Обложка
ищется

Обложка
ищется

ВѢСТНИКЪ
ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 104.

IX Сем. 1 Ноября 1890 г. № 8.

Сжатіе при распредѣленіи круговъ различныхъ діаметровъ въ ряды.

(Продолженіе) *).

4. Перейдемъ теперь къ общему случаю. Пусть намъ дано m круговъ радіуса a и n круговъ радіуса b и пусть $a>b$. Въ отдѣльности они занимаютъ протяженіе, равное $2(ma+nb)$.

Расположимъ ихъ сперва простѣйшимъ образомъ подрядъ, уложивъ сперва всѣ кружки А, потомъ всѣ кружки В; тогда общее протяженіе, занимаемое ими, будетъ состоять изъ слѣдующихъ частей.

Первые $m-1$ кружковъ А будутъ занимать длину $2(m-1)a$.

Послѣдній кругъ А вмѣстѣ съ первымъ кругомъ В будутъ занимать вмѣстѣ, какъ въ первомъ примѣрѣ, длину $a+2\sqrt{ab}+b$.

Остальные $n-1$ кружковъ В займутъ протяженіе $2(n-1)b$.

А слѣдовательно въ суммѣ занимаемое кружками протяженіе будетъ $(2m-1)a+2\sqrt{ab}+(2n-1)b$; оно отличается на $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ отъ суммы протяженій, занимаемыхъ кружками въ отдѣльности.

Легко сообразить, что такое распредѣленіе кружковъ, какъ только что описанное, даетъ въ результатѣ наибольшее протяженіе. Всякая перемѣна взаимнаго распредѣленія кружковъ поведетъ къ нѣкоторому сжатію. Если мы возьмемъ одинъ какой нибудь изъ круговъ А и помѣстимъ его гдѣ нибудь въ системѣ круговъ В, такъ, что по обѣ стороны его будетъ по кружку В, то этимъ мы измѣнимъ сумму протяженій, занимаемыхъ всею совокупностью кружковъ на слѣдующія величины:

1. Въ системѣ кружковъ А мы уменьшимъ сумму протяженій на величину діаметра вынутаго кружка, т. е. на величину $2a$.

2. Въ системѣ кружковъ В, вдвинувъ между двумя кружками В одинъ кружокъ А, мы увеличимъ протяженіе на величину $4\sqrt{ab}-2b$.

А въ суммѣ мы произведемъ сжатіе на величину $2(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$.

И наоборотъ, если бы мы взяли одинъ какой нибудь изъ кружковъ В, и помѣстили его гдѣ нибудь среди круговъ А, то мы бы произвели этимъ слѣдующее измѣненіе протяженій:

*) См. „Вѣстникъ“ № 103.

1. Въ системѣ кружковъ B мы бы уменьшили протяженіе на величину діаметра вынутаго кружка, т. е. на величину $2b$.

2. Въ системѣ круговъ A мы бы увеличили протяженіе на величину $4\sqrt{ab}-2a$.

А въ суммѣ протяженіе, занимаемое совокупностью кружковъ, опять уменьшилось бы на ту-же величину $2(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$.

Величину эту мы назовемъ *элементарнымъ сжатіемъ* и означимъ черезъ $2f$.

Переставивъ одинъ изъ круговъ A въ систему кружковъ B, возьмемъ другой кругъ A, и помѣстимъ его опять между кружками B. Теперь намъ представляется двѣ различныя комбинаціи; мы можемъ помѣстить второй кругъ A или рядомъ съ первымъ перенесеннымъ кругомъ A, или отдѣльно отъ него. Въ первомъ случаѣ, какъ легко убѣдиться, перенесеніе второго круга не произведетъ никакого измѣненія въ суммѣ протяженій, занимаемыхъ всею системою круговъ. Во второмъ случаѣ сжатіе отъ перенесенія второго круга будетъ равно тому, которое мы уже нашли для перваго круга, и въ суммѣ сжатіе будетъ на величину $4f$.

Такимъ же точно образомъ, перенося большее число круговъ A изъ системы A въ систему B, мы можемъ увеличивать сжатіе, если будемъ каждый разъ укладывать переносимые круги такъ, чтобы они не касались круговъ A, а были непремѣнно окружены съ обѣихъ сторонъ кружками B. Перенеся какое нибудь число p круговъ A будемъ имѣть полное сжатіе на величину $2pf$.

Такое же сжатіе получится если перенести p кружковъ B изъ ихъ ряда въ систему круговъ A. Поэтому, если число m круговъ A меньше числа n круговъ B, то мы достигнемъ наибольшаго сжатія если размѣстимъ всѣ круги A среди кружковъ B, а если $m>n$, то наибольшее сжатіе получится если распредѣлить всѣ кружки B среди круговъ A. Въ первомъ случаѣ сумма протяженій при наиболѣе тѣсномъ распредѣленіи будетъ

$$2(n-m)b+4m\sqrt{ab}, \tag{4}$$

а во второмъ случаѣ сумма протяженій при наиболѣе тѣсномъ распредѣленіи будетъ

$$2(m-n)a+4n\sqrt{ab}. \tag{5}$$

При $m=n$ обѣ формулы даютъ

$$4n\sqrt{ab}=4m\sqrt{ab}.$$

Назовемъ черезъ $2l_0$ сумму протяженій, занимаемыхъ обѣими системами круговъ въ отдѣльности, а черезъ $2l$ сумму протяженій, занимаемыхъ ими вмѣстѣ, въ какой нибудь данной комбинаціи, тогда будетъ вообще говоря $l<l_0$. Означимъ это отношеніе черезъ $1-c$, и назовемъ c *коэффиціентомъ сжатія*. Величина c равна отношенію разности первоначальнаго и уменьшеннаго протяженія, къ величинѣ начальнаго протяженія

$$c=\frac{l_0-l}{l_0}.$$

Изъ предыдущаго имѣемъ для величины c—коэффицієнта *наибольшаго* сжатія—слѣдующія значенія:

$$m>n \qquad c=\frac{nf}{ma+nb} \tag{6}$$

$$m<n \qquad c=\frac{mf}{ma+nb} \tag{7}$$

$$m=n \qquad c=\frac{f}{a+b} \tag{8}$$

Интересно и важно замѣтить, что коэффиціенты наибольшаго сжатія не зависятъ отъ абсолютнаго числа m или n кружковъ того или другого рода, а только отъ пропорціи кружковъ каждаго рода, т. е. отъ отношенія $m:n$. Вмѣсто этого отношенія можно также пользоваться величинами

$$p=\frac{m}{m+n} \qquad q=\frac{n}{m+n},$$

которыя выражаютъ содержаніе въ общей суммѣ кружковъ каждаго сорта. Между числами p и q имѣетъ мѣсто равенство

$$p+q=1$$

такъ что только одно изъ нихъ независимо, а другое получается изъ перваго вычитаніемъ его изъ 1. Вставляя величины p и q вмѣсто m и n въ выраженія коэффиціентовъ сжатія, будемъ имѣть

