гипотенузы AC въ точкѣ D. Доказать, что $\angle BDC$ въ три раза больше угла A.


Фиг. 44.

Пусть новое положеніе $\triangle ABC$ (фиг. 44) будетъ $A'BC'$. Такъ какъ $BC=BC'$ и $\angle BC'C=\angle BCC'=\angle ACB=\angle C$, то изъ четыреугольника $BDCC'$ имѣемъ

$$\angle BDC=4d-d-3C=3(d-C)=3A.$$

О. Озаровская (Спб.); *С. Бабанская* (Тифл.); *В. Буханцевъ* (Борисоглѣбскъ); *П. Ивановъ* (Одесса); *В. Шишаловъ* (с. Середа); *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *А. Варенцовъ* (Ростовъ на Д.).

№ 456 (2 сер.). На 5 рублей куплено 100 штукъ гусей, цыплятъ и воробьевъ. За каждаго гуся платили 50 коп., за цыпленка—10 коп., а за воробья—1 коп. Сколько штукъ каждой птицы было куплено?

NB. Рѣшеніе требуется ариѳметическое.

Если предположимъ, что куплены только воробьи, то останется 4 р., которые можно истратить, мѣняя воробьевъ на цыплятъ и гусей и доплачивая за каждаго цыпленка по 9 к., а за гуся 49 к.$=5\times 9+4$. А такъ какъ 9 коп. содержится въ 4 р. 44 раза да еще остается 4 к. и $44-5=39$, то 39 воробьевъ обмѣниваемъ на цыплятъ и доплачиваемъ 3 р. 51 к., а одного—на гуся съ доплатою 49 к. Такимъ образомъ было куплено 60 воробьевъ, 39 цыплятъ и 1 гусь. Легко видѣть, что это единственное рѣшеніе задачи.

Д. М. (Рыльскъ); *С. Бабанская* (Тифлисъ); *Я. Тепляковъ* (Радомысль).

№ 459 (2 сер.). Показать, что если $m_0, m_1, m_2, \ldots$ представляютъ члены разложенія $(a+x)^n$, то

$$(m_0-m_2+m_4-\ldots)^2+(m_1-m_3+m_5-\ldots)^2=(a^2+x^2)^n.$$

Если

$$(a+x)^n = m_0+m_1+m_2+m_3+\ldots\ldots,$$

то

$$(a-x)^n = m_0-m_1+m_2-m_3+\ldots\ldots$$

откуда черезъ перемноженіе получаемъ:

$$(a^2-x^2)^n=(m_0+m_2+m_4+\ldots)^2-(m_1+m_3+m_5+\ldots)^2.$$

Замѣняя здѣсь x черезъ $x\sqrt{-1}$, получимъ

$$\{a^2-(x\sqrt{-1})^2\}=\{m_0+m_2(\sqrt{-1})^2+m_4(\sqrt{-1})^4+\ldots\}^2-\{m_1\sqrt{-1}+$$
$$+m_3(\sqrt{-1})^3+m_5(\sqrt{-1})^5\ldots\}^2,$$

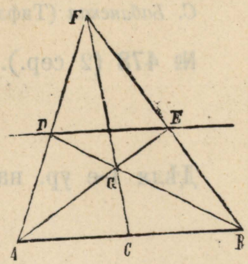
или

$$(a^2+x^2)^n=(m_0-m_2+m_4-\ldots)^2+(m_1-m_3+m_5-\ldots)^2.$$

А. Охитовичъ (Сарапуль); *А. Рѣзновъ* (Самара); *С. Адамовичъ* (Курскъ); *В. Баскаковъ* (Ив.-Вознес.).

№ 460 (2 сер.). Данъ прямолинейный отрѣзокъ AB, его середина C и точка D внѣ его. Требуется черезъ точку D провести прямую, параллельную прямой AB, безъ помощи циркуля.

Соединивъ D и A (фиг. 45) и взявъ на прямой AD произвольную точку F, соединяемъ ее съ C и B, а также D съ B. Черезъ точку G пересѣченія прямыхъ FC и BD и черезъ A проводимъ прямую до пересѣченія съ FB въ точкѣ E. Прямая DE есть искомая, ибо соединяетъ точки пересѣченія прямыхъ, проведенныхъ изъ двухъ вершинъ треугольника черезъ точку на его медіанѣ, съ его сторонами.

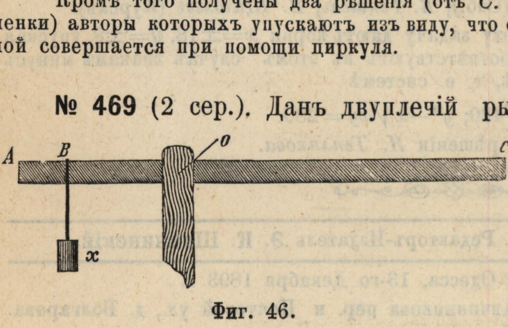


Фиг. 45.

