Обложка
ищется

Обложка
ищется

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

XIII Сем. № 148. № 4.

ГЕОМЕТРИЧЕСКІЕ МЕТОДЫ РАЗЫСКАНІЯ MAXIMUM И MINIMUM.

Пусть требуется отыскать М*) какого-нибудь элемента фигуры, въ которой элементы a, b и c имѣютъ опредѣленную величину.

Общій способъ чисто геометрическаго рѣшенія этой задачи состоитъ въ слѣдующемъ. Даемъ искомому элементу x опредѣленное значеніе $x=d$ и рѣшаемъ слѣдующую задачу: „построить фигуру, зная ея части a, b, c и d“. Для этого пользуемся всѣми методами геометрическихъ построеній. Затѣмъ, разрѣшивъ задачу, дѣлаемъ элементъ d перемѣннымъ и замѣчаемъ тѣ особенности построенія, которыя возникнутъ при достиженіи элементомъ d наибольшаго или наименьшаго значенія. Если это удастся, то вопросъ рѣшенъ самъ собою. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ весьма удобно пользоваться изслѣдованіемъ рѣшенія. Положимъ, что для возможности рѣшенія нашей задачи на построеніе необходимо, чтобъ $d \leqslant d_1$, гдѣ d_1 есть элементъ, который можетъ быть выраженъ черезъ данныя a, b и c. Тогда $max.\ d = d_1$. Наоборотъ, если условіе возможности задачи будетъ $d \geqslant d_1$, то $minim.\ d = d_1$. Въ обоихъ слу-

*) М обозначаетъ *maximum* или *minimum*, смотря по тому, что имѣетъ мѣсто.

чаяхъ построеніе даетъ, по меньшей мѣрѣ, полезныя указанія для рѣшенія вопроса.

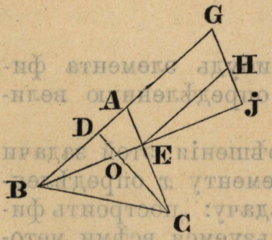
Конечно, простѣйшія задачи можно рѣшить непосредственнымъ разсмотрѣніемъ изображенія искомой фигуры. Поэтому указанный методъ рѣшенія обнаруживаетъ всю свою силу только въ трудныхъ задачахъ. Въ подтвержденіе сказаннаго приводимъ примѣры; нѣкоторые изъ нихъ, можетъ быть, будутъ интересны и сами по себѣ.

1. *Изъ всѣхъ треугольниковъ, имѣющихъ опредѣленныя основаніе a и уголъ A, найти треугольникъ, имѣющій наибольшую сумму сторонъ $b+c$.*

Построимъ треугольникъ по даннымъ A, a и $b+c=s$. Пользуясь способомъ выпрямленія, опишемъ на основаніи $BC=a$ дугу, вмѣщающую уголъ, равный половинѣ A, затѣмъ изъ B опишемъ дугу радіусомъ s до встрѣчи съ первою дугою въ точкѣ D; изъ середины CD возставляемъ перпендикуляръ, встрѣчающій BD въ точкѣ A. Тогда $\triangle BAC$ будетъ искомый. Наибольшее значеніе суммы $b+c$ или прямой BD будетъ тогда, когда она проходитъ чрезъ центръ O. Возставивъ изъ середины CE перпендикуляръ, замѣчаемъ, что онъ пройдетъ черезъ O; поэтому искомый треугольникъ будетъ равнобедренный.

2. *Изъ всѣхъ $\triangle\triangle$, имѣющихъ опредѣленныя A и a, найти треугольникъ, имѣющій наибольшую сумму h_b+h_c.*

Строимъ $\triangle$ по даннымъ a, A и $h_b+h_c=s$ *). Перенесемъ (фиг. 30) $\triangle ADC$ въ положеніе $\triangle EHJ$ такъ, чтобъ $BJ=s$; затѣмъ EH перенесемъ параллельно въ AG. Тогда можно построить $\triangle BGJ$ по даннымъ сторонѣ и двумъ угламъ и станетъ извѣстна $BG=AB+AC$. Послѣ этого вопросъ приводится къ построенію треугольника по даннымъ a, A и $b+c$. Такъ какъ форма $\triangle BGJ$ опредѣленная, то наибольшее значеніе h_b+h_c будетъ при наибольшемъ значеніи суммы $b+c$ и вслѣдствіе того искомый треугольникъ будетъ равнобедренный.



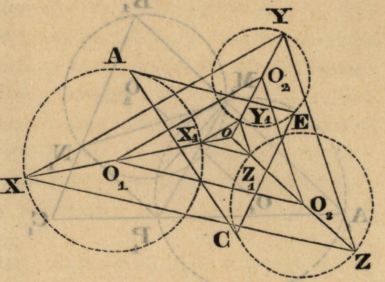
Фиг. 30.

3. *Даны окружности O_1, O_2 и O_3. Начертить треугольникъ, подобный $\triangle O_1O_2O_3$, такъ чтобы вершины его лежали на окружностяхъ и чтобъ онъ имѣлъ наиб. или наим. размѣры.*

Даемъ искомому треугольнику опредѣленные размѣры, именно, положимъ, для простоты чертежа, что онъ равенъ $\triangle O_1O_2O_3$. Тогда надо начертить треугольникъ, равный $\triangle O_1O_2O_3$, такъ чтобы вер-

*) Эта задача, какъ и многія другія, совершенно напрасно помѣщена въ числѣ задачъ, рѣшаемыхъ съ помощью алгебры въ „Собраніи геометрическихъ задачъ на построеніе“ П. Некрасова, № 252.

шины его лежали на окружностяхъ. Опредѣлимъ центръ вращенія искомаго $\triangle AEC$ и $\triangle O_1O_2O_3$ (фиг. 31). Если искомый центръ вращенія будетъ O, то изъ подобія $\triangle\triangle AOO_1$, EO_2O и COO_3 находимъ $O_1O : O_2O : O_3O = R_1 : R_2 : R_3$. Вслѣдствіе этого точка O опредѣлится пересѣченіемъ двухъ окружностей: первой, точки которой отъ точекъ O_1 и O_2 находятся въ разстояніяхъ, пропорціональныхъ $R_1 : R_2$, и второй, точки которой отъ точекъ O_2 и O_3 находятся въ разстояніяхъ, пропорціональныхъ R_2 и R_3. Когда опредѣлится точка O, останется изъ центра O описать дуги радіусами, равными OO_1, OO_2 и OO_3 до встрѣчи съ окружностями въ точкахъ A, E и C. Получимъ два рѣшенія. Замѣтивъ способъ полученія точки A, не трудно рѣшить нашъ вопросъ. $\triangle AEC$ пріобрѣтетъ наибольшіе размѣры при наибольшихъ размѣрахъ прямыхъ AO, EO и OC. Эти прямыя надо увеличивать такъ, чтобы отношеніе между ними оставалось одно и то же. Очевидно, наибольшее и наименьшее значеніе этихъ прямыхъ будетъ тогда, когда дуги, описанныя изъ центра O, будутъ касаться данныхъ окружностей. Поэтому наибольшее значеніе $\triangle AEC$ будетъ $\triangle XYZ$, а наименьшее—$\triangle X_1Y_1Z_1$. Стороны того и другого параллельны сторонамъ треугольника $O_1O_2O_3$.



Фиг. 31.

Возвращаясь теперь къ первоначальной общей задачѣ, замѣтимъ, что къ указанному способу отысканія M приводятся другіе пріемы рѣшенія, которые имѣютъ свой особый характеръ. Вотъ эти пріемы.

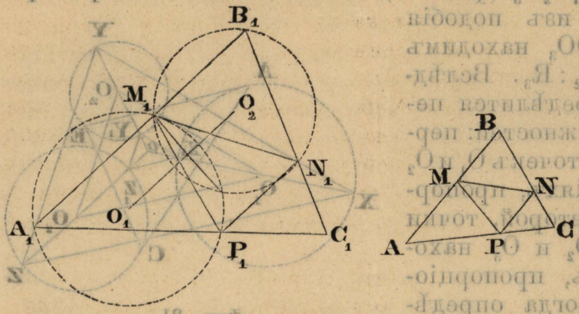
a) Если по качеству данныхъ a, b, c и d окажется возможнымъ построить фигуру, подобную искомой, а не равную ей, тогда достаточно найти M элемента d_1, сходственнаго съ элементомъ d, только относительно какого-нибудь элемента построенной фигуры, напримѣръ, элемента a_1, сходственнаго съ элементомъ a. Въ этомъ случаѣ достаточно найти, такъ сказать, относительный M. Въ самомъ дѣлѣ изъ пропорціи $d : a = d_1 : a_1$ видно, что при *maximum* d_1 относительно a_1 элементъ d достигаетъ *maximum* относительно a, и, слѣдов., относительно элементовъ b и c, такъ какъ отношенія $a : b$ и $a : c$ имѣютъ опредѣленную величину. Построенную фигуру останется наложить на данную или умножить ее на $a : a_1$. Лучшимъ примѣромъ этого способа служитъ № 30, которая весьма не легко рѣшается алгеброй. Вотъ еще примѣръ.

4. *Въ данный $\triangle ABC$ вписать $\triangle MNP$, который имѣлъ бы наименьшую площадь и былъ бы подобенъ данному $\triangle M_1N_1P_1$* *).