$$\text{при } p>q \qquad c=\frac{qf}{pa+qb} \tag{9}$$

$$\text{„ } p<q \qquad c=\frac{pf}{pa+qb} \tag{10}$$

$$\text{„ } p=q \qquad c=\frac{f}{a+b} \tag{11}$$

5. Возьмемъ теперь числовой примѣръ для нагляднаго иллюстрированія выведенныхъ формулъ. Пусть намъ дано нѣкоторое число двугривенныхъ и гривенниковъ и мы распредѣляемъ ихъ такъ, что они занимаютъ подрядъ нѣкоторое протяженіе $2l$. Длина эта будетъ различна при различныхъ распредѣленіяхъ монетъ обоего рода, и мы знаемъ, какъ слѣдуетъ распредѣлить монеты, чтобы она оказалась наименьшею. Опредѣлимъ числовую величину наибольшаго сжатія, которое мы можемъ получить соотвѣтственнымъ распредѣленіемъ монетъ, при различной пропорціи монетъ обоего рода. Для радіусовъ двугривенныхъ и гривенниковъ примемъ величины 81 и 64 нѣкоторыхъ произвольныхъ единицъ. Числа эти достаточно близко выражаютъ дѣйствительные относительные размѣры этихъ монетъ, мы взяли только вмѣсто дѣйствительнаго отношенія такое, которое выражается отношеніемъ квадратовъ двухъ цѣ-

лыхъ послѣдовательныхъ чиселъ, такъ какъ это представляетъ особыя удобства для вычисленія сжатія, ибо намъ придется имѣть дѣло съ квадратными корнями изъ радіусовъ, которые въ данномъ случаѣ будутъ цѣлыя числа.

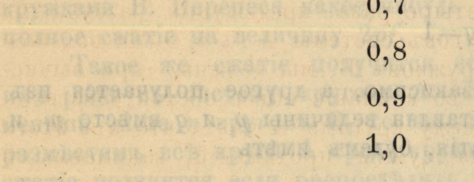
Посредствомъ формулъ предыдущаго параграфа легко вычисляются слѣдующія числа, показывающія величину сжатія при написанныхъ пропорціяхъ монетъ обоего рода. Къ вычисленнымъ сжатіямъ мы приписали для полноты значенія сжатія для $p=0$ и $q=0$, въ каковыхъ случаяхъ очевидно и сжатіе$=0$.

$p=0{,}0$	$c=0{,}00000$
0,1	0,00152
0,2	0,00297
0,3	0,00434
0,4	0,00565
0,5	0,00690
0,6	0,00539
0,7	0,00395
0,8	0,00258
0,9	0,00126
1,0	0,00000

Наибольшее изъ наибольшихъ сжатій происходитъ при равномъ числѣ монетъ обоего рода и равно, въ данномъ случаѣ $\frac{1}{145}$.

6. Предыдущія разсужденія перестаютъ быть примѣнимы, когда отношеніе между діаметрами круговъ A и B переходитъ нѣкоторый максимальный предѣлъ, который мы сейчасъ укажемъ. Обращаясь сперва къ фиг. 18, мы видимъ, что если кружки B настолько малы, что они могутъ помѣщаться между кругами A, не раздвигая ихъ, то очевидно, что прибавленіе такихъ кружковъ, помѣщенныхъ въ пустыхъ промежуткахъ, нисколько не увеличиваетъ суммы протяженій, занимаемыхъ кругами A, и потому сжатіе происходитъ по совершенно инымъ законамъ, чѣмъ тѣ, которые мы нашли выше при меньшемъ отношеніи между діаметрами круговъ A и B.

Фиг. 18.



Легко найти изъ чертежа предѣлъ, при которомъ наступаетъ это новое обстоятельство, т. е. указать больше какой величины долженъ быть радіусъ кружковъ B, для того, чтобы они не могли помѣщаться между кругами А, не раздвигая ихъ. Для этого, взявъ предѣльный случай когда какъ разъ кружокъ В помѣщается между двумя кружками А, не раздвигая ихъ, найдемъ изъ фиг. 18, что радіусъ его b равенъ $\frac{1}{4}a$, ибо изъ треугольника OBC имѣемъ

$$OC^2=(a+b)^2=OB^2+BC^2=a^2+(a-b)^2$$

откуда

$$b={}^1/_4 a.$$

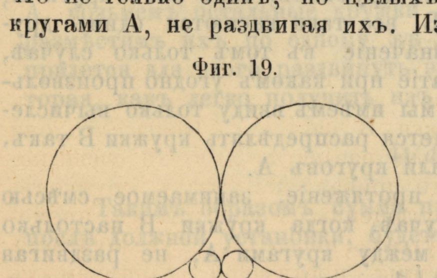
Это же самое можно было бы получить и изъ формулы § 3, показывающей разстояніе между центрами двухъ сосѣднихъ круговъ, радіусовъ a и b. Предѣльный случай наступаетъ, когда эта разность приравнивается радіусу большаго круга, т. е. когда

$$2\sqrt{ab}=a,$$

откуда опять получается $b=\frac{1}{4}a$. Итакъ, пока круги А и В таковы, что діаметръ круговъ одной системы не превосходитъ діаметра круговъ другой системы больше чѣмъ въ четыре раза, предыдущія разсужденія справедливы. Но когда діаметръ круговъ системы А въ 5, 6 или большее число разъ превышаетъ діаметръ кружковъ В, мы должны, при вычисленіи сжатія при смѣшеніи принять во вниманіе новое обстоятельство—возможность помѣстить кружки В между кругами А такъ, что отъ этого не происходитъ никакого увеличенія суммы протяженій, занимаемыхъ кругами А.

Далѣе можетъ оказаться, что кружки В будутъ настолько малы, что не только одинъ, но цѣлыхъ два ихъ можетъ помѣститься между кругами А, не раздвигая ихъ. Изъ фиг. 19 легко убѣдиться, что это наступитъ тогда, когда отношеніе діаметровъ круговъ А и В будетъ не меньше $(\sqrt{2}+1)^2$; точно также можетъ оказаться, что три, четыре, или вообще какое угодно число кружковъ В помѣщается въ промежуткахъ между кругами А, не раздвигая ихъ. Изъ весьма простого геометрическаго построенія, аналогичнаго предыдущимъ, легко убѣдиться, что если кружки А и В таковы, что по крайней мѣрѣ k кружковъ В помѣщается между кругами А, не раздвигая ихъ, то отношеніе между діаметрами круговъ А и В должно быть не меньше величины

Фиг. 19.



$$(\sqrt{k}+1)^2. \qquad (12)$$

Такимъ образомъ мы имѣемъ напр. слѣдующіе случаи.

Если отношеніе

$$a:b<4,$$

то въ промежуткѣ между кругами A нельзя помѣстить ни одного кружка B.

