Обложка
ищется

Обложка
ищется

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

XIV Сем. № 168. № 12.

Содержаніе: О безконечности, (окончаніе). *М. Попруженко.* — Формы равновѣсія жидкой массы во вращательномъ движеніи, (окончаніе). *Н. Poincaré.*—Разныя извѣстія. — Смѣсь. — Задачи № № 504 — 510. — Рѣшенія задачъ (2 сер.) № № 126, 233, 242, 249, 277, 311, 379— Запоздавшія рѣшенія задачъ (2-й сер.). — Обзоръ научныхъ журналовъ. *Д. Е.*—Библіографическій листокъ новѣйшихъ нѣмецкихъ изданій.

О БЕЗКОНЕЧНОСТИ.

(*Окончаніе.* *)

XVII.

Пусть даны двѣ прямыя a и b. Первая вращается около точки A, лежащей внѣ b, и пересѣкаетъ послѣднюю въ перемѣнной точкѣ B.

Эта точка B, при вращеніи прямой a, перемѣщается по b и разстояніе ея отъ подошвы O перпендикуляра, опущеннаго изъ A на b, по мѣрѣ приближенія a и b къ параллельности, безгранично увеличивается. Когда наконецъ a сдѣлается параллельной b, то точка B перестаетъ существовать. Такимъ образомъ во всѣхъ случаяхъ, кромѣ одного, прямую a можно разсматривать какъ сѣкущую по отношенію къ b, и только въ одномъ приходится отказаться отъ такого воззрѣнія. Въ интересахъ общности это не выгодно.

„Für viele Untersuchungen,—говоритъ *Rausenberger*,**)—ist es nun vorteilhaft, nicht immer das Parallelsein von zwei Geraden als Separatfall anführen zu müssen, sondern dasselbe als Spezialfall des Schneidens behandeln zu können derart, dass alle Sätze, die für sich schneidende Gerade gelten, sofort nach einer bestimmten Regel auf parallele übertragen werden können. Durch das besprochene Drehungsgesetz ist uns hierzu

---

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики" № 167.

**) *Rausenberger.*—Die elementar-Geometrie des Punctes, der Geraden und der Ebene. Стр. 56.

der Weg angezeigt. Da der Punkt B in desto weitere Ferne rückt, je mehr sich *a* der Parallellage zu *b* nähert, so sagen wir, dass sich *a* und *b* in Falle des Parallelseins *in unendlicher Ferne sehneiden* und dann einen verschwindend kleinen Winkel mit einander bilden".

Съ исторической стороны интересно замѣтить, что такая точка зрѣнія впервые была усвоена *Desargues*'омъ [1]). По этому поводу *Декартъ* въ письмѣ къ *Desargues'у* выражается такъ [2]): Pour votre façon de considérer les lignes parallèles comme si elles s'assemblaient à un but á distance infinie, afin de les comprendre sous le même genre que celles qui tendent à un point, elle est fort bonne..."

Впослѣдствіи къ той-же идеѣ присоединились *Лейбницъ* и *Ньютонъ*. Первый выводилъ ее изъ своего закона сплошности [3]). Новшество это въ свое время произвело сенсацію и *Bosse* [4]) съ удивленіемъ замѣчаетъ по поводу Desargues'a: „Jl fait voir, comme il l'a écrit à un sien ami défunt, le rare et savant M. *Pascal*, fils, que *les parallèles sont toutes semblables à celles qui aboutissent à un point*, *et qu'elles n'en diffèrent point*. [5])

Разъ ставъ на эту точку зрѣнія, ее приходится развить.

Такъ какъ двѣ прямыя могутъ пересѣкаться только въ одной точкѣ, то необходимо принять, что на всякой прямой существуетъ только *одна* безконечно удаленная точка, къ которой можно приблизиться, удаляясь въ ту или другую сторону отъ точки 0. Такимъ образомъ является представленіе о томъ, что прямая замыкается въ безконечности. „Die Gerade erscheint dann im Unendichen geschlossen. Andernfalls würden sich die Parallelen in mehreren Puncten schneiden. [6])

Далѣе: безконечно-удаленныя точки двухъ различныхъ и не параллельныхъ прямыхъ, лежащихъ въ одной и той же плоскости, приходится разсматривать ohne „das Grundgesetz des einfachen Schneinendes aufzugeben" [7]) какъ не тождественныя. Возникаетъ слѣдовательно вопросъ о геометрическомъ мѣстѣ всѣхъ безконечно удаленныхъ точекъ плоскости. Это геометрическое мѣсто обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что всякая прямая пересѣкаетъ его только въ одной точкѣ, ибо на каждой прямой есть только одна безконечно-удаленная точка.

---

[1]) *Chasles*. Histoire de geometrie, troisième édition, стр. 76.

[2]) То-же, стр. 76.

[3]) Я, къ сожалѣнію, не имѣю подъ руками сочиненій Лейбница.

[4]) Chasles, стр. 76, примѣчаніе.

[5]) Смертельный (?) ударъ ученію *Евклида* о параллельныхъ линіяхъ былъ нанесенъ остроумнымъ обобщеніемъ геометра первой половины XVII вѣка *Дезарга*, введшаго въ науку понятіе о безконечно-удаленныхъ точкахъ.
(Физико-математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ, журналъ, издаваемый г. Бобынинымъ 1885 г., стр. 98).

[6]) Rausenberger., стр. 55.

[7]) Тамъ-же, стр. 56.

„Eine Linie von dieser Eigenschaft ist aber immer eine Gerade. Denn man kann durch zwei beliebige Punkte einer jeden Linie eine Gerade legen, die, wenn kein Schneiden statt haben soll, ganz in die Linie fallen muss“.

„Um konsequent zu sein mussen wir daher annehmen das *alle unendlich fernen Punkte einer Ebene in einen unendlich fernen Geraden liegen*.

Къ подобнымъ-же выводамъ приходятъ и другіе авторы, хотя и изъ другихъ соображеній. Такъ профессоръ *Суворовъ*,*) разсматривая двѣ постоянныя точки А и В на прямой, замѣчаетъ, „что положеніе какой либо точки М на той же прямой опредѣляется постояннымъ числомъ *m* (модуль точки), отношеніемъ разстояній АМ и ВМ, при чемъ *m* будетъ измѣнять знакъ при переходѣ точки М черезъ одну изъ точекъ А или В. Модуль внѣ отрѣзка АВ будетъ принимать положительныя значенія и дѣлается равнымъ единицѣ для безконечно-удаленной точки прямой, будетъ-ли эта точка лежать вправо отъ точекъ А и В или влѣво, т. е. обѣ безконечно удаленныя точки прямой имѣютъ одинъ и тотъ-же модуль, поэтому въ проэктивной геометріи *принимаютъ ихъ совпадающими* и *разсматриваютъ прямую какъ замкнутую линію*, такъ что отъ точки А возможно перейти къ точкѣ В двумя путями, переходя черезъ безконечно-удаленную точку или нѣтъ“.

„*Съ аналитической точки зрѣнія*,—говоритъ *Стрекаловъ*, **)—прямая имѣетъ на безконечности только одну точку“. Любопытно, что и алгебраическія изслѣдованія проводятъ къ подобнаго же рода концепціямъ.