Пользуемся методомъ обратности и построимъ фигуру, по-

*) Эта задача представляетъ обобщеніе задачи за № 380 у Петерсена. Предлагаемый имъ способъ рѣшенія съ помощью общей теоріи вращенія по простотѣ уступаетъ указываемому мной рѣшенію.

добную искомой (фиг. 32). Для этого на сторонахъ M_1N_1 и M_1P_1 описываемъ дуги, вмѣщающія углы, равные угламъ B и A даннаго треугольника. Далѣе, такъ какъ искомая сторона MN должна имѣть наименьшее значеніе относительно AB, то сторона A_1B_1 искомой подобной фигуры должна имѣть наибольшее значеніе относительно M_1N_1. Поэтому черезъ точку M надо провести сѣкущую такъ, чтобъ сумма полученныхъ хордъ $A_1M_1 + M_1B_1$ была наибольшая. Легко видѣть, что A_1B_1 параллельна прямой, соединяющей центры O_2 и O_1. Построивъ фигуру $A_1B_1C_1$, подобную $\triangle ABC$, раздѣлимъ AB въ точкѣ M такъ, чтобъ $AM : MB = A_1M_1 : M_1B_1$. Точка M будетъ искомая. Въ самомъ дѣлѣ $\triangle A_1B_1C_1$ будетъ наибольшій изъ всѣхъ треугольниковъ такой же формы, описанныхъ около $\triangle M_1N_1P_1$. Поэтому $\triangle MNP$ имѣетъ наименьшую площадь изъ всѣхъ треугольниковъ той же формы, вписанныхъ въ $\triangle ABC$. Для полной ясности достаточно разсмотрѣть пропорцію



(Фиг. 32)

$$\triangle MNP : \triangle ABC = \triangle M_1N_1P : \triangle A_1B_1C_1.$$

b) Въ предыдущихъ примѣрахъ элементъ d искомой фигуры достигаетъ *max.* или *min.* относительно каждаго элемента a, b и c. Поэтому *min.* или *max.* элемента, напр., a долженъ имѣть мѣсто при *max.* или *min.* элемента d. Вслѣдствіе этого рѣшеніе всякой задачи на M вмѣстѣ съ тѣмъ даетъ рѣшеніе и обратной задачи*).

Въ подтвержденіе сказаннаго приводимъ слѣдующее разсужденіе, которое, хотя ведено на частныхъ примѣрахъ, но имѣетъ общій характеръ.

Въ задачѣ 25 доказано, что изъ всѣхъ фигуръ опредѣленной площади наименьшій периметръ принадлежитъ окружности. Зная это, докажемъ, что изъ всѣхъ фигуръ опредѣленнаго периметра наибольшую площадь имѣетъ также окружность. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что искомая фигура не есть окружность и пусть k^2 есть искомая площадь. Построимъ кругъ, площадь котораго равна k^2; длина полученной окружности на основаніи задачи 25 будетъ меньше даннаго периметра. Увеличивая радіусъ построеннаго круга такъ, чтобъ его периметръ достигъ до даннаго, мы вмѣстѣ съ тѣмъ увеличимъ и его площадь, которая станетъ больше k^2; поэтому k^2 не есть искомый *max.*

Вотъ еще примѣръ.

---

*) Если одно изъ данныхъ вопроса перенесемъ въ число искомыхъ и обратно, то получимъ задачу, обратную данной задачѣ. Проводимое здѣсь начало можетъ быть также выведено съ помощью квадр. и биквадр. уравненій.

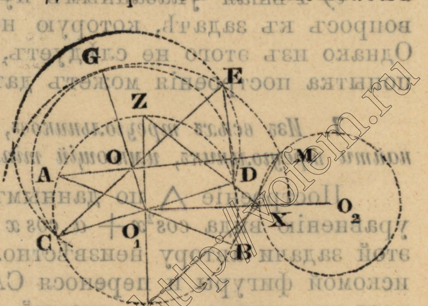
Извѣстно, что *maximum* высоты h_a треугольника съ постоянными a и A принадлежитъ равнобедренному треугольнику. Докажемъ, что *min.* основанія a треугольника съ постоянными A и h_a будетъ принадлежать также равнобедренному треугольнику. Пусть искомый $\triangle$ не будетъ равнобедреннымъ и m будетъ искомое основаніе. Построимъ равнобедренный $\triangle$ по основанію m и углу при вершинѣ A. Тогда его высота изъ угла A станетъ больше данной величины h_a и, проводя параллели основанію и уменьшая высоту построеннаго $\triangle$ до h_a, можно будетъ найти $\triangle$ съ постоянными A и h_a, но съ основаніемъ, меньшимъ m. Поэтому m не есть искомый *minimum*.

Подобное разсужденіе можетъ быть примѣнено къ всякой задачѣ на M, такъ что *max.* прямой задачи соотвѣтствуетъ *min.* обратной задачи и наоборотъ. Указанный пріемъ позволяетъ, во-первыхъ, вмѣсто данной задачи рѣшить обратную задачу, а, во-вторыхъ, иногда даетъ сразу рѣшеніе нѣсколькихъ задачъ. Задачи за №№ 23, 26 и 28 служатъ отличными примѣрами этого пріема.

c) Иногда задача бываетъ такъ сложна, что сразу рѣшить ее затруднительно. Въ такомъ случаѣ можно упростить задачу, или взявъ ея частный случай, или подчинивъ искомое менѣе широкимъ условіямъ. Въ обоихъ случаяхъ построеніе дастъ весьма полезныя указанія и для общаго случая; останется перейти отъ рѣшенной задачи къ данному вопросу. Лучшимъ примѣромъ этого можетъ служить задача № 11, если свести ея рѣшеніе на задачи №№ 10 и 9, условія которыхъ менѣе широки. Вотъ другой примѣръ.

5. *Даны окружности O_1 и O_2. Отыскать точки на первой Y и Z, а на второй — точку X такъ, чтобъ YZ равнялась діаметру и $\angle$ YXZ имѣлъ наибольшую величину (фиг. 33).*

Начнемъ съ простѣйшаго случая, когда вторая окружность обращается въ точку, и вмѣсто второй окружности возьмемъ, напримѣръ, точку M. Тогда, придерживаясь указаннаго метода, надо сначала рѣшить слѣд. задачу: „въ окружности O_1 провести діаметръ, виднѣющійся изъ данной точки M подъ опредѣленнымъ угломъ φ“. Для построенія беремъ произвольный діаметръ CD и описываемъ на немъ дугу CED, вмѣщающую угол φ. Затѣмъ изъ центра O_1 описываемъ радіусомъ O_1M дугу до встрѣчи съ первою дугою въ точкѣ E. Полученный $\triangle$ECD надо повернуть около O_1 на $\angle EO_1M$ въ положеніи $\triangle$ MAB. Діаметръ AB будетъ искомый. Начинаемъ теперь мѣнять уголъ φ и замѣчаемъ, что при увеличеніи угла φ радіусъ окружности CDE будетъ уменьшаться и обратно. Наименьшее значеніе этого радіуса будетъ тогда, когда окружности CDE и EM будутъ касаться. Поэтому для рѣшенія задачи надо черезъ точки C и D провести окружность O



Фиг. 33.

касательную къ окружности ЕМ. Центръ этой окружности будетъ въ пересѣченіи $O_1G \perp CD$ и перпендикуляра, возставленнаго къ CG въ ея серединѣ. Искомый уголъ равенъ $\angle CGD$. Остается CGD повернуть на $\angle GO_1M$ около центра вращенія O_1. Чтобы перейти къ данной задачѣ надо изъ всѣхъ точекъ окружности O_2, играющихъ роль точки М, выбрать такую точку, которая всѣхъ ближе къ центру O_1, такъ какъ только подъ этимъ условіемъ радіусъ окружности О будетъ наименьшимъ. Очевидно, искомая точка будетъ точка X и искомый діаметръ перпендикуляренъ къ O_1O_2. Рѣшеніе останется то же самое, если длина хорды YZ должна равняться опредѣленной длинѣ, меньшей діаметра АВ.

d) Иногда неизвѣстный М бываетъ такого рода, что мы не въ силахъ дать ему опредѣленную геометрическую форму, не зная ее напередъ, такъ что даже метода подобія примѣнить невозможно. Въ такомъ случаѣ весьма полезно представлять себѣ искомое вполнѣ опредѣленнымъ по величинѣ и формѣ, не только въ его цѣломъ, но и въ какой угодно части. Тогда останется разложить задачу на рядъ задачъ и затѣмъ примѣнить задачи, рѣшенныя раньше.

Такимъ путемъ можно достигнуть значительныхъ результатовъ. Лучшіе примѣры №№ 25 и 27. Вотъ еще примѣръ.