Если это отношеніе болѣе 4, то можно помѣстить по крайней мѣрѣ 1 кружокъ B между кругами A.

При	$a:b>$	5,828	можно помѣстить	2	кружка
„	„	7,464	„	„	3	„
„	„	9,000	„	„	4	„
„	„	10,472	„	„	5	„
„	„	11,899	„	„	6	„
„	„	13,292	„	„	7	„
„	„	14,657	„	„	8	„
„	„	16,000	„	„	9	„

и т. д.

Пока мы имѣли дѣло съ обыкновеннымъ случаемъ, мы устанавливали наши кружки такъ, что каждый кружокъ касался двухъ другихъ кружковъ. Теперь, въ томъ случаѣ когда можно помѣстить одинъ или нѣсколько кружковъ B между кругами A, не раздвигая ихъ, мы будемъ считать дозволеннымъ и такое распредѣленіе кружковъ, при которомъ кружки B, находящіеся въ промежуткахъ между кругами A касаются только одного изъ нихъ, или даже не касаются ни одного. Такое распредѣленіе не нарушаетъ сплошности линій кружковъ, такъ какъ круги A, между которыми помѣщаются кружки B, все таки касаются одинъ другого. Это замѣчаніе имѣетъ однако значеніе въ томъ только случаѣ, если мы намѣреваемся опредѣлить сжатіе при какомъ угодно произвольномъ распредѣленіи круговъ. Если же мы имѣемъ ввиду только вычисленіе наибольшаго сжатія, то намъ придется распредѣлять кружки B такъ, чтобы они всѣ касались другъ друга или круговъ A.

7. Разсчитаемъ же наименьшее протяженіе, занимаемое смѣсью круговъ A и B въ самомъ общемъ случаѣ, когда кружки B настолько малы, что ихъ можетъ помѣститься k между кругами A, не раздвигая ихъ, но уже не можетъ помѣститься $k+1$.

Если число кружковъ B настолько мало, что ихъ можно помѣстить всѣ въ промежуткахъ между кругами A, то для достиженія наибольшаго сжатія, конечно такъ и слѣдуетъ размѣстить ихъ. Если число круговъ A есть m, то число промежутковъ между ними есть $m-1$, и въ эти промежутки можно помѣстить $k(m-1)$ кружковъ B. Кромѣ того, если число k четное, то можно помѣстить по обоимъ концамъ ряда по $\frac{k}{2}$ кружковъ B, не увеличивая длины ряда, а если число k нечетное, то можно помѣстить по обоимъ концамъ по $\frac{k-1}{2}$ кружковъ В, такъ, что послѣднiе кружки В не будутъ выступать дальше, чѣмъ круги А. Итакъ пока число n кружковъ В меньше чѣмъ mk при k четномъ, или меньше, чѣмъ $mk-1$ при k нечетномъ, можно помѣстить всѣ кружки В въ ряду круговъ А такъ, что сумма протяженiй, занимаемыхъ смѣсью будетъ равна $2ma$, какъ будто кружковъ В вовсе не существуетъ. А такъ какъ въ отдѣльности они занимаютъ протяженiе $2ma+2nb$, то сжатiе будетъ въ этихъ случаяхъ равно

$$c=\frac{nb}{ma+nb}=\frac{qb}{pa+qb}. \qquad (13)$$

Чтобы не удлинять нашего разсужденiя, мы не будемъ останавливаться на отдѣльномъ разсмотрѣнiи случая k четнаго и k нечетнаго, и не будемъ обращать вниманiя на малое измѣненiе величины сжатiя, происходящее отъ различнаго распредѣленiя круговъ по обоимъ концамъ ряда, предполагая, что мы имѣемъ дѣло съ большимъ числомъ круговъ того или другого рода, такъ что длина одного дiаметра не имѣетъ никакого значенiя въ общей длинѣ, занимаемой совокупностью всѣхъ круговъ. Итакъ будемъ говорить, что можно вообще размѣстить mk кружковъ В въ системѣ А, такъ что отъ этого не измѣняется сумма протяженiй, занимаемыхъ кругами.

Но если число n кружковъ В больше чѣмъ mk, то остальные $n-mk$ кружковъ В уже приходится размѣстить въ системѣ А, раздвигая ихъ.

Здѣсь слѣдуетъ различать два случая

$$n<m(k+1) \quad \text{и} \quad n>m(k+1).$$

Въ первомъ случаѣ, распредѣливъ сперва mk кружковъ В, какъ выше указано, группами по k кружковъ между каждыми двумя кругами А, возьмемъ остальные кружки В, число которыхъ $n-mk$ меньше m, и размѣстимъ ихъ по одному въ промежуткахъ между кругами А. Намъ придется для этого раздвинуть эти круги каждый разъ на величину, которая, какъ легко получить изъ геометрическаго построенiя, равна

$$4\sqrt{ab}+2kb-2a. \qquad (14)$$

Такимъ образомъ сумма протяженiй, занимаемыхъ всѣми кругами, послѣ должной установки, будетъ

$$2ma+2(n-mk)(kb+2\sqrt{ab}-a), \qquad (15)$$

а слѣдовательно сжатiе есть

$$\frac{[m(k+1)-n]kb+(n-mk)f}{ma+nb}. \qquad (16)$$

Во второмъ случаѣ, когда $n>m(k+1)$, мы поступимъ слѣдующимъ образомъ. Сперва размѣстимъ первые mk кружковъ, какъ прежде. Потомъ размѣстимъ еще m кружковъ B, по одному въ каждой группѣ кружковъ B. Затѣмъ у насъ остается еще $n-m(k+1)$ кружковъ B, съ которыми мы можемъ поступить какъ намъ угодно. Куда бы мы ихъ ни клали, лишь бы только не нарушать относительнаго распредѣленія уже установленныхъ кружковъ, отъ этого сумма протяженій, занимаемыхъ всею совокупностью кружковъ не измѣнится. Новые кружки во всякомъ случаѣ увеличатъ эту сумму протяженій на величину $2b(n-m(k+1))$, такъ какъ каждый кружокъ, гдѣ бы онъ ни былъ помѣщенъ, раздвинетъ сосѣдніе кружки на полную величину своего діаметра. Итакъ, при $n>m(k+1)$ сумма протяженій смѣси будетъ

$$2ma+2m(kb+2\sqrt{ab}-a)+[n-m(k+1)]2b=2(n-m)b+4m\sqrt{ab}, \quad (17)$$

а слѣдовательно сжатіе есть

$$\frac{mf}{ma+nb}. \quad (18)$$

Весьма интересно замѣтить, что эта формула тождественна съ тою, которую мы вывели выше для кружковъ, отношеніе діаметровъ которыхъ было меньше 4. Такимъ образомъ оказывается, что если число малыхъ кружковъ достаточно велико, а именно, если оно не меньше $m(k+1)$, то формула (7) или (10) справедливы, каковы бы ни были относительные размѣры кружковъ A и B, и сколько бы ни помѣщалось кружковъ B между кругами A, не раздвигая ихъ.