Die komplexen Zahlen $x = \xi + \eta i$ говоритъ *Rausenberger* ***) lassen sich in bekannter Weise als Punkte einer Ebene darstellen; vermöge irgend einer linearen Transformation, z. B. $y = \frac{1}{x}$, wird dem Punkte x ein einziger, ganz bestimmter y zugeordnet, so lange x endlich und von Null verschieden ist. Nimmt man nun der Gleichmässigkeit wegen an, dass dies auch für $x = 0$ und $x = \infty$ noch der Fall sein möge, so müssen sämtliche unendlich fernen Punkte der Ebene als zusammenfallend angesehen werden, da sie dem einzigen Punkte 0 entsprechen. *Wir werden also hier zu der Hypothese gedrängt, dass die Ebene nur einen einzigen unendlich fernen Punkt besitzt.* Alle nicht parallelen Geraden der Ebene schneiden sich dann zweimal, einmal im Endlichen und einmal im unendlich fernen Punkte; parallele Gerade haben in letzterem zwei zusammenfallende Punkte gemeinsam, sie *berühren* sich im Unendlichen“.

Во всѣхъ приведенныхъ примѣрахъ я подчеркнулъ выставляемую на видъ всѣми авторами *условность* выраженій относительно безконеч-

---

*) *Суворовъ*. Объ изображеніи воображаемыхъ точекъ и воображаемыхъ прямыхъ на плоскости стр. 5.

**) *Стрекаловъ*. Курсъ аналитической геометріи, стр. 169.

***) *Rausenberger*, стр. 58.

ности. Вездѣ въ основаніе кладется извѣстная фикція и затѣмъ развивается до возможныхъ предѣловъ. Это сложное фиктивное зданіе не претендуетъ однако ни на какую доказательность. Построенное исключительно въ цѣляхъ обобщеній и—главное—упрощенія изложенія, оно наоборотъ само постоянно нуждается въ провѣркѣ и пересмотрѣ всѣхъ своихъ частей.

Jm Gegensatz zu manchen Darstellungen ist es nicht unnötig zu betonen, dass diese Festsetzungen einen rein *symbolischen* Charakter tragen und nur bezwecken, die Sätze über sich schneidende Gerade ohne Aenderung der Ausdrucksweise direkt auf parallele Gerade übertragen zu können. *)

Если математикъ сопровождаетъ свои фиктивныя построенія такими строгими оговорками, то тѣмъ болѣе онѣ обязательны въ педагогикѣ. Здѣсь слѣдуетъ рекомендовать самую крайнюю и полную осторожность. А то, за небольшимъ выигрышемъ въ краткости и общности, можетъ явиться такой туманъ, который совершенно спутаетъ реальное съ воображаемымъ и допускаемое съ доказываемымъ. Вообще путь обобщеній—скользкій путь, и нужно быть постоянно на чеку, чтобы не впасть въ грубую ошибку. Въ этомъ отношеніи можно было бы привести поучительные историческіе примѣры, но я ограничусь однимъ замѣчаніемъ. Уравненіе $ax = b$ имѣетъ всегда одинъ корень:

$$x = \frac{b}{a},$$

всегда, за исключеніемъ случая $a = 0$.

Стремленіе къ обобщенію, благоговѣніе предъ результатомъ

$$x = \frac{b}{0}$$

привело къ нелѣпому утвержденію, что

$$\frac{b}{0} = \infty$$

и что уравненіе:

$$0 . x = a$$

имѣетъ безконечный корень.

Вспомнимъ слова *Дюгамеля*: **) „Часто обманываются кажущеюся доказательностью вслѣдствіе слѣпой вѣры въ истинность выводовъ исчисленія, между тѣмъ какъ вычисленіе есть на самомъ дѣлѣ ничто другое, какъ только выраженіе тѣхъ разсужденій, которыя намъ слѣдовало сдѣлать".

---

*) *Rausenberger*, стр. 57.

**) *Дюгамель.* Методъ ариѳметики и алгебры.

„On est naturellement porté, говоритъ Marie, [1]) — à propos de cet étonnant travail de Wallis, à remarquer la singulière tendance de l'esprit humain à prolonger l'usage des méthodes antérieurement usitées, je ne dirai pas autant que possible, ce que serait encore rationnel, mais au delà même du point où leur domaine s'arrête. Il semble qu'on ne puisse se décider à chercher de nouvelles méthodes que sous le fouet de l'absurde.“ [2])

XVIII.

„Истинное знаніе,—говоритъ *Алгоцали*, [3])—то, которое объясняетъ познаваемый предметъ такъ, что не можетъ остаться никакихъ сомнѣній на счетъ его, а въ будущемъ дѣлаются невозможными ни заблужденія относительно его, ни загадки. Такъ если я знаю, что десять болѣе трехъ, и кто нибудь мнѣ скажетъ: „напротивъ, три болѣе десяти, и для доказательства истинности моихъ словъ я превращу этотъ жезлъ въ змія“, то, если бы онъ даже и превратилъ его, мое убѣжденіе въ его заблужденіи осталось бы тѣмъ-же. Фокусъ его заставитъ меня удивляться его ловкости, но нисколько не усумниться въ истинности моего знанія“.

Конечно, математика претендуетъ на „истинное знаніе“, она „наука въ полномъ значеніи этого слова“, [4]) изученіе ея „то же для ума, что употребленіе мыла для одежды: она смываетъ нечистоту и устраняетъ пятна“; [5]) „счастіе, радость, безъ сомнѣнія, будутъ постоянно возрастать въ этомъ мірѣ для тѣхъ, которые посвятили себя математикѣ; прекрасно составлены всѣ ея части, чисты и совершенны ея рѣшенія и изященъ ея языкъ“ [6]). Таковы претензіи, но не такова дѣйствительность, по крайней мѣрѣ въ отношеніи математики, разсматри-

---

[1]) *Marie*. Histoire des sciences mathématiques, T IV, стр. 161.

[2]) Я не останавливаюсь на другихъ злоупотребленіяхъ терминомъ „безконечность“, потому что они очевидны. Вотъ нѣсколько примѣровъ, взятыхъ почти на удачу изъ нѣсколькихъ книгъ. „Разстояніе отъ земли до неподвижныхъ звѣздъ безконечны“... „Даже съ однѣми и тѣми же сдачами картъ игра можетъ разнообразиться до безконечности“... „Несоизмѣримыя количества суть тѣ, которыя имѣютъ общей мѣрой только безконечно-малыя количества“... „Окружность есть многоугольникъ съ безконечно-большимъ числомъ безконечно-малыхъ сторонъ“.

Извѣстный пародоксъ *Зенона* объ Ахиллѣ и черепахѣ основанъ тоже на неправильномъ толкованіи термина безконечность: *безконечно-дѣлимое* время смѣшивается здѣсь съ *безконечнымъ временемъ*. (См. Дж. Стюартъ *Милль*. Система логики).

[3]) *Льюисъ*. Исторія философіи. 1889. Стр. 356. *Алгоцали*, арабскій философъ XVI в.

[4]) Подъ такимъ именемъ она была извѣстна у грековъ. См. Ващенко-Захарченко, Исторія математ., стр. 232.

[5]) *Ибнъ-Холдунъ*, арабскій энциклопедистъ XVI в.—Ващенко-Захарченко. Истор. матем., стр. 639.

[6]) *Боскара*. Тамъ-же, стр. 721.