6. *Изъ всѣхъ четыреугольниковъ опредѣленной площади указать четыреугольникъ наименьшаго периметра.*

Пусть фигура ABCD будетъ искомая. Площадь $\triangle ABC$ должна имѣть опредѣленную величину и опредѣленное основаніе АС; поэтому сумма $AB + BC$ будетъ наименьшая тогда, когда $AB = BC$. Площадь $\triangle BCD$ тоже опредѣленная и основаніе BD есть постоянное; поэтому сумма $BC + CD$ будетъ наименьшею тогда, когда $BC = CD$. Такимъ образомъ искомая фигура должна быть ромбомъ. Изъ всѣхъ ромбовъ, имѣющихъ опредѣленную площадь, *min.* периметра будетъ принадлежать тому изъ нихъ, для котораго отношеніе радіуса вписаннаго круга къ основанію будетъ наибольшее. Искомая фигура есть квадратъ.

e) Рѣшая указаннымъ путемъ задачи, иногда мы приведемъ вопросъ къ задачѣ, которую не умѣемъ разрѣшить построеніемъ. Однако изъ этого не слѣдуетъ, что нельзя найти искомаго. Одна попытка построенія можетъ дать рѣшеніе. Напримѣръ:

7. *Изъ всѣхъ треугольниковъ, имѣющихъ опредѣленныя h_c и $A - B$, найти треугольникъ, имѣющій min. суммы $(a+b)$.*

Построеніе $\triangle$ по даннымъ $a + b$, $A - B$ и h_c приводитъ къ уравненію вида $\cos^2 x + a \cos x = b$; чисто геометрическое рѣшеніе этой задачи автору неизвѣстно. Однако, разсматривая изображеніе искомой фигуры и перенося СА въ CA_1 по другую сторону h_c, сейчасъ же видимъ, что искомый треугольникъ будетъ имѣть прямой уголъ А.

Наконецъ, общій способъ рѣшенія задачъ на М даетъ возможность видѣть, возможенъ или нѣтъ искомый геометрическій М. Напримѣръ.

8. *Изъ всѣхъ* $\triangle\triangle$, *имѣющихъ опредѣленные* a *и* $b+c$, *указать треугольникъ, имѣющій М равнодѣлящей угла* A *).

Построимъ $\triangle ABC$, зная a, $b+c$ и b_A. Проводя $CD \parallel b_A$ до встрѣчи съ c въ точкѣ D, находимъ $CD=\frac{b_A(b+c)}{a}$. Теперь можно построить $\triangle BDC$ и перейти затѣмъ къ $\triangle ABC$ ($AC=AD$). Наибольшее значеніе $CD=a+b+c$, наименьшее—$(b+c-a)$. Но въ этихъ случаяхъ треугольникъ обращается въ прямую; поэтому искомое не имѣетъ М.

Изъ всего сказаннаго видно, что всякая задача, возможность рѣшенія которой обусловлена нѣкоторою зависимостью между данными, иначе говоря, всякая задача, не имѣющая обязательно существующаго рѣшенія, можетъ при нѣкоторомъ вниманіи дать задачу на геометрическій М. Конечно, множество задачъ на М могутъ быть сдѣланы безъ рѣшенія соотвѣтствующей задачи на построеніе, а непосредственнымъ примѣненіемъ геометрическихъ методовъ; тѣсная связь между задачами на построеніе и геометрическими М представляется отъ этого ничуть не слабѣе, хотя, безъ сомнѣнія, корень этой зависимости скрытъ въ силѣ геометрическихъ методовъ, а не задачъ на построеніе. Предлагаю дальше рядъ наиболѣе интересныхъ задачъ на геометрическіе М. Всѣ онѣ безъ труда рѣшаются указанными пріемами, но было бы слишкомъ смѣло сказать, что онѣ всѣ рѣшаются приложеніемъ элементарной алгебры и тригонометріи. Ю. Петерсенъ въ введеніи къ своей замѣчательной книгѣ „Методы и теоріи геометрическихъ задачъ на построеніе" разбираетъ недостатки общаго алгебраическаго метода рѣшенія задачъ и считаетъ наиболѣе серьезнымъ доводомъ противъ такого рѣшенія то обстоятельство, что полученныя уравненія становятся иногда столь сложными, что рѣшеніе ихъ на практикѣ почти невозможно. Мнѣ кажется, къ этому можно прибавить, что составленіе уравненій алгебры и аналитической геометріи во всѣхъ вопросахъ *положенія* естественно требуетъ методовъ также *положенія*; поэтому само составленіе уравненій на практикѣ не можетъ обойтись безъ чисто геометрическихъ методовъ сближенія, перенесенія, вращенія и т. п. Это обстоятельство еще болѣе возвышаетъ значеніе чисто геометрическихъ методовъ, и отчасти объясняетъ ту особенную и оригинальную ихъ силу, которая невольно искушаетъ внимательно изучающаго этотъ предметъ.

Задачи **):

9. Даны точки А и В. На данной прямой CD отыскать точку X такъ, чтобъ $AX \pm BX = M$ (48, IV).

---

*) № 139 въ сочиненіи «Задачи на наибольшія и наименьшія величины» А. Бѣляева. Москва, 1881 г.

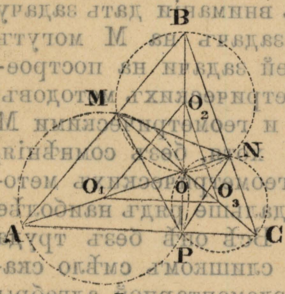
**) Въ нѣкоторыхъ задачахъ сдѣланы ссылки на соотвѣтствующія задачи на построеніе, помѣщенныя въ моемъ сочиненіи: «Методы рѣшеній геометрическихъ задачъ на построеніе» изд. 4-е. Эти ссылки указаны арабскою цыфрою вмѣстѣ съ римскою. Цыфры въ скобкахъ безъ римскихъ цыфръ указываютъ на № предшествующей задачи.

10. Въ $\triangle ABC$ вписать треугольникъ наименьшаго периметра такъ, чтобъ одна его вершина была на сторонѣ BC въ данной точкѣ D (*c*).

Рѣш. Стороны DE, EF и DF на осн. зад. 9 должны составить съ AB и AC равные углы; поэтому продолженія EF проходятъ чрезъ точки, симметричныя точкѣ D. Также рѣшается задача: „въ данный секторъ вписать треугольникъ наименьшаго периметра такъ, чтобъ одна вершина лежала въ данной на дугѣ точкѣ".

11. Въ данный $\triangle ABC$ вписать треугольникъ наименьшаго периметра (*c*).

Рѣш. На осн. пред. задачи стороны искомаго $\triangle MNP$ (фиг. 34) составляютъ равные углы со сторонами даннаго $\triangle$. Точки A, B и C



Фиг. 34.

должны лежать на дугахъ, описанныхъ на сторонахъ $\triangle MNP$ и вмѣщающихъ углы A, B и C. Если двѣ первыя дуги встрѣчаются въ O, то и третья окружность O_3 пройдетъ черезъ O; въ противномъ случаѣ сумма угловъ при O не составитъ 360^0. Прямыя же O_1O_2, O_2O_3 и O_1O_3 будутъ параллельны сторонамъ $\triangle ABC$ (между прочимъ видно изъ задачи 4-й). Линіи AO, BO, OC будутъ прямыя, потому что на нихъ опираются прямые углы M, N и P. Замѣчаемъ, что $\angle MOB = \angle MNB = \angle PNC = \angle POC$; точно такъ же находимъ: $\angle BON = \angle AOP$ и $\angle NOC = \angle AOM$. Складывая эти три равенства, находимъ, что линія MOC будетъ прямая. Поэтому искомый треугольникъ имѣетъ свои вершины въ основаніяхъ высотъ даннаго треугольника.

12. Даны двѣ пересѣкающіяся окружности O и O_1 и на одной изъ нихъ точка M, приходящаяся внутри другой окружности и на прямой OO_1. Провести чрезъ M прямую AMB наибольшей длины такъ, чтобы A и B были на окружностяхъ.

Непосредственно находимъ, что искомая прямая есть OO_1.

13. На равнодѣлящей даннаго угла ABC взята точка M. Начертить $\triangle DME$ такъ, чтобы D и E были на прямыхъ AB и BC, уголъ M имѣлъ данную величину и сторона DE была наименьшая (*a*).

На произвольной прямой опишемъ дуги, вмѣщающія углы M и B. Тогда вопросъ приведется къ предыдущей задачѣ.

14. На равнодѣлящей даннаго угла дана точка. Провести черезъ нее въ углѣ отрѣзокъ наименьшей длины. (Частный случай задачи Паппуса, 7, IV).

15. 1) На данной прямой (или окружности) найти точку, изъ которой другая данная прямая (или окружность) видна подъ M угломъ.

2) На плоскости лежитъ шаръ. Изъ всѣхъ точекъ, находящихся на другой данной плоскости, выбрать точку, изъ которой шаръ представляется зрителю наибольшимъ.

16. Построить четыреугольникъ, имѣющій опредѣленныя діагональ, медіану противоположныхъ сторонъ, пару отношеній смежныхъ сторонъ и М площади (381, II). Число такихъ задачъ неограниченно.

17—19. Построить $\triangle$ ABC, имѣющій:

17. Опредѣленныя A, $h_b + h_c$ и М для a (b, I).

18. Опредѣленныя m_b, A—C и М площади (449, II).

19. Опредѣленныя A, a и М радіуса r (55, IV).

20. 1) Около даннаго треугольника описать сегментъ даннаго радіуса такъ, чтобы длина его дуги была М (463 и 46, II).

2) Въ данный сегментъ вписать треугольникъ извѣстной формы и наибольшаго периметра (463, II, a).

Подобно предыд. находимъ, что одна изъ вершинъ будетъ въ срединѣ хорды.

21. Въ данный сегментъ вписать прямоугольникъ ABCD наибольшаго периметра. Составить и рѣшить обратную задачу (b).