I. A. Клейберъ (Спб.).

(Окончаніе слѣдуетъ).

ОДИНЪ ИЗЪ ВАРІАНТОВЪ РѢШЕНІЯ

кубическаго уравненія.

Изъ тождества

$$(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B})^3=A+B+3\sqrt[3]{AB}(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B})$$

слѣдуетъ, что корни уравненія

$$X^3=A+B+3X\sqrt[3]{AB}$$

выражаются формулой

$$X=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Сравнивая это уравненіе съ общимъ уравненіемъ 3-й степени

$$X^3+pX+q=0,$$

заключаемъ, что

$$-3\sqrt[3]{AB}=p,$$

$$-(A+B)=q.$$

Опредѣляя отсюда A и B и подставляя въ (1), получимъ формулу *Кардана*

$$X=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

М. Попруженко (Оренбургъ).

АРХИМЕДОВЫ ПРИБЛИЖЕНІЯ

для $\sqrt{3}$.

Вопросъ о томъ, какъ древніе извлекали квадратные корни вообще, и какъ Архимедъ въ частности напалъ на свои знаменитыя приближенія для $\sqrt{3}$, все еще служитъ предметомъ спора и, не смотря на многочисленные мемуары и статьи, посвященные изслѣдованію этого предмета, adhuc sub judice lis est. Нѣкоторыя подробности объ этомъ русскій читатель найдетъ въ „Математическомъ Листкѣ" т. I Москва 1880, стр. 271—279.

Такъ какъ до сихъ поръ, сколько намъ извѣстно, не удалось получить обоихъ Архимедовыхъ приближеній, слѣдуя одному и тому же методу извлеченія корня, то указаніе такого метода не лишено нѣкотораго интереса.

Именно, мы имѣемъ

$$(1-\sqrt{3})^9=2^4(265-153\sqrt{3})$$
$$(1-\sqrt{3})^{12}=2^6(1351-780\sqrt{3})$$

гдѣ, очевидно, $^{265}/_{153}<\sqrt{3}$ и $^{1351}/_{780}>\sqrt{3}$.

Но показатели 9 и 12 заключаютъ общаго множителя 3 и наводятъ на мысль, что первымъ приближеніемъ для $\sqrt{3}$ могла служить та величина, которую даетъ $(1-\sqrt{3})^3$, т. е. $^5/_3$. Въ этомъ предположеніи, мы имѣемъ

$$(5-3\sqrt{3})^3=2(265-153\sqrt{3})$$
$$(5-3\sqrt{3})^4=2^2(1351-780\sqrt{3}).$$

Найденныя нами дроби и есть Архимедовы приближенія для $\sqrt{3}$.

Замѣчу, что и другая приближенная величина, знаменитая въ исторіи математики, именно, даваемая для $\sqrt{2}$ священными книгами Индусовъ.

$$1+{}^1/_3+{}^1/_{3\cdot4}-{}^1/_{3\cdot4\cdot34}$$

можетъ быть получена тѣмъ же путемъ.

Имѣемъ

$$(\sqrt{2}-1)^8=(17-12\sqrt{2})^2=289+288-2.12.17\sqrt{2}=2.17^2-1-3.4.34\sqrt{2}$$

откуда

$$\sqrt{2}={}^{17}/_{3\cdot 4}-{}^{1}/_{3\cdot 4\cdot 34}=1+{}^{1}/_{3}+{}^{1}/_{3\cdot 4}-{}^{1}/_{3\cdot 4\cdot 34}.$$

Само собою, я не хочу сказать этой замѣткой, что авторы приближенiй шли непремѣнно этимъ путемъ; но предположенiе, что древнiе извлеченiе корней замѣняли возвышенiемъ въ степени, имѣетъ за себя нѣкоторое вѣроятiе.

Способъ, о которомъ идетъ здѣсь рѣчь, впервые, кажется, былъ указанъ итальянскимъ математикомъ Катальди (1545—1626); изъ новѣйшихъ руководствъ я нашелъ его въ Traité d'Arithmétique par S.-A. Serret, 7-me édition Paris 1887, Note IV.

В. Полтавцевъ (Москва).

ЗАМѢТКА О РАЗЛОЖЕНIИ НА МНОЖИТЕЛЕЙ

трехчленовъ второй степени.

Въ вопросѣ о разложенiи на множителей трехчленовъ второй степени наша учебная алгебраическая литература содержитъ большой пробѣлъ, вслѣдствiе чего такъ трудно бываетъ научить учениковъ производить такiя разложенiя. Вся трудность этихъ преобразованiй состоитъ въ томъ, что ученикъ не получаетъ отъ учебника и преподавателя опредѣленныхъ практическихъ указанiй, теоретически обоснованныхъ. Въ учебникахъ алгебры указывается только одинъ способъ для такихъ разложенiй, да и то примѣнимый не ковсякимъ трехчленамъ, а именно только къ трехчленамъ вида

$$x^2+px+q,$$

гдѣ p, коэффицiентъ второго члена, разлагается на алгебраическую сумму такихъ двухъ рацiональныхъ количествъ, произведенiе которыхъ равняется q. Даже и тутъ указанiе дѣлается такое плохое, что все таки ученики затрудняются такими разложенiями и считаютъ ихъ для себя пыткой.

Во второй части сборника алгебраическихъ задачъ Шапошникова и Вальцова указанъ общiй способъ для разложенiя на множителей трехчленовъ второй степени, когда коэффицiенты a, b и c не подчинены никакимъ ограниченiямъ. Способъ этотъ состоитъ въ томъ, что трехчленъ замѣняется разностью квадратовъ двухъ выраженiй, изъ которыхъ одно двухчленное, а другое одночленное.

Способъ этотъ придуманъ былъ мною же совершенно случайно. Произошло это такимъ образомъ. Однажды одному изъ посредственныхъ учениковъ 8 класса я предложилъ для разложенiя на множителей такой трехчленъ

$$x^2+2x-15.$$

Ученикъ разложилъ его на множителей такъ

$$x^2+2x-15=x^2+2x+1-15-1=(x+1)^2-4^2=(x+1+4)(x+1-4)=$$
$$=(x+5)(x-3).$$

На мой вопросъ, откуда онъ узналъ такой способъ, я получилъ отвѣтъ, что раньше ни отъ кого объ этомъ ничего не слыхалъ и поступилъ такъ потому, что не съумѣлъ здѣсь примѣнить общеизвѣстный способъ. Этого примѣра для меня было достаточно, чтобъ распространить примѣненіе новаго способа на всѣ случаи. Тотчасъ же ученикамъ было показано, какъ примѣнять этотъ способъ къ разложенію всевозможныхъ трехчленовъ 2-ой степени. Такъ какъ сборникъ алг. зад. Ш—кова и Вальцова можетъ быть нѣкоторымъ читателямъ незнакомъ, то я считаю нужнымъ привести различные примѣры подобныхъ разложеній.