ваемой какъ учебный предметъ. Маленькимъ доказательствомъ этого служитъ настоящая статья. Здѣсь мы встрѣтились съ такими доказательствами, которыя не только „оставляютъ сомнѣнія", но просто не логичны,—съ такими разсужденіями, которыя способны не устранить, а создать „пятна", съ такими рѣшеніями, которыя далеки отъ „совершенства" и „чистоты".

Это одинъ незначительный примѣръ, а подобныхъ и гораздо болѣе крупныхъ не мало: стоитъ только вспомнить теорію отрицательныхъ чиселъ, ирраціональныя количества, измѣреніе окружности и пр. и пр.

Можно, конечно, поставить вопросъ такъ, что все это мелочи, не могущія умалить той большой силы, какую несетъ въ себѣ математическая дисциплина.

Но едва-ли такая постановка справедлива, потому что сила-то именно и заключается въ неуязвимости дисциплины. Выньте изъ этого стройнаго зданія нѣсколько кирпичей, и вся постройка покажется нелѣпой, ни къ чему не нужной, сложной и скучной.

И кому изъ насъ не приходилось слышать подобныхъ отзывовъ о математикѣ! На нихъ сходятся всѣ: и папаши, и мамаши, и ученики, и интеллигенты, и вовсе ненужно превращать „жезлъ въ змія" для того, чтобы даже „зрѣлый" молодой человѣкъ отрекся отъ всей математики, которая чрезъ нѣсколько лѣтъ по окончаніи курса олицетворяется для него въ какихъ-то смутныхъ воспоминаніяхъ о „пифагоровыхъ штанахъ". Если скажутъ, что причины указанныхъ печальныхъ явленій многообразны, то это, конечно, вѣрно;—я ограничиваюсь указаніемъ на одну изъ нихъ, имѣющую, по моему мнѣнію, очень большое значеніе.

Но было-бы совершенно ошибочно истолковывать слова мои въ томъ смыслѣ, что я ищу обремененія курса математики тонкими и сложными доказательствами. Ни мало. Тамъ, гдѣ извѣстныя развитія непосильны для возраста учащихся или тамъ, гдѣ нѣтъ времени на эти развитія, ихъ и не слѣдуетъ дѣлать совсѣмъ. Но нужно вопросъ ставить прямо: „примите это на вѣру,—доказательство будетъ послѣ", а не задурманивать голову пустословіемъ, нарядившимся въ тогу научности.

На вѣру принятое положеніе не можетъ принести вреда, а „неточныя доказательства пріучаютъ учащагося къ неточности мышленія и постепенно лишаютъ способности постигать строгость логическаго построенія".*) Извѣстное выраженіе *Дюгамеля:* „il ne faut avancer qu'en s'appuyant sur des précédents sans nuage" сдѣлалось общимъ мѣстомъ, но все таки нашло мало практическихъ примѣненій.

Правда въ настоящее время наша математическая литература обладаетъ нѣсколькими вполнѣ хорошими учебниками, и ужъ рѣшительно всѣ новые авторы заявляютъ о своихъ стремленіяхъ „соединить

---

*) *Краевичъ.* Курсъ начальной алгебры. 1872. Стр. 4.

научную строгость съ доступностью изложенія", но, во-первыхъ, „адъ вымощенъ благими намѣреніями", и не всякій, говорящій: „Господи, Господи", войдетъ въ царствіе Божіе, а, во-вторыхъ, сила привычки такъ велика, что новые учебники завоевываютъ себѣ поле съ большими усиліями. Поэтому нѣкоторое напоминаніе о той большой бѣдѣ, маленькой иллюстраціей которой служитъ настоящая статья, можетъ быть, не совсѣмъ безполезно (не смотря на то, что оно, конечно, далеко не ново).

XIX.

Въ заключеніе маленькое resumé.

1. Терминъ „безконечность" употребляется въ примѣніи къ такимъ объектамъ какъ пространство, время и пр.

Объекты эти не подлежатъ математическимъ операціямъ, и всѣ доказательства, основанныя на ихъ разсмотрѣніи, не выдерживаютъ критики.

2. Терминъ „безконечность", употребленный въ примѣненіи къ безконечно-большимъ и безконечно-малымъ величинамъ, имѣетъ совершенно ясное и опредѣленное значеніе, лишенное всякаго метафизическаго содержанія.

3. Критика нынѣ принятыхъ опредѣленій безконечно-малыхъ величинъ—неосновательна.

4. Такія опредѣленія, которыя имѣютъ цѣлію выставить на видъ особую малость безконечно-малыхъ величинъ, не выдерживаютъ критики и въ настоящее время наука въ нихъ не нуждается.

5. Нѣкоторыя опредѣленія безконечно-малыхъ величинъ, вообще правильныя, вызываютъ частныя замѣчанія.

6. Взглядъ на безконечность какъ на условный предѣлъ безконечно большихъ величинъ, хотя и возможенъ, но, повидимому, въ наукѣ не принятъ.

7. Развитіе этого взгляда въ сочиненіи г. Попова (способъ предѣловъ и приложенія его въ курсѣ элементарной математики) не можетъ быть признано удовлетворительнымъ.

8. Введеніе этого взгляда въ педагогическую практику не желательно.

9. Мотивировка и значеніе равенства:

$$\frac{a}{0} = \infty$$

во многихъ учебникахъ лишены всякихъ логическихъ основаній.

10. Равенство это можетъ быть понимаемо только условно, какъ сокращенное выраженіе нѣкоторой сложной мысли.

11. Въ математикѣ встрѣчается очень много условныхъ выраженій и построеній относительно безконечности. Въ цѣляхъ педагогическихъ къ нимъ слѣдуетъ отнестись съ крайней осторожностью и снабдить ихъ приличными оговорками.

12. Настоящая статья иллюстрируетъ только одинъ частный случай довольно общаго явленія, которое, по своимъ послѣдствіямъ, заслуживаетъ самаго полнаго вниманія.

М. Попруженко.

Оренбургъ
20 марта 1893 г.

ФОРМЫ РАВНОВѢСІЯ

жидкой массы во вращательномъ движеніи.

Окончаніе. *)

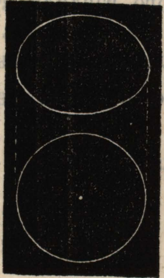
II. Космогоническія слѣдствія.

Изъ всего предыдущаго можно вывести нѣсколько интересныхъ слѣдствій. Представимъ себѣ однородную равномѣрно вращающуюся жидкую массу. Вообразимъ, что масса эта охлаждается и уплотняется; допустимъ, что, уплотняясь, она остается однородной и что охлажденіе идетъ достаточно медленно, чтобы треніе имѣло время поддерживать равномѣрность вращенія.

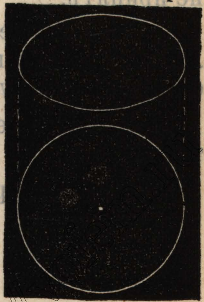
Моментъ вращенія массы останется тогда постояннымъ, а такъ какъ ея моментъ инерціи станетъ уменьшаться, то скорость, напротивъ, будетъ увеличиваться. Если при началѣ уплотненія скорость была не велика и наша жидкая масса по формѣ мало отличалась отъ сферы, то уплощеніе ея будетъ увеличиваться съ увеличеніемъ скорости вращенія.