К. Щиголевъ (Курскъ); *В. Баскаковъ* (Ив.-Вознес.); *В. Шишаловъ* (с. Середа); *С. Лф.* (Руссе въ Болгаріи); *М. Окасъ* (Мерьяма).

Кромѣ того получены два рѣшенія (отъ *С. Б.* изъ Тифлиса и *Я. П.* изъ с. Знаменки) авторы которыхъ упускаютъ изъ виду, что отложеніе равныхъ отрѣзковъ на прямой совершается при помощи циркуля.

№ 469 (2 сер.). Данъ двуплечій рычагъ (фиг. 46), поперечный разрѣзъ котораго q, а удѣльный вѣсъ s. Найти вѣсъ x, при которомъ рычагъ находится въ равновѣсіи, если извѣстно, что $AB=l$, $BO=l_1$, $CO=l_2$.



Фиг. 46.

На невѣсомый рычагъ

AOC дѣйствуютъ три силы: 1) x на разстояніи l_1 отъ O, 2) $qs(l+l_1)$ на разстояніи $(l+l_1):2$ отъ O и 3) $-qsl_2$ на разстояніи $l_2:2$ отъ O. Для равновѣсія рычага необходимо, чтобы моменты дѣйствующихъ на него силъ относительно точки опоры были равны. Поэтому

$$l_1x+\frac{qs(l+l_1)^2}{2}=\frac{qsl_2^2}{2},$$

откуда

$$x=\frac{qs[l_2^2-(l+l_1)^2]}{2l_1}.$$

Лф. (Руссе въ Болгаріи); *А. П.* (Ломжа); *А. Рѣзновъ* (Самара); *В. Шишаловъ* (с. Середа); *А. Варенцовъ* (Ростовъ н.Д.).

№ 470 (2 сер.). Показать, что a^n, гдѣ a и n цѣлыя числа, можетъ быть представлено въ видѣ суммы a послѣдовательныхъ нечетныхъ чиселъ, за исключеніемъ случая, когда $n=1$ при a четномъ.

По условію задачи

$$a^n=x+(x+2)+(x+4)+\ldots\ldots+[x+2(a-1)]=(x+a-1)\,a, \text{ или } x+a-1=a^{n-1},$$

откуда

$$x=a^{n-1}-a+1;$$

такъ какъ $a^{n-1}-a$ четное число, то x есть число нечетное за исключеніемъ лишь случая $n=1$, ибо тогда $a^{n-1}=1$ и $x=2-a$, т. е. x будетъ въ этомъ случаѣ четнымъ при a четномъ.

С. Бабанская (Тифл.); *А. Охитовичъ* (Сарапулъ); *М. Абрамовъ* (Житоміръ).

№ 478 (2 сер.). Рѣшить систему:

$$x^2+y\sqrt{xy}=420,$$
$$y^2+x\sqrt{xy}=280.$$

Дѣля 1-е ур. на 2-е послѣ сокращеній получимъ:

$$\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{3}{2},\text{ т. е. }\frac{x}{y}=\frac{9}{4}.$$

Подставляя же вмѣсто x въ одно изъ данныхъ ур. $^9/_4\,y$, найдемъ:

$$y=8 \text{ и } x=18.$$

С. Бабанская, А. Васильева (Тифлисъ); *Я. Тепляковъ* (Радомысль); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка); *В. Шидловскій* (Полоцкъ); *Д. Никифоровъ* (Симб.); *В. Шишаловъ* (с. Середа); *П. Ивановъ* (Одесса); *К. Исаковъ* (Манглисъ); *С. Окуличъ* (Варшава); *В. Баскаковъ* (Ив.-Вознес.); *А. Рѣзновъ* (Спб.); *К. Геншель, К. Щиголевъ* (Курскъ).

NB. Большинство рѣшившихъ эту задачу даютъ корни $x=\pm18$, $y=\pm8$, упуская изъ виду, что отрицательные корни соотвѣтствуютъ въ этомъ случаѣ знакамъ минусъ передъ радикалами въ данной системѣ, т. е. системѣ

$$x^2-y\sqrt{xy}=420;\; y^2-x\sqrt{xy}=280.$$

Эта оговорка сдѣлана лишь въ рѣшеніи *Я. Теплякова*.

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Одесса, 13-го Декабря 1893 г.
„Центральная типо-литографія“, уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. Болгарова.

Обложка
пщется

Обложка
пщется