Примѣръ I.

$$x^2+6x+3=x^2+6x+9+3-9=(x+3)^2-6=(x+3)^2-(\sqrt{6})^2=$$
$$=(x+3+\sqrt{6})(x+3-\sqrt{6}).$$

Примѣръ II.

$$x^2+3x+2=(x+{}^3/_2)^2-{}^1/_4=(x+{}^3/_2)^2-({}^1/_2)^2=(x+{}^3/_2+{}^1/_2)(x+{}^3/_2-{}^1/_2)=$$
$$=(x+2)(x+1).$$

Примѣръ III.

$$2x^2+7x+3={}^1/_8(16x^2+56x+24)={}^1/_8[(4x+7)^2-5^2]={}^1/_8(4x+12)(4x+2)=$$
$$=(x+3)(2x+1).$$

Примѣръ IV.

$$x^2-3x+5=x^2-3x+{}^9/_4+5-{}^9/_4=(x-{}^3/_2)^2+{}^{11}/_4=(x-{}^3/_2)^2-\left(\frac{\sqrt{-11}}{2}\right)^2=$$
$$=\left(x-{}^3/_2+\frac{\sqrt{-11}}{2}\right)\cdot\left(x-{}^3/_2-\frac{\sqrt{-11}}{2}\right).$$

Идея этого способа можетъ быть съ успѣхомъ примѣнена къ выводу формулъ для рѣшенія квадратныхъ уравненій. Привожу здѣсь для краткости только одни преобразованія.

$$\text{(I)}\qquad x^2+px+q=0;\quad x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=0;\quad \left(x+\frac{p}{2}\right)^2-$$
$$-\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)^2=0;\quad \left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)=0,$$

откуда

$$x+\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}=0 \text{ и } x+\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}=0;$$

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \text{ и } x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

(II) $$ax^2+bx+c=0, \qquad 4a^2x^2+4abx^2+4ac=0;$$

$$(2ax+b)^2-b^2+4ac=(2ax+b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2=0$$

и т. д. подобно предыдущему.

На сколько этотъ способъ вывода формулъ вразумителенъ, всякiй преподаватель математики, вѣроятно, согласится со мной безъ возраженiй, между тѣмъ въ учебникахъ алгебры онъ отсутствуетъ. Кромѣ этого общаго способа я придумалъ другой болѣе простой, но примѣнимый только къ такимъ трехчленамъ второй степени, которые представляютъ собой произведенiе двухъ линейныхъ двучленовъ съ рацiональными коэффицiентами, и составляющiй распространенiе общеизвѣстнаго способа.

Не указывая пока теоретическихъ основанiй вновь предлагаемаго мною способа, покажу сначала примѣненiе его на двухъ типическихъ примѣрахъ.

Примѣръ I. Данъ для разложенiя на множителей трехчленъ

$$12x^2+23x+10.$$

Разлагаемъ среднiй коэффицiентъ на такiя два слагаемыя, чтобъ произведенiе ихъ равнялось произведенiю крайнихъ коэффицiентовъ. Сдѣлать это можно такъ: *взявъ произведенiе крайнихъ коэффицiентовъ* 12 и 10, т. е. 120, *составляемъ всевозможныя разложенiя этого числа на два производителя.* Получаемъ:

$$120=1.120=2.60=3.40=4.30=5.24=6.20=8.15=10.12.$$

Затѣмъ *изъ этихъ парныхъ произведенiй выбираемъ то, гдѣ сумма производителей равна среднему коэффицiенту* 23. Такимъ разложенiемъ здѣсь оказывается предпослѣднее 8.15. Далѣе пишемъ такъ

$$12x^2+23x+10=12x^2+15x+8x+10=3x(4x+5)+2(4x+5)=$$
$$=(3x+2)(4x+5).$$

Примѣръ II. Данъ для разложенiя на множителей трехчленъ

$$6x^2+7x-5.$$

Разлагаемъ $7x$ на такiе два члена, чтобы произведенiе ихъ коэффицiентовъ равнялось 6.—5 т. е.—30. *Взявъ абсолютную величину этого произведенiя, разлагаемъ ее на два производителя.* Получаемъ:

$$30=1.30=2.15=3.10=5.6.$$

Затѣмъ изъ этихъ произведенiй выбираемъ то, гдѣ разность производителей равна среднему коэффицiенту 7.

Такимъ разложеніемъ оказывается предпослѣднее 3.10. Принимая во вниманіе вышеуказанное, замѣчаемъ, что $+7x$ слѣдуетъ замѣнить двумя одночленами $+10x$ и $-3x$. Итакъ пишемъ

$$6x^2+7x-5=6x^2+10x-3x-5=2x(3x+5)-(3x+5)=(2x-1)(3x+5).$$

Такимъ образомъ задача разложенія здѣсь разрѣшается на основаніи прямыхъ указаній и не требуетъ отъ учащихся особой находчивости, такъ какъ разложеніе средняго члена дѣлается сознательно.

Тотъ же самый пріемъ и съ тѣми же указаніями полезно примѣнять и къ разложенію трехчленовъ подобныхъ такому:

$$x^2-21x-72 \text{ т. е. } 1.x^2-21x-72.$$

Теоретическое основаніе этого способа заключается въ разсмотрѣніи такой формулы сокращеннаго умноженія:

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd,$$

которая при a и c равныхъ единицѣ обращается въ общеупотребительную

$$(x+b)(x+d)=x^2+(b+d)x+bd.$$

Послѣднему способу разложеній я обучаю учениковъ 4-го класса, а ученикамъ 5-го класса показываю общій способъ, изложенный мною раньше.

Ученикамъ же 8-го класса кромѣ того я указываю свойства ряда всѣхъ дѣлителей составного числа (см. замѣтку Киричинскаго № 78 „Вѣстника Оп. Физики и Эл. Мат.“)

Дополненіе. Кромѣ способовъ вышеуказанныхъ я придумалъ еще одинъ способъ, интересный только въ теоретическомъ отношеніи.

Пусть данъ для разложенія трехчленъ

$$10x^2+17x+3.$$

Нахожу коэффиціенты слагаемыхъ, на которыя слѣдуетъ разложить средній членъ, по выраженію

$$\frac{17\pm\sqrt{17^2-4.10.3}}{2}.$$

что даетъ 15 и 2. Такимъ образомъ имѣю

$$10x^2+17x+3=10x^2+15x+2x+3=5x(2x+3)+(2x+3)=(5x+1)(2x+3).$$

Н. Вальцовъ (Коломна).

Отчеты о засѣданіяхъ ученыхъ обществъ.

Засѣданіе Мат. Отд. Новор. Общ. Естеств. по вопросамъ элементарной математики и физики 30 ноября 1890 года.