Жидкая масса удержитъ нѣкоторое время форму эллипсоида вращенія, сперва незначительно сплюснутаго (фиг. 55), затѣмъ болѣе сплюснутаго (фиг. 56). **)

Уплощаясь все больше и больше, эллипсоидъ скоро станетъ неустойчивымъ, или, по крайней мѣрѣ утратитъ свою вѣчную устойчивость. Онъ сохранитъ, правда, на нѣкоторое время свою обыкновенную устойчивость, но, какъ мы видѣли, формы равновѣсія, обладающія лишь этимъ родомъ устойчивости, въ концѣ концовъ разрушают-



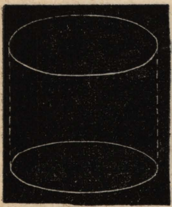
Фиг. 55.



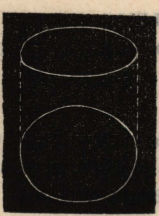
Фиг. 56.

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“ № 160.

**) На чертежахъ 55—62, представляющихъ послѣдовательныя формы сгущающейся массы, каждая изъ этихъ формъ изображена въ видѣ двухъ проэкцій: сверху—вертикальная проэкція, внизу—горизонтальная; ось вращенія предполагается вездѣ вертикальной.



Фиг. 57.

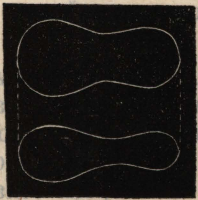


Фиг. 58.

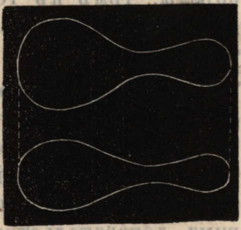
ся треніями. Если, поэтому, охлажденіе идетъ достаточно медленно, эти эллипсоиды не будутъ существовать и жидкая масса должна будетъ принять форму эллипсоида Якоби, сперва мало отличающагося отъ эллипсоида вращенія (фиг. 57), а затѣмъ болѣе удлиненнаго (фиг. 58).

Но и эллипсоидъ Якоби, въ свою очередь, потеряетъ устойчивость и жидкая масса приметъ одну изъ новыхъ формъ равновѣсія, описанныхъ выше.

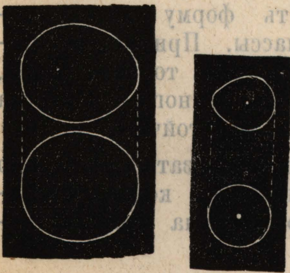
Сперва наша жидкая масса, мало отличающаяся отъ эллипсоида E_2, приметъ форму яйца съ тупымъ и острымъ концомъ. Затѣмъ близъ остраго конца появится углубленіе (фиг. 59); увеличиваясь мало по малу, это углубленіе образуетъ перетяжку (фиг. 60), предшествующую раздѣленію жидкости на двѣ различныя массы.



Фиг. 59.



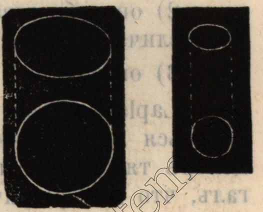
Фиг. 60.



Фиг. 61.

Отдѣлившись другъ отъ друга, эти двѣ массы остаются сначала одна вблизи другой. Каждая изъ нихъ находясь подъ вліяніемъ притяженія другой массы, приметъ грушевидную форму (фиг. 61).

По мѣрѣ охлажденія каждая изъ массъ уплотняется, скорость ея вращенія все болѣе и болѣе увеличивается и перестаетъ быть равной скорости вращенія обѣихъ массъ вокругъ ихъ общаго центра тяжести. Наконецъ, когда размѣры обѣихъ массъ станутъ достаточно малыми по сравненію съ раздѣляющимъ ихъ разстояніемъ, ихъ форма приближается къ эллипсоиду (фиг. 62).



Фиг. 62.

Можно-бы, конечно, попытаться извлечь отсюда космогоническія слѣдствія и объяснить такимъ образомъ образованіе планетъ. Тогда бы солнце, уплотняясь мало по малу, не отдѣляло бы отъ себя послѣдовательно колецъ, изъ которыхъ, какъ думалъ Лапласъ, произошли-бы затѣмъ планеты; оно, напротивъ, деформировалось бы до тѣхъ поръ, пока небольшая масса—будущая планета—не отдѣлилась бы отъ какой либо точки его экватора. Но прежде чѣмъ предпочесть это заключеніе, слѣдуетъ принять въ разсчетъ нѣкоторыя замѣчанія, отнимающія у него значительную долю вѣроятности.

Во первыхъ мы предполагали нашу массу однородной; напротивъ, туманность, послужившая для образованія солнечной системы, была, безъ сомнѣнія, весьма неоднородна и большая часть ея массы должна была уплотниться въ центрѣ. Въ настоящее же время невозможно представить себѣ тѣ измѣненія, которыя внесла бы въ наши выводы эта неоднородность.

Во вторыхъ обѣ массы, изображенныя на фиг. 62, сравнимы по своей величинѣ; меньшая изъ нихъ составляетъ половину или четверть большей; напротивъ, масса Юпитера равна лишь тысячной части массы солнца.

Можетъ быть описанный мною процессъ (фиг. 55—62) болѣе приближается къ процессу, по которому произошли нѣкоторыя двойныя звѣзды, чѣмъ къ тому, который имѣлъ мѣсто при образованіи солнечной системы. Во всякомъ случаѣ это остается все же весьма гипотетическимъ.

Кольцо Сатурна.—Помимо разсмотрѣнныхъ нами формъ равновѣсія извѣстны и другія. Уже давно Mathiessen показалъ, что возможны кольцевыя формы равновѣсія, и къ тому же результату пришелъ затѣмъ и лордъ Kelvin, но однако, не опубликовалъ его. Благодаря работамъ Ковалевской и моимъ, мы обладаемъ въ настоящее время строгимъ доказательствомъ, мало отличнымъ, вѣроятно, отъ того, которое было открыто, но неопубликовано лордомъ Kelvin'омъ.

Можно показать, что вращающаяся жидкая масса, находящаяся внѣ всякаго внѣшняго дѣйствія, можетъ принять форму кольца, подобнаго кольцу Сатурна, но безъ центральной массы. При малой скорости вращенія кольцо это представляло бы родъ очень тонкаго фриза, меридіальное сѣченіе котораго отличалось бы весьма немного отъ слегка уплощеннаго эллипса; но равновѣсіе этихъ формъ неустойчиво.

Чтобы сдѣлать это понятнымъ, самое лучшее сказать нѣсколько словъ о работахъ Maxwell'я относительно устойчивости кольца Сатурна. Можно сдѣлать относительно природы этого свѣтила три различныя гипотезы:

1) кольцо твердо;

2) оно образовано изъ большого числа весьма малыхъ спутниковъ, не различаемыхъ отдѣльно при помощи телескопа;

3) оно жидко.

Laplace давно уже показалъ, что твердое кольцо не можетъ находиться въ устойчивомъ равновѣсіи, если оно симметрично и его центръ тяжести совпадаетъ съ центромъ его фигуры. Но онъ полагалъ, что для устойчивости достаточно допустить незначительныя неправильности формы, которыя не могутъ быть открыты наблюденіями.