Рѣш. Возставимъ изъ середины E хорды сегмента перпендикуляръ и отложимъ полупериметръ EG. Пусть H точка встрѣчи BC и EG. Форма $\triangle$BHG извѣстна; G—центръ подобія.

22. Въ данный секторъ AOB вписать $\triangle$CDE извѣстной формы и наибольшаго периметра (463, II). Рѣшить обратную задачу (b).

Рѣш. Если C на дугѣ, то нужно, чтобы прямая CO_1, гдѣ O_1—центръ дуги, описанной на DE и вмѣщающей уголъ O, была перпендикулярна къ DE.

23. Построить треугольникъ, зная A—B и $a + b$ такъ, чтобъ h_c было М (b, 7).

24. Изъ всѣхъ $\triangle\triangle$ найти $\triangle$, для котораго отношеніе r: R было бы М (c и d).

Изъ всѣхъ $\triangle\triangle$ съ постояннымъ угломъ вспомогательный искомый $\triangle$ будетъ равнобедренный; искомый же — будетъ равностороннимъ.

25. Изъ всѣхъ фигуръ опредѣленной площади найти фигуру наименьшаго периметра (c и d).

Рѣш. Изъ всѣхъ многоугольниковъ опредѣленной площади М периметра принадлежитъ равностороннему, потому что при 2 неравныхъ сторонахъ можно, сохраняя площадь, уменьшить периметръ, сдѣлавъ эти стороны равными. Многоугольникъ, составленный изъ искомаго соединеніемъ вершинъ чрезъ одну, долженъ вырѣзать изъ искомой фигуры опредѣленную площадь и потому, по предыдущему, долженъ быть тоже равностороннимъ; вслѣдствіе этого искомая фигура будетъ равноугольной, т. е., правильной. Теперь допустимъ, что искомая фигура имѣетъ опредѣленное число сторонъ. Тогда изъ всѣхъ правильныхъ фигуръ надо выбрать такую фигуру, въ которой произведеніе стороны на апоѳему равно постоянной величинѣ, сторона же должна быть наименьшею, а потому отношеніе апоѳемы къ сторонѣ должно быть наибольшее. Этого достигаемъ, увеличивая число сторонъ безпредѣльно. Поэтому искомая фигура есть окружность.

26. Заборомъ данной длины огородить наибольшую площадь (b).

Рѣш. Надо заборъ расположить по окружности.

27. Изъ всѣхъ нормандскихъ оконъ (прямоугольникъ, завершенный полукругомъ) опредѣленной площади найти окно M периметра.

Рѣш. По способу d находимъ, что прямоугольникъ долженъ быть квадратомъ (6).

28. Изъ всѣхъ нормандскихъ оконъ опредѣленнаго периметра указать окно, дающее M свѣта (b, 27).

29. Изъ всѣхъ круговыхъ секторовъ опредѣленной площади найти секторъ наибольшаго периметра (d) и обратно (b).

Рѣш. сходно съ 27. Искомая фигура есть полный кругъ.

30. Шнуръ укрѣпленъ въ точкахъ A и B; по шнуру скользитъ фонарь, стремясь вслѣдствіе тяжести занять самое низкое положеніе. Гдѣ фонарь будетъ висѣть? (a).

Рѣш. Пусть горизонтальная прямая, проходящая черезъ искомую точку X, встрѣчаетъ вертикальную прямую AC въ точкѣ D. Сумма AX + XB должна быть *min.* относительно AD (339, II). Вслѣдствіе этого, если E есть точка, симметричная A относительно DX, то BE равна длинѣ шнура.

И. Александровъ (Тамбовъ).

ШАШКА ВПЕРЕДЪ.

(ЗАДАЧА ИЗЪ ТЕОРІИ ВѢРОЯТНОСТЕЙ)

П. С. Флорова.

Безобидною или математически-равною игрою называютъ такую, въ которой каждый изъ двухъ равноискусныхъ игроковъ имѣетъ одинаковые шансы на выигрышъ. Къ числу безобидныхъ игръ принадлежатъ и русскія шашки. Игра въ русскія шашки перестаетъ быть математически равною, когда одинъ изъ двухъ равноискусныхъ игроковъ даетъ другому шашку впередъ. Цѣль предлагаемой замѣтки заключается въ опредѣленіи вѣроятности выигрыша такой партіи каждымъ изъ двухъ игроковъ. Для опредѣленности рѣчи мы будемъ называть одного изъ игроковъ A, а другого B. Побѣду двѣнадцати шашекъ надъ двѣнадцатью будемъ называть нормальною, побѣду одиннадцати шашекъ надъ двѣнадцатью—ненормальною. Вѣроятность ненормальной побѣды игрока A надъ игрокомъ B обозначимъ черезъ q, вѣроятность ненормальной побѣды игрока B надъ игрокомъ A — черезъ r. Далѣе p и $1-p$ пусть будутъ соотвѣтственно искусства игроковъ A и B, другими словами, p пусть означаетъ вѣроятность нормальной побѣды A надъ B, а $1-p$ вѣроятность нормальной побѣды B надъ A. Наконецъ s пусть будетъ собственная вѣроятность побѣды одиннадцати шашекъ надъ двѣнадцатью или вѣроятность, что одинъ изъ двухъ равноискусныхъ игроковъ одержитъ надъ другимъ ненормальную побѣду. Задача заключается въ опредѣленіи s по даннымъ p, q и r.

Прежде чѣмъ приступимъ къ рѣшенію этой задачи замѣтимъ, что нуженъ опытъ: p, q и r не иначе могутъ быть опредѣлены, какъ на основаніи теоремы Якова Бернулли. Именно, должно набаюдати результаты весьма большого числа состязаній между игроками А и В, предложивъ этимъ игрокамъ сыграть три матча: матчъ нормальныхъ партій, матчъ партій, въ которыхъ А имѣетъ одиннадцать шашекъ противъ двѣнадцати и матчъ партій, въ которыхъ А имѣетъ двѣнадцать шашекъ противъ одиннадцати. Если наблюдемъ, что всѣхъ партій было сыграно въ первомъ матчѣ k', во второмъ l, въ третьемъ m, и изъ этого числа игрокъ А выигралъ (считая ничью за половину выигрыша) въ первомъ матчѣ k, во второмъ l', въ третьемъ m' партій, то на основаніи теоремы Якова Бернулли числа p, q и $1-r$ найдутся изъ отношеній

$$p=\frac{k'}{k},\quad q=\frac{l'}{l},\quad 1-r=\frac{m'}{m}.$$

Эти отношенія тѣмъ точнѣе изобразятъ собою искомыя вѣроятности, чѣмъ больше числа k, l и m. Но такъ какъ эти числа de facto не могутъ быть произвольно большими, то наблюденныя величины p, q и r не будутъ совершенно точны. Въ своемъ мѣстѣ мы примемъ во вниманіе это свойство чиселъ p, q и r, но до поры до времени будетъ считать ихъ безусловно истинными.

Обращаясь теперь къ рѣшенію нашей задачи замѣтимъ, что q и r можно разсматривать какъ непрерывныя функціи независимаго p. При этомъ если положимъ $q=\varphi(p)$, то будемъ имѣть $r=\varphi(1-p)$. Для опредѣленія $\varphi(p)$ вообразимъ, что игрокъ А объ одной изъ нормальныхъ партій утверждаетъ, что онъ одержалъ въ ней побѣду надъ игрокомъ В. Очевидно, что вѣроятность такого утвержденія равняется вѣроятности нормальной побѣды игрока А надъ игрокомъ В. Но если игрокъ А станетъ утверждать, что онъ одержалъ побѣду надъ игрокомъ В, играя одиннадцатью шашками противъ двѣнадцати, то вѣроятность такого утвержденія будетъ менѣе p. Она по необходимости должна зависѣть отъ s, собственной вѣроятности побѣды одиннадцати шашекъ надъ двѣнадцатью. Для опредѣленія этой зависимости вообразимъ свидѣтеля С, который удостовѣряетъ фактъ ненормальной побѣды игрока А надъ игрокомъ В и пусть правдивость этого свидѣтеля (вѣроятность, что онъ говоритъ правду) будетъ s. Въ такомъ случаѣ справедливость показанія свидѣтеля С будетъ столь же вѣроятна, какъ и побѣда одиннадцати шашекъ надъ двѣнадцатью. Такимъ образомъ, мы приводимъ нашу задачу къ слѣдующей: свидѣтель, правдивость котораго p, и свидѣтель, правдивость котораго s, удостовѣряютъ фактъ ненормальной побѣды игрока А надъ игрокомъ В; требуется опредѣлить вѣроятность, что этотъ фактъ дѣйствительно имѣлъ мѣсто. Вѣроятность, что оба свидѣтеля говорятъ правду, выражается произведеніемъ sp; вѣроятность, что оба они говорятъ неправду, — произведеніемъ $(1-s)\ (1-p)$; вѣроятность согласнаго ихъ показанія—суммою $sp+(1-s)\ (1-p)$. Поэтому вѣроятность того, что согласное показаніе свидѣтелей правдиво, и, вмѣстѣ, вѣроятность ненормальной побѣды игрока A надъ игрокомъ B выразятся формулой