В. В. Преображенскій сдѣлалъ сообщеніе „о преподаваніи геометріи“, въ которомъ коснулся двухъ сторонъ: стройности системы элементарной геометріи и естественности доказательствъ. Указывая на распространенное мнѣніе объ отсутствіи ясной системы въ курсахъ геометріи, референтъ перечислилъ понятія, входящія въ составъ геометріи, каковы: прямая, уголъ, кругъ и пр.; разобралъ системы Буссе и Давидова и показалъ, что обѣ системы построены на различныхъ комбинаціяхъ простыхъ понятій между собою съ одной стороны въ отношеніи равенства и неравенства, съ другой стороны въ отношеніи пропорціональности, и не заслуживаютъ вышеприведеннаго упрека. Далѣе, переходя къ вопросу о естественности доказательствъ, референтъ старался показать, что въ предѣлахъ элементарной геометріи во всѣхъ доказательствахъ можно отвѣчать не только на вопросъ почему справедливо то или другое утвержденіе, но также на вопросъ, для чего дѣлается то или другое построеніе. Для этой цѣли референтъ видоизмѣнялъ нѣкоторыя доказательства, другія же замѣнялъ новыми. Референтъ предложилъ видоизмѣненныя доказательства пропорціональности величинъ въ случаѣ ихъ несоизмѣримости и теоремы о плоскихъ углахъ въ трехгранномъ углѣ,—и новое доказательство теоремы о внѣшнемъ углѣ. Затѣмъ, по желанію присутствовавшихъ, референтомъ были доказаны теоремы Пиѳагора и Птоломея и нѣкоторыя другія. Желая дать возможность находить естественныя доказательства теоремъ, референтъ классифицировалъ теоремы геометріи, раздѣляя ихъ на теоремы о величинѣ и теоремы о положеніи; теоремы о равенствѣ и теоремы о неравенствѣ и пр. Приступая къ доказательству должно, руководствуясь этой классификаціей, избрать теорему, на которой основано доказательство, за ней другую и т. д.

Изъ обсужденія этого сообщенія выяснилось, что собраніе, признавая всю важность высказанныхъ взглядовъ, находитъ, что въ преподаваніи можно руководствоваться ими лишь отчасти, съ одной стороны въ виду значительной потери времени, необходимаго для добавочныхъ разъясненій при доказательствахъ, съ другой стороны въ виду того, что эти разъясненія иногда въ своей совокупности мало доступны учащимся. Тѣмъ не менѣе, если и невозможно ими пользоваться систематически, то они могутъ быть очень полезны для замѣны нѣкоторыхъ доказательствъ болѣе естественными и постепеннаго ознакомленія учащагося съ пріемомъ нахожденія такихъ доказательствъ. *И. Слешинскій* (Одесса).

Казанское Физико-Матем. Общество *) **1-ое засѣданіе** 28-го октября 1890 г. Былъ прочитанъ „Отчетъ о дѣятельности Секціи Физ.-Мат. наукъ Казанскаго Общества Естествоиспытателей" за десять лѣтъ ея существованія (1880—1890). Были сдѣланы сообщенія:

1) *А. В. Васильевымъ*: „Изъ исторіи и философіи понятія о цѣломъ положительномъ числѣ".

2) *Я. П. Корнухъ-Троцкимъ:* „О падающихъ звѣздахъ".

Были произведены выборы предсѣдателя **), товарища предсѣдателя и членовъ совѣта Физ.-Мат. Общества на двухлѣтіе 1891—1892 г. и ревизіонной коммисіи на 1891 г.

2-ое очередное засѣданіе 3-го ноября 1890 г. Были сдѣланы сообщенія:

1) *И. П. Долбни:* „Объ интегрированіи посредствомъ эллиптическихъ функцій".

---

*) О преобразованіи „Секціи Физ.-Мат. наукъ Каз. Общества Естествоиспытателей" въ особое „Физико-Математическое Общество" см. въ отдѣлѣ „Разныхъ извѣстій" въ № 105 „Вѣстника" стр. 174.

**) Избранъ проф. А. В. Васильевъ, бывшій предсѣдатель Секціи. Секретаремъ избранъ М. С. Сегель, бывшій секретать Секціи. Другіе результаты выборовъ намъ неизвѣстны.

2) *Н. П. Казанкина*: „О подъемахъ водныхъ растворовъ въ капиллярныхъ трубкахъ“ *)

3-ье очередное засѣданіе 1-го декабря 1890 г.

Текущія дѣла.

I. Утверждена программа „Извѣстій Физико-Математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ“ въ слѣдующемъ видѣ:

„Извѣстія“, издаваемыя подъ редакціей Совѣта Общества, выходятъ выпусками отъ 4-хъ до 6-и въ годъ, изъ которыхъ къ концу года составляется томъ не менѣе 20 листовъ.

„Извѣстія“ раздѣляются на два отдѣла.

Въ первомъ отдѣлѣ помѣщаются научныя и педагогическія статьи изъ области физико-математическихъ наукъ, читанныя въ засѣданіяхъ общества.

Второй отдѣлъ содержитъ:

a) Лѣтопись Физ. М. Общ. (протоколы засѣданій, извлеченія изъ протоколовъ засѣданій Совѣта Общества, годичные отчеты, списки книгъ и періодическихъ изданій, поступающихъ въ библіотеку Общества и т. п.).

b) Библіографическіе отзывы и замѣтки о вновь появляющихся въ Россіи и заграницей сочиненіяхъ по Физико-Матем. наукамъ. Научныя новости.

c) Задачи и вопросы, предлагаемые для рѣшенія, —и рѣшенія ихъ.

Въ „Извѣстіяхъ“ могутъ быть съ разрѣшенія Совѣта помѣщаемы объявленія библіографическія и другія, имѣющія отношеніе къ Физ.-Мат. Наукамъ.

Члены Ф.-М. О. пожизненные, а равно и уплатившіе установленный членскій взносъ за предыдущій годъ, получаютъ „Извѣстія“ безплатно.

Для постороннихъ лицъ подписная цѣна на „Извѣстія“ въ годъ 3 р. (съ дост. и пересылкой).

II. По поводу имѣющаго исполниться 22 окт. 1893 г. столѣтія со дня рожденія Н. И. Лобачевскаго постановлено ходатайствовать о разрѣшеніи подписки въ Россіи и заграницей съ цѣлью составленія капитала для увѣковѣченія памяти Н. И. Лобачевскаго,—съ предоставленіемъ Обществу права дать собранной суммѣ—сообразно ея величинѣ—то или другое назначеніе (учрежденіе преміи, постановки памятника и т. д.). Кромѣ того поручено Совѣту обсудить вопросъ объ изданіи алгебраическихъ сочиненій Н. И. Л. и принять мѣры къ собранію біографическихъ данныхъ о покойномъ геометрѣ.