Англійскій ученый, прославившійся работами совсѣмъ иного рода, знаменитый электрикъ Clerk Maxwell подвергъ этотъ вопросъ весьма простому анализу. Онъ показалъ, что твердое кольцо неустойчиво, если оно не представляетъ такихъ значительныхъ неправильностей, которыя давно были бы открыты телескопомъ, если бы существовали. Если я прибавлю къ этому, что, по вычисленіямъ Hirn'а, твердое кольцо разорвалось бы подъ вліяніемъ притяженій, испытываемыхъ кольцомъ Сатурна, даже если бы было въ нѣсколько тысячъ разъ устойчивѣе стального кольца, то можно заключить, что первое предположеніе должно быть отброшено.

Перейдемъ ко второму, предложенному нѣкогда Cassini. Было бы весьма трудно изучить вопросъ въ общемъ его видѣ; Maxwell ограничился нѣкоторыми простыми частными случаями; я же буду говорить только о самомъ простомъ. Вообразимъ себѣ вѣнецъ изъ равныхъ спутниковъ, равномѣрно расположенныхъ по окружности, въ центрѣ которой находится Сатурнъ, и равномѣрно движущихся по этой окружности. Ясно, что движеніе это можетъ продолжаться безпредѣльно, если какая нибудь внѣшняя причина не нарушитъ его. Но если такая причина внесетъ въ систему весьма малую пертурбацію, то распадется ли вѣнецъ или его деформація, такъ и останется незначительной? Иными словами, устойчиво-ли равновѣсіе нашего вѣнца?

Я не могу, конечно, привести здѣсь цѣликомъ анализъ англійскаго ученаго, и долженъ ограничиться грубымъ поясненіемъ. Очевидно, прежде всего, что равновѣсіе было бы неустойчивымъ при отсутствіи центральнаго свѣтила. Если, въ самомъ дѣлѣ, какая нибудь причина сообщитъ ускореніе одному изъ спутниковъ, то онъ приблизится къ предшествующему спутнику и удалится отъ слѣдующаго за нимъ. Онъ станетъ сильнѣе притягиваться первымъ и меньше вторымъ и поэтому движеніе его ускорится еще больше. Онъ все сильнѣе будетъ стремиться впередъ и вѣнецъ разрушится.

Если же мы, напротивъ, допустимъ, что массы спутниковъ безконечно малы по отношенію къ массѣ Сатурна, то каждый спутникъ будетъ относиться такъ, какъ если бы другихъ не существовало; а мы знаемъ, что равновѣсіе изолированнаго спутника устойчиво.

Можно поэтому и не прибѣгая къ помощи полнаго вычисленія предвидѣть, что условіе устойчивости нашего вѣнца заключается въ томъ, чтобы масса его была достаточно мала по отношенію къ массѣ центральнаго свѣтила.

Тотъ же результатъ получается и для болѣе сложной системы спутниковъ; тотъ же результатъ получилъ Maxwell и при третьей гипотезѣ, т. е. предполагая массу жидкой. Вычисленіемъ, которое, быть можетъ, и не вполнѣ строго, онъ доказываетъ, что жидкое кольцо можетъ быть устойчиво въ томъ лишь случаѣ, когда его средняя плотность равна самое большее $^1/_{300}$ плотности планеты.

Результатъ, полученный Maxwell'емъ, можно дополнить соображеніемъ, на столько краткимъ, что оно можетъ быть приведено здѣсь. Извѣстно, что электрики представляютъ себѣ электрическое поле какъ бы прорѣзаннымъ большимъ числомъ силовыхъ линій. Такая линія опредѣляется тѣмъ, что въ каждой своей точкѣ касается направленія электрической силы.

Образъ этотъ для нихъ весьма удобенъ, такъ какъ замѣняетъ имъ на практикѣ массу отвлеченныхъ и сложныхъ математическихъ формулъ. Но они пользуются также и другимъ образомъ; они воображаютъ, что каждая изъ этихъ силовыхъ линій замѣщена небольшимъ каналомъ, по которому протекаетъ фиктивная жидкость съ постояннымъ расходомъ въ направленіи электрической силы. Количество этой воображаемой жидкости, пересѣкающее какую нибудь поверхность, называется силовымъ потокомъ, проходящимъ сквозь эту поверхность. Все происходитъ такъ, какъ еслибы каждая частица положительнаго электричества испускала непрерывно постоянное количество этой жидкости, а каждая молекула отрицательнаго электричества, напротивъ, непрерывно поглощала бы постоянное количество. Другими словами, возможно резюмировать всѣ законы электростатики, говоря, что силовой потокъ, пересѣкающій замкнутую поверхность, пропорціоналенъ алгебраической суммѣ электрическихъ массъ, содержащихся внутри этой поверхности.

То же правило можетъ быть приложно и къ ньютоновскому притяженію: эта сила подчиняется тому же закону, что и электрическое притяженіе, т. е. обратно пропорціональна квадратамъ разстояній. То же правило прилагается, наконецъ, и къ случаю, когда разсматриваютъ не одно лишь тяготѣніе, а равнодѣйствующую тяготѣнія и центробѣжной силы.

Вообразимъ себѣ, дѣйствительно, фиктивную матерію, которая дѣйствуетъ на сосѣднія тѣла сообразно закону Ньютона, но отталкиваетъ ихъ, а не притягиваетъ. Это, если угодно, можно выразить словами, что плотность этой матеріи отрицательна.

Предположимъ, что эта фиктивная матерія имѣетъ форму неопредѣленнаго цилиндра вращенія, внутри котораго находятся всѣ разсматриваемыя тѣла и пусть ея плотность будетъ пропорціональна скорости вращенія. Тогда отталкиваніе, производимое этой фиктивной массой, по величинѣ и направленію будетъ равно центробѣжной силѣ. Чтобы получить равнодѣйствующую тяготѣнія и центробѣжной силы, достаточно будетъ разсмотрѣть одновременное дѣйствіе всѣхъ этихъ массъ, какъ дѣйствительныхъ, такъ и фиктивныхъ.

Установивъ это, разсмотримъ нашу жидкую вращающуюся массу и возьмемъ молекулу на ея поверхности, подверженную слѣдовательно тяготѣнію и центробѣжной силѣ. Равнодѣйствующая силъ, дѣйствующихъ на эту молекулу, должна, для существованія равновѣсія, быть нормально направленной къ поверхности массы; чтобы равновѣсіе это было устойчивымъ, необходимо еще, чтобы сила эта была направлена внутрь жидкой массы, такъ какъ въ обратномъ случаѣ она стремилась бы оторвать отъ нея нашу молекулу. Всѣ силовыя линіи пересѣкаютъ поэтому нормально поверхность массы, а воображаемая жидкость, которая, какъ мы предположили, протекаетъ по нимъ и скорость которой имѣетъ направленіе равнодѣйствующей силы, должна всегда пересѣкать эту поверхность, идя снаружи внутрь. Отсюда слѣдуетъ, что общій силовой потокъ положителенъ, а такъ какъ, по вышеизложенному правилу, онъ пропорціоналенъ алгебраической суммѣ всѣхъ массъ, какъ реальныхъ, такъ и фиктивныхъ, расположенныхъ внутри этой поверхности, то и эта алгебраическая сумма должна быть положительной.

Другими словами средняя плотность дѣйствительной жидкости должна по абсолютной величинѣ быть больше средней плотности фиктивной жидкости, которая, какъ было сказано, пропорціональна квадрату скорости вращенія.