$$\varphi(p)=\frac{sp}{sp+(1-s)\ (1-p)}.$$

Эта формула получена путемъ уподобленія игрока свидѣтелю. Чтобы дать сказанному уподобленію силу строгаго доказательства, намъ необходимо убѣдиться, что функція $\varphi(p)$ удовлетворяетъ всѣмъ специфическимъ требованіямъ вопроса. Эти специфическія требованія объединяются особымъ функціональнымъ уравненіемъ, къ выводу котораго мы теперь и приступимъ. Съ этою цѣлью вообразимъ игрока D и допустимъ, что шансы на выигрышъ партіи, въ которой состязуются игроки A и D, будутъ строго уравновѣшены, когда игрокъ A дастъ игроку D шашку впередъ. Въ такомъ случаѣ искусства игроковъ D и B изобразятся соотвѣтственно черезъ $\varphi(p)$ и $1-\varphi(p)$. Если допустимъ теперь, что игрокъ B дастъ игроку D шашку впередъ, то его вѣроятность одержать ненормальную побѣду надъ D будетъ $\varphi(1-\varphi(p))$. Но игрока D, обладающаго двѣнадцатью шашками можно замѣнить игрокомъ A съ одиннадцатью шашками. Слѣдовательно формула

$$\varphi\,(1-\varphi\,(p))$$

представляетъ собою вѣроятность того, что игрокъ B одержитъ побѣду надъ игрокомъ A, имѣя одиннадцать шашекъ противъ одиннадцати. Перемѣнивъ p на $1-p$ получимъ формулу

$$\varphi\,(1-\varphi\,(1-p)),$$

выражающую вѣроятность того, что игрокъ A одержитъ побѣду надъ игрокомъ B, имѣя одиннадцать шашекъ противъ одиннадцати. Такъ какъ мы игнорируемъ ничью, то должны имѣть:

$$\varphi\,(1-\varphi\,(p))+\varphi\,(1-\varphi\,(1-p))=1.$$

авивъ сюда на мѣсто $\varphi(p)$ его значеніе получилъ тождество

$$1-p+p=1.$$

эсть ручательство того, что формула

$$\frac{sp}{sp+(1-s)\ (1-p)}$$

иетъ собою вѣроятность ненормальной побѣды игрока A омъ B. Было бы напраснымъ трудомъ искать эту форованіи приведеннаго выше функціональнаго уравненія и не прибѣгая къ уподобленію игрока свидѣтелю. Дѣйствительно, даже задавшись формулой

$$\varphi(p) = \frac{p+\gamma}{\alpha p + \beta}$$

и опредѣливъ постоянныя α, β и γ изъ условій

$$\varphi(0) = 0, \ \varphi\left(\tfrac{1}{2}\right) = s, \ \varphi(1-s) = \tfrac{1}{2},$$

мы всетаки не имѣли бы основанія предпочесть найденное рѣшеніе функціональнаго уравненія всякому другому его рѣшенію, которыхъ, зная одно, можно составить безконечно много. Дѣйствительно, нѣтъ никакого труда убѣдиться, что выраженіе

$$1 - f^{-1}\left(1 - \varphi f(p)\right)$$

удовлетворяетъ функціональному уравненію, гдѣ f есть символъ совершенно произвольной функціи, подчиненной только слѣдующимъ двумъ условіямъ

$$f(1) = 1 - \varphi f(p), \ f(1-s) = 1 - \varphi f\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

Число рѣшеній функціональнаго уравненія увеличивается еще тѣмъ, что ему удовлетворяетъ не только совокупность дѣйствій φ, но и совокупность обратныхъ дѣйствій φ^{-1}; поэтому ему удовлетворяетъ также функція

$$f^{-1}\varphi^{-1}\left(1 - f(1-p)\right).$$

Такимъ образомъ мы во очію убѣждаемся, что, не уподобляя игрока свидѣтелю, невозможно было бы оріентироваться въ этой массѣ рѣшеній функціональнаго уравненія и изъ безчисленнаго множества ихъ избрать единственное, отвѣчающее вопросу.

Замѣнивъ лѣвыя части формулъ:

$$\varphi(p) = \frac{sp}{sp + (1-s)(1-p)} \text{ и } \varphi(1-p) = \frac{s(1-p)}{s(1-p) + (1-s)p}$$

соотвѣтственно черезъ q и r и разрѣшивъ полученныя уравненія относительно s, найдемъ

$$s = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{q} - 1\right)\left(\frac{1}{1-p} - 1\right)} \text{ и } s = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{r} - 1\right)\left(\frac{1}{p} - 1\right)}.$$

Чтобы эти уравненія были совмѣстны, необходимо

$$\left(\frac{1}{q} - 1\right)\left(\frac{1}{1-p} - 1\right) = \left(\frac{1}{r} - 1\right)\left(\frac{1}{p} - 1\right).$$

Но весьма невѣроятно, чтобы числа p, q и r, не будучи совершенно точными, строго удовлетворили этому условію; а если бы они ему и удовлетворили, то это обстоятельство должно было бы принять не болѣе какъ за признакъ достаточно тщательнаго, хотя все же не безусловно точнаго опредѣленія чиселъ p, q и r. Установивъ это, приходимъ, къ заключенію, что числа

$$\frac{1}{1+\left(\frac{1}{q}-1\right)\left(\frac{1}{1-p}-1\right)} \text{ и } \frac{1}{1+\left(\frac{1}{r}-1\right)\left(\frac{1}{p}-1\right)},$$

изъ которыхъ каждое долженствовало бы выразить собою собственную вѣроятность ненормальной побѣды, вообще не будутъ между собою равны. Но такъ какъ эти числа получены при обстоятельствахъ взаимно компенсирующихъ одно другое, ибо искусство одного изъ игроковъ больше $\frac{1}{2}$, а другого меньше $\frac{1}{2}$, то естественно заключить, что искомая вѣроятность заключается между упомянутыми числами. Поэтому вѣроятнѣйшее значеніе s опредѣляется формулой

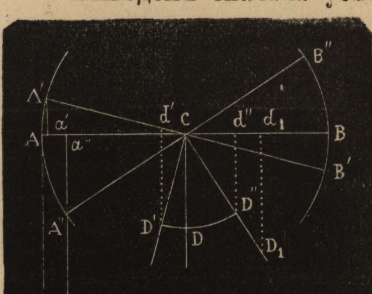
$$s=\frac{{}^1/_2}{1+\left(\frac{1}{q}-1\right)\left(\frac{1}{1-p}-1\right)}+\frac{{}^1/_2}{1+\left(\frac{1}{r}-1\right)\left(\frac{1}{p}-1\right)}.$$

(Продолженіе слѣдуетъ).

УСЛОВІЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ВѢСОВЪ.

Въ VI классѣ гимназій, гдѣ не проходится тригонометрія, приходится ограничиться только перечисленіемъ условій чувствительности вѣсовъ. Привожу здѣсь способъ, дающій возможность, не касаясь тригонометрической формулы, пояснить зависимость между чувствительностью вѣсовъ и остальными элементами, входящими въ ея формулу.

Выведемъ сначала условіе равновѣсія вѣсовъ. Пока на чашку вѣсовъ не положено груза, они находятся въ равновѣсіи по равенству моментовъ. Положимъ теперь на лѣвую чашку (см. фиг. 35) грузъ p. Такъ какъ теперь $(Q+p)$. $AC > Q$. CB, гдѣ Q есть вѣсъ каждой чашки, то вѣсы не могутъ остаться въ равновѣсіи и уклонятся въ ту, или другую сторону. Если бы коромысло не имѣло вѣса, то оно приняло бы вертикальное положеніе, такъ какъ равенство моментовъ могло бы суще-



Фиг. 35.

ствовать только при плечахъ силъ Q и $Q + p$, равныхъ нулю. Итакъ въ этомъ случаѣ при малѣйшей величинѣ груза p вѣсы отклонялись бы постоянно на максимальный уголъ въ 90° и были бы безконечно чувствительны. Такіе вѣсы были бы, конечно, непримѣнимы на практикѣ. Представимъ теперь, что коромысло имѣетъ вѣсъ q и D его центръ тяжести. Разсмотримъ, въ какую сторону отклонятся вѣсы, если на лѣвую чашку положимъ грузъ p. Коромысло необходимо уклонится ибо $(Q+p). AC > Q. CB$. Но въ какую сторону? Допустимъ, что точка A поднимается. Видимъ, что, по мѣрѣ поднятія точки A, моментъ вѣса $(Q+p)$ будетъ уменьшаться, такъ какъ вертикальная линія A приближается къ C. Но въ то же время центръ тяжести коромысла, т. е. D, долженъ уклониться влѣво, и, слѣдовательно, если вѣсы дойдутъ до положенія равновѣсія, то будетъ существовать такое условіе равновѣсія:

$$(Q + p). Ca' + q. Cd' = Q. Cb',$$

или такъ какъ $Ca' = Cb'$ имѣемъ:

$$p. Ca' + q. Cd' = 0 \ldots\ldots\ldots (1).$$

Это условіе невыполнимо. Слѣд. лѣвая чашка подниматься не можетъ и должна опуститься. То же можно вывести и такимъ образомъ: изъ равенства (1) видимъ, что p и q по существу величины положительныя и, какъ вѣса тѣлъ, имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ а слѣд. для существованія равенства (1) необходимо и достаточно, чтобы направленія Ca' и Cd' были противоположны по знаку. Слѣдовательно условіе (1) можетъ существовать только въ томъ случаѣ, если центръ тяжести коромысла, т. е. D, отклонится вправо. Итакъ точка A понизится и, слѣдовательно, моментъ груза p, уменьшаясь, будетъ приближаться къ возрастающему отъ нуля моменту вѣса коромысла. Слѣдовательно равенство этихъ моментовъ, если только грузъ не безконечно великъ, наступитъ во всякомъ случаѣ раньше, чѣмъ моментъ груза обратится въ нуль, т. е. коромысло составитъ съ горизонтомъ нѣкоторый уголъ, меньшій чѣмъ 90°. Положимъ, что вѣсы приняли положеніе A''B'', и слѣдовательно:

$$p. Ca'' = q. Cd'' \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Изъ равенства (2) видимъ, что съ увеличеніемъ груза p должно либо увеличиться Cd'', либо Ca'' уменьшиться. Оба эти измѣненія не могутъ происходить независимо одно отъ другого и слѣдовательно Ca'' будетъ убывать, а Cd'' — возрастать, пока моменты опять не сравняются. Итакъ, чѣмъ тяжелѣе грузъ p, тѣмъ вѣсы болѣе наклоняются.