III. Сообщенія.

1) Проф. *Н. П. Слугиновъ* сдѣлалъ предварительное сообщеніе объ отвердѣваніи и температурѣ плавленія глицерина; охлаждая жидкій глицеринъ до —55°C., докладчикъ получалъ очень вязкую густую жидкость, но не достигъ отвердѣванія; жидкимъ оставался также глицеринъ, охлажденный смѣсью поваренной соли со льдомъ и подверженный давленію до 225 атм.; при очень низкихъ температурахъ (—46°C.) жидкій глицеринъ - послѣ опусканія въ него кусочка кристаллическаго глицерина—затвердѣваетъ труднѣе, чѣмъ это бываетъ при сравнительно высокихъ темпе-

*) О первыхъ двухъ очередныхъ собраніяхъ Общества болѣе подробныхъ отчетовъ въ нашу редакцію не доставлено.

ратурахъ. Температура плавленія кристаллическаго глицерина найдена равною $14^{0},85$С. Опредѣлены температуры затвердѣванія смѣсей глицерина съ водой.

2) *Н. П. Казанкинъ* сдѣлалъ предварительное сообщеніе о примѣненіи психрометра къ опредѣленію молекулярныхъ вѣсовъ; наблюдая показанія двухъ термометровъ, шарики которыхъ смочены—одинъ растворомъ, другой растворителемъ, и комбинируя примѣненную къ этому случаю обыкновенную психрометрическую формулу съ формулой, выражающей законъ Рауля,—авторъ даетъ способъ опредѣлять молекулярные вѣса веществъ, растворимыхъ въ жидкостяхъ, упругости паровъ которыхъ для различныхъ температуръ извѣстны.

3) *В. В. Куриловъ* сообщилъ о дѣйствіи электрическаго тока на смѣсь сѣрной кислоты съ водой; авторомъ добытъ тотъ новый фактъ, что наибольшее полученіе перекиси водорода имѣетъ мѣсто при разложеніи растворовъ сѣрной кислоты, содержащихъ 2, 5 и 150 частей воды, т. е. какъ разъ въ тѣхъ растворахъ, которые считаются (Менделѣевъ) прочными соединеніями (гидраты сѣрной кислоты).

Секретарь Ф.-М. О. при Каз. Ун. *М. Сегель.*

ЗАДАЧИ.

№ 117. Въ Сборникѣ Ариѳметическихъ задачъ Евтушевскаго (во 2-й части за № 798) находимъ слѣдующую задачу:

„Извозчика наняли перевезти 100 зеркалъ съ условіемъ: за доставку на мѣсто каждаго зеркала въ цѣлости заплатить 2,365 руб., а за каждое разбитое зеркало вычесть съ него 25,4 руб.; при перевозкѣ извозчикъ разбилъ нѣсколько зеркалъ и при разсчетѣ получилъ только 134,9 руб. Сколько зеркалъ было разбито при перевозкѣ.“

Въ отвѣтѣ сказано 4. Вѣренъ ли отвѣтъ? Какъ надо истолковать или измѣнить задачу, чтобы этотъ отвѣтъ былъ вѣренъ?

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 118. Опредѣлить сумму n членовъ

$$a^p+b^p+c^p+\ldots\ldots+u^p+v^p,$$

если a, b, c,....u, v образуютъ геометрическую прогрессію, знаменатель которой равенъ q. *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ).

№ 119. Рѣшить систему

$$x^2+y^2=a$$

$$z^2+u^2=b$$

$$xy+zu=c$$

$$xu+yz=d.$$

(Заимств.) *А. Гольденбергъ* (Спб.).

№ 120. Рѣшить безъ помощи тригонометріи слѣдующую задачу (изъ „Прямол. Тригонометріи“ Пржевальскаго, изд. 3-ье, стр. 207 за № 18):

„На горизонтальной поверхности стоятъ двѣ башни AB и CD на разстояніи a. Если станемъ поочередно у подошвы каждой изъ нихъ, то найдемъ, что угловая высота одной будетъ вдвое болѣе другой; а если станемъ въ срединѣ разстоянія между башнями, то угловая высота одной будетъ служить дополненіемъ до прямого угла угловой высотѣ другой башни. Найти высоты башень".

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 121. Дана окружность и прямая внѣ ея. Изъ центра на прямую опустимъ перпендикуляръ и, принявъ его основаніе за центръ, опишемъ окружность, пересѣкающую данную подъ прямымъ угломъ. Пусть эта вторая окружность пересѣкаетъ перпендикуляръ, опущенный изъ центра данной окружности на прямую, въ двухъ точкахъ M и N. Показать, что всякая третья окружность, проходящая черезъ тѣ-же точки M и N, будетъ пересѣкать данную окружность подъ прямымъ угломъ.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 122. Даны точки A и B и между ними двѣ параллели CD и EF. Провести сѣкущія AXY и BZX (черезъ X, Y, Z обозначены точки пересѣченія съ параллелями) такъ, чтобы ихъ отрѣзки между параллелями XY и ZX были равны. *И. Александровъ* (Тамбовъ).

№ 123. Показать, что квадратъ какой либо стороны гармоническаго четыреугольника равенъ удвоенному произведенію медіанъ *), выходящихъ изъ концевъ этой стороны.

И. Пламеневскій (Темиръ-ханъ-Шура).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 9 (2-ой серіи). Дана окружность діаметра AB. Изъ нѣкоторой точки діаметра C тѣмъ-же радіусомъ ($=\frac{1}{2}AB$) зачеркнута дуга, пересѣкающая окружность въ D. Черезъ D и C проведена хорда DE, длина которой оказалась $=\frac{7}{8}AB$. Спрашивается: 1) въ какомъ отношеніи дѣлится діаметръ AB точкою C и 2) что изображаетъ собою отрѣзокъ CE?

Извѣстно, что

$$AC.CB=DC.CE$$

или

$$AC.CB=\frac{1}{2}d\left(\frac{7}{8}d-\frac{1}{2}d\right),$$

гдѣ d=діаметру AB, отсюда

$$AC.CB=\frac{3}{16}d^2;$$

но

$$AC+CB=d.$$

---

*) См. зад. № 101 въ № 101 „Вѣстника".

Слѣдовательно АС и СВ суть корни уравненія

$$x^2-dx+{}^3/_{16}d^2=0.$$

Рѣшивъ это уравненіе, найдемъ

$$AC={}^1/_4d,\quad CB={}^3/_4d,$$

а потому отношеніе

$$AC:CB=1:3.$$

Отрѣзокъ СЕ есть средняя гармоническая линій АС и СВ, такъ какъ

$$CE={}^3/_8AB=\frac{2AC.CB}{AC+CB},$$

А. Лентовскій (Москва), *Н. Волковъ* (Спб.), *С. Карновичъ*, *В. Форсель* и *А. Кочанъ* (Воронежъ), *П. Кавтардзе* (Воспитанникъ Пажескаго Е. И. В. корпуса). Ученики: Урюп. р. уч. (7) *П. У—ъ*, Курск. г. (8) *А. П.*, (6) *Л. Л.*, 1-ой Спб. г. (8) *К. К.*, Камен.-Под. г. (8) *Я. М.*, Воронеж. к. к. (6) *А. С.*

№ 32 (2-ой серіи). Построить треугольникъ по даннымъ: высотѣ, биссектору и медіанѣ, проведеннымъ изъ одной вершины.