Прилагая этотъ выводъ къ кольцу Сатурна, получимъ, что жидкое кольцо можетъ быть устойчиво въ томъ лишь случаѣ, когда его плотность равна въ крайнемъ случаѣ $^1/_{16}$ части плотности планеты. Сопоставляя этотъ результатъ съ результатомъ Maxwell'я, мы приходимъ къ заключенію, что кольцо не можетъ быть жидкимъ и потому приходится принять гипотезу Cassini, повидимому подтверждающуюся наблюденіями Trouvelot.

На основаніи такихъ же соображеній кольцевыя формы равновѣсія, изученныя Ковалевской, не могутъ быть устойчивыми.

Фигура земли.—Я скажу лишь нѣсколько словъ о далеко труднѣйшемъ случаѣ, когда вращающаяся масса предполагается неоднородной. Это и имѣетъ мѣсто для земли и вопросъ еще значительно усложняется тѣмъ, что законъ измѣненія плотности съ глубиною намъ совершенно неизвѣстенъ. Не будучи въ состояніи воспользоваться имъ для вычисленія уплощенія земнаго шара, мы должны, напротивъ, попытаться открыть этотъ законъ, воспользовавшись измѣреніями геодезистовъ.

Для рѣшенія этой задачи мы располагаемъ еще одной данной—постоянной прецессіи равноденствій. Дѣйствительно, извѣстно, что явленіе это зависитъ отъ дѣйствія солнца на экваторіальное вздутіе земного шара, а такъ какъ дѣйствіе это зависитъ отъ закона измѣненія внутренней плотности, то наблюденія надъ прецессіей могутъ указать на это измѣненіе.

Сперва пытались было думать, что задача не только всегда возможна, но что она неопредѣленна и что можно, слѣдовательно, найти множество законовъ, удовлетворяющихъ этимъ двумъ даннымъ наблюденія. Совсѣмъ не такъ: рядъ послѣднихъ изысканій, изъ которыхъ изысканія Radau стоятъ на первомъ мѣстѣ и по времени и по важности, показалъ, что нельзя найти ни одного закона, удовлетворяющаго одновременно и измѣренному уплощенію и наблюдаемой прецессіи.

Геодезисты принимаютъ уплощеніе въ $^1/_{292}$, тогда какъ наибольшее уплощеніе, согласующееся съ наблюдаемой прецессіей, равно $^1/_{297}$.

Въ настоящее время невозможно высказаться о значеніи многочисленныхъ гипотезъ, которыя могутъ быть придуманы для объясненія этого разногласія.

Должно ли обратиться къ провѣркѣ геодезическихъ измѣреній, или должно предположить, что земля не есть эллипсоидъ вращенія и что уплощеніе ея различно по различнымъ меридіанамъ или въ обоихъ полушаріяхъ?

Я не полагаю, чтобы послѣднія измѣренія подтверждали этотъ выводъ.

Нельзя ли допустить, что земля, затвердѣвшая давно уже почти во всей своей массѣ, сохранила уплощеніе, соотвѣтствующее той скорости вращенія, какую она имѣла въ моментъ своего затвердѣванія и что вращеніе ея съ той поры значительно замедлилось дѣйствіемъ приливовъ?

Предположить ли, напротивъ, что твердая кора весьма тонка и что оставшаяся жидкой внутренняя часть обладаетъ сложными движеніями, весьма отличными отъ движеній твердаго тѣла? Такъ какъ вычисленія Лапласа были сдѣланы разсматривая землю какъ неизмѣнное твердое тѣло, то понятно, что прецессія такой системы можетъ быть весьма отлична отъ теоретической прецессіи.

Можно допустить, наконецъ, что первоначальное уплощеніе измѣнилось, такъ какъ различные слои, сокращаясь вслѣдствіе охлажденія земного шара, давили другъ на друга и взаимно деформировались.

Но я останавливаюсь; безполезно увеличивать число гипотезъ, потому что всѣ эти вопросы не могутъ быть рѣшены a priori.

H. Poincaré (de l'Académie des Sciences).

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Девятый съѣздъ русскихъ естествоиспытателей и врачей разрѣшенъ въ Москвѣ съ 3-го по 11-е января 1894 г. въ зданіяхъ университета.

Перепечатываемъ безъ всякихъ измѣненій изъ одного отечественнаго періодическаго изданія, заслуживающаго всякаго довѣрія, слѣдующее извѣстіе, не нуждающееся ни въ какихъ комментаріяхъ.

„Жизненный токъ“ и его измѣреніе. Слово „жизненный токъ“ упоминалось много разъ въ ученыхъ сочиненіяхъ, особенно по части магнетизма, вообще, и животнаго, въ частности, но никто еще не доказалъ его существованіе. Докторъ Барадюкъ, послѣ долгихъ изысканій, нашелъ такой чувствительный приборъ, съ помощью котораго ему, какъ будто, удалось наглядно доказать, что отъ каждаго человѣка исходитъ какая-то таинственная сила, которая отличается отъ всѣхъ другихъ силъ, изслѣдованныхъ физикой, и которую, по его словамъ, нельзя смѣшивать ни съ электричествомъ, ни съ теплотою, ни съ притяженіемъ. Приборъ Барадюка состоитъ изъ мѣдной иглы, привѣшенной къ тончайшей, едва замѣтной ниткѣ отъ кокона и свободно вращающейся надъ циферблатомъ, подобно стрѣлкѣ компаса. Игла съ циферблатомъ прикрыты стеклянымъ колпакомъ. Барадюкъ наблюдалъ, что при приближеніи къ колпаку руки, на уровнѣ съ иглой, послѣдняя или отклоняется, или притягивается, причемъ размѣры подобныхъ уклоненій можно точно вычислитъ по циферблату. Колебанія иглы различны, смотря по приближающимся къ нимъ людямъ, и изобрѣтатель прибора увѣряетъ, будто бы, при приближеніи къ иглѣ одного и того же человѣка, уклоненія ея бываютъ слабѣе или сильнѣе, что зависитъ отъ его физическаго и нравственнаго состоянія. Основываясь на своихъ опытахъ, Барадюкъ полагаетъ, что людей можно классифицировать по степени воздѣйствія, проявляемаго ихъ „жизненнымъ токомъ“, и увѣряетъ, что болѣзни, впечатлѣнія и волненія выражаются внутренними психическими переворотами, напряженность которыхъ можетъ быть въ точности измѣрена изобрѣтеннымъ имъ приборомъ“.

СМѢСЬ.