Изслѣдуемъ теперь, отъ какихъ величинъ зависитъ величина отклоненія коромысла отъ горизонтальнаго направленія, т. е. чувствительность вѣсовъ при наложеніи на одну изъ чашекъ одного и того же груза p.

1) Положимъ, что при сохраненіи всѣхъ прочихъ условій, вѣсъ q коромысла увеличился. Изъ равенства (2) видимъ, что въ этомъ

случаѣ Cd'' должно уменьшиться, а слѣд. Ca''—увеличиться. Итакъ въ этомъ случаѣ вертикальная линія a'' удалится отъ C, точка A'' поднимется, слѣд. $\angle$ ACA'' уменьшится, а съ нимъ уменьшится и чувствительность. Итакъ чувствительность уменьшается съ увеличеніемъ вѣса коромысла.

2) Пусть теперь, при сохраненіи всѣхъ прочихъ условій, центръ тяжести коромысла опустится до точки D_1. Тогда Cd'' возраститъ до Cd_1 и слѣдовательно равенство моментовъ нарушится. Для возстановленія равновѣсія точка D_1 должна будетъ перемѣститься влѣво на столько, чтобы опять наступило равенство моментовъ, а точка A'' повысится и уголъ ACA'' уменьшится. Итакъ пониженіе центра тяжести коромысла уменьшаетъ чувствительность.

3) Положимъ теперь, что длина плечъ коромысла увеличится. Если CA'' возрастаетъ, то съ этимъ увеличивается и моментъ груза p. Слѣдовательно для возстановленія равновѣсія плечо силы p должно убывать, т. е. точка A'' должна опуститься. Итакъ, съ удлинненіемъ плечъ коромысла чувствительность увеличивается.

М. Пряслов (Ревель).

Отчеты о засѣданіяхъ ученыхъ обществъ.

Кіевское физико-математическое общество.

5-е очер. засѣданіе (24-го Февраля). Предсѣд. Н. Н. Шиллеръ

1) *Н. Ф. Хруцкій* «О кинетической теоріи газовъ».

2) *Г. К. Сусловъ:* «Аксоиды».

3) *О. О. Косоноговъ*: «Опыты Герца и Клеменчича».

4) *Н. А. Сорокинъ*: «О системахъ счисленія».

Заявлены сообщенія: *Б. Я. Букрѣевъ*: *a*) «О функціяхъ, не имѣющихъ производной», *b*) «О предѣльномъ кругѣ Фукса»; *Г. Н. Флоринскій*: «О кинетической теоріи газовъ».

6-е очер. засѣданіе (9-го Марта). Предсѣд. Н. Н. Шиллеръ.

1) *В. П. Ермаковъ*: «Методы приближенныхъ вычисленій».

2) *Н. А. Сорокинъ*: «О системахъ счисленія».

3) *Н. Н. Шиллеръ* демонстрировалъ магнитныя и діамагнитныя явленія.

7-е очер. засѣданіе (23-го Марта). Предсѣд. Н. Н. Шиллеръ.

1) *В. П. Ермаковъ*: «Геометрія на шарѣ».

2) *Е. В. Гуринъ*: «Начальное совмѣстное преподаваніе Алгебры и Ариѳметики въ эволюціонной системѣ».

3) *Н. Н. Шиллеръ*: «Уравненія движенія Лагранжа второго рода (безъ множителя)».

8-е очер. (засѣданіе). Предсѣд. Н. Н. Шиллеръ.

1) *В. П. Ермаковъ*: «Геометрія на шарѣ».

2) *Е. Г. Гуринъ*: «О новыхъ телеграфныхъ аппаратахъ».

3) *Г. Н. Флоринскій*: «О кинетической теоріи газовъ».

9-е очер. засѣданіе (13-го Апрѣля). Предсѣд. Н. Н. Шиллеръ.

1) *Г. К. Флоринскій*: «О кинетической теоріи газовъ».

2) *П. И. Броуновъ*: «Самопишущіе приборы, вновь пріобрѣтенные для метеорологической обсерваторіи университета св. Владиміра».

10-е очер. засѣданіе (27-го Апрѣля). Предсѣд. Н. Н. Шиллеръ.

1) *О. О. Косоноговъ*: «О критической температурѣ жидкостей».

2) *Б. Я. Букрѣевъ*: «О предѣльномъ кругѣ Фукса».

3) *В. П. Ермаковъ*: «О maximum'ѣ и minimum'ѣ дробной функціи».

11-е очер. засѣданіе (12-го Мая). Предсѣд. Н. Н. Шиллеръ.

1) *П. Я. Сонинъ*: «Объ одномъ опредѣленномъ интегралѣ».

2) *В. П. Ермаковъ*: «О продолженіи функціи».

Въ члены общества поступили: Г. Г. Де-Метцъ и П. А. Долгушинъ.

І. Косоноговъ.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Улетучиваніе металловъ подъ вліяніемъ электричества было впервые описано Wrigt'омъ. Онъ замѣтилъ, что подъ вліяніемъ электрическаго тока платиновые электроды въ разрѣженныхъ газахъ обращаются въ пыль. Болѣе подробныя изслѣдованія надъ распыливаніемъ металловъ произведены В. Круксомъ (сообщены 11-го іюня 1891 г. въ Royal Society въ Лондонѣ). Электроды изъ кадмія (платиновыя проволоки, покрытыя расплавленнымъ кадміемъ) были помѣщены въ разрѣженное пространство и окружены ванной изъ парафина въ 230°; черезъ сорокъ минутъ отрицательный полюсъ потерялъ 0,4873 гр., между тѣмъ какъ положительный только 0,0058 гр.; на стѣнкахъ стекляннаго сосуда образовался сплошной налетъ металлической пыли.

Точно также серебряные электроды при температурѣ, какую только могло вынести безъ плавленія стекло, послѣ полуторачасоваго дѣйствія тока потеряли на отрицательномъ полюсѣ 0,0123 гр., а на положительномъ только 0,0007 гр. Зеленовато-бѣлый свѣтъ на отрицательномъ полюсѣ давалъ двѣ отчетливыя серебряныя линіи до тѣхъ поръ, пока разрѣженіе не было доведено до самой крайней границы; напротивъ, при давленіи въ одну милліонную атмосферы свѣтъ былъ очень слабъ, серебряный электродъ казался раскаленнымъ до красна и распыливаніе быстро возростало. Сплавъ золота съ алюминіемъ потерпѣлъ полное измѣненіе, нѣкотораго рода дестилляцію, такъ какъ золото обратилось въ пыль, а алюминій остался.

Чтобы сравнить распыливаемость различныхъ металловъ, изъ нихъ были сдѣланы проволоки равной величины (30 мм. длиной и 8 мм. толщиной) и подвергнуты на равное время дѣйствію тока.

При этомъ были найдены слѣдующія цыфры для распыливаемости (распыливаемость золота принята за 100): палладій 108, золото 100, серебро 82,68, свинецъ 75,04, олово 56,96, латунь 51,58, платина 44, мѣдь 40,24, кадмій 31,99, никель 10,99, иридій 10,49, желѣзо 5,50. Алюминій и магній при такихъ-же условіяхъ, повидимому, не обращались въ пыль.

Распыливаемость, соотвѣтствующая приведеннымъ выше цыфрамъ, находится въ зависимости отъ температуры плавленія металловъ, ихъ атомнаго вѣса и другихъ извѣстныхъ постоянныхъ. Maximum распыливанія наступаетъ при температурѣ, близкой къ темп. плавленія металла.