Проведемъ прямую АВ и, на разстояніи равномъ высотѣ, прямую CD || АВ. Изъ точки F, на прямой CD, проводимъ прямыя FM и FK, соотвѣтственно равныя даннымъ медіанѣ и биссектору, М и К суть точки пересѣченія прямыхъ FM и FK съ прямою АВ. Если около △-ка описанъ кругъ, то биссекторъ угла дѣлитъ пополамъ дугу окружности, соотвѣтствующую этому углу. Продолжимъ биссекторъ FK до пересѣченія въ L съ перпендикуляромъ, возставленнымъ къ АВ въ точкѣ М. Точка L будетъ принадлежать окружности, описанной около искомаго △-ка. Возставивъ въ срединѣ FL перпендикуляръ и продоливъ его до пересѣченія съ ML въ точкѣ O, найдемъ центръ описанной окружности, которая, пересѣкаясь съ АВ, опредѣлитъ остальныя двѣ вершины искомаго △-ка.

С. Кричевскій (Ромны), *Н. Николаевъ* (Пенза), *Л. Апте* (Кіевъ), *И. Соляниковъ* (Полтава), *С. Блажко* (Хотимскъ), *Н. Волковъ* (Спб.), *И. Шамаевъ* (Новочеркасскъ). Ученики: 2-ой Тифлис. г. (8) *М. А.*, 1-ой Кіевской г. (6) *И. Б.*

№ 182. Найти общее выраженіе пяти цѣлыхъ чиселъ a, b, c, α и β, такъ чтобы выраженіе

$$(x+a)(x+b)(x+c)-x(x+\alpha)(x+\beta)$$

не зависѣло отъ перемѣнной величины x.

Такъ какъ данное выраженіе равно

$$(a+b+c-\alpha-\beta)x^2+(ab+bc+ac-\alpha\beta)x+abc,$$

то, чтобы оно не зависѣло отъ x, должно быть

$$a+b+c=\alpha+\beta$$

и

$$ab+bc+ac=\alpha\beta,$$

отсюда

$$\alpha=\frac{a+b+c}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ac)}{4}}.$$

Чтобы α и β были цѣлыми дѣйствительными числами, подкоренная величина необходимо должна быть равна m^2. Опредѣляя c въ функціи a, b и m, имѣемъ

$$c=a+b\pm\sqrt{4(ab+m^2)};$$

c будетъ цѣлымъ числомъ при

$$ab+m^2=n^2,$$

т. е. когда

$$ab=(n+m)(n-m).$$

Если положимъ

$$a=n+m \quad \text{и} \quad b=n-m,$$

то

$$c=4n, \quad \alpha=3n+m \quad \text{и} \quad \beta=3n-m,$$

гдѣ m и n два произвольныя цѣлыя числа.

Если взять для c второе рѣшеніе

$$c=a+b-\sqrt{4(ab+m^2)},$$

то α и β соотвѣтственно равны a и b.

Н. Никулицевъ (См.), *С. Шатуновскій* (Кам.-Под.), *В. Каганъ* (Одесса), *С. Блажко* (Москва), *Н. Паатовъ* (Тифлисъ).

№ 230. Показать, что двучленъ $3a^4+1$ есть сумма трехъ квадратовъ, и—какъ слѣдствіе—что число вида $3^{4n+1}+1$ есть тоже сумма трехъ квадратовъ.

Въ двучленѣ $3a^4+1$ прибавимъ и вычтемъ $2a^3$ и $2a^2$, тогда

$$3a^4+1=a^4+2a^3+a^2+a^4-2a^3+a^2+a^4-2a^2+1=[a(a+1)]^2+[a(a-1)]^2+$$
$$+[(a+1)(a-1)]^2,$$

что и требовалось доказать.

Если положимъ $a=3^n$, то докажемъ второй вопросъ задачи, ибо въ такомъ случаѣ

$$3a^4+1=3.3^{4n}+1=3^{4n+1}.$$

Напр.

$$3^{4\cdot1+1}+1=244=12^2+8^2+6^2.$$

С. Шохоръ-Троцкій (Спб.), *С. Блажко* (Смоленскъ), *М. Долговъ* (Воронежъ). Ученики: Ворон. к. к. (6) *А. П.*, Астрх. г. (8) *И. К.*

№ 537. На окружности даны три точки; вписать въ нее треугольникъ такъ, чтобы продолженныя его высоты проходили черезъ эти точки. Сколько рѣшеній допускаетъ задача?

Обозначимъ точки, данныя на окружности, черезъ A, B, C. Соединяемъ вершины $\triangle$-ка ABC съ центромъ I вписаннаго въ него круга. Пусть прямыя AI, BI, CI пересѣкаютъ окружность въ точкахъ A', B', C'; $\triangle$-къ $A'B'C'$ будетъ искомый. Для доказательства будемъ обозначать углы $\triangle$-ка ABC черезъ A, B, C. Вписанные углы $AA'B'$ и ABB' равны, такъ какъ они опираются на одну и ту же дугу AB'. Значитъ

$$\angle AA'B'=\frac{B}{2},\quad \angle BB'A'=\frac{A}{2},\quad \angle BB'C'=\frac{C}{2}$$

и

$$\angle A'B'C'=\frac{A}{2}+\frac{C}{2}.$$

Уголъ между прямыми AA' и $B'C'$ равенъ суммѣ угловъ $AA'B'$ и $A'B'C'$ или

$$\frac{B}{2}+\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right),$$

т. е. прямому углу. Точно также докажемъ, что прямыя BB' и CC' соотвѣтственно перпендикулярны къ прямымъ $C'A'$ и $A'B'$.

Соединимъ вершины $\triangle$-ка ABC съ центромъ I_a внѣ-вписаннаго круга, касающагося стороны BC и продоленій сторонъ CA и AB. Пусть прямыя AI_a, BI_a, CI_a пересѣкаютъ данную окружность въ точкахъ A'', B'', C''; $\triangle$-къ $A''B''C''$ также удовлетворяетъ условіямъ задачи. Для доказательства надо замѣтить, что

$$\angle AA''B''=d-\frac{B}{2},\quad \angle AA''C''=d-\frac{C}{2}.$$

$$\angle A''B''C''=\angle AI_aC=\frac{B}{2},\quad \angle A''C''B''=AI_aB=\frac{C}{2}.$$

Такимъ образомъ задача допускаетъ четыре рѣшенія.

В. Ивановъ (Златополь), *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ). Ученики: Курск. г. (7) *В. Х.*, 1-й Кіевск. г. (7) *А. С.*, Кіевск. р. уч. (7) *А. Ш.*

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Кіевъ, 4 Января 1891 г.
Типо-литографія Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°.

Обложка
ищется

Обложка
ищется