Сравненіе скоростей при различныхъ движеніяхъ было сдѣлано англичаниномъ Джемсомъ Джексономъ, который составилъ таблицу, расположивъ въ возрастающемъ порядкѣ 300 численныхъ значеній скоростей при самыхъ разнообразныхъ движеніяхъ. Вотъ наиболѣе интересные изъ найденныхъ имъ результатовъ, выраженные въ метрахъ въ секунду.*)

Скоростъ роста ногтя	0,000000002
„ „ бамбуковой трости	0,0000064
„ кровяныхъ шариковъ въ капиллярахъ	0,00075
„ угря	0,19
„ крови въ аортѣ	0, 4
Наибольшая скорость гребцовъ при гонкѣ	5,79
Скорость обыкновеннаго вѣтра	5—6
„ спокойно плавающаго кита	6,69
„ морской волны	6,82
„ обыкновеннаго полета мухи	7,62
„ быстраго бѣга наренькахъ	9,45
„ паденія тѣла въ началѣ 2-й секунды	9,81
„ свѣжаго вѣтра	10
„ дождевой капли	11
„ велосипеда (средняя)	12,5
„ поѣзда при 60 верстахъ въ часъ	16,67
„ перепелки	17, 8
„ легкой лошади во всю рысь въ 1-ую секунду	18,71
„ падающаго тѣла, начиная съ 51 сажени	44,29
„ урагана, вырывающаго деревья	45
„ самыхъ большихъ волнъ	45,83
„ полета ласточки	67
„ распространенія ощущенія въ нервѣ человѣка	132
Скорость (начальная) полета пули изъ духового ружья	206
Скорость звука въ сухомъ воздухѣ	331, 1
„ (начальная) полета пули изъ огнестрѣльнаго ружья	620

*) Небольшая таблица среднихъ скоростей была помѣщена нами во II-мъ семестрѣ (стр. 67). Мы исключили изъ таблицы Джексона приведенныя тамъ скорости.

Скорость	луны въ апогеѣ	970
„	(начальная) пушечнаго ядра	1013
„	звука въ бронзѣ и дубѣ	3628
„	аэролита Оргейля (14-го мая 1864 г.) . .	20000
„	круговращенія земли	29519
„	кометы Галлея въ перигеліи	393000
„	электричества въ кабелѣ	4000000
„	„ въ проволокѣ	36000000
„	свѣта въ водѣ	225000000
„	„ въ воздухѣ	300000000
„	электричества при разряженіи лейденской банки при помощи мѣдной проволоки, имѣющей 0,0017 метра въ діаметрѣ	453500000

ЗАДАЧИ.

№ 504. Дана окружность съ центромъ въ точкѣ O и съ радіусомъ r. Въ концахъ діаметра AB проведены касательныя MM' и NN' и еще проведена перемѣнная касательная LL', пересѣкающая ихъ соотвѣтственно въ точкахъ C и D. Изъ этихъ точекъ возставлены перпендикуляры CX и DY къ касательной LL' и продолжены до пересѣченія съ діаметромъ AB въ точкахъ X и Y. Показать, что

$$\frac{1}{OX}+\frac{1}{OY}=\frac{2}{r}.$$

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 505. Рѣшить уравненіе

$$2\operatorname{sn}3x=3\cos x+\cos 3x.$$

(Заимств.) *Д. Е.* (Ив.-Вознес.).

№ 506. Вычислить стороны треугольника, зная радіусъ вписаннаго въ треугольникъ круга r и радіусы двухъ внѣвписанныхъ круговъ ϱ_a и ϱ_b.

В. Перельцвейгъ (Полтава).

№ 507. Рѣшить уравненіе

$$2x^3-x^2=1.$$

С. Адамовичъ (Курскъ).

№ 508. Найти сумму ряда

$$S = \mathrm{sn}^3 a + \frac{1}{3}\,\mathrm{sn}^3\,3a + \frac{1}{9}\,\mathrm{sn}^3\,9a + \ldots\ldots + \frac{1}{3^n}\,\mathrm{sn}^3\,3^n a.$$

Пользуясь полученнымъ равенствомъ, опредѣлить сумму членовъ геометрической прогрессіи

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots\ldots + \frac{1}{3^n}.$$

И. Вонсикъ (Спб.).

№ 509. Найти истинную величину выраженія

$$\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4aq + 4bq}}{2(a-b)},$$

при $a = b$.

А. Рѣзновъ (Самара).

№ 510. Батарея состоитъ изъ 6 элементовъ Даніэля, расположенныхъ въ два параллельно соединенныхъ ряда по три послѣдовательно соединенныхъ элемента въ каждомъ. Электровозбудительная сила каждаго элемента = 1,1 вольта, а сопротивленіе = 1,5 ома. Полюсы батареи соединены проволокой, имѣющей сопротивленіе въ 11 омъ. Вычислить силу тока въ амперахъ.

(Заимств.) *Д. Е.* (Ив.-Вознес.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 126 (2 сер.). Въ треугольникѣ ABC проведена сѣкущая, пересѣкающая стороны AC и BC соотвѣтственно въ точкахъ M и P, такъ что MP = AM + BP. Показать, что всѣ удовлетворяющія этому условію сѣкущія будутъ касаться окружности постояннаго центра и радіуса.

Пусть AC > BC. Продолжимъ BC до точки D такъ, чтобы CD = AC. Пусть E — середина BD. На сторонѣ AC отложимъ AF = BE; тогда CF = CE. Проведемъ окружность, касательную къ сторонамъ AC и BC въ точкахъ F и E и прямую MP, касательную къ этой окружности (M на AC, P на BC). Тогда MP = MF + PE = MF + AF + PE — BE = AM + BP.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ); *Н. Соловьевъ* (Москва).

№ 233 (2 сер.). Опредѣлить сумму n членовъ

$$\mathrm{sn}a.\,\mathrm{sn}b + \mathrm{sn}b.\,\mathrm{sn}c + \mathrm{sn}c.\,\mathrm{sn}d + \ldots\ldots + \mathrm{sn}u.\,\mathrm{sn}v,$$

при условіи, что $a, b, c, d, \ldots\ldots u, v$ образуютъ ариѳметическую прогрессію.

Пусть r — знаменатель прогрессіи; тогда

$$S = \operatorname{sn} a . \operatorname{sn}(a+r) + \operatorname{sn}(a+r) . \operatorname{sn}(a+2r) + \ldots + \operatorname{sn}[a+(n-1)r] \operatorname{sn}(a+nr).$$

Умноживъ все на 2 и замѣчая, что

$$2 \operatorname{sn} a . \operatorname{sn}(a+r) = \cos r - \cos(2a+r)$$
$$2 \operatorname{sn}(a+r) . \operatorname{sn}(a+2r) = \cos r - \cos(2a+3r)$$
$$2 \operatorname{sn}(a+2r) . \operatorname{sn}(a+3r) = \cos r - \cos(2a+5r)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2 \operatorname{sn}[a+(n-1)r] . \operatorname{sn}(a+nr) = \cos r - \cos[2a+(2n-1)r],$$

приведемъ данное выраженіе къ виду

$$2S = n . \cos r - [\cos(2a+r) + \cos(2a+3r) + \ldots + \cos(2a+(2n-1)r)].$$

Умноживъ это выраженіе на $2\operatorname{sn} r$, и замѣчая, что

$$2 \operatorname{sn} r . \cos(2a+r) = \operatorname{sn} 2(a+r) - \operatorname{sn} 2a$$
$$2 \operatorname{sn} r . \cos(2a+3r) = \operatorname{sn} 2(a+2r) - \operatorname{sn} 2(a+r)$$
$$2 \operatorname{sn} r . \cos(a+5r) = \operatorname{sn} 2(a+3r) - \operatorname{sn} 2(a+2r)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2 \operatorname{sn} r . \cos[2a+(2n-1)r] = \operatorname{sn} 2(a+nr) - \operatorname{sn} 2[a+(n-1)r],$$

получимъ

$$S = \frac{n \operatorname{sn} 2r - 2\cos(2a+rn) . \operatorname{sn} rn}{4 \operatorname{sn} r}.$$

П. Ѳедосеевъ (Троицкъ); *И. Богоявленскій* (Шуя); *И. Вонсикъ* (Воронежъ); *В. Россовская* (Курскъ); *О. Озаровская* (Спб.).