Чтобы увеличить количество золота, обращеннаго ва пыль, къ отрицательному полюсу придѣлывалась кисточка изъ золотыхъ нитей, положительный же электродъ былъ сдѣланъ изъ алюминія. Въ продолженіе 14 часовъ отдѣлилось до 0,1800 гр. золота, которое осѣло въ видѣ тонкой, отдѣлимой отъ стекла пленки. Вмѣстѣ съ тѣмъ сопротивленіе пустоты на столько увеличилось, что нужно было впустить немного воздуха. Тоже самое явленіе было замѣчено и съ платиной. Платиновый осадокъ такъ сильно абсорбировалъ остатки газа, что черезъ каждые тридцать минутъ нужно было впускать по немногу воздуха, чтобы получить проводимость. Впрочемъ нагрѣваніемъ трубки, потерявшей проводимость, удавалось извлечь изъ металла абсорбированный газъ и такимъ образомъ поднять проводимость разрѣженнаго газа. Платина при такихъ же условіяхъ, какъ и золото, въ 25 часовъ потеряла 0,1320 гр. Въ 20 часовъ отъ серебра отдѣлилось 0,1944 гр. пыли. Отложенія золота и серебра можно было снять со стекла въ видѣ тонкой, блестящей фольги. *П. П.*

Соединеніе золота съ алюминіемъ, весьма интересное по своимъ свойствамъ, открыто Robert'омъ Austen'омъ. Если къ золоту прибавлять постепенно алюминій, то въ получающихся сплавахъ все болѣе и болѣе уменьшается цвѣтъ золота и, когда содержаніе алюминія достигнетъ 10%, получается серебристый бѣлый сплавъ. При дальнѣйшемъ увеличеніи содержанія алюминія въ массѣ выступаютъ красныя пятна, а при 22% алюминія получается ярко-красный блестящій сплавъ, въ которомъ можно различить болѣе темные красные-же кристаллы. По своему процентному составу (22% Al; 78% Au) сплавъ этотъ близко подходитъ подъ формулу $Au\ Al_2$. Въ пользу мнѣнія, что сплавъ этотъ — опредѣленное химическое соединеніе, говоитъ, между прочимъ, и то обстоятельство, что температура плавленія этого сплава лежитъ выше температуры плавленія чистаго золота (1045°) тогда какъ температура плавленія сплавовъ вообще лежитъ ниже средняго изъ температуръ плавленія ихъ составныхъ частей. Алюминій-же плавится около 700°. При дѣйствіи на этотъ сплавъ разбавленной соляной кислоты получается хлорный алюминій $AlCl_3$, а золото выдѣляется въ видѣ объемистаго осадка. Теплота образованія новаго соединенія $Au\ Al_2$ еще не опредѣлена. При увеличенiи содержанія алюминія красный цвѣтъ исчезаетъ, а выступаетъ характерный для алюминія сѣровато-бѣлый цвѣтъ. (Rev Scient.). *В. Г.*

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Ночная метеорологическая сигнализація устроена пр. Гаррингтономъ на вершинѣ Вашингтонской горы. Тамъ установленъ большой лучеотражатель системы французскаго полковника Манжена, при помощи котораго на небо направляются снопы электрическихъ лучей самой сильной напряженности. Получивъ по телефону съ ближайшихъ станцій свѣдѣнія о барометрическомъ состояніи атмосферы и о вѣроятной погодѣ слѣдующаго дня, Гаррингтонъ пускаетъ въ условленный часъ снопы лучей въ сторону ближайшихъ городовъ и извѣщаетъ такимъ образомъ окрестное населеніе на разстояніи около 300 верстъ въ окружности о состояніи атмосферы, колебаніяхъ температуры и предсказаніяхъ метеорологическихъ станцій (Пр. В.).

Богатыя залежи ванадія открыты въ провинціи Мендоза въ Аргентинѣ. До сихъ поръ главнымъ источникомъ для полученія этого рѣдкаго металла служили бѣдныя сравнительно залежи на Уралѣ (Rev. de chim. industr.).

Новыя залежи горнаго льна на югѣ Венгріи будутъ разрабатываться образовавшимся недавно въ Лондонѣ обществомъ. Заводъ для приготовленія чистаго горнаго льна будетъ устроенъ въ Кардифѣ (Rev. de chim. industr.).

G. Planté завѣщалъ передъ смертью капиталъ, проценты съ котораго—1,500 франковъ—должны служить преміей за открытія въ области электричества. Даръ этотъ принятъ Парижской Академіей Наукъ. (Rev. gén. de Sc.).

Новый минералъ, напоминающій азбестъ, открытъ въ Колумбіи въ весьма значительномъ количествѣ. Онъ янтарнаго цвѣта прозраченъ и не измѣняется отъ дѣйствія высокой температуры. Его рекомендуютъ для приготовленія банковыхъ билетовъ (Rev. Sc.).

Опыты освѣщенія морского дна при помощи снаряда, вѣсомъ въ 60 килогр., производились въ Тулонѣ на рейдѣ. Хорошо освѣщалось пространство около 30 метровъ. Результатъ этотъ можетъ, конечно, имѣть значеніе для изученія жизни на морскомъ днѣ.

Новый подводный кабель укладывается между Марселью и Ораномъ (Oran).

СМѢСЬ.

Примѣненіе алюминія для техническихъ цѣлей все больше и больше распространяется. Такъ, не смотря на сравнительно еще высокую цѣну этого металла (15 франковъ за килограммъ) въ нѣкоторыхъ случаяхъ оказывается выгодной постройка судовъ изъ алюминія, именно для не глубоко сидящихъ въ водѣ парусныхъ яхтъ. Разсчитано, что кузовъ яхты въ 10 тоннъ, сдѣланный изъ дерева или желѣза и стоющій 10,000 франковъ, обойдется въ 25,000 франковъ при употребленіи алюминія и сохранитъ свою цѣнность черезъ 10 лѣтъ, тогда какъ желѣзо и дерево придутъ за это время въ такое состояніе, что потеряютъ свою цѣнность (Rev. Scient.). Такая яхта была-бы кромѣ того значительно прочнѣе и дала-бы возможность достигнуть большей скорости. Въ концѣ прошлаго года, въ Германіи (Stralsund) дѣлались опыты примѣненія алюминія къ постройкѣ спасательныхъ лодокъ, но результаты этихъ опытовъ намъ пока неизвѣстны. Наконецъ въ послѣднее время нѣкоторые (Lunge и Schmidt. См. Zeitschr. f. angewandte Chem. 1892, 7—10) высказываются за возможность примѣненія алюминія для нѣкоторыхъ домашнихъ сосудовъ, солдатскихъ манерокъ и т. п., тогда какъ прежде считали алюминій не пригоднымъ для такого рода примѣненій, такъ какъ думали, что алюминій сильно и неравномѣрно окисляется жидкостями (даже водой); тогда сосуды скоро продыравливались-бы. Опыты Lunge и E. Schmidt'a показали, что алюминіевы пластинки очень мало теряютъ въ вѣсѣ при продолжительномъ (6 дней) дѣйствіи на нихъ кофе, чая, водки и пива. Сильнѣе дѣйствуютъ кислыя жидкости, такъ что для послѣднихъ алюминіевы сосуды не пригодны. Растворъ салициловой кислоты дѣйствуетъ очень сильно, карболовой—очень слабо.

Извѣстный американскій астрономъ J. W. Langley нашелъ, что сплавъ алюминія съ 10% титана обладаетъ твердостью стали. Большее количество титана дѣлаетъ сплавъ хрупкимъ.

Прибавленіе вольфрама къ алюминію и его сплавамъ сообщаетъ имъ, по Рейнгардту Маннесману, замѣчательную прочность и устойчивость противъ дѣйствія воды, солей и другихъ реактивовъ. При значительномъ количествѣ вольфрама сплавъ пріобрѣтаетъ большое сопротивленіе разрыву.

Весьма прочная замазка готовится слѣд. образомъ: тщательно измельченный свинцовый глетъ сушится въ печи при высокой температурѣ и затѣмъ смѣшивается съ глицериномъ въ такомъ количествѣ, чтобы получилась довольно густая каша. Замазка эта быстро твердѣетъ въ жидкостяхъ и на воздухѣ, не измѣняя при этомъ замѣтно своего объема, выноситъ температуру до 300° и прочно пристаетъ къ различнымъ тѣламъ.

ЗАДАЧИ.

№ 382. Найти сумму:

$$\frac{a \pm a_1}{aa_1} + \frac{aq \pm a_1 q_1}{aq \cdot a_1 q_1} + \frac{aq^2 \pm a_1 q_1^2}{aq^2 a_1 q_1^2} + \ldots + \frac{aq^n \pm a_1 q_1^n}{aq^n a_1 q_1^n}$$

при $n = \infty$ и $q > 1$, $q_1 > 1$.

А. Рязновъ (Самара).

№ 383. Построить треугольникъ по радiусу вписаннаго въ него круга, по отрѣзку отъ вершины треугольника до точки касанiя вписаннаго круга и по сторонѣ, не прилежащей къ этому отрѣзку.

А. П. (Пенза).

№ 384. Даны прямыя AB, AD, AC и MN. Построить четыреугольникъ XYZU, подобный данному четыреугольнику *xyzu* такъ, чтобы его вершины лежали на данныхъ прямыхъ.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 385. Даны два подобные треугольника. Стороны одного треугольника пусть будутъ a, b и c, стороны другого — m, n и q, причемъ a и m, b и n, c и q суть сходственныя стороны, и p и p' — полупериметры треугольниковъ. Доказать справедливость равенства:

$$\sqrt[4]{p(p-a)(p-b)(p-c)} + \sqrt[4]{p'(p'-m)(p'-n)(p'-q)} =$$

$$= \sqrt[4]{(p+p')(p-a+p'-m)(p-b+p'-n)(p-c+p'-q)}.$$

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 386. Опредѣлить наибольшую величину произведенiй

$$\operatorname{Sin} x_1 \,.\, \operatorname{Sin} x_2 \,.\, \operatorname{Sin} x_3 \,\ldots\ldots\, \operatorname{Sin} x_n$$

и

$$\operatorname{tg} x_1 \,.\, \operatorname{tg} x_2 \,.\, \operatorname{tg} x_3 \,\ldots\ldots\, \operatorname{tg} x_n,$$

если сумма $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n$ равняется постоянной величинѣ a.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 387. Вычислить площадь треугольника, если извѣстно, что

$$r : \rho_a : \rho_b : \rho_c = k : l : m : n$$

и

$$\rho_a + \rho_b + \rho_c = t,$$

гдѣ r — радiусъ внутренняго вписаннаго въ треугольникъ круга, а ρ_a, ρ_b, ρ_c — радiусы трехъ внѣшнихъ вписанныхъ круговъ.

П. Андреяновъ (Москва).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 56 (2 сер.). Въ данной окружности O провести хорду данной длины AB такъ, чтобы изъ данной точки C она была видна подъ опредѣленнымъ угломъ.

Откладываемъ гдѣ нибудь въ окружности хорду $A_1B_1 = AB$ и описываемъ на ней дугу, вмѣщающую данный уголъ; изъ O описываемъ радіусомъ OC дугу, встрѣчающую первую въ точкѣ C_1. Описывая изъ C дуги радіусами $AC = A_1C_1$ и $BC = B_1C_1$, получаемъ искомую хорду AB, ибо $\triangle AOC = \triangle A_1OC_1$ и $\triangle BOC = \triangle B_1OC_1$, слѣдовательно $\triangle ACB = \triangle A_1C_1B_1$ т. е. $AB = A_1B_1$.

П. Николаевъ (Пенза); *Л. Карагодинъ* (Курскъ).

№ 119 (2 сер.). Рѣшить систему:

$$x^2 + y^2 = a \ldots (1) \qquad xy + zu = c \ldots\ldots (3)$$

$$z^2 + u^2 = b \ldots (2) \qquad xu + yz = d \ldots\ldots (4)$$

Положивъ

$$xy - zu = f, \ldots\ldots (5)$$

на основаніи уравненій (1), (3) и (5) найдемъ:

$$x + y = \sqrt{a + c + f} \text{ и } x - y = \sqrt{a - c - f},$$

а изъ ур-ій (2), (3) и (5) получимъ:

$$z + u = \sqrt{b + c - f} \text{ и } z - u = \sqrt{b - c + f}.$$

Изъ этихъ ур-ій имѣемъ:

$$2x = \sqrt{a + c + f} + \sqrt{a - c - f}; \quad 2z = \sqrt{b + c - f} + \sqrt{b - c + f}$$

$$2y = \sqrt{a + c + f} - \sqrt{a - c - f}; \quad 2u = \sqrt{b + c - f} - \sqrt{b - c + f}.$$

Такъ какъ

то $$(x + y)(z + u) - (x - y)(z - u) = 2(xu + zy),$$

$$\sqrt{(a + c + f)(b + c - f)} - \sqrt{(a - c - f)(b - c + f)} = 2d,$$

или

$$[(a - b)^2 + 4d^2] f^2 - 2c(a^2 - b^2) f - 4d^2 (ab + c^2 - d^2) + c^2 (a + b)^2 = 0,$$

откуда опредѣляемъ f.

Л. Шубинъ (Курскъ); *А. Кочанъ*, *И. Вонсикъ* (Воронежъ).

№ 181 (2 сер.). Даны три концентрическія окружности, коихъ радіусы $r < \rho < R$. Гипотенуза прямоугольнаго треугольника служитъ хордой средней окружности и касается меньшей окружности, а вершина прямого угла лежитъ на большей окружности. Вычислить катеты треугольника.

Проведемъ къ меньшей окружности касательную, отъ которой средняя окружность отсѣчетъ чать BC, равную гипотенузѣ. Изъ точки касанія M описываемъ радіусомъ BM окружность, одна изъ точекъ пересѣченія которой съ большей окружностью служитъ вершиной прямого угла A.

Центръ окружностей O соединимъ съ A, B и M; изъ A опустимъ на BC перпендикуляръ AP и перпендикуляръ AN на продолженіе OM. Изъ $\triangle AMO$ имѣемъ: $AO^2 = OM^2 + AM^2 + 2OM.\,MN$ или $R^2 = \rho^2 + 2r.\,MN$, откуда

$$MN = \frac{R^2 - \rho^2}{2r}.$$

Изъ $\triangle$ ANM имѣемъ

$$AN = \sqrt{AM^2 - MN^2} = \sqrt{\rho^2 - r^2 - \frac{(R^2 - \rho^2)^2}{4r^2}};$$

$$CP = MC - MP = MC - AN = \sqrt{\rho^2 - r^2} - \sqrt{\rho^2 - r^2 - \frac{(R^2 - \rho^2)^2}{4r^2}}$$

и

$$AP = MN = \frac{R^2 - \rho^2}{2r}.$$

Изъ $\triangle$ APC имѣемъ:

$$AC = \sqrt{AP^2 + PC^2} = \sqrt{2(\rho^2 - r^2) - 2\sqrt{(\rho^2 - r^2)^2 - \frac{(R^2 - \rho^2)^2(\rho^2 - r^2)}{4r^2}}}.$$

Для катета AB надо взять + предъ внутреннимъ корнемъ.

Я. Тепляковъ (Радомысль); *П. Свѣчниковъ* (Троицкъ); *А. Байковъ* (Москва); *К. Щиголевъ* (Курскъ).

№ 192 (2 сер.). На катетахъ прямоугольнаго треугольника ABC, въ которомъ $\angle$ B есть прямой, построены внѣшніе квадраты AM и CN; изъ ихъ вершинъ M и N (ближайшихъ къ B) опущены перпендикуляры MP и NQ на гипотенузу AC и ея продолженіе. По даннымъ $MP = a$ и $NQ = b$ построить треугольникъ ABC.

Такъ какъ $AN = MC$ и $\angle NAQ = PMC$, то $\triangle NAQ = \triangle PMC$, откуда слѣдуетъ, что $AQ = MP = a$. Строимъ $\triangle NAQ$ по катетамъ $AQ = a$ и $NQ = b$ и изъ N проводимъ NC подъ угломъ 45^0 къ AN. Получаемъ вершину C, а проведя $BC \perp AN$ и вершину B.

В. Бутенко (Тифлисъ); *К. Щиголевъ*, *К. Александровъ* (Курскъ).

Списокъ задачъ 1-й серіи, на которыя не было получено ни одного удовлетворительнаго рѣшенія.

№ 61. Объяснить слѣдующій опытъ. Въ обыкновенную барометрическую трубку съ торричелевою пустотою вводимъ нѣкоторое количество водорода; въ другую такую-же трубку впускаемъ столько воздуха, чтобы ртуть въ обѣихъ трубкахъ была на одинаковой высотѣ. Достигнувъ этого, вводимъ въ обѣ трубки эфиръ въ такомъ количествѣ, чтобы онъ оставался въ избыткѣ, и тогда замѣчаемъ, что уровень ртути въ трубкѣ, заключающей водородъ, будетъ понижаться гораздо скорѣе, чѣмъ во второй, и только лишь по истеченіи 2, 3-хъ часовъ ртуть установится опять на одной высотѣ въ обѣихъ трубкахъ.—Почему?

№ 67. Какимъ образомъ опредѣляется направленіе магнитнаго меридіана при помощи стрѣлки наклоненія (т. е. такой магнитной стрѣлки, которая можетъ колебаться только въ вертикальной плоскости)?

№ 76. Какимъ образомъ можно приблизительно опредѣлить число колебаній, соотвѣтствующее данному звуку, при помощи монохорда (сонометра) и камертона, число колебаній котораго извѣстно (напр. la_3)?

№ 83. Представимъ себѣ почти замкнутый полый проводникъ А съ небольшимъ отверстіемъ. Шарикъ a, на изолирующей ручкѣ b, зарядимъ электричествомъ и введемъ внутрь проводника А, не касаясь краевъ отверстія, и прикоснемся имъ ко внутренней сторонѣ проводника. Все электричество перейдетъ съ шарика a на наружную поверхность проводника А. Вынувши разряженный шарикъ a, зарядивъ его снова и повторяя процессъ нѣсколько разъ, можно зарядить проводникъ А какъ угодно сильно (до какого угодно потенціала). Будетъ-ли то-же самое, если мы будемъ заряжать шарикъ a, не вынимая его изъ проводника А, соединивъ его тонкою изолированною проволокою съ электрическою машиною?

Опечатки. Въ № 146 В. О. Ф. въ статью проф. Г. Де-Метца вкрались слѣдующія опечатки: стр. 28, стр. 17 св. напечатано $\lambda = ff'$ вмѣсто $\lambda = ff'/_2$; стр. 9 сн. напечатано $a = \pi\lambda P$ вмѣсто $a = 2\pi\lambda P$; стр. 29, стр. 23 и 25 св. напечатано λ вмѣсто γ; стр. 31, стр. 20 св. напечатано Rouland вмѣсто Rowland.

Въ № 147 В. О. Ф. на стр. 62, стр. 8 св. напечатано *Меркурія*, вмѣсто *Нептуна*.

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса 13 Ноября 1892 г.
Типо-литографія „Одесскихъ Новостей“. Пушкинская, д. № 11.

Обложка
ищется

Обложка
ищется