№ 242 (2 сер.). По одну сторону прямой MN даны двѣ точки A и B, между которыми разстояніе $AB = c$; перпендикуляры, опущенные изъ данныхъ точекъ на данную прямую MN, назовемъ: AD черезъ a и BE черезъ b. Опредѣлить радіусы окружностей, проходящихъ черезъ точки A и B и касательныхъ къ прямой MN. Изслѣдовать частный случай, когда $a = b$ и $c = 2a$.

Пусть $a > b$. Продолживъ AB до пересѣченія съ MN въ точкѣ C, откладываемъ на MN, по обѣ стороны отъ C отрѣзки CF и CF′, равные каждый средней пропорціональной между AC и BC. Точки F и F′ суть очевидно точки касанія искомыхъ окружностей съ MN. Пусть центръ меньшей окружности будетъ въ точкѣ O, а радіусъ ея обозначимъ черезъ r; $DF = m$; $EF = n$. Соединивъ O съ A и B и проведя OP и BQ || MN, изъ треугольниковъ ABQ, OBQ′ (Q′ на OD и на BQ) и APO легко получимъ:

$$c^2 = (a-b)^2 + (m+n)^2 \ldots\ldots (1); \quad r^2 = (r-b)^2 + n^2 \ldots\ldots (2)$$
$$r^2 = (a-r)^2 + m^2 \ldots\ldots\ldots (3)$$

опредѣляя n и m изъ ур. (2) и (3) и подставляя найденныя значенія въ (1), получимъ послѣ сокращеній квадратное ур—іе, которое даетъ

$$r = \frac{c\left[ac + bc \pm 2\sqrt{ab[c^2-(a-b)^2]}\right]}{2(a-b)^2}.$$

Знакъ $+$ соотвѣтствуетъ большей окружности.

При $a=b$ и $c=2a$ выраженіе это даетъ ∞ и $0/0$. Истинную величину $(=a)$ найдемъ, умноживъ числителя и знаменателя на

$$ac+bc+2\sqrt{ab[c^2-(a-b)^2]}.$$

В. Костинъ (Симбирскъ); *К. Щиголевъ* (Курскъ); *А. П.* (Пенза).

№ 249 (2 сер.). Опредѣлить предѣлъ суммы членовъ ряда

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2.3}+\frac{3}{2.3.4}+\frac{4}{2.3.4.5}+\ldots\ldots$$

Полагая въ тожествѣ

$$a-a_n=(a-a_1)+(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\ldots+(a_{n-1}-a_n)$$

$$a=1,\ a_1=\frac{1}{2},\ a_2=\frac{1}{2.3},\ a_3=\frac{1}{2.3.4.}\ \text{и т. д.}\ a_n=\frac{1}{2.3\ldots(n+1)},$$

получимъ

$$1-\frac{1}{2.3.4\ldots(n+1)}=\frac{1}{2}+\frac{2}{2.3}+\frac{3}{2.3.4}+\ldots\ldots+\frac{n}{2.3.4\ldots(n+1)},$$

откуда видно, что при $n=\infty$ предѣлъ искомой суммы $=1$.

И. Вонсикъ (Воронежъ); *А. Охитовичъ* (Сарапуль); *В. Костинъ* (Симбирскъ); *К. Щиголевъ* (Курскъ).

№ 277 (2 сер.). Найти истинную величину выраженія $\frac{\operatorname{sn} x}{x(1-x)}$ при $x=0$,

$$\frac{\operatorname{sn} x}{x(1-x)}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{\operatorname{sn} x}{x}.$$

При $x=0$ первый множитель $=1$, а $\lim \operatorname{sn} x=x$; поэтому искомый предѣлъ $=1$.

А. Рѣзновъ (Самара); *Я. Тепляковъ* (Радомысль); *В. Костинъ* (Симбирскъ); *В. Россовская* (Курскъ).

№ 311 (2 сер.). Вершины даннаго ромба соединены прямыми съ серединами его сторонъ. Пересѣченіе этихъ прямыхъ даетъ симметричный восьмиугольникъ, площадь котораго требуется опредѣлить по данной сторонѣ ромба a и его острому углу α.

Назовемъ середины сторонъ ромба AB, BC, CD, DA соотвѣтственно черезъ O_1, O_2, O_3, O_4, а пересѣченіе діагоналей черезъ O. Пусть

O_1D пересѣкаетъ AC въ точкѣ F, а O_2O_4 въ точкѣ G. Треугольники AOO_4 и FOG имѣютъ общій уголъ, поэтому

$$\frac{\triangle\, AOO_4}{\triangle\, FOG} = \frac{AO.OO_4}{FO.OG}.$$

Такъ какъ точка F есть центръ тяжести треугольника ABD, а точка G—центръ параллелограмма AO_1O_3D, то $AO:FO = 3$ и $OO_4:OG = 2$; поэтому $\triangle\, AOO_4 : \triangle FOG = 6$. Повторяя то же разсужденіе для прочихъ семи треугольниковъ, найдемъ, что искомая площадь S равна $^1/_6$ площади ромба, т. е.

$$S = \frac{a^2 \sin\alpha}{6}.$$

К. Щиголевъ (Курскъ); *В. Буханцевъ* (Борисоглѣбскъ).

№ 379 (2 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\sqrt[5]{\frac{211}{x^5} + \frac{1}{x^4} + \frac{\sqrt{211+x}}{211}} = \frac{729\sqrt[5]{x}}{13504}.$$

Данное уравненіе легко можетъ быть представлено въ видѣ

$$\sqrt[5]{(211+x)^6} = \left(\frac{3}{2}\right)^6 \sqrt[5]{x^6},$$

откуда

$$\left(\frac{211+x}{x}\right)^6 = \left(\frac{3}{2}\right)^{30}; \quad \frac{211+x}{x} = \left(\frac{3}{2}\right)^5; \quad x = 32.$$

Н. Николаевъ (Пенза); *Я. Тепляковъ* (Радомысль); *А. Герасимовъ* (Кременчугъ); *О. Озаровская* (Спб.); *В. Буханцевъ* (Борисоглѣбскъ); *К. Капріелли, М. Павловъ* (Одесса); *С. Бабанская, А. Васильева, П. Завріевъ, В. Бутенко, И. Каламкаровъ, К. Исаковъ* (Тифлисъ); *А. Гуминскій* (Троицкъ); *В. Ахматовъ* (Тула); *Н. Татосовъ* (Симбирскъ); *А. Рѣзновъ* (Самара); *А. Быховскій* (Черниговъ); *С. Карчъ-Карчевскій.*

Запоздавшія рѣшенія задачъ 2-й серіи получены отъ *П. Хлѣбникова* (Тула)—№№ 363, 365, 366; *П. Иванова* (Одесса)—№№ 326, 349; *С. Луневскаго* (Калуга)—№ 377; *И. Алферова* (Красноуфимскъ)—№ 377.

Конецъ XIV-го семестра.

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса, 31-го Іюля 1893 г.
„Центральная типо-литографія", уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. Болгарова.

Обложка
пщется

Обложка
ищется